**УБАЕВА ЖАНАР КАРТБАЕВНА**

# ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ТИПА КЛАУЗЕНА

## АННОТАЦИЯ

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)**
**по специальности 6D060100 — Математика**

**Актуальность темы исследования.** Исследование посвящено новым эффективным методам существования решений неоднородных обобщенных гипергеометрических уравнений высокого порядка и систем объединенных уравнений. Методы, изучающие существование решений гипергеометрических уравнений высшего порядка и неоднородных систем нелинейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядка, не рассматривались в более ранних работах. Из такого важного применения следует необходимость всестороннего изучения проблем существования решений неоднородных обобщенных гипергеометрических уравнений и систем уравнений в общем случае.

Специальные функции, встречающиеся в различных задачах математической физики, являются частными случаями гипергеометрической функции Гаусса $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$. Если правая часть неоднородного уравнения Бесселя представлена в виде степенных или линейных функций, то решения неоднородного уравнения имеют специальные функции Ломмеля, Струве, Ангера, Вебера. В монографии А.В. Бэбистра исследованы уравнения неоднородного гипергеометрического типа, решения которых представляют эти и другие известные специальные функции. Монография рассматривает неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, но не имеет метода для их всестороннего изучения.

В последнее время, в связи с исследованием многомерных вырожденных уравнений, в различных задачах все чаще стали использоваться обобщенные гипергеометрические уравнения и системы третьего и высшего порядков. В этих работах изучается поиск решений однородных уравнений, неоднородные случаи не были рассмотрены.

Первым примером обобщенной гипергеометрической функции является функция Клаузена (1828), зависящая от пяти параметров. Но изучение свойств функции Клаузена, которая является решением простого дифференциального уравнения третьего порядка, не достигло своей степени. Поиск решений неоднородных дифференциальных уравнений Клаузена, используемых, в частности, в задачах науки и техники, до конца не изучен. Не рассмотрены также особенности построения решений вырожденных уравнений, получаемых путем перехода от уравнения Клаузена к пределу. Приведенная ситуация может быть выражена и для обобщенных гипергеометрических систем двух частных производных дифференциальных уравнений.

**Цель исследования.** Изучение существования решения системы типа Клаузена, поиск эффективных методов построения неоднородных уравнений и решений системы типа Клаузена и распространение этих методов на системы уравнений, решения которых являются обобщенными гипергеометрическими функциями с несколькими переменными. Разработать теорию построения нормальных, нормально-регулярных решений вблизи особых кривых с использованием эффективных методов.

**Задачи исследования:**

а) показать особенности построения решений неоднородных обобщенных дифференциальных уравнений и систем состоящих из двух частных производных дифференциальных уравнений, с использованием неопределенных коэффициентов и усовершенствованных методов Фробениуса-Латышевой, классифицировать отличительные точки и кривые, классификация особых точек и кривых;

б) установить эффективные методы построения решений неоднородного уравнения Клаузена в окрестности особых точек $x=0$ и $x=\infty$;

в) установить эффективный метод решений неоднородного вырожденного уравнения Клаузена;

г) показать особенности построения решений систем, состоящих из двух в частных производных дифференциальных уравнений третьего порядка вблизи регулярных и иррегулярных кривых;

д)показать возможности использования обобщенных гипергеометрических функций при построении решений системы уравнений обобщенного гипергеометрического типа в виде многомерного ортогонального многочлена;

е) построение общего решения неоднородной простой системы типа Клаузена и изучение свойств решения;

ж) изучение особенностей построения решений неоднородных основных и вырожденных систем Клаузена;

з) исследование существования нормально-регулярного решения вырожденной системы, полученного путем перехода от системы Лауричеллы к пределу и изучение их свойств;

и) показать особенности связи между функцией Художникова и нормально-регулярными решениями.

**Объект исследования**. Неоднородные обобщенные уравнения гипергеометрического типа высшего порядка и система дифференциальных уравнений в частных производных второго и третьего порядка, а также их частные случаи в виде уравнения Клаузена и системы Клаузена.

**Методы исследования.** Основным методом, использованным для построения эффективных алгоритмов нормальных, нормально-регулярных и конечных решений систем дифференциальных уравнений с частными производными, состоящими из двух или трех уравнений, является усовершенствованный метод Фробениуса - Латышевой. Также применялись усовершенствованные и модифицированные методы П. Аппеля, В. Вильчинского, Ш. Эрмита, Э. Айнса, А. Эрдейи, К. Я. Латышевой для случаев систем дифференциальных уравнений в частных производных, применяемых в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При изучении специальных функций с несколькими переменными и их систем, решением которых является ортогональный многочлен, были использованы работы Э. Куммера, Ж. Кампе де Ферье, П. Аппеля, Ш. Эрмита, М.Лауричеллы, В. И. Художникова, Клаузена.

**Предмет исследования.** Создание эффективного метода нахождения решений неоднородного обобщенного гипергеометрического уравнения высшего порядка и системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка в виде обобщенных гипергеометрических функций, обоснование условий существования решений.

**Научная новизна исследования:**

а) методы Фробениуса-Латышевой и метод неопределенных коэффициентов использовались для изучения ранее не рассмотренных систем неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка;

б) найдены условия существования нормального и нормально-регулярного решений системы неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка и разработаны необходимые эффективные методы их построения;

в) выявлены особенности построения решений неоднородной системы простого типа Клаузена вблизи особых кривых и определены свойства соответствующих решений;

г) определены условия существования решений неоднородной основной и вырожденной системы Клаузена и показаны эффективные методы построения решений;

д) теоремы о существовании нормально-регулярного решения вырожденной системы Художникова путем перехода от системы Лауричеллы к пределу доказаны для общего случая переменной $n$.

е) выявлены связи между функцией Художникова и построенными нормально-регулярными решениями.

**На защиту выносятся следующие результаты:**

- построение решений неоднородных обобщенных дифференциальных уравнений и системы дифференциальных уравнений в частных производных методом неопределенных коэффициентов по особенностям правых частей;

- применение метода Фробениуса-Латышевой к исследованию систем в дифференциальных уравнениях в частных производных третьего порядка;
- построение решений обобщенной системы уравнений третьего порядка по методу Фробениуса-Латышевой в окрестности различных особых кривых;
- определение конкретных видов уравнений и систем уравнений, решения которых являются обобщенными гипергеометрическими функциями и построение решений методом Кампе де Ферье;
- необходимые условия существования нормальных и нормально-регулярных решений вблизи сингулярных кривых $(0,0)$ и $(\infty,\infty)$ системы однородных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка;
- построение решений неоднородных простых, основных и вырожденных систем Клаузена в виде обобщенных гипергеометрических функций;
- установление связей между нормально-регулярным решением систем состоящих из вырожденных двух, трех и $n$ уравнений, полученных методом Фробениуса-Латышевой и функцией Художникова.

**Точность и обоснованность полученных результатов.** В диссертации широко используются методы и результаты теории систем дифференциальных уравнений и самостоятельно выводимых дифференциальных уравнений, решениями которых являются специальные функции одной и многих переменных. Научные результаты формулируются в виде лемм и теорем. Значимость, достоверность результатов исследований, а также полученные результаты обобщены в публикациях в востребованных журналах.

**Теоретическая и практическая значимость исследования.** Теоретическая оценка результатов, полученных в диссертационной работе, отличается развитием аналитической теории системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка и нахождением решений рассмотренных задач в виде обобщенных гипергеометрических функций. Поэтому практическая значимость диссертационной работы заключается в том, что она занимает важное место в теории многомерных специальных функций и находит применение в исследованиях различных задач математической физики, электродинамики, теории многомерных уравнений, радиоэлектроники и теории антенн.

Эти полученные новшества вполне могут быть импульсом для дальнейшего развития теории и могут служить основой для разработки элективных курсов для студентов, магистрантов и докторантов, физико-математических и инженерных специальностей.

**Личный вклад докторанта** заключается в том, что все результаты, приведенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Участие соавторов и научных консультантов заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

**Апробация полученных результатов.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах, конференциях:

- традиционная международная апрельская научная конференция (Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан, 3-5 апреля 2019г.);

- международная научная конференция «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики» (Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан, 12-14 июня 2019 г.);

- «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019): международная конференция, посвященная 10-летию со дня выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal»(Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан, 16-19 октября 2019 г.);

- научный семинар «Комплексный анализ и его применение», Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикская Республика (руководитель семинара- академик, д.ф.-м.н., Н.Раджабов, ноябрь 2020г.);

- международная научно-практическая конференция «Проблемы фундаментальной и прикладной математики на современном этапе» Казахстанский филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Нур-Султан, Казахстан, 4 июня 2021г.);

- международная научная конференция «Нелокальные пограничные задачи и связанные с ними проблемы в математической биологии, информатике и физике» (Нальчик, Россия, 5-9 декабря 2021 г.);

- IX международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры» Актобе, Казахстан, 24-28 мая 2022 г.);

- научный семинар «Проблемы прикладной математики и информатики», кафедра математики Актюбинского регионального университета им.К. Жубанова, Актобе, Казахстан (руководитель семинара – д. ф.-м. н., профессор Ж. А. Сартабанов).

**Публикации.** Основные научные заключения по теме диссертации опубликованы в 23 научных работах. Из них 2 статьи опубликованы в рейтинговых научных журналах, индексированных в базе данных Scopus, 3 статьи - в изданиях, рекомендованных КОКСНВО МНВО РК, 1 статья - в научном журнале РК, 1 статья - в журнале на базе научного цитирования российского индекса, 16 статей - в материалах международных научных конференций в Казахстане и странах ближнего зарубежья.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Выводы, формулы пронумерованы цифрами, состоящими из двух индексов. Первый индекс представляет собой номер раздела, второй индекс представляет собой номер формулировки, формулы в данном подразделе. Общий объем диссертации составляет 127 страниц. Список использованной литературы состоит из 117 наименований.

**В первом разделе** работы рассматриваются возможности построения решений в виде обобщенных гипергеометрических функций

$$x^{B+1}\left(\mu_{B+1}-\lambda_{B+1}x^k\right)\frac{d^{B+1}y}{dx^{B+1}}+...+x\left(\mu_1-\lambda_1 x^k\right)\frac{dy}{dx}+\left(\mu_0-\lambda_0 x^k\right)y=f(x),$$

для различных самостоятельных случаев обобщенного дифференциального уравнения неоднородного гипергеометрического типа

$${}_AF_B\left(a_1,a_2,...,a_A;b_1,b_2,...,b_B;x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n...(a_A)_n}{(b_1)_n(b_2)_n...(b_B)_n n!}x^n$$

отличительными точками которых являются регулярно или иррегулярно, где $\mu_i,\lambda_i\,(i=0,1,...,B+1)$ – неизвестные постоянные, $k$ – целое число, $f(x)$ – обобщенный степенный ряд, $a_k, k=\overline{1,A}$ и $b_j, j=\overline{1,B}$ – постоянные параметры. Первым примером таких гипергеометрических функций можно назвать функцию типа Клаузена

$${}_3F_2\left(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;x\right)=F\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & a_3\\ b_1, & b_2 & \end{pmatrix}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n(a_3)_n}{(b_1)_n(b_2)_n n!}x^n$$

которая зависит от пяти параметров.

В подразделе 1.1 приведены основные определения и понятия, используемые в исследовательской работе.

Далее приведены данные о том, как строить обобщенные дифференциальные уравнения. Введено дифференциальное уравнение

$$x^3\left(\mu_3-\lambda_3x^k\right)\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\left(\mu_2-\lambda_2x^k\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\mu_1-\lambda_1x^k\right)\frac{dy}{dx}+\left(\mu_0-\lambda_0x^k\right)y=0$$

третьего порядка, где, определив неизвестные коэффициенты методом Кампе де Ферье, получается уравнение Клаузена в виде

$$x^2(1-x)\frac{d^3y}{dx^3}+\left[1+b_1+b_2-(3+a_1+a_2+a_3)x\right]x\frac{d^2y}{dx^2}+$$
$$+\left[b_1b_2-(1+a_1+a_2+a_3+a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)x\right]\frac{dy}{dx}-a_1a_2a_3y=0$$

решение которого является функцией Клаузена.

В подразделе 1.2 рассмотрены особенности построения решений неоднородных обобщенных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками методом неопределенных коэффициентов. Во подразделе также сформулированы основные свойства функции Клаузена. Доказаны теоремы о том, что уравнение Клаузена имеет как самостоятельные, так и общие решения, необходимые условия существования решения, а также имеет множество регулярных решений вблизи особых точек $x=0$ и $x=\infty$.

В подразделе 1.3 рассмотрены возможности изучения решений неоднородного уравнения Клаузена в зависимости от особенностей передачи функции $f(x)$ правой стороны уравнения. В случае, когда правая часть неоднородного уравнения представлена в виде $f(x)=x^{\rho}$, показана специфика использования метода Фробениуса-Латышевой для нахождения его общего решения.

Вторая часть диссертационной работы посвящена изучению неоднородной системы и однородной системы, которая получается, когда правая сторона этой неоднородной системы $f_i(x,y)=0,\ (i=1,2)$.

В подразделе 2.1 доказано несколько теорем о существовании решений неоднородной системы. В подразделе рассмотрены особенности нахождения решений неоднородной системы гипергеометрического происхождения второго порядка. Неоднородные системы  решения которых являются ортогональными многочленами  мало изучены. Поэтому в качестве примера сформулирована и доказана теорема для неоднородного состояния системы Эрмита.

В подразделе 2.2 рассмотрены вопросы построения решений данной системы однородных уравнений при наличии $\omega=2$. При этом возникает необходимость определения существования решений системы третьего порядка. Здесь важно рассмотреть возможности создания решений системы, которые могут быть получены при различных значениях $h=0, h=1$ и $h\geq 2$. Частный случай $h=1$ рассматривался ранее и были получены системы типа Кампе де Ферье. Во подразделение включены основные понятия метода Фробениуса-Латышевой, являющегося основным методом проведения исследований. К ним относятся понятие характерной функции Фробениуса, понятия системы определяющих уравнений, определяемых по признакам $(0,0)$ и $(\infty,\infty)$.

В подразделе 2.3 доказаны общие свойства неоднородной системы третьего порядка, получаемой в значении $\omega=2$.

В подразделе 2.3.1 приведены теоремы для случая $h=1$. В общем случае $k\geq 2$ доказательства также проводятся аналогичным образом. В этом случае самостоятельные решения выражаются в виде $Z=Z(x^k, y^k), (k\geq 2)$.

В подразделе 2.3.2 рассмотрены особенности применения метода неопределенных коэффициентов при условии, что правая сторона неоднородной системы, полученная в значении $\omega=2$, представлена в виде обобщенного ряда с двумя переменными. Самостоятельное решение ищется в виде обобщенного ряда вблизи особой кривой $(0,0)$.

В подразделе 2.3.3 показаны особенности построения решений однородных и неоднородных систем, а также решений дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка, полученного путем сложения двух уравнений неоднородной системы. К доказательству приведенных теорем применены методы Фробениуса-Латышевой и метод неопределенных коэффициентов.

В подразделе 2.4 рассмотрена простая система Клаузена и свойства ее решений. Я. Горн определил, что произведения двух гипергеометрических функций, каждая из которых является гипергеометрической функцией одной переменной, также относятся к гипергеометрическим функциям второго порядка. Они будут решениями системы, состоящей из двух уравнений Клаузена. Такие системы называются простыми системами типа Клаузена. Доказано несколько теорем о свойствах однородной и неоднородной простых системы Клаузена.

**Третья часть** диссертации полностью посвящена изучению существования нормально-регулярных решений системы неоднородно порожденных дифференциальных уравнений с самостоятельной производной второго порядка. Такие нормально-регулярные решения являются решениями однородно вырожденной системы, полученной путем перехода от системы Лауричеллы к пределу. Решения этой системы в виде новых функций были определены В. И. Художниковым. В диссертационной работе показано, что наряду с решениями исследуемой вырожденной системы в виде функции В. И. Художникова существуют и нормально-регулярные решения. В качестве наглядного примера рассматривается система уравнений, состоящая из двух и трех уравнений, с установлением связей между функциями. Полученные результаты обобщены для систем, состоящих из $n$ уравнений.

Наш интерес вызван восновном вырожденными фукциями многих переменных,

$$F_B\left(\begin{matrix}(\alpha_n), & (\beta_n)\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{m_1,..m_n}\frac{(\alpha_1)_{m_1}...(\alpha_n)_{m_n}(\beta_1)_{m_1}...(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+..+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{z_n^{m_n}}{m_n!}$$

связанными с функцией Лауричеллы, где $|z_k|<1, k=\overline{1,n}$. Функция $F_B$ является частным решением системы Лауричелла $(F_B)$ типа

$$\Phi_{B,n}^{k,l}\left(\begin{matrix}(\alpha_k), & (\alpha'_l), & (\beta_k) \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{i_1,\dots i_n}\frac{\Pi(\alpha_k)_{i_k}\cdot(\beta_k)_{i_k}}{(\gamma)_{\sum i_n}}\cdot\Pi(\alpha'_1)_{i_{l+k}}\cdot\Pi\frac{(z_n)^{i_n}}{i_n!}.$$

Путем многократного перехода от функции Лауричеллы $F_B$ к пределу В.И. Художников ввел новую функцию типа

$$\Phi_{B,n}^{k,l}\left(\begin{matrix}(\alpha_k), & (\alpha'_l), & (\beta_k) \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{i_1,\dots j_n}\frac{\Pi(\alpha_k)_{i_k}\cdot(\beta_k)_{i_k}}{(\gamma)_{\sum i_n}}\cdot\Pi(\alpha'_1)_{i_{l+k}}\cdot\Pi\frac{(z_n)^{i_n}}{i_n!}$$

где использовались следующие краткие обозначения

$$(a_n)=(a_1,\dots,a_n),(z_n)=(z_1,\dots,z_n),\ \Pi(\alpha_n)_{i_n}=\prod_{k=1}^{n}(a_k)_{i_k},\ \sum i_n=\sum_{k=1}^{n}i^k,\ \sum i_1,\dots,i_n=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\dots\sum_{i_n=0}^{\infty}(\dots).$$

Наряду с вырожденной функцией, введенной В.И. Художниковым, введено решение нормально-регулярное типа

$$W(z_1,z_{2,\dots,}z_n)=\exp(\alpha_{1,0,\dots,0}z_1+\alpha_{0,1,\dots,0}z_2+\dots+\alpha_{0},_{\dots},_1z_n)\times$$
$$\times z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\dots z_n^{\rho_n}\sum_{m_1,\dots m_n=0}^{\infty}A_{m_1,m_{2,\dots},\dots m_n}z_1^{m_1}z_2^{m_2}\dots z_n^{m_n},\quad A_{0,\dots,0}\neq 0$$

полученное путем перехода к пределу, где $\rho_t(t=\overline{1,n})$, $A_{m_1,m_2,\dots m_n}(m_1,\dots,m_n=0,1,2,\dots)$, $\alpha_{1,0},_{\dots,0},\alpha_{0,1,0},_{\dots,0},\dots,\alpha_0,_{\dots,0,1}$ – неизвестные постоянные.

В подразделе 3.1.1 приведена вырожденная гипергеометрическая система

$$z_i(1-z_i)\frac{\partial^2 w}{\partial z_i^2}+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-(\alpha_i+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\alpha_i\beta_i w=0,\quad i=\overline{1,k}$$
$$\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+(\gamma-z_i)\frac{\partial w}{\partial z_i}-\alpha'_{i-k}w=0,\quad i=\overline{k+1,k+l}$$
$$\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+\gamma\frac{\partial w}{\partial z_i}-w=0,\quad i=\overline{k+l+1,n}$$

полученная путем многократного перехода от системы Лауричелла $(F_B)$ к пределу, где использовались обозначения $(a_n)=(a_1,a_2,\dots,a_n),(z_n)=(z_1,z_2,\dots,z_n)$.

Существование нормальных регулярных решений частных условий приведенной совместной системы и их связь с функциями Художникова изучены для случая $n=2$, состоящего из двух уравнений. Основная теорема здесь связана с рассмотрением системы Горна $(\Phi_2)$.

В подразделе 3.2 рассмотрены возможности построения нормально-регулярных решений неоднородно вырожденной гипергеометрической системы и приведены несколько теорем.

В подразделе 3.3, обобщены рассмотренные теоремы до случая $n$ переменных.