Дифференциалдық теңдеулер,
анализ және алгебра проблемалары

Problems of differential equations,
analysis and algebra

*физика-математика ғылымдарының докторы, профессор,
ҚР ҰҒА құрметті академигі
К.К.Кенжебаевтың 70 жас мерейтойына арналған*

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ СЕМИНАР МАТЕРИАЛДАРЫ

PROCEEDINGS
INTERNATIONAL SCIENTIFIC SEMINAR

*doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Honorary Academician of NA of sciences of the RK
70th anniversary of K.K. Kenzhebaev*

**Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті
20 қаңтар 2023 ж.**

**K. Zhubanov Aktobe Regional University
January 20, 2023**

Ақтөбе, 2023 / Aktobe, 2023

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ және ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ
Қ.ЖҰБАНОВ атындағы АҚТӨБЕ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ и ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
АКТЮБИНСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени К.ЖУБАНОВА

Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan
K.Zhubanov Aktobe Regional University

Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары
Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры
Problems of Differential Equations, Analysis and Algebra

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ СЕМИНАР
МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР
International Scientific Seminar

МАТЕРИАЛДАРЫ
МАТЕРИАЛЫ
PROCEEDINGS

Ақтөбе, 20 қаңтар 2023 жыл
Актобе, 20 января 2023 год
Aktobe, January 20, 2023

I том (1, 2, 3 секциялар)
Том I (1, 2, 3 секции)
Volume I (sections 1, 2, 3)

Ақтөбе – 2023 – Актобе
Aktobe – 2023

УДК 512 (075.8)
ББК 22.14 я73
Д 46

Д46 Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары: Халықаралық ғылыми семинар материалдары. Ақтөбе: Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, «Жұбанов университеті» баспасы, 2023. - 265 б.

ISBN 978-601-7664-68-8

Жинақтағы жарияланған еңбектер мазмұны дифференциалдық теңдеулер, математикалық физика және есептеу математикасы, функциялар теориясы мен функционалдық анализ, алгебра, математикалық логика және модельдеу, математикалық білім және жаңа ақпараттық технологиялар проблемаларының әртүрлі бағыттағы өзекті мәселелерін қамтиды.

УДК 512 (075.8)
ББК 22.14 я73

ISBN 978-601-7664-68-8

Кенжебаев Кенжеғали Кенжебайұлы

1953 жылы 6 қаңтарда Ақтөбе облысы Байғанин ауданы Доңызтау елді-мекенінде дүниеге келген. 1969 жылы Жаңажол орта иектебін, 1974 жылы Ақтөбе педагогикалық институтын, Т.Шевченко атындағы Киев мемлекеттік универститетінің аспирантурасын 1984 жылы, осы университеттің докторантурасын 1995 жылы тәмәмдады. Жоғары оқу орнын бітірген соң Ақтөбедегі №12 орта мектепте, Жезқазған педагогикалық институтында оқытушы, Ақтөбе педагогикалық институтында аға оқытушы, доцент, профессор қызметтерін жасады. 1995-2017 жылдары Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе мемлекеттік университетінің ректоры болып қызмет атқарды.

Ғалым К.Кенжебаевтың 100-тан астам ғылыми еңбектері ТМД елдерінің басылымдарында жарық көрді, олардың бесеуі монография мен оқу -әдістемелік кітаптар. Оның жетекшілігімен дифф еренциалдық теңдеулердің сапалық теориясын зерттеу және басқарудың математикалық теориясының кейбір есептерін талдап жасау жөніндегі ғылыми мектептері қалыптасты. Ғалым 1999ж. Копенгаген (Дания), *Мәскеу (Ресей), Дюссельдорф (Германия) қалаларында өткен халықаралық симпозиум мен ғылыми конференцияларда мазмұнды баяндамалар жасады, дифференциалдық теңдеулер, алгебра және талдау проблемаларына арналған ғылыми конференция өткізу дәстүрге айналған. Ғалым ғылыми ізденушілер мен аспиранттарға жетекшілік етуде. Оның жетекшілігімен бір докторлық, сегіз кандидаттық диссертация қорғалды. Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе мемлекеттік университетінің материалдық-техникалық базасын нығайтуға және ондағы ғылыми зерттеу, әдістемелік жұмыстарды өрістетудегі зор еңбегі үшін ол 1998 жылы Ақтөбе облысының "Жыл адамы" атағын иеленді. 1999 жылы Байғанин ауданы халқының сеніміне ие болып, облыстық мәслихаттың депутаты болды. "Байғанин ауданы", "Ақтобе қаласы" "Ақтөбе облысы" және "Қазақстан Республикасының" Құрметті азаматы атанды. "Қазақ тілі" халықаралық қоғамының облыстық бөлімшесінің төрағасы болып жұмыс істеді. Сонымен бірге ғылым және білім саласындағы еңбек үшін "Астана", "Тәуелсіздіктің 10 жылдығы" "Тәуелсіздіктің 20 жылдығы" медалдарымен марапатталды. Бүгінгі таңда ғалым Ұлттық Ғылым академиясының Құрметті Академигі, ҚР Ұлттық инженерлік академиясының толық мүшесі, және осы Академияның Ақтөбе филиалының төрағасы және ҚР Ұлттық жаратылыстану ғылымдары академиясының мүшесі. Математика саласына қосқан үлестері үшін Украина ҰҒА-ның М.Остраградский атындағы алтын медалімен (2002) жылы Н.Н.Боголюбов атындағы естелік-медалімен (2002), Қазақстан ҰЖҒА-ның Әл-Фараби атындағы күміс медалдарымен (2010) марапатталған. 2012 жылы "ҚР Білім беру ісінен және ғылымына еңбегі сіңген қызметкері", "Қазақстанның еңбек сіңірген қайраткері" атақтарына ие болды. Мемлекет басшысының Жарлығымен еліміздің әлеуметтік-экономикалық және мәдени дамуына қосқан елеулі үлесі үшін "Құрмет" орденімен марапатталды. К.Кенжебаев облыстық мәслихаттың бес шақырылымының депутаты болды.*

К.Кенжебаев туған жердің тарихын таразылауда халқымыз тарихын зерделей зерттеп, терең білуі, Әбілхайыр ханның оң қолы, өңірімізде тәуелсіздік туын желбіреткен баһадүр Бөкенбай Қарабатырұлына қатысты Ресей архивтерінен құжаттарды іздестіруді ұйымдастырып, оның негізінде жазылған алғашқы кітабын жарыққа шығаруға және ескерткішін ашуға ат салысты. К.Кенжебаевтың негізгі ғылыми еңбектері:

1.Конструктивные методы анализа периодических и многоточенных краевых задачи.

2.Методы конструктивного анализа решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений.

3.Периодты, көп нүктелі шекаралық есептер анализінің конструктивті әдістері.

4.Дифференциальдық теңдеулер және математикалық физиканың көкейтесті мәселелері.

Секция №1
Section №1

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР, ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗ

DIFFERENTIAL EQUATIONS, FUNCTION THEORY AND FUNCTIONAL ANALYSIS

UDC 517.95

RESEARCH OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM BY PARAMETERIZATION METHOD

G.A. Abdikalikova
K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
e-mail: agalliya@mail.ru

Abstract. The nonlocal boundary value problem with integral condition for the system of partial differential equations is considered. Sufficient coefficients conditions of well-posed solvability of the problem are obtained by the parameterization method as well as algorithm of finding solution are offered.

Keywords: method parameterization, integral condition, nonlocal, Friedrichs, algorithm.

Among the boundary value problems for partial differential equations, problems in which the conditions connect the desired solution and its derivatives in various points lying on the border or inside the considered area are of considerable interest. Boundary value problems with nonlocal conditions for a wide class of partial differential equations have been studied by many authors using various methods. Note the works [1]-[2], where you can find a detailed overview and bibliography on these problems.

Finding effective signs of the solvability of boundary value problems for some classes of partial differential equations, developing new effective approaches to the study of boundary value problems, and developing iterative methods for partial differential equations are relevant both for expanding the class of well-posed solvable boundary value problems, and for applying mathematical methods to the problems under study.

Boundary value problems for systems of hyperbolic equations with mixed derivative are investigated and solved by the method introduction of functional parameters [3], which is a modification of the parameterization method [4] developed by Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor D. S. Dzhumabaev for solving boundary value problems of ordinary differential equations.

Nonlocal problem with integral conditions arise in mathematical modeling of various physical phenomena. Nonlocal boundary value problems with integral conditions for partial differential equations began to be studied relatively recently. In [5] considered a nonlocal boundary value problem with integral condition for a time variable for the system of hyperbolic equations with a mixed derivative.

We consider the nonlocal boundary value problem with integral condition on $\overline{\Omega} = \{(x,t): t \le x \le t+\omega, 0 \le t \le T\}, T>0,\ \ \omega>0$ for the system of partial differential equations

$$D\left[\frac{\partial}{\partial x}u\right] = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + S(x,t)u + f(x,t), \qquad u \in R^n, \tag{1}$$

$$B(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) + C(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+T,T) + \int_0^T K(x,s)\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)ds = d(x), \tag{2}$$

$$u(t,t) = \Psi(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Here $u(x,t) = col(u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t))$ is unknown function; $D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$; $(n \times n)$ are matrices $A(x,t)$, $S(x,t)$, $K(x,t)$, n is vector-function $f(x,t)$, $(n\times n)$ are matrices $B(x)$, $C(x)$, n is vector-function $d(x)$ and is function $\Psi(t)$ continuous on $\overline{\Omega}$, $[0,\omega]$, $[0,T]$ accordingly.

In the present work are investigated a questions of well-posed solvability to wide extent of the nonlocal boundary value problem (1)-(3).

Used the work's idea [3], [5] introduce new unknown functions [6] $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ and investigation problem is reduced to the equivalent problem for the system of hyperbolic first-order equations

$$Dv = A(x,t)v + S(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$B(x)v(x,0) + C(x)v(x+T,T) + \int_0^T K(x,s)v(x,s)ds = d(x), \tag{5}$$

$$u(x,t) = \Psi(t) + \int_t^x v(\eta,t)d\eta, \qquad t \in [0,T]. \tag{6}$$

A pair $(v(x,t), u(x,t))$ of continuous functions on $\overline{\Omega}$ is called a solution to problem (4)-(6) to wide extent of Friedrichs if the function $v(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ has a continuous derivative with respect to t along characteristic and satisfies family of ordinary differential equations, and condition (5), in which the functions $u(x,t)$ and $v(x,t)$ by the functional relation (6).

Using method of the characteristic receive in the $\overline{\mathrm{H}} = \{(\xi,\tau): 0 \le \xi \le \omega, 0 \le \tau \le T\}$, $T>0$, $\omega>0$:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{v} + \tilde{S}(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau) + \tilde{f}(\xi,\tau), \qquad \tau \in [0,T], \tag{7}$$

$$\tilde{B}(\xi)\tilde{v}(\xi,0)+\tilde{C}(\xi)\tilde{v}(\xi,T)+\int_0^T \tilde{K}(\xi,\tau)\tilde{v}(\xi,\tau)d\tau=\tilde{d}(\xi), \quad \xi\in[0,\omega], \tag{8}$$

$$\tilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)+\int_\tau^{\xi+\tau}\tilde{v}(\varsigma,\tau)d\varsigma, \qquad \tau\in[0,T], \tag{9}$$

where $\tilde{v}(\xi,\tau)=v(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{u}(\xi,\tau)=u(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{A}(\xi,\tau)=A(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{S}(\xi,\tau)=S(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{K}(\xi,\tau)=K(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{f}(\xi,\tau)=f(\xi+\tau,\tau)$; the $(n\times n)$ matrices $\tilde{A}(\xi,\tau)$, $\tilde{S}(\xi,\tau)$, $\tilde{K}(\xi,\tau)$, n-vector-function $\tilde{f}(\xi,\tau)$ is continuous on $\overline{\mathrm{H}}$; $(n\times n)$ are matrices $\tilde{B}(\xi)$, $\tilde{C}(\xi)$, n-vector-function $\tilde{d}(\xi)$ is continuous on $[0,\omega]$, and n-vector-function $\Psi(\tau)$ is continuously differentiable on $[0,T]$.

The continuous functions $\tilde{v}(\xi,\tau)$ on $\overline{H}$ is called a solution to problem (7)-(9) if the function $\tilde{v}(\xi,\tau)\in C(\overline{H},R^n)$ has a continuous derivative with respect to τ and satisfies family of boundary value problem for the system of ordinary differential equations, and condition (8), in which the functions $\tilde{u}(\xi,\tau)$ and $\tilde{v}(\xi,\tau)$ by the functional relation (9).

The continuous functions $u(x,t)=\tilde{u}(x-t,t)$ on $\overline{\Omega}$ is called a solution to wide extent of boundary value problem for the system of partial differential equations (1) with nonlocal integral conditions (2) and (3).

For the finding solution of boundary value problem (7)-(9), an algorithm is offered.

Step-0: in (7) accepting $\tilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)$, and solved boundary value problem (7)-(8) we shall define initial approach $\tilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$. Using the $\tilde{v}(\xi,\tau)=\tilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$ from correlation (9) finding $\tilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$.

Step-1: we shall take in right part (7) $\tilde{u}(\xi,\tau)=\tilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$, and solving boundary value problem (7)-(8) we shall define initial approximation $\tilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$. Substituting in (9) the function $\tilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$ found, finding $\tilde{u}^{(1)}(\xi,\tau)$.

And so on.

On step k: continuing this process we shall get $\left(\tilde{v}^{(k)}(\xi,\tau),\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)\right)$.

On each step of the offered algorithm using the parameterization method [4].

By fixed $\tilde{u}(\xi,\tau)$, $\xi\in[0,\omega]$ the problem (7)-(8) will be problem for equations

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tau}=\tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{v}+\tilde{G}(\xi,\tau), \quad \tau\in[0,T] \tag{10}$$

with condition (8).

The continuous function $\tilde{v}:\overline{H}\to R^n$ that has a continuous derivative with respect to τ on $\overline{\mathrm{H}}$ is called a solution of the family boundary value problems (10), (8) if it satisfies system (10) and condition (8) for all $(\xi,\tau)\in\overline{\mathrm{H}}$ and $\xi\in[0,\omega]$, respectively.

To family boundary value problem for the ordinary differential equations using the method parameterization [4].

Sufficient conditions are obtained for the unique and well-posed solvability of the problem in the terms of invertibility of the matrix, and boundary condition.

Since problem (7)-(9) to equivalent problem (4)-(6), as well as boundary value problem (4)-(6) and (1)-(3) equivalent, find the nonlocal boundary value problem with integral condition for the system of partial differential equations of the second order (1)-(3) has the unique solution $u^*(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$.

Theorem. *Let be boundary value problem (10), (8) for the differential equations of the well-posed solvability. Then following approximate* $\left(\tilde{v}^{(k)}(\xi,\tau),\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)\right)$ *converges to the unique solution of the problem (7)-(9) and nonlocal boundary value problem (1)-(3) there is well-posed solvability in the wide extent.*

When investigating and solving a nonlocal boundary value problem for a system of partial differential equations, a parameterization method is used, which allows to establish the well-posed solvability of the problem along with unique solvability. The coefficient conditions for well-posed solvability of a nonlocal boundary value problem for a system of equations are established. Sufficient conditions for the well-posed solvability of a boundary value problem with a nonlocal condition are established in terms of a matrix formed on the right side of the equation system and the boundary condition.

If solution built to the wide extent, continuously differentiable with respect to x and t, that function $u(x,t)$ has continuous partial derivatives $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\ D\left[\frac{\partial}{\partial x}u\right]$ and satisfies equation (1) for all $(x,t)\in\overline{\Omega}$ and conditions (2)-(3) is and classical solution nonlocal boundary value problem (1)-(3).

References

1. Nakhushev A.M. Problems with displacement for partial differential equations. - M.: Nauka, 2006. - 287 p.

2. Ptashnyck B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. Kyev: Naukova Dumka, 1984. - 264 p.

3. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential equation. – 2005. – №3(41). – P.337-346.
4. Dzhumabaev D.S. The quality unique solvability linear boundary value problem for ordinary differential equations // J.Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1989. – №1 (29). – P.50-66.
5. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – №1(402). – P.167-178.
6. Abdikalikova G.A. On solvability of one the nonlocal boundary value problem. // Mathematical Journal. – 2005. – №3(5). – P. 5-10.

УДК 745.03

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ САНАЛЫМДЫ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ШЕШІМІНІҢ БАР ЖӘНЕ ЖАЛҒЫЗ БОЛУЫ

Абдулланова Ж.С.
Казахская Головная Архитектурно-Строительная Академия, Алматы, Казахстан
Email: zh.abdullanova@mail.ru

Андатпа. Бұл мақалада дифференциалдық теңдеулердің саналымды жүйесінің шешімдерінің бар болуы мен жалғыз болуы сияқты кейбір жалпы қасиеттері қарастырылған.

Дифференциалдық теңдеулердің саналымды жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = w_s(t, x_1, x_2, ...) \qquad (s = 1,2,...)$$

Осы жүйенің оң жағын қанағаттандыратын 1-6 шарттары қойылған.

Кейін $w_s(t, y_1, y_2, ...)$ функциясының берілген облыста 1-6 шарттарын қанағаттандыратын жалғасы $f_s(t, x_1, x_2, ...)$ функциясы ізделінеді.

Енді келесі жүйені қарастырамыз

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_1, x_2, ...) \qquad (s = 1,2,...)$$

мұнда $f_s(t, x_1, x_2, ...)$ функциясы $w_s(t, y_1, y_2, ...)$ функциясының табылған жалғасы.

Бұл жүйені жуықтап есептеу әдісімен шешеміз.

Сонымен, бұл жүйені шешу барысында оның шенелген шешімі бар екендігіне және оның бірқалыпты үзіліссіздігіне көз жеткіземіз.

Түйін сөздер: саналымды жүйелер, шешімдерінің жалғыз болуы, шенелген шешім, бірқалыпты үзіліссіздік.

Дифференциалдық теңдеулердің саналымды жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = w_s(t, x_1, x_2, ...) \qquad (s = 1,2,...) \qquad (1.1)$$

мұнда t-нақты тәуелсіз айнымалы, $x_1, x_2,...$- t айнымалысы бойынша алынған ізделінді нақты функциялардың саналымды жиыны; $w_1, w_2,...$- $t, x_1, x_2,...$ шамаларының олардың өзгеру облысында $G_0 = \{(t, x_1, x_2,..): 0 \le t \le r,\ |x| \le R\}$ берілген нақты функциялар.

(1.1) теңдеулер жүйесінің оң жағы берілген облыста келесі шарттарды қанағаттандырсын:

1. w_s функциясы t бойынша үзіліссіз, кез келген G_0 облысынан алған нүкте үшін, яғни

$$w_s(t + \Delta t, x_1, x_2,...) - w_s(t, x_1, x_2,...) \to 0, \qquad (\Delta t \to 0)$$

2. w_s функциясы $x_1, x_2,...$ бойынша Липшиц шартын қанағаттандырады, яғни

$$|w_s(t, x_1', x_2',...) - w_s(t, x_1'', x_2'',...)| \le \alpha(t) \|\Delta x\|, \quad \|\Delta x\| = \sup[|x_1' - x_1''|, |x_2' - x_2''|,...],$$

Мұнда $\alpha(t)$- t бойынша $\delta_0 = [0, r]$ сегментінде үзіліссіз функция.

3. Кез келген $t \in [0, r]$үшін $x_1 = x_2 = ... = 0$ болғанда келесі теңсіздік орынды

$$|w_s(t,0,0,...)| \le \beta(t),$$

мұнда $\beta(t)$- t бойынша үзіліссіз, $t \in [0, r]$.

1-3 шарттарынан келесі салдар шығады:

4. $|w_s(t, x_1, x_2,...)| \le \alpha(t) \sup[|x_1|, |x_2|,...] + \beta(t)$

5. Кез келген $(t, x) \in G_0$ нүктесінде w_s функциялары үзіліссіз.

Шындығында $\|\Delta t| + \|\Delta x\| \to 0$ *, болса*

$$|w_s(t + \Delta t, x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2,...) - w_s(t, x_1, x_2,...)| \to \alpha(t) \sup_i \{|\Delta x_i|\}, \quad мунда\ \|\Delta x\| = \sup[|\Delta x_1|, |\Delta x_2|,...]$$

6. $t \in [0, r]$болғанда функциялары теңдәрежелі үзіліссіз және G_0 облыстан шықпайды, яғни

$$|x_s(t)| \le R\ , онда\ |w_s(t, x_1(t), x_2(t),...)| \le \alpha(t) \|x_1(t)\| \le R\alpha(t).$$

1-6 шарттары $G_1 = \{(t, x_1, x_2,..): t \ge 0,\ |x_s| \le R\}$ облысынан алынған кез келген нүкте үшін орындалуы да мүмкін.

Егер бұл талап орындалмаса, онда $t \ge r$ болғанда

$$\alpha(t) = \alpha(r), \beta(t) = \beta(r), w_s(t, x_1, x_2,...) = w_s(r, x_1, x_2,...).$$

Бұл жерден көрініп тұр, $\alpha(t), \beta(t), w_s(t, x_1, x_2,...)$ функцияларын осылай жалғастырса, 1-6 шарттары G_1 облысының кез келген нүктесінде орындалады.

1-6 шарттары тек G_1 облысының нүктелері ғана емес, басқа $G_2 = \{-\infty \prec t \prec +\infty,\ |x_s| \leq R\}$ облысының кез келген нүктесінде орындалуы мүмкін. Егер бұл шарт орындалмаса, онда $t \leq 0$ болғанда $\alpha(t) = \alpha(0), \beta(t) = \beta(0), w_s(t, x_1, x_2, ...) = w_s(0, x_1, x_2, ...)$ деп аламыз.

$\alpha(t), \beta(t), w_s(t, x_1, x_2, ...)$ функциясының мұндай жалғастыруы үшін 1-6 шарттары G_2 облысының кез келген нүктелерінде орындалады.

1-6 шарттары тек G_2 облысының нүктелері ғана емес, $G = \{(t, x_1, x_2, ...) : |t| \prec \infty, \|x\| = \sup\{|x_s|\} \prec \infty\}$ облысының кез келген нүктесінде орындалуы мүмкін.

Егер бұл талап орындалмаса, онда w_s функциясын келесі түрде жалғастырамыз: $y_s = x_s$ *деп аламыз, егер* $|x_s| \leq R; y_s = \dfrac{x_s R}{|x_s|}$ *деп аламыз, егер* $|x_s| \geq R$.

Бұдан $|y_s| \leq R$, ал үшбұрыштар қабырғасының қасиеттері негізінде $|y'_s - y''_s| \leq |x'_s - x''_s|$ шығады.

Енді $f_s(t, x_1, x_2, ...) = w_s(t, y_1, y_2, ...)$ $\quad (s = 1,2,...)$ деп алайық.

$f_s(t, x_1, x_2, ...)$ функциясы $w_s(t, x_1, x_2, ...)$ функциясының жалғасы болады және G облысында барлық 1-6 шарттарын қанағаттандырады.

Келесі теңдеулер жүйесін қарастырайық

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_1, x_2, ...) \qquad (s = 1,2,...) \tag{1.2}$$

Бұл жүйенің оң жағы G_0 облысында (1.1) жүйесінің оң жағымен беттеседі, ал G облысында барлық 1-6 шарттарын қанағаттандырады [1, с.321].

$(t_0, x^0{}_1, x^0{}_2, ...) \in G, \|x_0\| = \sup[|x^0{}_1|, |x^0{}_2|, ...]$ болсын. Берілген нүкте арқылы өтетін (1.2) жүйесінің шешімін тізбектеп жуықтау әдісімен есептейміз, мұнда:

$$\begin{aligned} & x_s^{(0)}(t) = x_s^0, \\ & x_s^{(1)}(t) = x_s^0 + \int_{t_0}^{t} f_s(\tau, x_1^0, x_2^0, ...) d\tau \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & x_s^{(m)}(t) = x_s^0 + \int_{t_0}^{t} f_s(\tau, x_1^{(m-1)}(\tau), x_2^{(m-2)}(\tau), ...) d\tau, \qquad s = 1,2,...,\ m = 2,3,... \end{aligned} \tag{1.3}$$

1-6 шарттары негізінде, кез келген m=1,2,… үшін $x_1^{(m)}(t), x_2^{(m)}(t), ...$ функциялары t мәнінің кез келген шекті мәнінде анықталған, бірқалыпты үзіліссіз,келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$| x_s^{(1)}(t) - x_s^0 | \le \int_{t_0}^{t} [\beta(\tau) + \| x_0 \| \alpha(\tau)] d\tau,$$
$$| x_s^{(m+1)}(t) - x_s^{(m)}(t) | \le \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau) \| \Delta x^{(m)}(\tau) \| d\tau, \qquad (1.4)$$

Егер анықтық үшін $t \ge t_0$ болғанда,

$$\| \Delta x^{(m)}(t) \| = \sup\{ | x_j^{(m)}(t) - x_j^{(m-1)}(t) |, \ldots \}.$$

$[a,b]$-еркін сегмент, $t_{0,} t_1 \in [a,b]$, ал оның ұзындығы l болсын.

$M = \max[\beta(t) + \| x_0 \| \alpha(t)]$, $\tilde{\alpha} = \max \alpha(t)$, онда (1.4) негізінде мынау шығады.

$$| x_s^{(1)}(t) - x_s^{(0)} | \le M \, | t - t_0 | \le Ml,$$
$$| x_s^{(2)}(t) - x_s^{(1)}(t) | \le Ml \frac{| t - t_0 |^2}{2} \le M\tilde{\alpha} \frac{l^2}{2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$| x_s^{(m+1)}(t) - x_s^{(m)}(t) | \le Ml^m \frac{| t - t_0 |^{m+1}}{(m+1)!} \le M\tilde{\alpha}^m \frac{l^{m+1}}{(m+1)!}$$

Бұдан келесі қатар

$$x_s(t) = x_s^{(0)} + (x_s^{(1)}(t) - x^{(0)}{}_s(t)) + (x_s^{(2)}(t) - x_s^{(1)}(t)) + \ldots \qquad (1.5)$$

кез келген t үшін абсолют жинақты және $[a,b]$ үшін жинақтылық t бойынша бірқалыпты, s бойынша теңдәрежелі:

$$| x_s^{(m)}(t) - x_s(t) | \prec \varepsilon, \quad \textit{егер} \quad m \ge N(\varepsilon)$$

Сондықтан

$$x_1(t), x_2(t), \ldots \qquad (1.6)$$

функциялары теңдәрежелі үзіліссіз, және де егер $x_s(t) = \lim\limits_{m \to \infty} x_s^{(m)}(t)$ болса, онда $f_s(t, x_1(t), x_2(t), \ldots)$ функциялары t бойынша бірқалыпты [2, с.315].

Сол себепті

$$x_s(t) = x_s^0 + \int_{t_0}^{t} f_s(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots) d\tau$$
$$\frac{dx_s(t)}{dt} = f_s(t, x_1(t), x_2(t), \ldots) \qquad (1.7)$$

Яғни (1.6) теңдеулер жүйесі – (1.2) теңдеулер жүйесінің $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots) \in G$ нүктесі арқылы өтетін теңдәрежелі үзіліссіз шешімі.

2.- шарт бойынша (1.2) теңдеулер жүйесінің $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots) \in G$ нүктесі арқылы өтетін теңдәрежелі үзіліссіз шешімі тек жалғыз болады [3, с.456].

Айталық, $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \ldots$ – (1.2) теңдеулер жүйесінің $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots) \in G$ нүктесі арқылы өтетін шектелген шешімі болсын. Онда бұл шешім бар болатын берілген σ сегменті үшін $T(\sigma)$ ақырлы саны табылып, барлық $t \in \sigma$ мәндері үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\sup[|x_1(t)|,|x_2(t)|,...,|x_n(t)|,...] \le T(\sigma). \qquad (1.8)$$

Онда (1.8) негізінде және 4-қасиет бойынша

$$\left|\frac{dx_s}{dt}\right| = |f_s(t, x_1(t), x_2(t),...)| \le \alpha(t)T(\sigma) + \mu(t),$$

Яғни $x_1'(t), x_2'(t),...$ s бойынша теңдәрежелі шенелген.

Сондықтан (1.2) теңдеулер жүйесінің шектелген шешімі теңдәрежелі үзіліссіз шешімі болып шығады.

Теорема 1.1. G облысының әрбір берілген $(t_0, x^0{}_1, x^0{}_2,...)$ нүктесі арқылы (1.2) теңдеулер жүйесінің шектелген, жалғыз шешімі өтеді, ол теңдәрежелі үзіліссіз болады, және бұл шешім t-ның барлық шекті мәндерінде бар болады.

Ал G_0 облысында (1.2) теңдеулер жүйесі (1.1) жүйесімен беттесетін болғандықтан, келесі теорема орынды

Теорема 1.2. G_0 облысының әрбір берілген ішкі $(t_0, x^0{}_1, x^0{}_2,...)$ нүктесі арқылы (1.1) теңдеулер жүйесінің шектелген, жалғыз шешімі өтеді, ол теңдәрежелі үзіліссіз болады, және бұл шешім t-ның барлық $[0, r]$ аралығынан алған мәндерінде бар болады, $\sup[|x_1(t)|,|x_2(t)|,...] \le R$.

(1.2) теңдеулер жүйесінің $(t_0, x_{10}, x_{20},...)$ нүктесі арқылы өтетін шешімдері шексіз көп болуы мүмкін, бірақ олар теңдәрежелі үзіліссіз болмауы мүмкін, сондықтан олар шектелмеген болады.

Мысал келтірейік.

Келесі жүйені қарастырайық

$$\frac{dx_s}{dt} = x_{s+1}, \qquad s = 1,2,... \qquad (1.9)$$

Бұл жүйе $G_2 = \{(t, x_1, x_2, ...) : |t| \prec \infty, \sup\{|x_j|\} \le R\}$ облысында анықталған, және жоғарыдағы шарттардың барлығын қанағаттандырады, $\alpha(t) = 1$.

$(t_0, x_{10}, x_{20},...)$ нүктесі арқылы өтетін шешімін табайық:

$$x_s(t) = x_s(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_{s+1}(\tau)d\tau, \qquad x_{s+1}(t) = x_{s+1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_{s+2}(\tau)d\tau$$

$$x_s^{(1)}(t) = x_s(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_{s+1}^{(0)}(\tau)d\tau = x_{s0} + x_{s+1}^{(0)}(t - t_0) = x_{s0} + x_{s+1,0}(t - t_0)$$

$$x_{s+1}^{(1)}(t) = x_{s+1}(t_0) + x_{s+2,0}(t - t_0)$$

$$x_s^{(2)}(t) = x_s(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_{s+1}^{(1)}(\tau)d\tau = x_s(t_0) + \int [x_{s+1}(t_0) + x_{s+2}(t_0)(\tau - t_0)]d\tau = x_{s0} + x_{s+1,0}(t-t_0) +$$
$$+ x_{s+2,0}\frac{(t-t_0)^2}{2!}$$

$$x_s^{(3)}(t) = x_{s0} + x_{s+1,0}(t-t_0) + x_{s+2,0}\frac{(t-t_0)^2}{2!} + x_{s+3,0}\frac{(t-t_0)^3}{3!}$$

$$x_s^{(k)}(t) = x_{s0} + x_{s+1,0}(t-t_0) + x_{s+2,0}\frac{(t-t_0)^2}{2!} + x_{s+3,0}\frac{(t-t_0)^3}{3!} + \ldots + x_{s+k,0}\frac{(t-t_0)^k}{k!}$$

$$\lim_{t\to t_0} x_s^{(k)}(t) = x_s(t) = x_{s0} + x_{s+1,0}(t-t_0) + x_{s+2,0}\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \ldots + x_{s+k,0}\frac{(t-t_0)^k}{k!} + \ldots$$

Бұл табылған шешім (1.9) жүйенің $(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots)$ нүктесі арқылы өтетін шешімі болып табылады.

Сонымен, кез келген шекті ұзындығы бар σ сегментінің t_0 мәнінде бұл шешім шектелген болады. Яғни шешімнің теңдәрежелі үзіліссіз болатыны шығады.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1. Матвеева И.И., Мельник И.А. О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности//Сиб.мат.журн. 2012. Т53, №2, С. 312-324.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. -М.:2016.- 402 с.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: - Высш.шк., 2009.-498 с.

UDC 517.925/926

IRSTI 27.31.15

TO THE THEORY OF A NONLOCAL PROBLEMS WITH MULTIPOINT CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER

Assanova A.T.[1], Imanchiyev A.E.[2]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*

E-mail: assanova@math.kz, imanchiev_ae@mail.ru

Annotation. A nonlocal problem with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order is considered. Algorithms for finding a solution to the nonlocal problem with multipoint conditions are constructed and their convergence is proved. Conditions for the unique solvability of the nonlocal problem with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order are established in terms of the initial data.

Keywords: partial differential equations of higher order, nonlocal problems with multipoint conditions, parametrization method, algorithm, solvability.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP09258829).

In recent decades, many authors have intensively studied nonlocal problems with multipoint conditions for partial differential equations of higher order (see the bibliography in [1-6]). The development of computing and information technologies requires the apply of constructive methods for the numerical analysis and approximate solution of nonlocal problems with multipoint conditions for partial differential equations of higher order.

Earlier in the works of the authors, a number of problems with multipoint conditions were investigated and solved for systems of hyperbolic equations of the second order [8-10], for partial differential equations of third and fourth orders [11-13], as well as for impulsive partial differential equations of higher order [14] by Dzhumabaev's parametrization method [7].

In the present paper we propose the constructive approach for solve the nonlocal problem with multipoint conditions for partial differential equations of higher order based on Dzhumabaev's parametrization method.

Consider the nonlocal problem with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order in $\Omega = [0,T]\times[0,\omega]$

$$\frac{\partial^{m+1}u}{\partial t\partial x^m} = \sum_{i=0}^{m} A_i(t,x)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + \sum_{j=0}^{m-1} B_j(t,x)\frac{\partial^{j+1}u}{\partial t\partial x^j} + f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{l=0}^{p}\sum_{i=0}^{m} K_{i,l}(x)\frac{\partial^i u(t_l,x)}{\partial x^i} = \varphi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi_0(t), \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_1(t), \ \ldots, \ \frac{\partial^{m-1}u(t,x)}{\partial x^{m-1}}\Big|_{x=0} = \psi_{m-1}(t), \qquad t\in[0,T], \tag{3}$$

where $u(t,x)$ is the unknown function, the functions $A_i(t,x)$, $i=\overline{0,m}$, $B_j(t,x)$, $j=\overline{0,m-1}$, and $f(t,x)$ are continuous on Ω, the functions $K_{i,l}(x)$ and $\varphi(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_p=T$, $i=\overline{0,m}$, $l=\overline{0,p}$, the functions $\psi_j(t)$, $j=\overline{0,m-1}$, are continuously differentiable on $[0,T]$.

A function $u(t,x)$ continuous on Ω, having continuous on Ω partial derivatives $\dfrac{\partial^{s+i}u(t,x)}{\partial t^s\partial x^i}$, $s=0,1$, $i=\overline{0,m}$, satisfying Equation (1) for all $(t,x)\in\Omega$, multipoint and initial conditions (2), (3), is called the solution to the nonlocal problem with multipoint conditions (1)-(3).

Algorithms for finding a solution to the nonlocal problem with multipoint conditions (1)-(3) are constructed and their convergence is proved. Conditions for the unique solvability of the nonlocal problem with multipoint conditions (1)-(3) are established in terms of the initial data.

Assume $v_k(t,x)=\dfrac{\partial^{m-k}u(t,x)}{\partial x^{m-k}}$, $k=\overline{1,m}$.

Then pass from problem (1)-(3) to the next equivalent problem:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t\partial x}=A_m(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial x}+B_{m-1}(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t}+A_{m-1}(t,x)v_1+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-2}A_i(t,x)v_{m-i}(t,x)+\sum_{j=0}^{m-2}B_j(t,x)\frac{\partial v_{m-j}(t,x)}{\partial t}+A_0(t,x)v_m(t,x)+f(t,x), \tag{4}$$

$$\sum_{l=0}^{p}K_{m,l}(x)\frac{\partial v_1(t_l,x)}{\partial x}+\sum_{l=0}^{p}K_{m-1,l}(x)v_1(t_l,x)+\sum_{l=0}^{p}\sum_{s=0}^{m-2}K_{s,l}(x)v_{m-s}(t_l,x)=\varphi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$v_1(t,0)=\psi_{m-1}(t), \qquad t\in[0,T], \tag{6}$$

$$v_r(t,x)=\psi_{m-r}(t)+\int_0^x v_{r-1}(t,\xi)d\xi,\ \frac{\partial v_r(t,x)}{\partial t}=\dot\psi_{m-r}(t)+\int_0^x\frac{\partial v_{r-1}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,\ r=\overline{2,m},\ (t,x)\in\Omega. \tag{7}$$

A system of functions $(v_1(t,x),v_2(t,x),...,v_m(t,x))$, where function $v_1(t,x)\in C(\Omega,R^n)$ has partial derivatives $\dfrac{\partial v_1(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial^2 v_1(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,R^n)$, and functions $v_r(t,x)$ and $\dfrac{\partial v_r(t,x)}{\partial t}$ are related to $v_1(t,x)$ by integral relations (7), $r=\overline{2,m}$, which satisfies the equation (4) for all $(t,x)\in\Omega$ and conditions (5), (6), is a solution to problem (4)-(7).

For fixed $v_r(t,x)$ and $\dfrac{\partial v_r(t,x)}{\partial t}$, $r=\overline{2,m}$, problem (4)-(6) is a nonlocal problem with multipoint conditions for the second-order hyperbolic equation. Questions of the unique, well-posed solvability of a nonlocal problem with multipoint conditions were studied in [8], [9]. We use results of [15]-[16] to solve problem (4)-(7).

We introduce a new functions $v(t,x)=\dfrac{\partial v_1(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x)=\dfrac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}$ and transfer problem (4)-(7) to the following family of multipoint problems for a differential equation with functional parameters and integral constraints

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A_m(t,x)v+B_{m-1}(t,x)w(t,x)+A_{m-1}(t,x)v_1(t,x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-2} A_i(t,x)v_{m-i}(t,x)+\sum_{j=0}^{m-2} B_j(t,x)\frac{\partial v_{m-j}(t,x)}{\partial t}+A_0(t,x)v_m(t,x)+f(t,x), \tag{8}$$

$$\sum_{l=0}^{p} K_{m,l}(x)v(t_l,x)=\varphi(x)-\sum_{l=0}^{p} K_{m-1,l}(x)v_1(t_l,x)-\sum_{l=0}^{p}\sum_{s=0}^{m-2} K_{s,l}(x)v_{m-s}(t_l,x), \quad x\in[0,\omega], \tag{9}$$

$$v_1(t,x)=\psi_{m-1}(t)+\int_0^x v(t,\xi)d\xi, \quad w(t,x)=\dot{\psi}_{m-1}(t)+\int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \quad (t,x)\in\Omega, \tag{10}$$

$$v_r(t,x)=\psi_{m-r}(t)+\int_0^x v_{r-1}(t,\xi)d\xi, \ \frac{\partial v_r(t,x)}{\partial t}=\dot{\psi}_{m-r}(t)+\int_0^x \frac{\partial v_{r-1}(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \ r=\overline{2,m}, \ (t,x)\in\Omega. \tag{11}$$

For fixed $w(t,x)$, $v_1(t,x)$, $v_r(t,x)$ and $\frac{\partial v_r(t,x)}{\partial t}$, $r=\overline{2,m}$, problem (8), (9) is a family of multipoint problems for the differential equation. The unknown functions $w(t,x)$, $v_1(t,x)$, $v_r(t,x)$ and $\frac{\partial v_r(t,x)}{\partial t}$, $r=\overline{2,m}$, are determined from integral constraints (10), (11).

A system of functions $(v(t,x),w(t,x),v_1(t,x),v_2(t,x),...,v_m(t,x))$, where function $v(t,x)\in C(\Omega,R^n)$ has partial derivative $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, functions $w(t,x)$, $v_1(t,x)$, $v_r(t,x)$ and $\frac{\partial v_r(t,x)}{\partial t}$ are related to $v(t,x)$ and $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}$, $v_1(t,x)$ and $\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}$ by integral constraints (10), (11), respectively, $r=\overline{2,m}$, which satisfies the differential equation (8) for all $(t,x)\in\Omega$ and condition (9), integral constraints (10), (11) is a solution to problem (8)-(11).

Consider the following family of multipoint problems for the differential equation

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A_m(t,x)v+F(t,x), \qquad (t,x)\in\Omega, \tag{12}$$

$$\sum_{l=0}^{p} K_{m,l}(x)v(t_l,x)=\Phi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{13}$$

where $v(t,x)$ is an unknown function, the function $F(t,x)$ is continuous on Ω, the function $\Phi(x)$ is continuous on $[0,\omega]$, $x\in[0,\omega]$.

A continuous function $v:\Omega\to R$ that has a continuous derivative with respect to t on Ω is called a solution to the family of multipoint problems (12), (13), if it satisfies equation (12) for all $(t,x)\in\Omega$ and multipoint condition (13) for all $x\in[0,\omega]$.

For fixed $x \in [0, \omega]$ problem (12), (13) is the linear multipoint problem for the ordinary differential equation. Suppose a variable x takes values on the interval $[0, \omega]$; then we obtain the family of multipoint problems for differential equation.

Definition 1. A family of multipoint problems for the differential equation (12), (13) is called uniquely solvable if for any pair $(F(t,x), \Phi(x))$, where $F(t,x) \in C(\Omega, R)$, $\Phi(x) \in C([0,\omega], R)$, it has a unique solution.

Definition 2. A nonlocal with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order (1)-(3) is called uniquely solvable if for any $f(t,x) \in C(\Omega, R)$, $\varphi(x) \in C([0,\omega], R)$, $\psi_j(t) \in C([0,T], R)$, $j = 0,1,2,...,m-1$, it has a unique classical solution.

We propose an algorithm for finding approximate solutions to problem (1)-(3) is constructed based on the results in [9].

The algorithm for finding solutions to the nonlocal problem with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order (1)-(3) consists of seventh stages:

1st stage. Introduction of new unknown functions $v_1(t,x)$, $v_2(t,x)$, $v_3(t,x)$, …, $v_m(t,x)$ and transition to the equivalent problem (4)-(7).

2nd stage. Introduction of new unknown functions $v_1(t,x)$, $v_2(t,x)$ and reduction to the family of multipoint problems for the differential equation with functional parameters and integral constraints (8)-(11).

3rd stage. Solving of the auxiliary family of multipoint problems for the differential equation (12), (13).

4th stage. For fixed $w(t,x)$, $v_1(t,x)$, $v_r(t,x)$ and $\frac{\partial v_r(t,x)}{\partial t}$, $r = \overline{2,m}$, solving the family of multipoint problems for the differential equation (8), (9) by solution to the auxiliary family of multipoint problems for the differential equation (12), (13).

5th stage. Determination of functions $v_1(t,x)$, $w(t,x)$ from integral constraints (10) using $v(t,x)$, the solution to the family of problems (8), (9), and $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}$.

6th stage. Determination of functions $v_r(t,x)$ and $\frac{\partial v_r(t,x)}{\partial t}$, $r = \overline{2,m}$, from integral constraints (11) using $v_1(t,x)$ and $\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}$.

7th stage. Definition of function $u(t,x)$, the solution to the original problem (1)-(3) from equality $u(t,x)=v_m(t,x)$ for all $(t,x)\in\Omega$.

Conditions for the feasibility of the constructed algorithm for finding solutions to the nonlocal problem with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order are obtained. It is shown that the solvability of the nonlocal problem with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order is equivalent to the solvability of the family of multipoint problems for the differential equation (12), (13).

The following theorem provides the conditions of unique solvability to problem (1)–(3) in terms of the solvability of family of problems (12), (13).

Theorem 1. *Suppose*

1) the functions $A_i(t,x)$, $i=\overline{0,m}$, $B_j(t,x)$, $j=\overline{0,m-1}$, *and* $f(t,x)$ *are continuous on* Ω*;*

2) the functions $K_{i,l}(x)$ *and* $\varphi(x)$ *are continuous on* $[0,\omega]$, $i=\overline{0,m}$, $l=\overline{0,p}$*;*

3) the functions $\psi_j(t)$, $j=\overline{0,m-1}$, *are continuously differentiable on* $[0,T]$.

4) The family of multipoint problems for the differential equations (12), (13) is uniquely solvable.

Then the nonlocal problem with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order (1)-(3) has a unique classical solution.

Theorem 2. *The nonlocal problem with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order (1)-(3) is uniquely solvable, if the function*

$$N(x)=K_{m,0}(x)+\sum_{l=1}^{p}K_{m,l}(x)e^{a(t_l,x)} \quad \textit{is not zero} \quad \textit{for every} \quad x\in[0,\omega],$$

where $a(t,x)=\int_0^t A_m(\tau,x)d\tau$.

Note that a problem with non-separated multipoint-integral conditions for differential equations of higher order are considered in [17-18] by modification of parametrization method and new concept of general solution [19-20]. An interval is divided into *m* parts, the values of a solution at the beginning points of the subintervals are considered as additional parameters, and the differential equations of higher order are reduced to the Cauchy problems on the subintervals for system of differential equations with parameters. Using the solutions to these problems, new general solutions to differential equations of higher order are introduced and their properties are established. Based on the general solution, non-separated multipoint-integral conditions, and continuity conditions of a solution at the interior points of the partition, the linear system of algebraic equations with respect to parameters is composed. Algorithms of the parametrization method are constructed and their convergence is proved. Sufficient conditions for the unique solvability of considered problem are set. It is shown that the solvability of boundary value problems is equivalent to the solvability of systems composed. Methods for solving boundary value problems are proposed, which are based on the construction and solving these systems.

Conclusion. The nonlocal problem with multipoint conditions for the partial differential equations of higher order (1)-(3) is studied. Algorithms for finding the solution this problem are constructed and their convergence is proved. Conditions for the unique solvability of the problem (1)-(3) are established in terms of the initial data. Results this paper can be extended to the system of partial differential equations of higher order.

References

1. Ptashnyck B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. - Kiev: Nauk. dumka, 1984. – 264 p. (in Russ.)
2. Samoilenko A.M., Laptinsky V.N. and Kenzhebaev K. Constructive methods in the investigation of periodic and multipoint boundary-value problems // Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and Its Applications. Kyiv. -1999. -Vol. 29. – P. 1-186. (in Russ.).
3. Kiguradze T.I., Kusano T. Well-posedness of initial-boundary value problems for higher-order linear hyperbolic equations with two independent variables // Differ. Equ. - 2003. - Vol. 39. - No 4. - P. 553-563.
4. Kiguradze T., Kusano T. On ill-posed initial-boundary value problems for higher order linear hyperbolic equations with two independent variables // Differ. Equ. - 2003. - Vol. 39. - No 10. - P. 1379-1394.
5. Nakhushev A.M. Shift problems for partial differential equations. – M.: Nauka, 2006. – 288 p. (in Russ.)
6. Kiguradze T. The Valle-Poussin problem for higher order nonlinear hyperbolic equations // Comp. & Math. Appl. - 2010. - Vol. 59. -No 5. - P. 994-1002.
7. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. -1989. -Vol. 29. -No 1. - P. 34-46.
8. Assanova A.T., Imanchiev A.E. On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasilinear systems of hyperbolic equations // Eurasian Math. J. - 2015. - Vol.6. - No 4. - P.19-28.

9. Asanova A.T. Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative // J. Math. Sci. (United States). - 2016. - Vol. 212. - No 3. - P. 213-233.
10. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M. Solvability of nonlocal problems for systems of Sobolev-type differential equations with a multipoint condition // Russian Math. - 2019. - Vol. 63. - No 12. - P. 12-22.
11. Assanova A.T., Dzhobulaeva Z.K., Imanchiyev A.E. A multi-point initial problem for a non-classical system of a partial differential equations // Lobachevskii J. Math. -2020. – Vol. 41. - No 6. – P. 1031-1042.
12. Assanova A.T., Tokmurzin Z.S. An approach to the solution of the initial boundary-value problem for systems of fourth-order hyperbolic equations // Mathematical Notes. – 2020. – Vol. 108. - No 1-2. – P. 3-14.
13. Assanova A.T., Kabdrakhova S.S. Modification of the Euler polygonal method for solving a semi-periodic boundary value problem for pseudo-parabolic equation of special type // Mediterranean J. Math. – 2020. – Vol. 17. No 4. Art. 109.
14. Assanova A.T., Tleulessova A.B. Nonlocal problem for a system of partial differential equations of higher order with pulsed actions // Ukrainian Math. J. – 2020. – Vol. 71. - No 12. – P. 1821-1842.
15. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // J. Math. Anal. Appl. - 2013. – Vol. 402. - No 1. – P. 167-178.
16. Assanova A.T. On the solvability of nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition // Georgian Math. J. Published Online: 02/19/2019. – 2021. – Vol. 28. - No 1. – P. 49—57.
17. Imanchiyev A.E., Ermek A.A. Parameterization method for solving problem with non-separated multipoint-integral conditions for the differential equations high order // Kazakh Math. J. – 2020. - Том 20. No 4. – P. 74-86.
18. Assanova A.T., Imanchiyev A.E. Problem with non-separated multipoint-integral conditions for high-order differential equations and a new general solution // Quaestiones Mathematicae. – 2022. Vol. 45. No 10. P.1641-1653. Published online: 6 Sep. 2021.
19. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comp. Appl. Math. - 2018. -Vol. 327. - P. 79-108.
20. Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary-value problems // Ukranian Math. J. - 2019. - Vol. 71. - No 7. -P. 1006-1031.

УДК 517.95
МРНТИ 27.31.17

УСЛОВИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА КАВАХАРЫ

Ахметкалиева Р.Д., Оспанов К.Н., Мукашева Т.Д.
Евразийский национальный университет им.Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: raya_84@mail.ru, kordan.ospanov@gmail.com, togzhan-mukasheva@mail.ru

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение высокого порядка

$$L_0 y \equiv -y^{(5)} + r(x)y^{(3)} + q(x)y^{(1)} + p(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $x \in R = (-\infty, \infty)$, $f(x) \in L_2(R)$, r - трижды непрерывно дифференцируемая функция, q - непрерывно дифференцируемая функция, считаем $p(x)$ непрерывна. Следовательно, (1) является вырожденным дифференциальным уравнением.

В статье [1], в результате моделирования процесса распространения нелинейных волн в диспергирующей среде получено дифференциальное уравнение

$$-\beta y_x^{(5)}(x,t) + \alpha y_x^{(3)}(x,t) + \frac{3}{2} y(x,t) y_x{}'(x,t) + y_t{}'(x,t) = 0. \tag{2}$$

(2) называется уравнением Кавахары или обобщенным уравнением типа Кортевега де Фриза. Уравнение (2) изучался, в основном, в случае ограниченной области и когда его коэффициенты постоянные. Краевые задачи для него исследованы в [2,3] и многих других работах. Возьмем следующее стационарное уравнение типа Кавахары

$$-y^{(5)} + r_0(x)y^{(3)} + q_0(x)yy' = f_0(x).$$

с переменным коэффициентом, заданный на всей числовой оси R. Линеаризуя его, мы приходим к одному из следующих дифференциальных уравнений

$$-y^{(5)} + r_1(x)y^{(3)} + q_1(x)y = f_1(x) \tag{3}$$

и

$$-y^{(5)} + r_2(x)y^{(3)} + q_2(x)y' = f_2(x). \tag{4}$$

Свойства уравнений (3) и (4) отличаются друг от друга. Уравнение (3) в случае знакоопределенного потенциала q_1 изучался в статьях [4, 5] и в приведенных в них работах. (4) является вырожденным дифференциальным уравнением, вопрос его исследования остается открытым. Рассматриваемая нами уравнение (1) является обобщением (4).

Пусть L_0 дифференциальный оператор, действующий в $C_0^\infty(R)$ по формуле

$$L_0 y = -y^{(5)} + r(x)y^{(3)} + q(x)y' + p(x)y.$$

Согласно предположениям относительно $r(x)$, $q(x)$ и $p(x)$, оператор L_0 допускает замыкание по норме пространства $L_2(R)$, обозначим его через L. Решением уравнения (1) назовем функцию $y \in D(L)$, такую, что $Ly = f$.

Мы приводим условия, достаточные для корректной разрешимости уравнения (4) и выполнения для решения y оценки

$$\|y^{(5)}\|_2 + \|ry^{(3)}\|_2 + \|qy'\|_2 + \|py\|_2 \le c\|f\|_2, \qquad (5)$$

модифицируя методы [6,7] исследования сингулярного дифференциального уравнения третьего порядка. В (5) $\|\cdot\|_2$ - норма пространства $L_2(R)$.

Пусть g и $h \neq 0$ - непрерывные функции. Введем следующие обозначения:

$$\alpha_{g,h,j}(x) = \left(\int_0^x |g(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_x^{+\infty} t^{2j} h^{-2}(t) dt\right)^{1/2}, \ x > 0,$$

$$\beta_{g,h,j}(\tau) = \left(\int_\tau^0 g^2(t) dt\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\tau} t^{2j} h^{-2}(t) dt\right)^{1/2}, \ \tau > 0,$$

и

$$\gamma_{g,h,j} = \max\left(\sup_{\{x>0\}} \alpha_{g,h,j}(x), \sup_{\{\tau>0\}} \beta_{g,h,j}(\tau)\right) \quad (j = 1, 2).$$

Основной результат работы - следующий.

Теорема. Пусть функция $r(x)$ такая, что

$$r \ge 1, \ \gamma_{1,\sqrt{r},2} < \infty,$$

$$C^{-1} \le \frac{r(x)}{r(\eta)} \le C, \ \forall x, \eta \in R : |x - \eta| \le 1 \ (C > 1),$$

а функций $q(x)$ и $p(x)$ удовлетворяют условиям

$$\gamma_{q,r,1} < \infty, \ \gamma_{p,r,2} < \infty.$$

Тогда для каждого $f \in L_2(R)$ существует единственное решение y уравнения (1). Кроме того, для решения y справедлива оценка

$$\|y^{(5)}\|_2 + \|ry^{(3)}\|_2 + \|qy'\|_2 + \|py\|_2 \le \mathrm{C}\|f\|_2.$$

Статья выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AR14870261).

Список использованной литературы

1.Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan. -1972. 33:1. -P. 260–264.

2. Biagioni H.A., Linares F. On the Benny - Lin and Kawahara equations // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 211, № 1. P. 131-152.

3. Opritova M.A., Faminsky A. V. About the Cauchy problem for the generalized Kawahara equation // Differential equations. 2016. T. 52, No. 3. S. -378-390.

4. Doronin G.G., Larkin N.A. Quarter-plane problem for the Kawahara equation // Pacific J. Appl. Math. 2008. V. 1, № 3. P. 151-176.

5. Wang H., Cui S, Deng D. Global existence of solutions for the Cauchy problem of the Kawahara equations in Sobolev spaces of negative indices // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2007. V. 22, № 8. P. 14351446.

6. Ospanov K.N., Eskabylova Zh.B., Beisenova D.R. Maximal regularity estimates for a higher order differential equation with the fluctuating coefficients // Eurasian Math. J. 2019, Vol. 10, No.2, 65-74.

7.Ospanov K.N., Beisenova D.R., Bekjan T.N. Coercive solvability conditions for an infinite second-order difference system with oscillating intermediate coefficients. Вестник национальнойинженерной академии РК. -2019.-№ 2 (72) . -С.12-19.

УДК 517.956
МРНТИ 27.31.17, 27.31.44, 27.35.45

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ 2-D СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА

Дженалиев М.Т.[1], Рамазанов М.И.[1,3], Ергалиев М.Г.[1], Орынбасар Б.К.[1,2]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2]*Казахский Национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

[3]*Карагандинский университет им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан*

E-mail: muvasharkhan@gmail.com; ramamur@mail.ru; ergaliev.madi.g@gmail.com, qairatulybekzat@gmail.com

Аннотация. В докладе изучается обратная задача для линеаризованной 2-D системы Навье-Стокса. В круговой и квадратной области рассматриваются обобщенные спектральные задачи для бигармонического оператора с условиями Дирихле, необходимость в решении которых возникает при введении функции тока в 2-D системе Навье-Стокса.

Ключевые слова: линеаризованная 2-D система Навье-Стокса, функция тока, бигармонический оператор, обобщенная спектральная задача

В начале доклада мы рассматриваем обратную задачу для линеаризованной 2-D системы Навье-Стокса с неизвестной силой, распределенной только по пространственной переменной, и с финальным условием переопределения. На основе теории спектрального разложения самосопряженных операторов [1, 2] установлены достаточные условия разрешимости поставленной обратной задачи, сформулированная в виде теоремы. Мы проводим сравнение полученного результата с ранее известным [3].

Далее, при переходе к функции тока от линеаризованной 2-D системы уравнений Навье-Стокса возникает необходимость решения обобщенной спектральной задачи для бигармонического оператора, которая соответствует линеаризованному 2-D оператору Стокса. Однако, не говоря даже о случае произвольной области для независимых переменных, и в канонических областях (например, круг, квадрат, прямоугольник и т.д.) этот вопрос бывает не всегда легко решаемым.

Имеются работы [4, 5], которые посвящены указанным вопросам в случае периодических условий. В работах [4, 5] также указывается о важности проблемы построения системы собственных функций и собственных значений для изучения граничных задач для систем Навье-Стокса, отмеченной на семинаре в [4, 5] О.А.Ладыженской.

В нашей предыдущей работе [6] для круга этот вопрос был до конца решен, и построенная система ортогональных функций была успешно использована для численного решения одной обратной задачи для линеаризованной 2-D системы уравнений Навье-Стокса. В [6] нами были проведены численные эксперименты по решению модельной обратной задачи (с конкретными числовыми данными) с использованием оптимизационного метода.

В настоящем докладе мы строим систему собственных функций и соответствующую систему собственных значений, когда область независимых переменных представлена также квадратом. Отметим, что квадрат взят только для простоты аналитических вычислений, можно было бы рассматривать спектральную задачу в любом конечном прямоугольнике.

Результаты представленной работы легко могут быть развиты и на этот случай.

В конце доклада мы коснемся вопроса о решении обратной задачи для нелинейной 2-D системы Навье-Стокса (при этом мы воспользуемся одним результатом работы [7]).

Список использованной литературы

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – Москва: Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1977. – 742 с.
2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – Москва: Мир. – 1979. – 587 с.
3. Прилепко А.И., Васин И.Л. Некоторые обратные начально-граничные задачи для нестационарных линеаризованных уравнений Навье-Стокса // Дифференциальные уравнения. – 1989. – 25, № 1. – С. 106-117.
4. Сакс Р.С. Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье // Уфимский математический журнал. – 2011. – 3: 1. – С. 53-79.
5. Сакс Р.С. Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиями // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2004. – 318. – С. 246-276.
6. Jenaliyev M., Ramazanov M., Yergaliyev M. On the numerical solution of one inverse problem for a linearized two-dimensional system of Navier-Stokes equations // Opuscula Math. – 2022. – 42(5). – P. 709-725.
7. Ладыженская О.А. О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье-Стокса // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1967. – 5. – С. 169-185.

UDC 517.925:62.50
MNRTI 27.29.17

ABSOLUTE STABILITY OF PROGRAM MANIFOLD OF HYDRAULIC ACTUATOR CONTROL SYSTEMS

Zhumatov S.S.
Institute of Mathematics and Mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: sailau.math@mail.ru

Annotation. The problem of constructing control systems of hydraulic actuator for a given program manifold is considered. It is known that there is a need to study a stability of program manifold itself with respect to some indicator. The stability of hydraulic actuator control systems is investigated taking into account speed and positional loads.The sufficient conditions for the absolute stability of the program manifold of the hydraulic actuator, taking into account the compressibility of the fluid contained in the hydraulic cylinder are obtained in the form of some equality.

Key words: program manifold, indirect control system, external load, position and speed feedbacks.

1. Introduction. Statement of the problem. Inverse problems of ordinary differential equations goes back to the five tenth years of the last century. The first work was the construction a system of differential equations on a given integral curve published by N.P.Erugin [1]. Futher, this problem was developped as a problem of constructing systems of differential equations on a given manifold, to construct systems of automatic control on a given manifold, on inverse problems of dynamics, on the construction of program motion systems in the works [2-8]. Due to the fact that the program manifold is exposed to various influences when solving different problems, there was a need to study the stability of the manifold itself [8-20]. Detailed review of these studies can be found in the following works [5, 10, 16, 21].

We will consider the equation of the hydraulic actuator, taking into account the compressibility of the fluid contained in the hydraulic cylinder, proposed by V.A. Khokhlov in [23].

$$m\frac{d^3\xi}{dt^3}+h\frac{d^2\xi}{dt^2}+(k_{hl}+k_{he})\frac{d\xi}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\left|P_{fr}\right|sign\frac{d\xi}{dt}\right)=$$
$$=k_{hl}k_v\sqrt{1-\frac{1}{p_0F}\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2}+h\frac{d\xi}{dt}+k_{he}+\left|P_{fr}\right|sign\frac{d\xi}{dt}\right)sign\sigma}\cdot\sigma, \tag{1}$$

where k_v is a speed gain coefficient, p_0 is a fluid pressure in the line, h is a coefficient of viscous friction of the load, k_{he} is a stiffness of external load, P_{fr} is a constant dry friction force, k_{hl} is a stiffness of the liquid, F is an effective place of the piston, m is a mass of moving parts.

Assuming, that there are no dry friction forces, by introducing the necessary notation

$$\lambda_1=\frac{m}{k_{hl}},\quad \lambda_2=\frac{m}{k_{hl}},\quad \lambda_3=1+\frac{k_{he}}{k_{hl}},\quad a=\frac{m}{p_0F},\quad b=\frac{h}{p_0F},\quad c=\frac{k_0}{p_0F},$$

the equation (1) will be written in the following form

$$\lambda_1\dddot{\xi}+\lambda_2\ddot{\xi}+\lambda_3\dot{\xi}=\varphi(\sigma)\cdot\psi(\nu) \tag{2}$$

where the function $\varphi(\sigma)=k_v\sigma$ is continuous in σ and ν is determined by the formula

$$\nu=1-(a\ddot{\xi}+b\dot{\xi}+c\xi)\,sign\,\sigma.$$

The multiplier $\psi(\nu)$, when ν depends on the deflection of the control element ξ, its speed $\dot{\xi}$ and its acceleration $\ddot{\xi}$ is determined as follows:

$$\psi(\nu)=\begin{cases} 1 \quad at \quad \nu\ge 1, \\ \sqrt{\nu} \quad at \quad 0<\nu<1, \\ 0 \quad at \quad \nu\le 0. \end{cases} \tag{3}$$

We reduce equation (2) to the Cauchy normal form

$$\begin{cases} \dot{\xi}=z, \\ \dot{z}=y, \\ \dot{y}=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}z-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}y+\dfrac{1}{\lambda_1}\varphi(\sigma)\psi(\nu), \end{cases} \tag{4}$$

where

$$\nu=1-(ay+bz+c\xi)\,sign\sigma.$$

We consider the problem of constructing on a given smooth program manifold Ω(t) of the following differential equation

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{5}$$

where f, x are n-dimensional vectors, $f\in R^n$ is continuous in all variables and satisfies conditions for the existence of the solution $x(t)=0$, the program manifold Ω(t) is determined by the following equations

$$\Omega(t)\equiv\omega(t,x)=0, \tag{6}$$

where ω is s-dimensional vector $s\le n$, and continuous together with its partial derivatives, the Jacobian rank $H=\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ equals $rank\,H=s$ at all points of the manifold Ω(t). This program (6) is executed exactly only if it satisfies specifies the conditions for the initial values $\omega(t_0,\omega_0)=0$ of the system state vector. However these conditions are not always satisfied due to the presence of other perturbing forces. At building program motion control systems, it is necessary to take into account the stability of the program manifold Ω(t) itself with respect to some functions.

Due to the fact that the program manifold Ω(t) is integral for the system (5) takes place

$$\dot{\omega}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\omega}{\partial t}=F(t,x,\omega), \tag{7}$$

where $F(t,x,0)\equiv 0$ is some Erugin vector function [9].

Together with equation (5), we consider the following indirect automatic control system with speed feedback taking into account external load

$$\begin{gathered} \dot{x}=f(t,x)-b_1\xi,\ t\in I=[0,\infty), \\ \dot{\xi}=z,\quad \dot{z}=-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}z+\frac{1}{\lambda_2}\varphi(\sigma)\cdot\psi(\nu), \\ \sigma=p^T\omega-q\xi-N\dot{\xi}, \end{gathered} \tag{8}$$

where the coefficients $b_1 \in R^n,\ p \in R^s$ are constant, q, N are constant coefficients of position and speed feedback, σ is a total impulse-signal and the differentiable function ξ satisfies the following conditions

$$\varphi(0) = 0 \wedge \varphi(\sigma)\sigma > 0 \quad \forall \sigma \neq 0,$$
$$\frac{d\varphi}{d\sigma}\Big|_{\sigma=0} = \chi > 0, \tag{9}$$

a multiplier $\psi(\nu)$ deforms the function $\varphi(\sigma)$ when the coordinates ξ, σ change. Here, ν is a complex discontinuous function of the automatic control system.

Definition. The program manifold of an indirect control system, taking into account the compressibility of the fluid, is called absolutely stable if it is globally stable on solutions of system (8) for any $\omega(t_0, x_0)$ and $\varphi(\sigma),\ \psi(\nu)$ satisfying conditions (9), (3).

Statement of the problem. Find a condition for the absolute stability of the program manifold of the indirect control system, taking into account the compressibility of the fluid with respect to the vector function ω under conditions (9), (3).

2. Stability of the indirect control system, taking into account the compressibility of the fluid

Due to the fact that the manifold (7) is an integral manifold also for the system (8) - (9), (3) and taking the Erugin function to be linear with respect to the vector function ω:

$$F(t, x, \omega) = -A\omega, \tag{10}$$

we arrive at the following system with respect to ω:

$$\dot{\omega} = -A\omega - b\xi,\ t \in I \ = [0, \infty),$$
$$\dot{\xi} = z, \quad \dot{z} = -\,-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}z + \frac{1}{\lambda_2}\varphi(\sigma)\cdot\psi(\nu), \tag{11}$$
$$\sigma = p^T\omega - q\xi - N\dot{\xi},$$

where $b = Hb_1,\ H = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ and $-A(s \times s)$ is a constant Hurwitz matrix, the nonlinearity $\varphi(\sigma)$ satisfies conditions (9), and the multiple $\psi(\nu)$ is determined by formula (3), $\nu = 1 - (ay + bz + c\xi)\, sign\sigma$.

Using a non-singular transformation, the system (11) can be reduced to an equivalent form [21]:

$$\dot{\omega} = -\rho\omega + \frac{1}{\lambda_2}\varphi(\sigma)\cdot\psi(\nu),$$
$$\dot{\omega}_{s+2} = \frac{1}{\lambda_2}\varphi(\sigma)\cdot\psi(\nu), \tag{12}$$
$$\sigma = g^T\omega,$$

where

$$\omega_{s+1} = \xi, \quad \omega_{s+2} = z, \quad \mu_1 = \ldots \mu_{s+1} = 0, \quad \mu_{s+2} = 1, \quad p_{s+1} = -q, \quad p_{s+2} = -N,$$

and $\rho = diag(\rho_1,...,\rho_s)$ are roots of equation

$$D(\rho) = \|A + \rho E\| = 0. \tag{13}$$

The following theorem is valid.

Theorem. If the Erugin function is linear with respect to ω, the nonlinearity $\varphi(\sigma)$ satisfies condition (9), the function $\psi(\nu)$ is determined by formula (3), the coefficients of rigid and speed feedback are positive , the roots of equation (13) are different positive numbers and $\rho_{s+1} = {k_{hl} + k_{he}}/{m} > 0$, then in order for the program manifold of the automatic system of indirect control, taking into account the compressibility of the fluid was absolutely stable with respect to the vector function ω , it suffices to satisfy equalities

$$g_k + 2l_k \sum_{i=1}^{s+1} \frac{l_i}{\rho_i + \rho_k} = 0 \quad (k = 1,...,s+1),$$

$$g_{s+2} < 0,$$

where $l_1,...,l_{s+1}$ are real numbers.

Funding: This results are supported by grant of the Ministry education and science of Republic Kazakhstan No. AP 09258966 for 2021-2023 years.

REFERENCES

1. Erugin N.P. Construction all the set of systems of differential equations, possessing by given integral curve//Prikladnaya Matematika i Mecanika, 1952, 6, 659-670. (In Russ.)

2. Galiullin A.S. Some questions of program motion stability. - Kazan. 1960. - 87 p. (In Russ.)

3. Galiullin A.S. Inverse Problems of Dynamics. Nauka. Moscow1986. – 224 p. (In Russ.)

4. Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. et al. Construction of Systems of Program Motion. Nauka. Moscow. 1971. (In Russ.)

5. Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. A survey of investigating on analytic construction of program motion’s systems// Vestnik RUDN. 1994, No. 1., 5-21. (In Russ.)

6. Mukharlyamov R. G. Stabilization of motions of mechanical systems on given manifolds of the phase space. // App. mat. and mechanics. 2006. V. 70, No. 2. - S. 236-249. (In Russ.)

7. Mukharlyamov R. G. Reduction to a given structure of the equations of dynamics of systems with constraints// Prikl. mat. and mechanics. 2007. V. 71, No. 3. - S. 401-410. (In Russ.)

8. Mukametzyanov I.A. On stability of a program manifold. I., II. //Differential Equations. 1973. Vol. 9. No 5. P. 846-856., 1973. Vol. 9. No 6. P. 1057-1048. (In Russ.).

9. Maygarin B.G. Stability and quality of process of nonlinear automatic control system, Alma-Ata. Nauka. 1981. (In Russ.)

10. Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion. Almaty. Gylym. 1999. (In Russ.)

11. Zhumatov S.S. Stability of a program manifold of control systems with locally quadratic relationsw // Ukrainian Mathematical Journal. 2009. Vol.61. No 3. P.500-509. https://doi.- org/10.1007/s 11253-008-0224-y

12. Zhumatov S.S. Exponential stability of a program manifold of indirect control systems // Ukrainian Mathematical Journal. 2010. Vol.62. No 6. P.907-915. https://doi.org/10.1007/s 11253-010-0399-2

13. Tleubergenov M.T. On the inverse stochastic reconstruction problem // Differential Equations. 2014. Vol. 50. No 2. P. 274-278. https://doi.org/10.1134/s 0012266 11402 0165

14. Mukharlyamov R.G. Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Contraints// Journal of Computer and Systems Sciences International. 2015. 54, No.1., 13–26.

15. Vasilina G.K., Tleubergenov M.T. Solution of the problem of stochastic stability of an integral manifold by the second Lyapunov method // Ukrainian Mathematical Journal. 2016. Vol.68. No 1. P.14-28. https://doi.org/10.1007/s 11253-016-1205-6

16. Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. Springer International Publishing Switzerland. 2016.

17. Zhumatov S.S. On an instability of the indirect control systems in the neighborhood of program manifold // Mathematical Journal.- Almaty, 2017. Vol.17. No 1. P.91-97.

18. Samoilenko A.M., Stanzhytsskj O.M. The reduction principle in stability theory of invariant sets for stochastic Ito type systems // Differentialnye uravnenya. 2001. 53(2). – P. 282– 285.

19. Zhumatov S.S. Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems // News of the NAS RK. Physico-mathematical series. 2018. V.6. No 6. – P.37– 43.

20. Zhumatov S.S. On the stability of a program manifold of control systems with variable coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. 2020. Vol. 71, No 8. – P. 1202-1213. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-019-01707-7.

21. Zhumatov S.S. On the absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities // Mathematical Journal. 2019. Vol.20. No 4. P.35-45.

22. Letov A.M. Stability of nonlinear controlled systems. M., Nauka. 1962. 484 p. (In Russ.)

23. Khokhlov I.A. Electrohydraulic servo drive. M., Nauka. 1966. (In Russ.)

24. Shimanov S.N. On stability in the whole of one nonlinear system// Uspekhi matematicheskikh nauk. 1953. V. 8. No. 6 (58) - P. 155-158. (In Russ.)

25. Zhumatov S.S. Stability of the program manifold of different automatic indirect control systems, News of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University. Mathematics, physics, computer science series.-2021. 16: 1 (2021), P. 69-82(In Kazakh)

УДК 517.518

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛОКАЛЬНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА МОРРИ

Нурсултанов Е.Д., Джумабаева Д.Г.

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

e-mail: er-nurs@yandex.ru, jamilya_ast@mail.ru

1. ***Локальные анизотропные пространства типа Морри***.

В теории дифференциальных уравнений и теории вариации пространства Морри и их обобщения играют важную роль. Пространства Морри были введены Морри в 1938 г. [3] и изучались в следствие вопросов регулярных решений нелинейных эллиптических уравнений и систем. В последние десятилетия были хорошо изучены локальные и обобщенные пространства Морри в изотропных случаях [1, 5].

Интерполяционные методы функциональных пространств являются одним из мощных аппаратов математического анализа. Однако до сих пор остается много проблем в теории интерполяции анизотропных пространств. Исследованию данного вопроса посвящены работы Д.Л. Фернандеса [2] и других. В работе Е.Д. Нурсултанова [4] введен и изучен метод интерполяции для анизотропных пространств.

В данной работе рассматриваются локальные анизотропные пространства типа Морри, их свойства и их интерполяция.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Через G_k обозначим множество всех кубов вида

$$[0, 2^k)^d + 2^k m, \quad m \in \mathbb{Z}^d.$$

Очевидно, что

$$\mathbb{R}^d = \coprod_{Q \in G_k} Q$$

здесь $\coprod Q$ означает объединение взаимно не пересекающихся множеств.

Множество $\mathbb{G} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} G_k$ назовем семейством диадических кубов в $\mathbb{R}^d$. Заметим, что каждый куб $Q \in G_k$ разбивается на 2^d кубов из G_{k-1}.

Семейство взаимно не пересекающихся кубов $\mathbb{T} = \{Q\} \subset \mathbb{G}$ назовем локальным разбиением пространства $\mathbb{R}^d$, если:

1. $\mathbb{R}^d = \overline{\coprod_{Q \in G_k} Q}$;
2. $|\mathbb{T} \cap G_k| < \infty$.

Здесь и далее $|A|$ есть количество элементов во множестве A.

Теперь пусть $\overline{n} = (n_1, \dots, n_d)$: $n_i \in \mathbb{N}$, $|n| = n_1 + \dots + n_d$, $\overline{k} = (k_1, \dots, k_d)$: $k_i \in \mathbb{Z}$.

Обозначим $G_{\overline{k}} = \left\{Q = Q_1 \times \dots \times Q_d\colon Q_i \in G_{k_i}, \ i = \overline{1, d}\right\}$. Взаимно не пересекающиеся кубы $\mathbb{T}_i = \{Q_i\} \subset G_{k_i}$ назовем локальным разбиением пространства $\mathbb{R}^{n_1}, \dots \mathbb{R}^{n_d}$ соответственно. Семейство взаимно не пересекающихся параллелепипедов $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \times \dots \times \mathbb{T}_d = \left\{Q = Q_1 \times \dots \times Q_d\colon Q_i \in \mathbb{T}_i, \ i = \overline{1, d}\right\}$ будет называться, соответственно, локальным разбиением пространства $\mathbb{R}^{|n|}$.

Пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, векторы $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $\overline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_d)$: $0 < p_i, q_i \le \infty$, $i = \overline{1, d}$. Для произвольных векторов $\overline{a} = (a_1, \dots, a_d)$ и $\overline{b} = (b_1, \dots, b_d)$ через $\langle a, b\rangle$ будем обозначать $\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + \dots + a_d b_d$, через $\frac{\overline{a}}{b} = (\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_d}{b_d})$.

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \times \dots \times \mathbb{T}_d$ – локальное разбиение $\mathbb{R}^{|n|}$, $\mathbb{T}_{\overline{k}} = \mathbb{T} \cap G_{\overline{k}}$. Определим анизотропное локальное пространство Морри $LM^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}, \overline{q}}(\mathbb{T})$ как множество измеримых функций f для которых

$$\|f\|_{LM^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}, \overline{q}}(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k_d \in Z} \cdots \left(\sum_{k_1 \in Z} \left(2^{-\langle \overline{k}, \overline{\lambda}\rangle} \sum_{Q \in \mathbb{T}_{\overline{k}}} \|f\|_{L_{\overline{p}}(Q)}\right)^{q_1}\right)^{q_2/q_1} \cdots\right)^{1/q_d} < \infty.$$

В частности, когда $q_i = \infty,\ \ i = \overline{1,d}$ выражение $\left(\sum_{k_d \in \Omega_d} \cdots \left(\sum_{k_d \in \Omega_d} \left(2^{-\langle \overline{k}, \overline{\lambda} \rangle} \sum_{Q \in \mathbb{T}_{\overline{k}}} \left|a_{\overline{k}}\right|\right)^{q_1}\right)^{q_2/q_1} \cdots\right)^{1/q_d}$ понимается как $\sup\limits_{\overline{k} \in \Omega} \left|a_{\overline{k}}\right|$, где $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$.

В изотропном случае данные локальные пространства типа Морри и их свойства были подробно рассмотрены в работе Нурсултанова Е. и Сурагана Д. [5].

2. ***Свойства локальных анизотропных пространств типа Морри***.

Для локальных анизотропных пространств типа Морри справедлива следующая

Теорема 1.

(i) Пусть векторы $\overline{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $\overline{p_0} = (p_1^0, \dots, p_d^0)$, $\overline{p_1} = (p_1^1, \dots, p_d^1)$, $\overline{q} = (q_1, \dots, q_d)$ такие, что $0 < p_i^0 < p_1^1 < \infty$ $0 < q_i \leq \infty$, $\mathbb{T}$ – локальное разбиение $\mathbb{R}^{|n|}$. Тогда
$$LM_{\overline{p}_1, \overline{q}}^{\overline{\alpha}}(\mathbb{T}) \hookrightarrow LM_{\overline{p}_0, \overline{q}}^{\overline{\beta}}(\mathbb{T}),$$
где $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}^d, \overline{\beta} \in \mathbb{R}^d$ такие, что $\overline{\beta} = \overline{\alpha} - \frac{\overline{n}}{\overline{p}_1} + \frac{\overline{n}}{\overline{p}_0}$;

(ii) Если векторы $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ $\overline{p} = (p_1, \dots, p_d)$, $\overline{q_0} = (q_1^0, \dots, q_d^0)$, $\overline{q_1} = (q_1^1, \dots, q_d^1)$ такие, что $0 < q_i^0 < q_i^1 \leq \infty$, $\mathbb{T}$ – локальное разбиение $\mathbb{R}^{|n|}$. Тогда
$$LM_{\overline{p}, \overline{q}_0}^{\overline{\lambda}}(\mathbb{T}) \hookrightarrow LM_{\overline{p}, \overline{q}_1}^{\overline{\lambda}}(\mathbb{T}).$$

3. ***Интерполяция локальных анизотропных пространств типа Морри.***

Пусть $\overline{A}_0 = (A_1^0, \dots, A_d^0)$, $\overline{A}_1 = (A_1^1, \dots, A_d^1)$ – пара анизотропных пространств. $E = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \colon \ \varepsilon_i = 0$ или $\ \varepsilon_i = 1,\ i = \overline{1,d}\}$ – вершины d-мерного единичного куба. Для произвольного $\varepsilon \in E$ рассмотрим пространство $A_\varepsilon = (A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_d^{\varepsilon_d})$ с нормой
$$\|a\|_{A_\varepsilon} = \left\| \dots \|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}} \dots \right\|_{A_d^{\varepsilon_d}}.$$

Пару анизотропных пространств $\overline{A}_0 = (A_1^0, \dots, A_d^0)$, $\overline{A}_1 = (A_1^1, \dots, A_d^1)$ назовем совместимой, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $A_\varepsilon,\ \varepsilon \in E$.

Приведем определение метода анизотропной интерполяции.

Пусть $A = (A_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ – совместимая пара банаховых пространств. Для произвольного вектора $\overline{k} \in \mathbb{Z}^d$ обозначим $2^{\overline{k}} = (2^{k_1}, \dots, 2^{k_d})$. Рассмотрим K – функционал
$$K\left(2^{\overline{k}}, a;\ A_\varepsilon \colon \varepsilon \in E\right) = \inf\left\{\sum_{\varepsilon \in E} 2^{\langle \overline{k}, \varepsilon \rangle} \|a\|_{A_\varepsilon} \colon \ \ a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon,\ \ a_\varepsilon \in A_\varepsilon\right\}.$$

Если векторы $\overline{q}=(q_1,\dots,q_d),\overline{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_d)$ такие, что $0<q_i<\infty$, $0<\theta_i<1$, то

$$A_{\overline{\theta},\overline{q}}=(A_\varepsilon\colon \varepsilon\in E)_{\overline{\theta},\overline{q}}$$

$$=\left\{a=\sum_{\varepsilon\in E}a_\varepsilon,\ \ a_\varepsilon\in A_\varepsilon\colon \|a\|_{A_{\overline{\theta},\overline{q}}}\right.$$

$$\left.=\left(\sum_{k_d=1}^{\infty}\dots\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\left(2^{-\langle\overline{\theta},\overline{k}\rangle}K\left(2^{\overline{k}},a\right)\right)^{q_1}\right)^{q_2/q_1}\dots\right)^{1/q_d}<\infty\right\},$$

а при $\overline{q}=\overline{\infty}$

$$A_{\overline{\theta},\overline{\infty}}=(A_\varepsilon\colon \varepsilon\in E)_{\overline{\theta},\overline{\infty}}$$

$$=\left\{a=\sum_{\varepsilon\in E}a_\varepsilon,\ \ a_\varepsilon\in A_\varepsilon\colon \|a\|_{A_{\overline{\theta},\overline{\infty}}}=\sup_{\overline{k}\in\mathbb{Z}^d}2^{-\langle\overline{k},\overline{\lambda}\rangle}2^{-\langle\overline{\theta},\overline{k}\rangle}K\left(2^{\overline{k}},a\right)\right.$$

$$\left.<\infty\right\}.$$

Теорема 2. Пусть векторы $\overline{\lambda_0}=(\lambda_1^0,\dots,\lambda_d^0),\ \overline{\lambda_1}=(\lambda_1^1,\dots,\lambda_d^1),\ \overline{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_d)\ \overline{p}=(p_1,\dots,p_d),\ \overline{q}=(q_1,\dots,q_d),\ \overline{q_0}=(q_1^0,\dots,q_d^0),\ \overline{n}=(n_1,\dots,n_d)$ такие, что $0<p_i\le\infty$ $0<q_i^0,q_i\le\infty$, $-\infty<\lambda_i^0<\lambda_i^1<+\infty$, $\theta_i\in(0;1)$, $n_i\in\mathbb{N}$. Для произвольного $\varepsilon\in E$ обозначим через $\overline{\lambda_\varepsilon}=\left(\lambda_1^{\varepsilon_1},\dots,\lambda_d^{\varepsilon_d}\right)$, где $\lambda_i^{\varepsilon_i}=\begin{cases}\lambda_i^0, & \varepsilon_i=0,\\ \lambda_i^1, & \varepsilon_i=1.\end{cases}$ $\mathbb{T}$ – локальное разбиение $\mathbb{R}^{|n|}$. Тогда

$$\left(LM_{\overline{p},\overline{q}_0}^{\overline{\lambda}_\varepsilon}(\mathbb{T})\colon \varepsilon\in E\right)_{\overline{\theta},\overline{q}}=LM_{\overline{p},\overline{q}}^{\overline{\lambda}}(\mathbb{T}),$$

где $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\colon \lambda_i=(1-\theta_i)\lambda_i^0+\theta_i\lambda_i^1$.

4. *Пространства* $M_{\overline{p},\overline{q}}^{\overline{\lambda}}$.

Пусть $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_d)\in\mathbb{R}^d$, векторы $\overline{p}=(p_1,p_2,\dots,p_d)$, $\overline{q}=(q_1,q_2,\dots,q_d)\colon\ 0<p_i,q_i\le\infty,\ i=\overline{1,d}$, $\overline{n}=(n_1,\dots,n_d)\colon\ n_i\in\mathbb{N}$, $\overline{k}=(k_1,\dots,k_d)\colon\ k_i\in\mathbb{Z}$, $G_{\overline{k}}=\left\{Q=Q_1\times\dots\times Q_d\colon\ Q_i\in G_{k_i},\ i=\overline{1,d}\right\}$

Обобщенные анизотропные пространства типа Морри $M_{\overline{p},\overline{q}}^{\overline{\lambda}}$ определим как множество всех измеримых по Лебегу функций $f\in L_{\overline{p}}^{loc}(\mathbb{R}^d)$для которых конечна следующая норма

$$\|f\|_{M^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{q}}} = \left(\sum_{k_d \in Z} \cdots \left(\sum_{k_1 \in Z} \left(2^{-\langle \overline{k}, \overline{\lambda} \rangle} \sup_{Q \in G_{\overline{k}}} \|f\|_{L_{\overline{p}}(Q)} \right)^{q_1} \right)^{q_2/q_1} \cdots \right)^{1/q_d} < \infty.$$

Множество измеримых функций $f(\overline{x})$ для которых конечна величина

$$\sup_{\|g\|_{M^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{q}}}=1} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n_d}} f(x_1, \dots, x_d)\, g(x_1, \dots, x_d)\; dx_1 \dots dx_d$$

назовем дуальным пространством к пространству Морри $M^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{q}}$ и обозначим через $\left(M^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{q}}\right)'$.

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \times \cdots \times \mathbb{T}_d$ – локальное разбиение $\mathbb{R}^{|n|}$, $\mathbb{T}_{\overline{k}} = \mathbb{T} \cap G_{\overline{k}}$.

Здесь справедлива следующая

Теорема 3. Пусть для векторов $\overline{p},\ \overline{q},\ \overline{\alpha},\ \overline{n}$ выполняются условия $1 \leq p_i, q_i \leq \infty, 0 \leq \alpha_i \leq \frac{n_i}{p_i},\ i = \overline{1,d}$. Тогда верно неравенство

$$\|f\|_{\left(M^{\overline{\alpha}}_{\overline{p},\overline{q}}\right)'} \lesssim \inf_{\mathbb{T}} \left(\sum_{m_d \in Z} \cdots \left(\sum_{m_1 \in Z} \left(2^{\langle \overline{m}, \overline{\lambda} \rangle} \sum_{Q \in \mathbb{T}_{\overline{m}}} \|f\|_{L_{\overline{p}'}(Q)} \right)^{q_1'} \right)^{q_2'/q_1'} \cdots \right)^{1/q_d'}$$

$$= \inf_{\mathbb{T}} \|f\|_{LM^{-\overline{\alpha}}_{\overline{p}',\overline{q}'}(\mathbb{T})}$$

здесь нижняя точная грань берется по всем локальным разбиениям $\mathbb{T}$ пространства $\mathbb{R}^{|n|}$.

Работа выполнена в рамках гранта AP14870758.

Список использованной литературы

1. V. I. Burenkov, E. D. Nursultanov. “Interpolation Theorems for Nonlinear Operators in General Morrey-Type Spaces and Their Applications”, Proc. Steklov Inst. Math., 312 (2021), 124–149
2. Fernandez D.L. Interpolation of 2^n Banach spaces and multiparametric approximation. J. Approxim. Theory, 1983, 38, № 3, 240-257.
3. Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126-166.
4. Nursultanov E.D. Application of interpolation methods to the study of properties of functions of several variables, Math. Notes, vol.75, 3 (2004) 341-351.
5. Nursultanov E.D., Suragan D. On the convolution operator in Morrey spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, V. 515, Issue 1, 2022.

УДК 517.518

О ПЛОТНОСТИ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОМ ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Ойнаров Р.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: o_ryskul@mail.ru

Аннотация. На полуоси определяется весовое пространство Соболева. Предполагается, что все весовые функции, участвующее в определении пространства Соболева достаточно гладкие функции. Поэтому множество финитных бесконечно гладких функций принадлежит пространству Соболева, и его замыкание по норме пространства образует подпространство этого пространства. Исследуется взаимоотношение этих пространств в зависимости от интегрального поведения весовых функций в окрестности нуля и бесконечности.

Ключевые слова: весовая функция, весовое пространство Соболева, замыкание множества финитных функций, плотность.

Введение. Пусть $I=(0,\infty)$, $1<p,\ q<\infty$, r, v и u – почти всюду положительные функции такие, что r – непрерывно дифференцируемая, u, v – локально интегрируемое на интервале I. Кроме того $r^{-1}\equiv\frac{1}{r}\in L_1^{loc}(I)$, $v^{-p'}\in L_1^{loc}(I)$, $p'=\frac{p}{p-1}$.

Положим $D_r^2f(t)=\frac{d}{dt}r(t)\frac{df(t)}{dt}$ и $D_r^1f(t)=r(t)\frac{df(t)}{dt}$. Пусть $C_0^\infty(I)$ – множество финитных и бесконечно непрерывно дифференцируемых функции.

Рассмотрим весовое пространство Соболева $W_{p,v}^2(r,I)$, как совокупность функции $f\colon I\to R$, имеющих обобщенную производную вместе с функцией $D_r^1f(t)$ на интервале I и с конечной нормы

$$\|f\|_{W_{p,v}^2(r)}=\|vD_r^2f\|_p+|D_r^1f(1)|+|f(1)|, \tag{1}$$

где $\|\cdot\|_p$ – обычная норма пространства $L_p(I)$.

В силу условия на функции r и v имеем $C_0^\infty(I)\subset W_{p,v}^2(r)$. Обозначим через $\dot{W}_{p,v}^2(r)\equiv\dot{W}_{p,v}^2(r,I)$ замыкание множества $C_0^\infty(I)$ по норме (1).

В зависимости от степени сингулярности функций $v^{-1}\equiv\frac{1}{v}, r^{-1}\equiv\frac{1}{r}$ в нуле и на бесконечности функции $f\in W_{p,v}^2(r,I)$ может иметь конечные пределы $\lim\limits_{t\to0^+}f(t)=f(0)$, $\lim\limits_{t\to0^+}D_r^1f(t)=D_r^1f(0)$, $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=f(\infty)$ и

$\lim_{t\to\infty} D_r^1 f(t) = D_r^1 f(\infty)$ или не иметь их. Элементы множества $\dot{W}_{p,v}^2(I)$ могут отличаться от элементов $W_{p,v}^2(I)$ только поведением в окрестности точки нуля и бесконечности. Опишем множество $\dot{W}_{p,v}^2(I)$ в терминах элементов пространства $W_{p,v}^2(r,I)$. В зависимости от степени сингулярности весовых функции v^{-1}, r^{-1}в нуле и на бесконечности, множество $\dot{W}_{p,v}^2(I)$ может совпадать с пространством $W_{p,v}^2(I)$, а если не совпадает, то необходимо описать прямое дополнение его до всего пространства.

Одной из важных задач функциональных классов являются характеризации в них замыкания множества гладких и финитных гладких функций (см. [1], [2]). Обычно, в невесовом пространстве гладких функций множество финитных функций, вообще говоря, неплотно. Но в весовом пространстве Соболева, при сильном вырождении веса множество финитных гладких функций может оказаться плотным. Поэтому важным вопросом является задача о характеризации замыкания финитных гладких функций в рассматриваемом пространстве (см., например, [3], [4], [5], [6]). В зависимости от этого обычно решается вопрос о постановке краевых задач для дифференциальных уравнений (см.[7], [8]).

Основные результаты

Положим $I_0 = (0,1]$, $I_\infty = [1,\infty)$ и рассмотрим множества $W_{p,v}^2(r;I_0)$ $(\dot{W}_{p,v}^2(r;I_0))$, $W_{p,v}^2(r;I_\infty)$ $(\dot{W}_{p,v}^2(r;I_\infty))$ как множество сужений функции $f \in W_{p,v}^2(r;I)$ $(f \in \dot{W}_{p,v}^2(r;I))$ соответственно на интервале I_0, I_∞. Далее функции $f \in W_{p,v}^2(r;I)$и ее сужения на интервале I_0, I_∞ обозначим одной и той же буквой.

Пусть $\dot{C}^\infty\,(I_0)$ и $\dot{C}^\infty\,(I_\infty)$ множества сужений функций из $C_0^\infty(I)$, соответственно, на интервале I_0, I_∞. Тогда $\dot{W}_{p,v}^2(r;I_i)$, как множество сужений функций из $\dot{W}_{p,v}^2(r;I_i)$ на интервале I_i, является замыканием множества $\dot{C}^\infty\,(I_i)$ по норме

$$\|f\|_{W_{p,v}^2(r,I_i)} = \|vD_r^2 f\|_{p,I_i} + |D_r^1 f(1)| + |f(1)|$$

пространства $W_{p,v}^2(r;I_i)$ где $i = 0,\infty$.

Положим

$$\Phi_0(I_\infty) = \{c\chi_{I_\infty}(t) : c \in R\},$$

$$\Phi_1(I_\infty) = \left\{c\chi_{I_\infty}(t)\int_1^t r^{-1}(x)dx : c \in R\right\},$$

$$\Phi_2(I_\infty) = \left\{ c_1\chi_{I_\infty}(t) + c_2\chi_{I_\infty}(t)\int_1^t r^{-1}(x)dx : c_1 \in R, c_2 \in R \right\},$$

где χ_{I_∞}– характеристическая функция интервала I_∞, а также

$$R_0W^2_{p,v}(r; I_\infty) = \{f \in W^2_{p,v}(r, I_\infty): f(\infty) = 0\},$$

$$R_1W^2_{p,v}(r; I_\infty) = \{f \in W^2_{p,v}(r, I_\infty): D^1_r f(\infty) = 0\},$$

$$R_2W^2_{p,v}(r; I_\infty) = \{f \in W^2_{p,v}(r, I_\infty): f(\infty) = D^1_r f(\infty) = 0\}.$$

Теорема 1.1. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда

(i) если $v^{-1} \notin L_{p'}(I_\infty)$ и $r^{-1} \notin L_1(I_\infty)$ или $r^{-1} \in L_1(I_\infty)$ и

$$\int_1^\propto v^{-p'}(t)\left(\int_t^\propto r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dx = \infty,$$

то $\dot{W}^2_{p,v}(r, I_\infty) = W^2_{p,v}(r, I_\infty)$;

(ii) если $v^{-1} \notin L_{p'}(I_\infty)$, $r^{-1} \notin L_1(I_\infty)$ и $\int_1^\infty v^{-p'}(t)\left(\int_t^\infty r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dt < \infty$,

то

$$\dot{W}^2_{p,v}(r, I_\infty) = R_0W^2_{p,v}(r, I_\infty) \text{ и } W^2_{p,v}(r, I_\infty) = \dot{W}^2_{p,v}(r, I_\infty) + \Phi_0(I_\infty);$$

(iii) если $v^{-1} \in L_{p'}(I_\infty)$, $r^{-1} \notin L_1(I_\infty)$ и $\int_1^\infty v^{-p'}(t)\left(\int_1^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dt = \infty$,

то

$$\dot{W}^2_{p,v}(r, I_\infty) = R_1W^2_{p,v}(r, I_\infty) \text{ и } W^2_{p,v}(r, I_\infty) = \dot{W}^2_{p,v}(r, I_\infty) + \Phi_1(I_\infty);$$

(iv) если выполнено $v^{-1} \in L_{p'}(I_\infty)$, $r^{-1} \in L_1(I_\infty)$, то

$$\dot{W}^2_{p,v}(r, I_\infty) = R_2W^2_{p,v}(r, I_\infty) \text{ и } W^2_{p,v}(r, I_\infty) = \dot{W}^2_{p,v}(r, I_\infty) + \Phi_2(I_\infty).$$

Теперь рассмотрим пространство $W^2_{p,v}(r;\ I_0)$.

Пусть

$$\mathcal{L}_0W^2_{p,v}(r;\ I_0) = \{f \dot{\in} W^2_{p,v}(r;\ I_0): f(0) = D^1_r(0) = 0\},$$

$$\mathcal{L}_0W^2_{p,v}(r;\ I_0) = \{f \dot{\in} W^2_{p,v}(r;\ I_0): f(0) = 0\}.$$

$$\mathcal{L}_0W^2_{p,v}(r;\ I_0) = \{f \dot{\in} W^2_{p,v}(r;\ I_0): f(0) = D^1_r(0) = 0\}$$

Положим

$$\Phi_0(I_0) = \{c\chi_{I_0}(t): c \in R\},$$

$$\Phi_1(I_0) = \left\{c\chi_{I_0}(t)\int_t^1 r^{-1}(x)dx : c \in R\right\},$$

$$\Phi_2(I_0) = \left\{ c_1\chi_{I_0}(t) + c_2\chi_{I_0}(t)\int_t^1 r^{-1}(x)dx : c_1 \in R, c_2 \in R \right\}.$$

Аналогичным образом, как и теорема 1.1 доказывается.

Теорема 1.2. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда

(i) если $v^{-1} \notin L_{p'}(I_0)$ и $r^{-1} \notin L_1(I_0)$ или $r^{-1} \in L_1(I_0)$ и

$$\int_0^t v^{-p'}(t)\left(\int_0^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dx = \infty,$$

то

$$\dot{W}^2_{p,v}(r, I_0) = W^2_{p,v}(r, I_0);$$

(ii) если и $v^{-1} \notin L_{p'}(I_0)$, $r^{-1} \notin L_1(I_0)$ и $\int_0^1 v^{-p'}(t)\left(\int_0^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dt < \infty$,

то

$$\dot{W}^2_{p,v}(r, I_0) = R_0 W^2_{p,v}(r, I_0) \text{ и } W^2_{p,v}(r, I_0) = \dot{W}^2_{p,v}(r, I_0) + \Phi_0(I_0);$$

(iii) если $v^{-1} \in L_{p'}(I_0)$, $r^{-1} \notin L_1(I_0)$ и $\int_0^1 v^{-p'}(t)\left(\int_t^1 r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dt = \infty$,

то

$$\dot{W}^2_{p,v}(r, I_0) = \mathcal{L}_1 W^2_{p,v}(r, I_0) \text{ и } W^2_{p,v}(r, I_0) = \dot{W}^2_{p,v}(r, I_0) + \Phi_1(I_0);$$

(iv) если выполнено $v^{-1} \in L_{p'}(I_0)$, $r^{-1} \in L_1(I_0)$, то

$$\dot{W}^2_{p,v}(r, I_0) = \mathcal{L}_2 W^2_{p,v}(r, I_0) \text{ и } W^2_{p,v}(r, I_0) = \dot{W}^2_{p,v}(r, I_0) + \Phi_2(I_0).$$

Теперь, комбинируя утверждения теорем 2.1 и 2.2 можно получить описание множества $\dot{W}^2_{p,v}(r, I)$в терминах элементов множества $W^2_{p,v}(r, I)$.

Список использованной литературы

1. Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения, Анализ – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. фундам. направления, 26, ВИНИТИ, М., 1988, 5–157.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения, Наука, М., 1996.
3. Бесов О.В. О плотности финитных функций в весовом пространстве С.Л. Соболева// Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 9, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, 161, 1983, 29–47.
4. Лизоркин П.И. О замыкании множества финитных функций в весовом пространстве Wlp,?// Докл. АН СССР, 239:4 (1978), 789–792.
5. Кудрявцев Л.Д. О построении последовательности финитных функций, аппроксимирующих функции весовых классов// Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 8, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, 156, 1980,

121–129.
6. Ойнаров Р. О плотности финитных функций в весовых пространствах и весовые неравенства//ДАН СССР, 1988, т. 303, №3, с.559-563
7. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптических уравнений с вырождением.-Вариационный метод
8. // Труды МИАН СССР, 1981, Т.157, с.90-118.
9. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптических уравнений с вырождением и обобщенной правой частью//Труды МИАН СССР., 1983, Т.161, с.157-183.

УДК 517.95

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ЮНГА ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Оспанов М.Н., Бургумбаева С.К.
Евразийский национальный университет им.Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: myrzan66@mail.ru , saulenai@yandex.ru

1. Введение

Пусть $1 < p, q < \infty$, такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Классическое неравенство Юнга, это

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{C}.$$

В общем случае это неравенство для операторов не выполняется. Если A - унитарная коммутативная $C^* -$ алгебра, тогда

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q, \qquad \forall\, a, b \in A \tag{1}$$

(см. [7, лемма 2.2]). Bhatia и Kittaneh доказали, что если $x, y \in \mathbb{M}_n$ положительны, то

$$s_j(xy) \leq s_j\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right), \qquad j = 1,2,\dots,n, \tag{2}$$

где $\mathbb{M}_n$ - множество всех $n \times n$ комплексных матриц, $s_j(a)$ $(j = 1,2,\dots,n)$ – сингулярное значение $a \in \mathbb{M}_n$. В [2] Ando получил обобщение (2) в виде следующего: если $x, y \in \mathbb{M}_n$, тогда

$$s_j(xy^*) \leq s_j\left(\frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q\right), \qquad j = 1,2,\dots,n. \tag{3}$$

(3) эквивалентно утверждению, что существует унитарное u, такое, что

$$u(xy^*)u^* \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q. \tag{4}$$

Erlijman, Farenick и Zeng [7] доказали, что (4) справедливо для компактных операторов, действующих в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве (см. [7], теорема 1.1). Bhatia and Kittaneh в [4] предположили, что если $x, y \in \mathbb{M}_n$, то

$$s_j(xy)^{\frac{1}{2}} \le s_j\left(\frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|y|\right), \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{5}$$

Эта гипотеза была решена положительно Drury [6]. В [5] Choudhury и Sivakumar доказали, что если $k \in N,$ и $p, q \notin [2,2k)$, то

$$s_j(|xy^*|)^{\frac{1}{k}} \le s_j\left(\frac{1}{p}|x|^{\frac{p}{k}} + \frac{1}{q}|y|^{\frac{p}{k}}\right), \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{6}$$

В [9] Farenick and Manjegani расширили (3) следующим образом: если $x, y \in \mathcal{M}$, то

$$\mu_t(xy^*) \le \mu_t\left(\frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q\right), \quad t > 0. \tag{7}$$

где $\mathcal{M}$ - полуконечная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуфинитным следом τ и μ_t - обобщенное сингулярное число $z \in \mathcal{M}$.

Целью настоящей работы является дальнейшее доказательство обобщений (5) и (6) в контексте алгебр фон Неймана. Мы показываем, что если $r \ge 2min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\}$, то для τ -измеримых операторов x и y выполняется следующее неравенство.

$$\mu_t(|xy^*|^r) \le \mu_t\left(\frac{1}{p}|x|^{pr} + \frac{1}{q}|y|^{qr}\right), \quad t > 0. \tag{8}$$

2. Предварительные результаты

На протяжении всей этой работы, если не указано иное, $\mathcal{M}$ всегда обозначает полуограниченная алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве H с нормальным точным полуфинитным следом τ. Множество всех τ -измеримых операторов обозначается через $L_0(\mathcal{M})$. Через P_K обозначается ортогональная проекция из H на замкнутое подпространство $K \subset H$. Если $x \in \mathcal{M}$ и $x = u|x|$ является его полярным разложением, то $u^*u = P_{(\ker x)^\perp}$ и $uu^* = P_{\overline{\mathrm{im}x}}$ (с $\mathrm{im}x = x(H)$). Напомним, что $r(x) = u^*u$ и $\ell(x) = uu^*$ называются левой и правой опорами x соответственно. Мы обозначаем через $\mathcal{M}^+$ положительную часть $\mathcal{M}$.

Пусть $P(\mathcal{M})$ – множество всех проекций $\mathcal{M}$. Две проекции e и f называются эквивалентными, если существует частичная изометрия $u \in \mathcal{M}$ такая, что $u^*u = e$ и $uu^* = f$. В этом случае мы записываем $e \sim f$. Обратите внимание на очень полезный факт, что $r(x) = \ell(x^*) \sim r(x^*) = \ell(x)$ для любого $x \in \mathcal{M}$ в силу полярного разложения x. Если $e \in P(\mathcal{M})$ и $b \in \mathcal{M}^+$ обратимы, то

$$\ell(b^{-1}e) \sim r(b^{-1}e) = e. \tag{9}$$

Учитывая проекцию $e \in P(\mathcal{M})$, мы обозначим через $\mathcal{M}_e$ приведенную алгебру фон Неймана $e\mathcal{M}e$ е от $\mathcal{M}$ на $e(H)$ со следом $\tau_e = \tau|_{e\mathcal{M}e}$.

Для $x \in L_0(\mathcal{M})$ функция распределения $\lambda(x)$ от x определяется как $\lambda_t(x) = \tau(e_{(t,\infty)}(|x|))$ при $t>0$, где $e_{(t,\infty)}(|x|)$ представляет собой спектральную проекцию $|x|$ в интервале (t, ∞), а обобщенные сингулярные числа $\mu(x)$ от x на $\mu_t(x) = \inf\{s > 0: \lambda_s(x) \ \leq t\}$ при $t > 0$.

Будут использоваться следующие элементарные свойства обобщенных сингулярных чисел $\mu_t(x)$ (подробнее см. [8, лемма 2.5 и 3.4]).

Лемма 2.1. Пусть $x, y \in L_0(\mathcal{M})$ и $t, s > 0$.

(i) $\mu(x)$ непрерывен справа на $(0, \infty)$ и $\lim_{t\downarrow 0}\mu_t(x) = \|x\|$.

(ii) $\mu_t(x) = \mu_t(|x|) = \mu_t(x^*)$ и $\mu_t(\alpha x) = |\alpha|\mu_t(x)$ для $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) $\mu_t(x) \leq \mu_t(y)$, если $x \leq y$.

(iv) $\mu_t(uxv) \leq \|u\|\mu_t(x)\|v\|$, для $u, v \in \mathcal{M}$.

(v) $\mu_t(\varphi|x|) = \varphi(\mu_t(|x|))$ для любой непрерывно возрастающей функции φ на $[0, \infty)$ с $\varphi(0) \geq 0$.

(vi) $\mu_{t+s}(x + y) \leq \mu_t(x) + \mu_s(y)$ и $\mu_{t+s}(xy) \leq \mu_t(x)\mu_s(y)$.

(vii) $\mu_t(f) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau(f) \\ 0, & \tau(f) \leq t \end{cases}$ для всех $f \in P(\mathcal{M})$.

(viii) Пусть $(x_n)_{n\geq 1}$ – последовательность τ-измеримых операторов, сходящихся к x в измеряемой топологии. Тогда $\mu_t(x) \leq \liminf_{n\to\infty}\mu_t(x_n)$.

(ix) $\mu_t(x) = \inf\ \{\|xe\| : e \in P(\mathcal{M}), \tau(1 - e) \leq t\}$.

Заметим, что если $\mathcal{M} = \mathbb{M}_n$ и τ - стандартная трасса, то

$$\mu_t(x) = s_j(x), \quad t \in [j-1, j), \quad j = 1,2, \dots, n. j = 1,2, \dots, n,$$

и $\mu_t(x) = 0$ если t$\geq n$.

3. Основные результаты

Лемма 3.1. Пусть $1 < p, q < \infty$, такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p \leq 2$. Предположим, что $x, y \in \mathcal{M}^+$ и y обратим. Если $e = e_{(t,\infty)}(|xy|)$ $(t > 0)$ и $f = \ell(y^{-1}e)$, тогда

$$t^{\frac{2}{q}}f \leq f\left(\frac{1}{p}x^{\frac{2p}{q}} + \frac{1}{q}y^2\right)f$$

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{im}(y^{-1}e)$ является замкнутым подпространством. Если $\xi \in H$, то $f\xi \in \mathrm{im}(y^{-1}e)$, следовательно, $f\xi = y^{-1}e\eta$ для некоторого $\eta \in H$. Из $yf\xi = e\eta = eyf\xi$ следует, что $yf = eyf$. Поскольку

$f-$ это левая опора $y^{-1}e$, $fy^{-1}e = y^{-1}e$. Принимая сопряженные, мы получаем

$$fy = efy, \qquad ey^{-1}f = ey^{-1}.$$

Следовательно,

$$(fy^2f)(y^{-1}ey^{-1}) = f, \qquad (y^{-1}ey^{-1})(fy^2f) = f\,.$$

Работая в $\mathcal{M}_f$, мы видим, что fy^2f и $y^{-1}ey^{-1}$ являются обратными друг другу. Пусть $|xy| = \int_0^\infty \lambda de_\lambda |xy|$ – спектральное разложение $|xy|$. Тогда

$$yx^2y = |xy|^2 = \int_0^\infty \lambda^2 de_\lambda |xy| \geq \int_t^\infty \lambda^2 de_\lambda |xy| \geq \int_t^\infty t^2 de_\lambda |xy| = t^2 e.$$

Итак, из этого следует, что $x^2 > t^2\, y^{-1}ey^{-1}$. По монотонности операторного отображения $z \to z^{\frac{p}{q}}$, $x^{\frac{2p}{q}} \geq t^{\frac{2p}{q}}(\,y^{-1}ey^{-1})^{\frac{p}{q}}$. С другой стороны, $(\,y^{-1}ey^{-1})^{\frac{p}{q}} \in f\mathcal{M}f$, из чего следует, что $fx^{\frac{2p}{q}}f \geq t^{\frac{2p}{q}}(\,y^{-1}ey^{-1})^{\frac{p}{q}}$. С помощью $(fy^2f)^{-1} = y^{-1}ey^{-1}$, заключаем, что

$$fx^{\frac{2p}{q}}f \geq t^{\frac{2p}{q}}(fy^2f)^{-\frac{p}{q}}. \tag{10}$$

Применяя (1) к положительным операторам $(fy^2f)^{-\frac{1}{q}}$ и $(fy^2f)^{\frac{1}{q}}$ мы получаем

$$t^{\frac{2}{q}}f = t^{\frac{2}{q}}(fy^2f)^{-\frac{1}{q}}(fy^2f)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}t^{\frac{2p}{q}}(fy^2f)^{-\frac{p}{q}} + \frac{1}{q}fy^2f.$$

Отсюда, используя (10) мы получаем, что

$$t^{\frac{2}{q}}f \leq f\left(\frac{1}{p}x^{\frac{2p}{q}} + \frac{1}{q}y^2\right)f.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.2. Пусть $x, y \in L_0(\mathcal{M})$. Предположим $1 < p, q < \infty$, такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Если $r \geq 2min\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right\}$, тогда

$$\mu_t(|xy^*|^r) \leq \mu_t\left(\frac{1}{p}|x|^{pr} + \frac{1}{q}|y|^{qr}\right), \qquad t > 0.$$

Доказательство. По симметрии мы рассмотрим только случай $1 < p \leq 2$.

1° Предположим, что $x, y \in \mathcal{M}^+$ и y обратим. Пусть $t > 0$. Без потери общности, пусть будет $\mu_t(x) = \alpha > 0$. Предположим, что $\varepsilon > 0$ удовлетворяет $\alpha - \varepsilon > 0$. Пусть $e = e_{(\alpha-\varepsilon,\infty)}(|xy|)$ и $f_{\alpha-\varepsilon} = \ell(y^{-1}e)$. Тогда по лемме 3.1,

$$(\alpha - \varepsilon)^{\frac{2}{q}} f_{\alpha-\varepsilon} \leq f_{\alpha-\varepsilon}\left(\frac{1}{p}x^{\frac{2p}{q}} + \frac{1}{q}y^2\right)f_{\alpha-\varepsilon}. \tag{11}$$

Из определения $\mu_t(xy)$ следует, что $\lambda_{\alpha-\varepsilon}(|xy|) > t$. Используя (9), получаем

$\tau(f_{\alpha-\varepsilon}) = \tau(e) = \tau(e_{(\alpha-\varepsilon,\infty)}(|xy|))= \lambda_{\alpha-\varepsilon}(|xy|) > t$. По (iii), (iv) и (vii) леммы 2.1, из (11) следует, что

$$(\alpha-\varepsilon)^{\frac{2}{q}} \leq \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{\frac{2p}{q}} + \frac{1}{q}y^2\right).$$

Устремляя ε → 0, мы получаем

$$\mu_t\left(|xy|^{\frac{2}{q}}\right) \leq \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{\frac{2p}{q}} + \frac{1}{q}y^2\right). \tag{12}$$

Вначале предположим, что $\frac{2}{q} < r \leq \frac{4}{q}$. Возьмем $\alpha = \frac{qr}{2}$. Тогда $1 \leq \alpha \leq 2$. Поскольку $\varphi(s) = s^{\alpha}$ является оператором, выпуклым на [0, ∞), применяя (iii) и (v) леммы 2.1 и (12), заключаем, что

$$\mu_t(|xy|^r) = \mu_t\left(|xy|^{\frac{2}{q}}\right) \leq \left(\mu_t\left(\frac{1}{p}x^{\frac{2p}{q}} + \frac{1}{q}y^2\right)\right)^{\alpha} = \mu_t\left(\left(\frac{1}{p}x^{\frac{2p}{q}} + \frac{1}{q}y^2\right)^{\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{\frac{2p}{q}\alpha} + \frac{1}{q}y^{2\alpha}\right) = \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{pr} + \frac{1}{q}y^{qr}\right).$$

Теперь предположим, что $\frac{4}{q} < r \leq \frac{8}{q}$. Поскольку, $\frac{2}{q} < \frac{r}{2} \leq \frac{4}{q}$, мы можем использовать предыдущий случай, чтобы получить следующее:

$$\mu_t\left(|xy|^{\frac{r}{2}}\right) \leq \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{p\frac{r}{2}} + \frac{1}{q}y^{q\frac{r}{2}}\right).$$

С помощью выпуклости оператора отображения $z \to z^2$, мы имеем

$$\mu_t(|xy|^r) = \mu_t\left(|xy|^{\frac{r}{2}}\right)^2 \leq \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{p\frac{r}{2}} + \frac{1}{q}y^{q\frac{r}{2}}\right)^2 = \mu_t\left(\left(\frac{1}{p}x^{p\frac{r}{2}} + \frac{1}{q}y^{q\frac{r}{2}}\right)^2\right) \leq$$

$$\leq \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{pr} + \frac{1}{q}y^{qr}\right).$$

Наконец, используя простую индукцию, мы получаем требуемый результат.

2° Предположим, что $x, y \in \mathcal{M}^+$. Для $n \in \mathbb{N}$ возьмем $y_n = y + \frac{1}{n}$. Ясно, что $\left\|\frac{1}{q}y_n^{qr} - \frac{1}{q}y^{qr}\right\| \to 0$ и $\||xy_n|^r - |xy|^r\| \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, используя (i) леммы 2.1, мы получаем, что для любого $\varepsilon > 0$,

$\mu_{\varepsilon}\left(\frac{1}{q}y_n^{qr} - \frac{1}{q}y^{qr}\right) \leq \left\|\frac{1}{q}y_n^{qr} - \frac{1}{q}y^{qr}\right\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, применяя 1°, (vi) и (viii) леммы 2.1, мы получаем, что

$\mu_{t+\varepsilon}(|xy|^r) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \mu_{t+\varepsilon}(|xy|^r) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \mu_{t+\varepsilon}\left(\frac{1}{p}x^{pr} + \frac{1}{q}y_n^{qr}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \left[\mu_t\left(\frac{1}{p}x^{pr} + +\frac{1}{q}y^{qr}\right) + \mu_\varepsilon\left(\frac{1}{q}y_n^{qr} - \frac{1}{q}y^{qr}\right)\right] = \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{pr} + \frac{1}{q}y^{qr}\right)$. Допуская ε → 0, мы получаем желаемый результат.

3° Пусть $x, y \in L_0(\mathcal{M}^+)$. Для $n \in \mathbb{N}$ возьмем $x_n = xe_{[0,n]}(x)$, $y_n = ye_{[0,n]}(y)$. Тогда $x_n \to x, y_n \to y$ и $x_n y_n \to xy$. Следовательно, $|x_n y_n|^r \to |xy|^r$ и $\frac{1}{p}x_n^{pr} + \frac{1}{q}y_n^{qr} \to \frac{1}{p}x^{pr} + \frac{1}{q}y^{qr}$. Заметим, что $x_n^{pr} \leq x^{pr}$ и $y_n^{pr} \leq y^{pr}$ поэтому, $\mu_t\left(\frac{1}{p}x_n^{pr} + \frac{1}{q}y_n^{qr}\right) \leq \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{pr} + \frac{1}{q}y^{qr}\right)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Используя (viii) леммы 2.1 и 2°, мы получаем

$$\begin{aligned}\mu_t(|xy|^r) &\leq \lim_{n\to\infty} \inf \mu_t(|x_n y_n|^r) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \inf \mu_t\left(\frac{1}{p}x_n^{pr} + \frac{1}{q}y_n^{qr}\right) \leq \mu_t\left(\frac{1}{p}x^{pr} + \frac{1}{q}y^{qr}\right).\end{aligned}$$

4° Пусть $x, y \in L_0(\mathcal{M})$. По (ii) и (v) леммы 2.1,

$\mu_t(|xy^*|^r) = \mu_t(|xy^*|^2)^{\frac{r}{2}} = \mu_t(y|x|^2y^*)^{\frac{r}{2}} = \mu_t\left(\left||x|y^*\right|^2\right)^{\frac{r}{2}} = \mu_t\left(\left||x|y^*\right|\right)^r = \mu_t(|x|y^*)^r = \mu_t((|x|y^*)^*)^r = \mu_t(y|x|)^r = \mu_t\left(\left|y|x|\right|\right)^r = \mu_t\left(\left|y|x|\right|^2\right)^{\frac{r}{2}} = \mu_t(|x||y|^2|x|)^{\frac{r}{2}} = \mu_t\left(\left||y||x|\right|^2\right)^{\frac{r}{2}} = \mu_t(|y||x|)^r = \mu_t((|y||x|)^*)^r = \mu_t(|x||y|)^r = \mu_t\left(\left||x||y|\right|^r\right)$. Следовательно, из 3° следует результат теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 3.3. Пусть $1 < p, q < \infty$, такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Если $max\,\{p, q\} \geq 2$, тогда

$$\mu(|xy|^r) \leq \mu\left(\frac{r}{p}|x|^p + \frac{r}{q}|y|^q\right), \qquad \forall\, x, y \in L_0(\mathcal{M}).$$

Доказательство. Ввиду

$$\frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1\,, \qquad 2min\left\{\frac{1}{\frac{p}{r}}, \frac{1}{\frac{q}{r}}\right\} = min\left\{\frac{2r}{p}, \frac{2r}{q}\right\} = \frac{2r}{max\{p,q\}} \leq r,$$

следует, что $\frac{p}{r}, \frac{q}{r}$ и r удовлетворяют условию теоремы 3.2. Итак, требуемый результат остается в силе.

Следствие доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP14871523).

Список использованной литературы

1. R. Ahat and M. Raikhan, Submajorization inequalities for matrices of τ -measurable operators, Linear and Multilinear Algebra (2020), DOI: 10.1080/03081087.2020.1828248
2. T. Ando, Matrix Young inequalities, Oper. Theory Adv. Appl. 75 (1995), 33-38. 12
3. A.M. Bikchentaev, Minimality of Convergence in Measure Topologies on Finite von Neumann Algebras, Mat. Zametki 75(3) (2004), 342-349; Math. Notes 75(3) (2004), 315-321.
4. R. Bhatia and F. Kittaneh, Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities, Linear Algebra Appl. 308 (2000) 203-211.
5. P. N. Choudhury and K. C. Sivakumar, An extension of a matrix inequality of Thompson, Linear Algebra Appl. 535 (2017), 151-159.
6. S. W. Drury, On a question of Bhatia and Kittaneh, Linear Algebra Appl. 437 (2012), 1955-1960.
7. J. Erlijman, D.R. Farenick and R. Zeng, Young's inequality in compact operator, Oper. Theory Adv. Appl. 130 (2001), 171-184.
8. T. Fack and H. Kosaki, Generalized s-numbers of τ -measurable operators, Pac. J. Math. 123 (1986), 269-300.
9. D.R. Farenick and S. M. Manjegani, Young's inequalities in operator algebras, J. Ramanujan Math. Soc. 20 (2) (2005) 107-124.

NEUTRAL FSDES IN HILBERT SPACES: EXISTENCE, UNIQUENESS OF SOLUTIONS AND INVARIANT MEASURE RESULTS

Stanzhytskyi O.M.
Taras Shevchenko National University of Kyiv , Kyiv, Ukraine
E-mail: ostanzh@gmail.com

We study the large time behaviour of solutions of neutral type stochastic functional-differential equations of the form

$$d[u(t) + g(u_t)] = [Au + f(u_t]dt + \sigma(u_t)dW(t) \quad \text{for } t > 0; \qquad (1)$$
$$u(t) = \varphi(t), \ \ t \in [-h, 0), \ \ h > 0.$$

Here A is an inifinitesimal generator of a strong continuous semigroup $\{S(t), t \geq 0\}$ of bounded linear operators in a real separable Hilbert space H. The noise $W(t)$ is a Q-Wiener process on a separable Hilbert space K. For an arbitrary

$h > 0$, we denote $C_h := C([-h,0],H)$ to be a space of continuous H-valued functions $\varphi : [-h,0] \to H$, equipped with the norm

$$\| \varphi \|_{C_h} := \sup_{t\in[-h,0]} \| \varphi(t) \|_H ,$$

where $\| \cdot \|_H$ stands for the norm in H. The functionals f and g map C_h to H, and : $C_h \to \mathcal{L}_2^0$, where $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}(Q^{1/2}K,H)$ is the space of Hilbert-Schmidt operators from $Q^{1/2}K$ to H. In our studies, the maps f and g do not satisfy the Lipschitz condition. Therefore, it is important for applications. Finally, $\varphi : [-h,0] \times \Omega \to H$ is the initial condition, where (Ω,F,P) is the probability space.

We study the existence and uniqueness of the solution to the initial problem without the Lipschitz condition. Then we establish the Markov and Feller properties in the shift spaces for such equations, and using the compactness approach we establish the existence of invariant measures in the shift spaces for such equations. The obtained abstract results are applied to stochastic partial differential equations of the reaction-diffusion type. The problem of approximate control of such equations is also studied.

РАЗРЫВНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ДИАГОНАЛИ

Сартабанов Ж.А.

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

E-mail: sartabanov42@mail.ru

Аннотация. Строются разрывные периодические характеристики оператора дифференцирования по диагонали. Проводится качественное исследование движений, связанных с характеристическим уравнением рассматриваемого оператора дифференцирования. Приводятся свойства θ-периодичности интегральной кривой с замкнутой фазовой кривой. Вводится понятие разрывной периодической характеристики оператора. Доказывается теорема о θ-периодичности решения, которая представляется в аналитической форме.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, период, многообразие, интегральная кривая, функция Хевисайда, дробная функция, разрывная периодическая характеристика.

Рассмотрим случай, когда векторное поле задается оператором дифференцирования D по $\tau \in (-\infty, +\infty)$ и $t_j \in R$, $j = \overline{1,m}$ соотношением вида

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_j}. \tag{1}$$

Оно тесно связано со скалярным уравнением

$$\frac{dh}{d\tau} = 1. \tag{2}$$

В связи с исследованием колебательных решений систем уравнений с оператором (1) важно исследовать уравнение (2) на некотором гладком многообразии M, где оно допускает периодическую фазовую кривую с параметрическим уравнением $h = h(\tau)$ при $\tau \in R$, где $h(\tau)$ – периодическая функция, множество значений которой заполняет отрезок $[h^0, h^0 + \theta]$. Тогда фазовая точка $(\tau, h(\tau))$ многообразия M изменяется вдоль окружности $S_\theta:\ y^2 + \left(z - \frac{r}{2}\right)^2 = r^2$ радиуса $r > 0$ и длины $2\pi r = \theta$ при $\tau \in R$. Следовательно, структура многообразия M определяется прямым произведением действительной оси R и окружности $S_\theta:\ M = R \times S_\theta$ пространства $(x = \tau, y, z)$.

Теперь проведем некоторое качественное исследование движений, заданных уравнением (2) на многообразии M.

1^0. Для уравнения (2) имеет место теорема существования и единственности в окрестности каждой точки (τ^0, h^0) плоскости (τ, h).

2^0. Если решение $h(\tau)$ уравнения (2) в двух различных значениях τ принадлежит одинаковое значение $h(\tau^0 + \theta) = h(\tau^0)$, то оно θ-периодично.

3^0. Решение $h:\ S_\theta \to I = [h^0, h^0 + \theta]$.

Действительно, $h = h(\tau)$ – монотонно возрастающая при $\tau \in [\tau^0, \tau^0 + \theta] = J$ функция, так как $h'(\tau) > 0$. Согласно (2), τ и h имеют одинаковую скорость изменения. Следовательно, $h^0 = h(\tau^0) < h(\tau^0 + \theta) = h(\tau^0) + \theta = h^0 + \theta$.

4^0. Точки, находящиеся на одной образующей τ' цилиндра M на окружности S_θ представляют одну и ту же точку.

5^0. Точки $(\tau^0, h(\tau^0))$ и $(\tau^0 + k\theta, h(\tau^0 + k\theta)) = (\tau^0 + k\theta, h(\tau^0) + k\theta)$ фазовой кривой уравнения (2) на S_θ совпадают.

Теорема 1. *Интегральная кривая* $h = h(\tau)$ *с замкнутой фазовой кривой уравнения* (2)*, исходящая из точки* (τ^0, h^0) *цилиндра* $M = R \times S_\theta$ *является* θ*-периодической* (Рисунок 1).

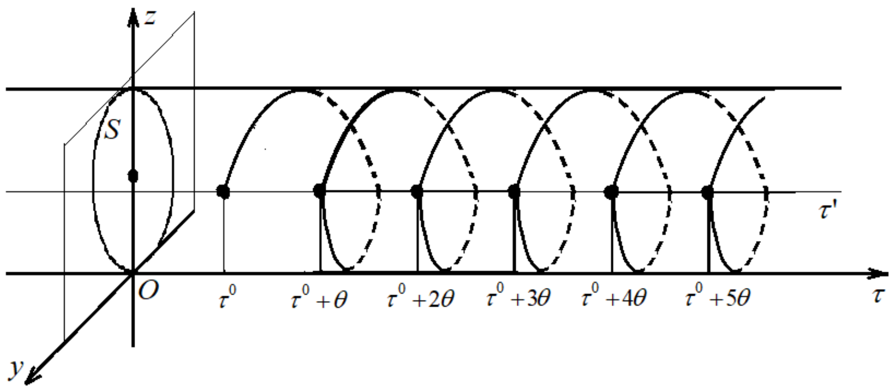

Рисунок 1.

Доказательство теоремы 1 следует из свойств 1^0-5^0.

Чтобы определить аналитический вид периодического решения $h = h(\tau)$ переходим к рассмотрению карты цилиндра, разрезав его вдоль оси $O\tau$ и расположив бесконечную полосу с шириной θ на плоскость τOz.

Тогда при $\tau^0 = 0$ карта имеет вид бесконечной плоской полосы, разделенной на квадраты со стороной, равной θ, а интегральные кривые в виде обмотки цилиндра разбиваются на равные части и представляют собой диагональные отрезки квадратов (Рисунок 2).

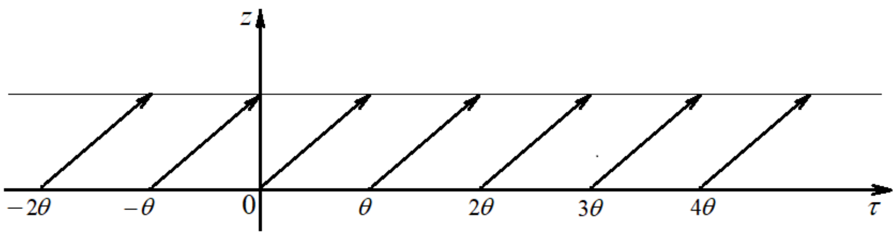

Рисунок 2.

Если таким образом полученную разрывную периодическую функцию обозначим через $z = s(\tau)$, то ее производная имеет вид

$$\frac{ds(\tau)}{d\tau} = 1 - \sum_{k \in Z_0} \theta\delta(\tau - k\theta), \qquad (3)$$

где $\delta(\tau)$ – дельта функция Дирака, Z_0 – множество целых чисел без нуля.

Интегрируя уравнения (3) имеем решение

$$s(\tau) = \tau - \sum_{k \in Z_0} \theta\chi(\tau - k\theta) \equiv \theta\{\theta^{-1}\tau\}, \qquad (4)$$

где $\chi(\tau)$ – функция Хевисайда, а $\{\tau\}$ означает дробная часть $\tau \in R$.

Таким образом, решение $h = h(\tau)$ уравнения (2), согласно (3) и (4), можно аналитически представить в виде

$$h(\tau) = s(\tau), \qquad (5)$$

причем на поверхности цилиндра $M = R \times S_\theta$, в соответствии с (2), имеет производную

$$s'(\tau) = 1,$$

а на плоскость τOh имеет производную вида (3).

Согласно (4)–(5) решение $h = h(\tau)$ можно представить как функцией Хевисайда, так и дробной функцией, в терминах теории чисел.

Теорема 2. *Уравнение* (2) *имеет* θ*-периодическое решение* $h = s(\tau)$, *которое аналитически представляется соотношением* (4) *и на цилиндре имеет производную, равную 1, а на плоскости производную вида* (3).

Таким образом, теоремой 2 введено понятие разрывной периодической характеристики оператора (1).

В заключение заметим, так как решение $h(\tau)$ периодично с периодом θ по τ, то можно предполагать $\tau \in S_\theta$ и аналогичную теорию можно иметь и в случае $M = S_\theta \times S_\theta$ – тороидального многообразия.

Отметим, что при изучении данного вопроса мною были использованы элементы теорий дифференциальных уравнений на многообразиях [1], разрывных периодических движений [2] и обобщенных функций [3].

Список использованной литературы

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. – 204 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. – 568 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Изд-во МГУ, 1984. – 208 с.

NORMAL-REGULAR SOLUTIONS OF AN INHOMOGENEOUS SPECIAL SYSTEM OF THE SECOND ORDER

Talipova M.Zh., Zhakhina R.U., Tasmambetov Zh.N.

Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

E-mail: mira_talipova@mail.ru, ryskul75@mail.ru, tasmam@rambler.ru

The paper considers the inhomogeneous Horn (Ψ_2) system and finding the types of solutions to this system using the Frobenius-Latysheva method.

Keywords: special system, Horn system, Frobenius-Latysheva method, rank, anti-rank, regular and irregular features.

Consider the inhomogeneous Horn system (Ψ_2):

$$x \cdot Z_{xx} + (\gamma - x) \cdot Z_x - y \cdot Z_y - \alpha \cdot Z = p(x,y),$$
$$y \cdot Z_{yy} - x \cdot Z_x + (\gamma' - y) \cdot Z_y - \alpha \cdot Z = q(x,y), \tag{1}$$

where are the right parts $p(x,y)$ and $q(x,y)$ are presented in the form of

$$p(x,y) = x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (a_{0,0} \neq 0),$$
$$q(x,y) = x^{\gamma} \cdot y^{\delta} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (b_{0,0} \neq 0). \tag{2}$$

The corresponding homogeneous system

$$x \cdot Z_{xx} + (\gamma - x) \cdot Z_x - y \cdot Z_y - \alpha \cdot Z = 0,$$
$$y \cdot Z_{yy} - x \cdot Z_x + (\gamma' - y) \cdot Z_y - \alpha \cdot Z = 0, \tag{3}$$

is a well - known Horn system (Ψ_2), having a system of defining equations with respect to the singularity $(0,0)$ in the form

$$f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma) = \rho \cdot (\rho - 1) + \gamma \cdot \rho = 0,$$
$$f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma) = \sigma \cdot (\sigma - 1) + \gamma' \cdot \sigma = 0. \tag{4}$$

The solutions of this system are pairs: $(0,0), (0, 1-\gamma'), (1-\gamma, 0), \quad (1-\gamma, 1-\gamma')$ – indicators of private solutions

$$Z^{(1)} = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot x + \frac{\alpha}{\gamma'} \cdot y + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1)}{\gamma \cdot \gamma'} \cdot xy + \ldots;$$
$$Z^{(2)} = y^{1-\gamma'} \cdot \left[1 + \frac{1+\alpha-\gamma'}{\gamma} \cdot x + \frac{1+\alpha-\gamma}{2-\gamma'} \cdot y + \ldots \right]; \tag{5}$$
$$Z^{(3)} = x^{1-\gamma} \cdot \left[1 + \frac{1+\alpha-\gamma}{2-\gamma} \cdot x + \frac{1+\alpha-\gamma}{\gamma'} \cdot y + \ldots \right];$$
$$Z^{(4)} = x^{1-\gamma} \cdot y^{1-\gamma'} \cdot \left[1 + \frac{2+\alpha-\gamma-\gamma'}{2-\gamma} \cdot x + \frac{2+\alpha-\gamma-\gamma'}{2-\gamma'} \cdot y + \right.$$
$$\left. + \frac{(2+\alpha-\gamma-\gamma') \cdot (2+\alpha-\gamma-\gamma')}{(2-\gamma) \cdot (2-\gamma')} \cdot xy + \ldots \right]$$

the corresponding homogeneous system (3).

The general solution of the homogeneous system (3) according to the general theory is represented as

$$Z^{o}(x,y) = C_1 \cdot Z^{(1)} + C_2 \cdot Z^{(2)} + C_3 \cdot Z^{(3)} + C_4 \cdot Z^{(4)} =$$
$$= C_1 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot x + \frac{\alpha}{\gamma'} \cdot y + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1)}{\gamma \cdot \gamma'} \cdot xy + \ldots \right) + C_2 \cdot y^{1-\gamma'} \cdot \tag{6}$$

$$\cdot\left(1+\frac{1+\alpha-\gamma'}{\gamma}\cdot x+\frac{1+\alpha-\gamma}{2-\gamma'}\cdot y+...\right)+C_3\cdot x^{1-\gamma}\cdot\left(1+\frac{1+\alpha-\gamma}{2-\gamma}\cdot x+\right.$$
$$\left.+\frac{1+\alpha-\gamma}{\gamma'}\cdot y+...\right)+C_4\cdot x^{1-\gamma}\cdot y^{1-\gamma'}\cdot\left(1+\frac{2+\alpha-\gamma-\gamma'}{2-\gamma}\cdot x+\right.$$
$$\left.+\frac{2+\alpha-\gamma-\gamma'}{2-\gamma'}\cdot y+\frac{(2+\alpha-\gamma-\gamma')\cdot(2+\alpha-\gamma-\gamma')}{(2-\gamma)\cdot(2-\gamma')}\cdot xy+...\right).$$

For an inhomogeneous system (1), all five compatibility conditions are met [1]. The homogeneous system (3) has a regular singularity $(0,0)$ and an irregular singularity (∞,∞), and belongs to the class of systems where the rank $p>0$, a is antirang $m\le 0$. Which allows us to draw a number of interesting conclusions:

1. An inhomogeneous system (1) has at least one normally regular solution of the form

$$Z=\exp Q(x,y)\cdot x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}C_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}\quad\left(C_{0,0}\neq 0\right),\tag{7}$$

where

$$Q(x,y)=\frac{\alpha_{k+1,0}}{k+1}\cdot x^{k+1}+\frac{\alpha_{0,k+1}}{k+1}\cdot y^{k+1}+...+\alpha_{1,1}\cdot xy+\alpha_{1,0}\cdot x+\alpha_{0,1}\cdot y\,.\tag{8}$$

2. Let in a homogeneous system (3) $\gamma=1+\alpha',\ \gamma'=1+\beta',\ \alpha=m.$ Then the system (3) turns into a Laguerre system [2], the solution of which is the Laguerre polynomial of two variables. In this case, the functions $p(x,y)$ and $q(x,y)$ on the right side of the inhomogeneous system (1) must be polynomials of two variables, and we are looking for a particular solution of the inhomogeneous system $\overline{Z}(x,y)$ in the form of a polynomial of two variables.

3. When the feature $(0,0)$ – regular, the functions $p(x,y)$ and $q(x,y)$ in the right part (1) are representable as series (2).

A particular solution of the inhomogeneous system (1) is also sought in the form of a generalized power series of two variables in increasing degrees of the form

$$Z_j=x^{\rho_j}\cdot y^{\sigma_j}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}C^{j}_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu},\ \left(C^{j}_{00}\neq 0\right)\ \left(j=\overline{1,4}\right),\tag{9}$$

where $\rho_j,\sigma_j,C^{j}_{\mu,\nu}-$ some constants that should be defined.

4. If for the system (1) $p>0,\ m\le 0,$ I.e. feature (∞,∞) – irregular, a feature $(0,0)$ – regular, then the right part of the inhomogeneous system (1) is represented as

$$p(x,y)=e^{G(x,y)}\cdot x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}a_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu},$$
$$q(x,y)=e^{G(x,y)}\cdot x^{\gamma}\cdot y^{\delta}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}b_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}, \tag{10}$$

where $G(x,y)$ – a polynomial of two variables. We are looking for a particular solution in the form of normally regular series (7)-(8).

When considering specific examples, the study is much simplified. So, for the system (1) the rank $p=1$, is antirang $m=0$.

According to the Frobenius-Latysheva method, it has a normally regular solution, which is determined by the transformation

$$\overline{Z}(x,y)=\exp(\alpha\cdot x+\beta\cdot y)\cdot\overline{U}(x,y),$$

where α and β – unknown constants to be determined, a $\overline{U}(x,y)$ is a generalized power series of two variables.

In this case, the polynomial $G(x,y)$ on the right side (8) will be a polynomial of the first degree, so it is easy to construct a partial solution of an inhomogeneous system, and the general solution of an inhomogeneous system is defined as the sum of the general solution of the corresponding homogeneous system and the partial solution of an inhomogeneous system [3].

Using substitution

$$\overline{Z}=\exp\left[\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right]\cdot x^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot y^{-\frac{\gamma'}{2}}\cdot\overline{U}(x,y)$$

we get an inhomogeneous system of the form

$$x^2\cdot\overline{U}_{xx}-xy\cdot\overline{U}_{y}+\left[-\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{2}+k\cdot x+\frac{1}{4}-\mu^2\right]\cdot\overline{U}=p_1(x,y),$$
$$y^2\cdot\overline{U}_{yy}-xy\cdot\overline{U}_{x}+\left[-\frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2}+k\cdot y+\frac{1}{4}-\nu^2\right]\cdot\overline{U}=p_2(x,y), \tag{11}$$

where k,μ and ν – known constants, $\overline{U}=\overline{U}(x,y)$ – common unknown function, and the right part is represented as

$$p_i(x,y)=\exp Q_i(x,y)\cdot x^{\alpha_i}\cdot y^{\beta_i}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{m,n}^{(i)}\cdot x^m\cdot y^n,\ (i=1,2). \tag{12}$$

Depending on the type of features, two cases are considered:

1. If the singularities are regular, then in the right part of the system (11) $Q_i(x,y)\equiv 0\ (i=1,2)$, and the solution is in the form of a generalized power series

$$\overline{U}(x,y)=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}C_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu},\quad (C_{00}\neq 0). \tag{13}$$

2. If the features are irregular, then the solutions of the right part (11) $Q_i(x,y) \neq 0 \ (i=1,2)$, are determined either in the form of normal series of the Tome of two variables, or in the form of normally regular solutions (7)-(8).

The left part of the system (11) is an analogue of the well-known Whittaker equation [4] and is called the Whittaker system [5]. All five compatibility conditions are fulfilled for it [1] and in this case it admits only four linearly independent partial solutions. For the corresponding homogeneous system, the singularity $(0,0)$ is regular, and (∞,∞) – irregular. The rank of the system $p=1$. Is therefore, applying the Frobenius-Latysheva method to determine particular solutions, replacing

$$\overline{U}(x,y) = \exp P(x,y) \cdot \Phi(x,y),$$

from system (11)–(12) we proceed to a new inhomogeneous system.

References

1. Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces, Leipzig: Leubner, 1906, 120 p.
2. Tasmambetov Zh.N. On the solution of Laguerre type systems // Mathematical Journal, 2003. Vol.3, No. 2(8). - pp.63-68. (in Russian)
3. Talipova M.Zh., Tasmambetov Zh.N. Izvestiya NAS RK, Phys. Series.- matem. 2003. No. 3. pp.47-55.
4. Whittaker E.T. Course of modern analysis. Transcendental functions. Moscow: ch. II. 1963. - 515 p.
5. Tasmambetov Zh.N. Normal solutions of special systems of partial differential equations of the second order with polynomial coefficients. Abstract of the doctoral dissertation, Almaty, 2004. 41 p.

МРНТИ 27.31.17
УДК 517.956

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Танирберген А.К.
Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: *aisulu21@mail.ru*

Аннотация. Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (задачи Дирихле) впервые осуществил Г.Фикера. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в монографии О. А.Олейник и Е.В.Радкевич, и в работах В.Н.Врагова.

В статьях С.А.Алдашева для многомерных эллиптико-параболических уравнений исследовалась корректность (в смысле однозначной разрешимости) задачи Дирихле в цилиндрической области.

Насколько известно, смешанная задача для этих уравнений не изучена. В данной работе показана однозначная разрешимость и получено явное представление классического решения смешанной задачи для одного класса вырождающегося многомерного эллиптико-параболического уравнения. Предложенный метод позволяет свести изучаемую задачу к смешанной задаче для вырождающегося многомерного эллиптического уравнения, исследованой С.А. Алдашевым.

Ключевые слова: корректность, смешанная задача, вырождающиеся многомерные уравнения, сферические функции.

Введение. Основная смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах изучены [1,2]. В [3,4] доказана корректность этой задачи и получен явный вид классического решения.

Насколько известно, эти вопросы для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических не изучены.

В данной работе показана однозначная разрешимость и получено явное представление классического решения смешанной задачи для вырождающегося многомерного эллиптико-параболического уравнения.

Постановка задачи и результтат. Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ − цилиндрическая область евклидова пространства $\Omega_{\alpha\beta}$ точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$ плоскостями $t=\alpha>0$ и $t=\beta<0$, где $|x|$− длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области , а через $\Gamma_\alpha,\Gamma_\beta$ - части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t>0$ и Ω_β ; σ_α -верхнее, а σ_β - нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S - общая часть границ областей Ω_α и Ω_β, представляющее множество $\{t=0, 0<|x|<1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающегося многомерное эллиптико-параболическое уравнение

$$0=\begin{cases} t^q\Delta_x u-u_t, t>0, \\ |t|^p\,\Delta_x u+u_{tt}, t<0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p,q=const$, $p>0, q\geq 0, \Delta_x$ - оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m, m\geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t,r\geq 0,\ 0\leq\theta_1<2\pi,\ 0\leq\theta_i\leq\pi,\ i=2,3,...,m-1,\ \theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t\neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta})\cap C^1(\Omega_{\alpha\beta})\cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$, удовлетворяющие краевым условиям

$$u\big|_{\sigma_\alpha}=\varphi(r,\theta),u\big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta),\tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta),\tag{3}$$

при этом $\varphi(1,\theta)=\psi_1(\alpha,\theta),\psi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leq k\leq k_n,\ (m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2),\ W_2^l(S),l=0,1,...$ - пространства Соболева.

Имеет место ([5])

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. Если $l\geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$\left|f_0^1(r)\right|\leq c_1,\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2\leq c_2,c_1,c_2=const.$$

Через $\overline{\varphi}_n^k(r),\psi_{2n}^k(t)$, обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно функций $\phi(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$.

Тогда справедлива

Теорема. Если $\varphi(r,\theta)\in W_2^l(S),\psi_1(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\alpha),\psi_2(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\beta),l>\dfrac{3m}{2}$, то задача 1 однозначно разрешима.

Доказательство теоремы. В сферических координатах уравнения (1) в области Ω_α имеет вид

$$t^q\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)-u_t=0,\tag{5}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),g_1=1,g_2=(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

Известно ([5]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2),n=0,1,...,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_α принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ - функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([5]), будем иметь

$$t^q\left(\overline{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\right)-\overline{u}_{nt}^k=0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, запишется в виде

$$\overline{u}_n^k(r,\alpha)=\overline{\varphi}_n^k(r), \overline{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots. \tag{8}$$

В (7), (8) произведя замену $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)=\overline{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t)$, получим

$$t^q\left(\overline{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\overline{\upsilon}_n^k\right)-\overline{\upsilon}_{nt}^k=\overline{f}_n^k(r,t), \tag{9}$$

$$\overline{\upsilon}_n^k(r,\alpha)=\varphi_n^k(r),\ \ \overline{\upsilon}_n^k(1,t)=0,\ \ k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots, \tag{10}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t)=\psi_{1nt}^k+\frac{\lambda_n t^q}{r^2}\psi_{1n}^k,\ \ \varphi_n^k(r)=\overline{\varphi}_n^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (9), (10) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv t^q\left(\upsilon_{nrr}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right)-\upsilon_{nt}^k=f_n^k(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\overset{k}{\varphi}_n(r), \upsilon_n^k(1,t)=0, \tag{12}$$

$$\overline{\lambda}_n=\frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n)}{4},\ \ f_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\overline{f}_n^k(r,t),\ \ \overset{k}{\varphi}_n(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_n^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{13}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{14}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha)=0, \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{15}$$

а, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{16}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha)=\overset{k}{\varphi}_n(r), \upsilon_{2n}^k(1,t)=0, \tag{17}$$

Решение выше указанных задач, рассмотрим в виде,

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{18}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r),\varphi_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r)\,. \tag{19}$$

Подставляя (18) в (14), (15), с учетом (19), получим

$$R_{srr}+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,0<r<1\,, \tag{20}$$

$$R_s(1)=0,\left|R_s(0)\right|<\infty\,, \tag{21}$$

$$T_{st}+\mu t^q T_s(t)=-a_{s,n}(t),0<t<\alpha\quad, \tag{22}$$

$$T_s(\alpha)=0\quad. \tag{23}$$

Ограниченным решением задачи (20), (21) является ([6])

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r)\,, \tag{24}$$

где $\nu=\dfrac{n+(m-2)}{2},\mu=\mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (22), (23) является

$$T_{s,n}(t)=(\exp\left(\frac{-\mu_{s,n}^2t^{q+1}}{q+1}\right))\int_t^{\alpha}a_{s.n}(\xi)\left(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi\,, \tag{25}$$

Подставляя (24) в (19) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\;\; r^{-\frac{1}{2}}\varphi_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r),0<r<1\,. \tag{26}$$

Ряды (26) – разложения ряды Фурье-Бесселя ([7]), если

$$a_{s,n}(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi\quad, \tag{27}$$

$$b_{s,n}(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\varphi_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi\quad, \tag{28}$$

где $\mu_{s,n},s=1,2,...$ − положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (18), (25) получим решение задачи (14), (15)

$$\upsilon_{1n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_s(t)J_\nu(\mu_{s,n}r)\quad, \tag{29}$$

где $a_{s,n}(t),$ определяется из (27).

Далее, подставляя (18) в (16), (17), с учетом (19), будем иметь

$$T_{st}+\mu_{s,n}^2t^qT_s=0,0<t<\alpha,T_s(\alpha)=b_{s,n}\,,$$

решением которого является

$$T_{s,n}(t)=b_{s,n}\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1}-t^{q+1})\right). \tag{30}$$

Из (24), (30) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}\sqrt{r}\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1}-t^{q+1})\right)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{31}$$

где $b_{s,n}$ находятся из (28).

Следовательно, из (13) следует, что единственным решением задачи (1), (2) в области Ω_α является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{1n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \tag{32}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t),\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (29), (31).

Учитывая формулу ([7]) $2J_\nu'(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$, оценки ([8,5])

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})+0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\nu\ge 0,$$
$$|k_n|\le c_1 n^{m-2},\left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+i},\ j=\overline{1,m-1},l=0,1,..., \tag{33}$$

а также, леммы, ограничения на заданные функций $\psi_1(t,\theta),\varphi(r,\theta)$, как в [9], можно доказать, что полученное решение (32) принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^1(\Omega_\alpha\cup S)\cap C^2(\Omega_\alpha)$. Далее, из (25), (30), (32) $t\to\ +0$ при имеем

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi+b_{s,n}\left(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r). \tag{34}$$

$$u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\ , \tag{35}$$

$$\nu_n^k(r)=\psi_{1nt}^k(0)-\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}a_{s,n}(0)J_{\nu+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

Из (27), (28), (33), а также лемм вытекает, что $\tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta)\in W_2^l(S),\ l>\frac{3m}{2}.$

Таким образом, учитывая краевые условия (3), (34), (35) в области Ω_β приходим к смешанной задаче для вырождающегося многомерного эллиптического уравнения

$$|t|^p\,\Delta_x u-u_{tt}=\ 0 \tag{36}$$

с данными

$$u|_S=\tau(r,\theta),u_t|_S=\nu(r,\theta),u|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta). \tag{37}$$

В [3] доказана следующая теорема

Теорема 2. Если $\tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta)\in W_2^l(S),\ \psi_2(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\beta),\ l>\frac{3m}{2}$, то задача (35), (36) имеет единственное решение.

Далее, используя теорему 2, приходим к справедливости теоремы 1.

Заключение

Так как в [3] получен явный вид решения задачи (36), (37), то можно записать явное представление и для задачи 1.

Список использованной литературы

1 Барановский Ф.Т. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости // Ученые записки Ленингр. пед. Института, 1958, Т. 183, с. 23-58

2 Краснов М.Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб., 1959, Т. 49(91), с. 29-84

3 Алдашев С.А. Корректность смешанной для одного класса вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Научные ведомости БелГУ, математика, физика –2019. – №2. – С. 174-182

4 Танирберген А.К. Смешанная задача для вырождающегося многомерного эллиптического уравнения // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион, естественные науки – 2021. – №3. – С. 37-41

5 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

6 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, – М.: Наука, 1965. – 703 с.

7 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, –М.: Наука, 1974. – 297 с.

8 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: – М: Наука, 1966. –724с.

9 Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле для вырождающегося многомерногогиперболо-параболического уравнения // Известия НАН РК, сер. физико-математическая – 2014. – № 5. – С. 7-11.

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА ПО ЗАДАННЫМ СВОЙСТВАМ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Тлеубергенов М. И[1]., Василина Г.К.[2], Сейсенбаева С.Р.[3]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2]*АУЭС им. Г.Даукеева, Алматы, Казахстан*

[3]*КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: marat207@mail.ru; v_gulmira@mail.ru; saramatal@mail.ru.

В работе строятся уравнения Гамильтона по заданным свойствам движения в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито. Полученные результаты иллюстрируются на примере движения искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил.

В настоящее время теория обратных задач динамики в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) развита достаточно полно [1-3 и др.] и восходит к основополагающей работе Еругина [4], в которой строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую.

По заданному множеству

$$\Lambda(t): \lambda(x,\dot{x},t)=0, \qquad \lambda \in R^m, \qquad x \in R^n \tag{1}$$

требуется построить стохастические уравнения гамильтоновой структуры

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} + \sigma'_{kj}(q,p,t)\dot{\xi}^j, \qquad \left(k=\overline{1,n}\right); \end{cases} \tag{2}$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ (1) было интегральным многообразием построенных уравнений. Здесь $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_r(t,\omega)\}-$ система случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [5], можно представить в виде суммы процессов: $\xi=\xi_0+\int c(y)P^0(t,dy),$ ξ_0- винеровский процесс; P^0- пуассоновский процесс; $P^0(t,dy)-$ число скачков процесса P^0 в интервале [0, t], попадающих на множество dy; $c(y)$ - векторная функция, отображающая пространство R^{2n} в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t.

Поставленная задача в классе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась в [6]. В [7] рассматривалась задача построения функции Лагранжа по заданным свойствам движения в предположении, что случайные возмущающие силы принадлежат классу процессов с независимыми приращениями.

В данной работе, примыкающей к работе [7], рассматривается стохастическая задача построения функции Гамильтона по заданным свойствам движения.

Таким образом, пусть $\{\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_k(t,\omega)\}$ и $\{\psi_1(t,\omega),...,\psi_{n+r}(t,\omega)\}$ - системы случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [7], можно представить в виде суммы винеровского и пуассоновского процессов:

1) $\xi=\xi_0+\int c(y)P^0(t,dy),$ ξ_0- винеровский процесс; P^0- пуассоновский процесс; $P^0(t,dy)-$ число скачков процесса P^0 в интервале [0, t], попадающих

на множество dy; $c(y)$ - векторная функция, отображающая пространство R^{2n} в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t;

2) $\psi = \psi_0 + \int \tilde{c}(y)\tilde{P}^0(t, d\gamma)$, ψ_0 – винеровский процесс; $\tilde{P}^0$ – пуассоновский процесс; $\tilde{P}^0(t, d\gamma)$ – число скачков процесса $\tilde{P}^0$ в интервале [0, t], попадающих на множество $d\gamma$; $\tilde{c}(y)$ - векторная функция, отображающая пространство R^{2n} в пространство значений R^{n+r} процесса $\psi(t)$ при любом t.

Для решения поставленной задачи на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [3] в сочетании с методом Еругина [4] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции в случае процессов с независимыми приращениями [7] строится дифференциальное уравнение Ито второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + \sigma(x, \dot{x}, t)\dot{\xi} \tag{4}$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ являлось интегральным многообразием построенного уравнения (4). И, далее, на втором этапе по построенному уравнению Ито строятся эквивалентные ему стохастические уравнения гамильтоновой структуры.

Предварительно, по правилу стохастического дифференцирования Ито составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} f + S_1 + S_2 + S_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}}\sigma\dot{\xi}, \tag{5}$$

где $S_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{x}^2} : \sigma\sigma^T$, а под $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{x}^2} : D$, $D = \sigma\sigma^T$, следуя [7], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(x, \dot{x}, t)$ вектора $\lambda(x, \dot{x}, t)$ по компонентам $\dot{x}$ на матрицу D $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{x}^2} : D = \left[tr\left(\dfrac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \dot{x}^2} D\right), \ \dots \ , tr\left(\dfrac{\partial^2 \lambda_m}{\partial \dot{x}^2} D\right)\right]^T$;

$$S_2 = \int \left\{ \lambda(x, \dot{x} + \sigma c(y), t) - \right.$$
$$\left. - \lambda(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} \sigma c(y) \right\} dy; \quad S_3 = \int [\lambda(x, \dot{x} + \sigma c(y), t) - \lambda(x, \dot{x}, t)] P^0(t, dy)$$

и вводятся произвольные функции Еругина [4] A и B, обладающие свойствами $A(0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$, $B(0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$,

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, x, \dot{x}, t) + B(\lambda, x, \dot{x}, t)\dot{\xi}. \tag{6}$$

Сравнивая уравнения (5) и (6) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}} f = A - \frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} - S_1 - S_2 - S_3, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\sigma = B. \end{cases} \tag{7}$$

Для определения из (7) искомых функций f и σ нам потребуется следующее утверждение:

Лемма 1 [3, с.12-13]. Совокупность всех решений линейной системы

$$Hv = g, \quad H = (h_{\mu k}), \ v = (v_k), g = (g_\mu), \mu = \overline{1, m}, \ k = \overline{1, n}, \ m \le n, \tag{8}$$

где матрица H имеет ранг равный m, определяется выражением

$$v = \alpha v^T + v^\upsilon \tag{9}$$

здесь $\alpha -$ скалярная величина,

$$v^T = [HC] = [h_1 ... h_m c_{m+1} ... c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & ... & e_n \\ h_{11} & ... & h_{1n} \\ ... & ... & ... \\ h_{m1} & ... & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & ... & c_{m+1,n} \\ ... & ... & ... \\ c_{n-1,1} & ... & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k}), \ \rho = \overline{m+1, n-1}; \ e_k -$единичные орты пространства $R^n, v^T = (v_k^T)$

$$v_k^T = \begin{vmatrix} 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ h_{11} & ... & h_{1k} & ... & h_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ h_{m1} & ... & h_{mk} & ... & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & ... & c_{m+1,n} & ... & c_{m+1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n-1,1} & ... & c_{n-1,k} & ... & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, v^\upsilon = H^+ g,$$

где $H^+ = H^T(HH^T)^{-1}, H^T$ - матриц а транспонированная к H.

По лемме 1 определим вектор-функцию f и матрицу σ в виде

$$f = s_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+ \left(A - \frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} - S_1 - S_2 - S_3\right) \tag{10}$$

$$\sigma_i = s_{2i}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+ B_i, \tag{11}$$

где $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \ldots, \sigma_{ni})^T$ - i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j}), (\nu = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r});$ $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{mi})^T$ - i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu j}), \quad (\mu = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, r}),$ $s_1, s_2 -$ произвольные скалярные величины.

Следовательно, из (11), (12) следует, что множество дифференциальных уравнений Ито второго порядка, обладающее заданным интегральным многообразием (1), имеет вид

$$\ddot{x} = s_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+\left(A-\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x}-S_1-S_2-S_3\right)+\left(s_{21}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+B_1,\ \ldots,\ s_{2r}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+B_r\right)\dot{\xi}.$$

Для построения функции Гамильтона предварительно введем новую переменную $y_k = \dot{x}_k$ и перепишем заданное уравнение (4) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_k = y_k, \\ y_k = f_k(x,y,t)+\sigma_{kj}(x,y,t)\dot{\xi}^j, \end{cases} \tag{12}$$

где вектор-функция $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)^T$ и столбцы матрицы $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r)$ имеют соответственно вид (11), (12). Затем с помощью замен

$$z_k = \begin{cases} x_k \\ y_k \end{cases}; \qquad G_k = \begin{cases} y_k \\ f_k \end{cases};\ \ \psi_j = \begin{cases} 0, \text{ при } j=\overline{1,n}; \\ \xi^{j-n}, \text{ при } j=n+1,n+2,\ldots,n+m; \end{cases};$$

$\mu=(\mu_{kj})=\begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & \sigma_{n\times m}\end{pmatrix}$; $\sigma=(\sigma_{kj})$ перепишем уравнение (12) в виде

$$\dot{z}_k = G_k(z,t)+\mu_{kj}(z,t)\dot{\psi}_j. \tag{13}$$

Далее, стохастическое уравнение гамильтоновой структуры (3) с помощью замены $\nu_k = \begin{cases} q_k, & k=\overline{1,n} \\ p_{k-n}, & k=n+1,n+2,\ldots 2n \end{cases}$ и матриц

$\varphi=(\varphi_{k\nu})=\begin{pmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}$, $p=(p_{kj})=\begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & \sigma'_{n\times m}\end{pmatrix}$, а также с учетом того, что $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q_k}\end{pmatrix}=\left(\varphi_{k\nu}\dfrac{\partial H}{\partial \nu_\nu}\right)$ перепишем в виде

$$\dot{\nu}_k-\varphi_{k\nu}\frac{\partial H}{\partial\nu_\nu}=p_{kj}\dot{\psi}_j \tag{14}$$

или, если ввести обратную к $(\varphi_{k\nu})$ матрицу

$$(\omega_{k\nu})=(\varphi_{k\nu})^{-1}=\begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}$$

и вектор

$$z_k \equiv \omega_{k\nu}\nu_\nu = \begin{pmatrix} -p_k, & k=\overline{1,n} \\ q_{k-n}, & k=\overline{n+1,2n}\end{pmatrix},$$

то уравнение (13) преобразуется к эквивалентному уравнению

$$\omega_{\nu k}\dot{z}_k-\frac{\partial H}{\partial z_k}=\omega_{\nu k}p_{\nu j}\dot{\psi}_j. \tag{15}$$

Рассмотрим задачу непрямого представления уравнения (13) в виде уравнения гамильтоновой структуры (15), т.е. с помощью некоторой матрицы $\Gamma = \left(\gamma_\nu^k\right)$ рассмотрим соотношение

$$\gamma_\nu^k \left(\dot{z}_k - G_k - \mu_{kj}\dot{\psi}_j\right) \equiv \omega_{\nu k}\dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_\nu} - \omega_{\nu k} p_{\nu j}\dot{\psi}_j$$

или

$$C_{\nu k}\dot{z}_k - D_\nu(z,t) - \gamma_\nu^k \mu_{kj}\dot{\psi}_j \equiv \omega_{\nu k}\dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_\nu} - \omega_{\nu k} p_{\nu j}\dot{\psi}_j\,, \tag{16}$$

где $C_{\nu k} = \gamma_\nu^k$; $D_\nu(z,t) = \gamma_\nu^k G_k$.

Для выполнения тождества (16) требуется выполнение условий

$$C_{\nu k} = \omega_{\nu k},\ D_\nu(z,t) = -\frac{\partial H}{\partial z_\nu}, \tag{17}$$

$$\gamma_\nu^k \mu_{kj} = \omega_{\nu k} p_{\nu j} \quad \left(\nu, k = \overline{1,2n},\ j = \overline{1,n+m}\right), \tag{18}$$

$$\gamma_\nu^k = \omega_{\nu k}\,. \tag{19}$$

Из соотношений (16) и условий (17)-(19) следует, что $\mu_{kj} = p_{\nu j}$, а это влечет выполнение равенства

$$\sigma_{kj} = \sigma'_{kj},\ \left(k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\right).$$

Следовательно справедлива

Теорема 1. *Для непрямого построения стохастического уравнения гамильтоновой структуры (3) по заданному множеству (1) так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (15) необходимо и достаточно выполнение условий (17-19).*

Пример. Рассмотрим стохастическую задачу построения функции Гамильтона по заданному свойству движения на примере движения искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил [8].

Пусть свойства движения заданы в виде:

$$\Delta(t): \lambda = \theta^2 + \alpha_1\dot{\theta}^2 + \alpha_2 = 0, \qquad \lambda \in R^1. \tag{20}$$

Тогда уравнение возмущенного движения (5) примет вид

$$\dot{\lambda} = 2\theta\dot{\theta} + 2\alpha_1\dot{\theta}\ddot{\theta} + S_1 + S_2 + S_3 = 2\theta\dot{\theta} + 2\alpha_1\dot{\theta}f + S_1 + S_2 + S_3 + 2\alpha_1\dot{\theta}\sigma\dot{\xi}\,, \tag{21}$$

где $S_1 = \alpha_1\sigma^2$, $S_2 = \int\left\{2\alpha_1\sigma c(y)[4\dot{\theta} + \sigma c(y)]\right\}dy$, $S_3 = \int\left\{2\alpha_1\sigma c(y)[4\dot{\theta} + \sigma c(y)]\right\}P^0(t,dy)$.

Введем функции Н. П. Еругина $a = a(\lambda,\theta,\dot{\theta},t)$, $b = b(\lambda,\theta,\dot{\theta},t)$ со свойством $a(0,\theta,\dot{\theta},t) = = b(0,\theta,\dot{\theta},t) \equiv 0$ и такие, что имеет место соотношение

$$\dot{\lambda} = a\lambda(\theta,\dot{\theta},t) + b\lambda(\theta,\dot{\theta},t)\dot{\xi}\,. \tag{22}$$

Из соотношений (21), (22) следует, что множество уравнений (4), в нашем примере имеющее вид

$$\ddot{\theta} = f(\theta,\dot{\theta},t) + \sigma(\theta,\dot{\theta},t)\dot{\xi},$$

будет обладать интегральным многообразием (20), если f и σ будут иметь соответственно вид

$$f = \frac{a(\theta^2 + \alpha_1\dot{\theta}^2 + \alpha_2) - 2\theta\dot{\theta} - S_1 - S_2 - S_3}{2\alpha_1\dot{\theta}}, \quad \sigma = \frac{b(\theta^2 + \alpha_1\dot{\theta}^2 + \alpha_2)}{2\alpha_1\dot{\theta}}. \tag{23}$$

Уравнение движения искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил, следуя работе [8], запишем в виде

$$\ddot{\theta} = \tilde{f}(\theta,\dot{\theta}) + \tilde{\sigma}(\theta,\dot{\theta})\dot{\xi}, \tag{24}$$

где $\theta -$угол тангажа, а функции $\tilde{f}$ и $\tilde{\sigma}$ имеют вид

$$\tilde{f} = Ql\sin 2\theta - Q[g(\theta) + \eta\dot{\theta}], \quad \tilde{\sigma} = Q\delta[g(\theta) + \eta\dot{\theta}]. \tag{25}$$

В работе [7] по уравнению (24) в непрямом представлении

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} - \sigma'(\theta,\dot{\theta},t)\dot{\xi} \equiv h[\ddot{\theta} - f - \sigma\dot{\xi}] \tag{26}$$

при $h = e^{-Q\eta t}$ строится лагранжиан

$$L = e^{-Q\eta t}[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - Q(\frac{1}{2}l\cos 2\theta + G)], \quad \text{где} \quad G = \int g(\theta)d\theta. \tag{27}$$

При этом условия, обеспечивающие интегральность заданного множества (20), имеют вид

$$\begin{cases} a(\theta^2 + \alpha_1\dot{\theta}^2 + \alpha_2) - 2\theta\dot{\theta} - S_1 - S_2 - S_3 = 2\alpha_1\dot{\theta}\{Ql\sin 2\theta - Q[g(\theta) + \eta\dot{\theta}]\}, \\ b(\theta^2 + \alpha_1\dot{\theta}^2 + \alpha_2) = 2\alpha_1\dot{\theta}Q\delta[g(\theta) + \eta\dot{\theta}]. \end{cases}$$

Используя функцию Лагранжа (27) и преобразование Лежандра, определим функцию Гамильтона в виде $H = \chi\dot{\theta} - L(\theta,\dot{\theta},t)\Big|_{\dot{\theta}=\dot{\theta}(\theta,\chi,t)}$. И т. к. $\chi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}$, то $\chi = e^{-Q\eta t}\dot{\theta}$ и, следовательно, $\dot{\theta} = e^{Q\eta t}\chi$. Тогда каноническое уравнение, соответствующее стохастическому уравнению лагранжевой структуры (26), примет вид

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial\chi}, \\ \dot{\chi} = -\dfrac{\partial H}{\partial\theta} + \hat{\sigma}(\theta,\chi,t)\dot{\xi}, \end{cases}$$

где $\hat{\sigma} = \sigma'(\theta,\dot{\theta},t)\Big|_{\dot{\theta}=\dot{\theta}(\theta,\chi,t)}$, а функция Гамильтона определяется в виде

$$H = \frac{1}{2}e^{Q\eta t}\chi^2 e^{-Q\eta t}b(\theta).$$

Список использованной литературы

1. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М.,1986. 224с.

2. Галиуллин А.С. Избранные труды в двух томах. Т.I и Т.II. - М.: РУДН, 2009. - 462 с.
3. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. М.,1986. 88с.
4. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую //ПММ. –М.,1952. - Т.10. -В. 6. -С.659-670.
5. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632с.
6.Туладхар Б.М. Построение уравнений в форме Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения //Автореф. на соиск… к.ф.-м .н., М., УДН им. П. Лумумбы, 1983.11 с.
7. M.I. Tleubergenov, G.K. Vassilina, D.T. Azhymbaev. Construction of the differential equations system of the program motion in Lagrangian variables in the presence of random perturbations // Bulletin of Karaganda University. Mathematics series. 2022. No. 1. P. 118-126.
8. Сагиров П. Стохастические методы в динамике спутников //Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. М. 1974. № 5(147). С.28-47. 1974. № 6(148). С.3-38.

UDC 517.927

ON A SINGULAR PROBLEM FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Uteshova R.E.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: r.uteshova@iitu.edu.kz

On a finite interval $(0,T)$, we consider a differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \tag{1}$$

where $f(t,x): (0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a continuous function with singularities at the endpoints that will be specified below (Condition C_2).

Equations with singularities at the endpoint of the domain interval are often encountered in applications. Various problems for such equations have been studied by numerous authors (see [1-3] and references therein). In order to study the behavior of solutions of equation (1) at singular points, one can use so-called "limit solutions".

In [4], for a nonlinear differential equation considered on the whole real axis, the concept of a "limit solution as $t \to \infty$" was introduced. Some conditions were derived, under which all solutions of the differential equation from a functional ball coincide with a limit solution when $t \to \infty$. By means of Lyapunov transformations and limit solutions, regular two-point boundary value problems were constructed to approximate the restrictions of solutions bounded on the whole real line to a finite interval. To this end, iterative processes for unbounded operator equations [6] and the results obtained in [7] were used where analogous problems were studied for a linear ordinary differential equation.

It was proved that, under certain assumptions on the right-hand part of the equation, the limit solution $x_0(t)$ possesses an attracting property; i.e. there exists a functional ball centered at $x_0(t)$ where the differential equation has at least one solution, and all solutions from this ball coincide with $x_0(t)$. This property made it possible to solve the problem of approximation of a solution bounded on the whole real axis.

The attracting property of the limit solution was established under assumption that the differential equation linearized along the limit solution

$$\frac{dy}{dt} = f_x{}'(t, x_0(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

admits an exponential dichotomy on $\mathbb{R}$. However, if the differential equation has certain singularities in the domain, this assumption may be violated.

The concept of a limit solution was extended in [7] to the case of a nonlinear differential equation with a singularity at the left endpoint of the domain interval. In this case the limit solution was introduced with a weight which is chosen taking into account the singularities. It was proved that the weighted limit solution also has the attracting property.

In the present paper, we consider a singular boundary value problem for equation (1) on a finite interval. We define the concept of a limit solution at singular points and establish conditions under which this solution possess an attracting property. We then construct approximating regular two-point boundary value problems that allow us find approximate solutions of the singular boundary value problem with any specified accuracy.

Let r be a positive constant and $x_0(t)$ be a function continuously differentiable on $(0, T)$.

We will use the following notation:

$\tilde{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n)$ is a space of functions $x: \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ continuous and bounded on $\mathcal{J} \subseteq (0, T)$ with the norm $||x||_1 = \sup_{t \in \mathcal{J}} ||x(t)||$;

$$S(x_0(t),\mathcal{I},r)=\{x(t)\in\tilde{C}(\mathcal{I},\mathbb{R}^n):\ x(t)-x_0(t)\in\tilde{C}(\mathcal{I},\mathbb{R}^n),\|x-x_0\|_1<r\};$$
$$G(x_0(t),\mathcal{I},r)=\{(t,x):\ t\in\mathcal{I},\|x-x_0\|<r\}.$$

We suppose that the following conditions are fulfilled.

Condition C1. The function $f_x{}'(t,x)$ is uniformly continuous in $G(x_0(t),(0,T),r)$.

Condition C2. The function $\alpha(t)=\|f_x{}'(t,x_0(t))\|$ satisfies the relations

$$\lim_{\delta\to0+0}\int_\delta^{T/2}\alpha(t)dt=\infty,\quad \lim_{\delta\to0+0}\int_{T/2}^{T-\delta}\alpha(t)dt=\infty;$$

Condition C3. $\lim\limits_{t\to0+0}\frac{f_x{}'(t,x_0(t))}{\alpha(t)}=A_0$, $\lim\limits_{t\to T-0}\frac{f_x{}'(t,x_0(t))}{\alpha(t)}=A_T$, where A_0 and A_T are constant matrices whose eigenvalues have nonzero real parts: $\operatorname{Re}\lambda_i(A_0)\neq0,\operatorname{Re}\lambda_i(A_T)\neq0$, $i=\overline{1,n}$.

Condition C4. $\lim\limits_{t\to0+0}\frac{f(t,x)}{\alpha(t)}=f_0(x)$ and $\lim\limits_{t\to T-0}\frac{f(t,x)}{\alpha(t)}=f_T(x)$.

Definition. *A function $x_T(t)$ continuously differentiable on $(0,T)$ is called a limit solution of Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t\to T-0$ if*

$$\lim_{t\to T-0}\frac{\|\dot{x}_T(t)-f(t,x_T(t))\|}{\alpha(t)}=0.$$

Let S_0 and S_T denote some real nonsingular $(n\times n)$ matrices that transform the matrices A_0 and A_T, respectively, to the generalized Jordan form

$$\tilde{A}_0=S_0A_0S_0^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^0&0\\0&A_{22}^0\end{pmatrix},\quad \tilde{A}_T=S_TA_TS_T^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^T&0\\0&A_{22}^T\end{pmatrix},$$

Here A_{ii}^0 and A_{ii}^T, $i=1,2$, consist of generalized Jordan boxes corresponding to the eigenvalues of the matrices A_0 and A_T with negative and positive real parts, respectively. Let n_1 and n_2 denote respectively the numbers of eigenvalues of A_0 with negative real parts and eigenvalues of A_T with positive real parts.

Let us consider the problem

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\qquad t\in[T-\delta,T),\ 0<\delta<T,\tag{2}$$
$$P_TS_T[x(T-\delta)-x_T(T-\delta)]=d,\quad d\in\mathbb{R}^{n_2},\tag{3}$$
$$x(t)\in S(x_T(t),[T-\delta,T),r_0),\quad r_0>0,\tag{4}$$

where $P_T=(0,I_{n_2})$ is an $(n_2\times n)$ matrix.

Theorem 1. *Suppose that $x_T(t)$ is a limit solution with weight $1/\alpha(t)$ as $t\to T-0$ of equation (1) and Conditions C1 –C3 are satisfied. Then there exist numbers $\delta_0\in(0,T)$, $r_0>0$, and $\rho_0>0$ such that, for any $\delta\in(0,\delta_0]$, problem (2) - (4) has a unique solution for all $d\in\mathbb{R}^{n_2}$ satisfying the inequality $\|d\|<\rho_0$.*

The following theorem establishes an attracting property of the limit solution.

Theorem 2. *Suppose $x_T(t)$ is a limit solution of equation (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to T - 0$ and Conditions $C_1 - C_3$ are met. Then:*

(i) there exist numbers $\delta_0 > 0$ and $r_0 \in (0, r]$ such that equation (1) has at least one solution in $S(x_T(t), [T - \delta_0, T), r_0)$;

(ii) any solution $x(t)$ of equation (1) belonging to $S(x_T(t), [T - \delta_0, T), r_0)$ satisfies the limit relation

$$\lim_{t \to T-0} \|x(t) - x_T(t)\| = 0.$$

Similarly, we can define a limit solution $x_0(t)$ of equation (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to 0 + 0$ and prove its attracting property.

We now proceed to a singular boundary value problem for equation (1). The boundary condition is the requirement on solutions to belong to a functional ball centered at a limit solution.

Problem 1. It is required to find a solution $\tilde{x}(t)$ of equation (1) that belongs to the functional ball

$$\tilde{x}(t) \in S\big(x_{0,T}(t), (0, T), r\big),$$

where $x_{0,T}(t)$ is a limit solution of equation (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to 0 + 0$ and $t \to T - 0$.

To find an approximate solution of Problem 1 we state the following problem.

Problem 2. Given $\varepsilon > 0$, it is required to determine a number $\delta > 0$ and a continuous function $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for which a solution $x_\delta(t)$ of the two-point boundary value problem

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad t \in (\delta, T - \delta), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$g[x(\delta), x(T - \delta)] = 0,$$

satisfies the inequality

$$\max_{t \in [\delta, T-\delta]} ||x_\delta(t) - x_{0,T}(t)|| < \varepsilon,$$

where $x_{0,T}(t)$ is a solution of Problem 1.

Let us construct the $(n \times n)$ matrices

$$P_1 = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix},$$

where I_{n_r} are the identity matrices of order n_r, $r = 1,2$. Under Conditions C1 - C4, we have constructed a regular two-point boundary value problem approximating Problem 1:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in (\delta, T-\delta), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$P_1 S_0 f_0\big(x(\delta)\big) + P_2 S_T f_T(\, x(T-\delta)) = 0.$$

It can be shown that there is a mutual relationship between the solvability of Problem 1 and that of its approximating two-point regular boundary value problem.

REFERENCES

1. Kiguradze, I.T. and Shekhter, B. L. Singular boundary-value problems for ordinary differential equations of the second order, in: *VINITI Series in Contemporary Problems of Mathematics. Latest Achievements* [in Russian] **30**, 105–201 (1987).

2. Samoilenko, A. M., Shkil', M. I., and Yakovets', V. P. Linear Systems of Differential Equations with Degenerations [in Ukrainian]. *Vyshcha Shkola, Kyiv* (2000).

3. Kudryavtsev, L. D. Problems with initial asymptotic data for systems of ordinary differential equations. *Dokl. Ros. Akad. Nauk*, 407(2), 172 – 175 (2006).

4. Dzhumabaev, D. S. Singular boundary value problems and their approximation for nonlinear ordinary differential equations. *Journal of Comp. Math. and Math. Phys.*, 32(1), 13 - 29 (1992).

5. Dzhumabaev, D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* 41, 356–361 (1987). https://doi.org/10.1007/BF01159858

6. Dzhumabaev, D. S. Approximation of bounded solutions and exponential dichotomy on the axis. *Journal of Comp. Math. and Math. Phys.*, 30(6), 32 – 43 (1990). https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90106-3

7. Dzhumabaev, D.S. and Uteshova, R.E. Weighted limit solution of a nonlinear ordinary differential equation at a singular point and its property. *Ukrainian Mathematical Journal*, 69(12), 1997 – 2004 (2018). https://doi.org/10.1007/s11253-018-1483-2

Секция №2
Section №2

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ТЕҢДЕУЛЕРІ

EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

СЫЗЫҚСЫЗ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ЖУЫҚТАП ШЫҒАРУДЫҢ БІР ӘДІСІ

Өтеуова Н.Ж.[1], Шарипова Б.Д.[2]

[1]*Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан*

[2]*Алматы технологиялық университеті, Алматы, Қазақстан*

Дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептерін шешуге арналған жуықтау әдістерінің түрлерінің көп екендігі көпшілікке мәлім. Бұл жұмыста сызықсыз шекаралық есептерді жуықтап шығарудың ұсынылған жаңа әдісін [3] әрі қарай зерттеудің нәтижелері ұсынылады.

H банах кеңістігінде сызықсыз теңдеуді қарастырайық:

$$A(u) = f \in H,\ \ u \in H\ . \tag{1}$$

Келесідей ұйғарайық:

$$A(0) = 0 \text{ және } |A(u)| \le C < \infty \text{ теңсіздігінен } |u| \le C_1 \text{ шығады,} \tag{2}$$

мұндағы C_1 - тек C тұрақтысына тәуелді; $|\cdot|$ - әрі қарай да элемент нормасы немесе скаляр модулі. (2)-шарт априорлық бағаның бар екендігін көрсетеді. $A(\cdot)$-ға (2)-ден басқа келесі шектеулерді де енгіземіз:

$$|\upsilon|, |u| \le d < \infty \text{ болғанда } |A(u+\upsilon) - A(u) - B(u)\upsilon| \le C_2(|u|, |\upsilon|)|\upsilon|^2, \tag{3}$$

мұндағы *B(u)* – әрбір $u \in H$ үшін сызықты үзіліссіз оператор ($u \in H$ нүктесіндегі *A* түрленуінің Гато бойынша туындысы), $C_2(|u|, |\upsilon|)$- шектелген, бірқалыпты кемімейтін (әрбір аргументі бойынша), үзіліссіз функция. (3) шарт $A(\cdot)$ үшін кішіліктің бірінші ретіне дейінгі Тейлор жіктелуінің және қалдық мүшесі үшін бағалаудың бар екендігін білдіреді. (3) типті шарттар жеңіл тексеріледі және орындалады. Оператор қайтымды және

$$|B^{-1}(u)| \le C_3(|u|) \tag{4}$$

деген ұйғарымды қолданамыз, мұндағы $|B^{-1}(u)|$ - операторлық норма.

(1) шешімін сызықты есептерге келтірейік. u_0 - (1) шешімінің бастапқы жуықтауы болсын. Келесі жуықтауларды мына түрде іздейміз:

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon \upsilon_n\,.$$

(3)-тен алатынымыз:

$$A(u_{n+1}) - f = A(u_n) - f + \varepsilon_n B(u_n)\upsilon_n + \varepsilon_n^2 |\upsilon_n|^2 \breve{C}(u_n, \upsilon_n, \varepsilon_n), \tag{5}$$

мұндағы $\breve{C}(u_n, \upsilon_n, \varepsilon_n)$ келесі бағаны:

$$\breve{C}(u_n, \upsilon_n, \varepsilon_n) \le C_2\left(|u_n|, |\upsilon_n|\right) < \infty \tag{6}$$

$\varepsilon_n \in [-1,1]$ болғанда қанағаттандырады.

$A(u_n) - f = S_n$ деп белгілейміз және $B(u_n)\upsilon_n = A(u_n) - f$ теңдігінен υ_n-ді аламыз. (4)-тің қайтымдылығы соңғы теңдікті мүмкін етеді. Онда (5) пен (6)-дан алатынымыз:

$$|S_{n+1}| \le |S_n|(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 a_n^2), \tag{7}$$

мұндағы a_n^2 - келесі теңсіздікті қанағаттандыратын кез келген сан:

$$a_n^2 \ge \frac{\left|B^{-1}(\upsilon_n)S_n\right|^2}{|S_n|} C_2\left(|u_n|, |\upsilon_n|\right). \tag{8}$$

$\varepsilon_n \in [-1,1]$ бойынша (7)-нің оң жағының минимумына

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{2a_n^2}, \quad \text{егер } \frac{1}{2a_n^2} < 1; \qquad \varepsilon_n = -1, \quad \text{егер } \frac{1}{2a_n^2} \ge 1 \tag{9}$$

нүктесінде жетеміз. ε_n-нің осы мәндерінде (7)-ден шығатын

Лемма 1. n=0,1,2,… үшін

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon_n B^{-1}(u_n)S_n, \quad S_n = A(u_n) - f, \tag{10}$$

орындалсын дейміз, мұндағы ε_n мәні (9)-дан анықталады, ал a_n^2 - келесі теңсіздік орындалатындай кез келген сан:

$$a_n^2 \ge |S_n|\left|B^{-1}(\upsilon_n)S_n\right|^2 C_2\left(|u_n|, \left|B^{-1}(\upsilon_n)S_n\right|\right). \tag{11}$$

Онда

$$|S_{n+1}| \le \begin{cases} |S_n|\left(1 - \dfrac{1}{4a_n^2}\right), & \text{если } \dfrac{1}{2a_n^2} < 1; \\ |S_n| a_n^2, & \text{если } \dfrac{1}{2a_n^2} \ge 1. \end{cases}$$

Лемма 1-ден сол лемма негізінде құрылған S_n тізбегі нормасы бойынша бірқалыпты кемитіндігі шығады. Ендеше (2) шарттан келесіні аламыз:

$$|u_n| \le C_1\left(|S_n|\right) \le C_1\left(|S_0|\right) < \infty. \tag{12}$$

Осыдан және (4)-шарттан алатынымыз:

$$\left|B^{-1}(u_n)\right| \le C_3\left(|S_0|\right) < \infty. \tag{13}$$

Сондықтан

$$\tilde{a}_n^2 \equiv |S_n|^{-1}\left|B^{-1}(u_n)S_n\right|^2 C_2\left(|u_n|, \left|B^{-1}(u_n)S_n\right|\right) \le$$

$$\le \left|B^{-1}(u_n)\right| C\left(|u_n|, \left|B^{-1}(u_n)S_n\right|\right) \le |S_n| C_4(|u_0|). \qquad (14)$$

Осы теңсіздіктен шығатын

Лемма 2. (2)-(4) шарттар орындалсын делік. u_0 - (1)-теңдеудің бастапқы жуықтаған шешімі ретінде алынған, *H*-тың кез келген элементі болсын. Онда $a_n^2 = |S_n| C_4(|u_0|)$ сандары үшін (11) теңсіздіктер орындалады.

Егер a_n^2 орнына $|S_n| C_4(|u_0|)$ сандарын таңдап алатын болсақ, онда қарастырылған екі леммадан алатынымыз:

$$|S_{n+1}| \le \begin{cases} |S_n|(1 - \dfrac{1}{4|S_n| C_4(|u_0|)}, & \text{егер } 2S_n C_4(|u_0|) > 1; \\ S_n C_4(|u_0|), & \text{егер } 2S_n C_4(|u_0|) \le 1. \end{cases}$$

Белгілеу енгізейік:

$$\breve{S}_n = C_4(|u_0|)|S_n|. \qquad (15)$$

Сонда $|S_n|$ үшін алынған бағалардан шығатыны:

$$\breve{S}_{n+1} \le \begin{cases} \breve{S}_n \left(1 - \dfrac{1}{4\breve{S}_n}\right), & \text{егер } \breve{S}_n > 0{,}5; \\ \breve{S}_n^2, & \text{егер } \breve{S}_n \le 0{,}5. \end{cases} \qquad (16)$$

(16)-дан $n \ge [4\breve{S}_0] - 1$ кезінде $\breve{S}_n$ үйлесімсіздігінің 0,5-тен артпайтындығы шығады. Сондықтан $\breve{S}_{n_0} > 0{,}5$ болатындай n_0 максималды натурал саны үшін келесі бағалау орындалады:

$$n_0 \le [4\breve{S}_0] - 1. \qquad (17)$$

n_0-ден үлкен болатын *n* үшін (16)-дан келесі бағалауды аламыз:

$$\breve{S}_{n+1} \le \breve{S}_n^2, \quad \breve{S}_n^2 \le \frac{1}{4}, \quad n_0 \le n.$$

Осыдан

$$\breve{S}_{n_0+k} \le \breve{S}_{n_0}^{2k} \le 2^{-2^k}, \quad k = 1,2,\ldots. \qquad (18)$$

(18) бағалауды пайдалансақ, шығатыны:

$$\left|u_{n_0+k} - u_{n_0+k_1}\right| \le C_5(|u_0|) 2^{-2^{k-k_1}}.$$

Осы теңсіздік *H* толық болғандықтан (1)-дің шешіміне жинақталу жылдамдығын береді.

Жоғарыда алынған нәтижелерден шығатын

Теорема 1. (2)-(4) шарттар орындалсын делік. Онда (1)-теңдеудің шешімі бар болады.

u_0- H-тың кез келген элементі болсын. Онда (10)-рекурренттік формулалар арқылы құрылған $\{u_n\}_0^\infty$ үшін (9)-теңсіздіктер орындалатындай және $a_n^2 = |S_n| C_4, \quad n = 0,1,2,\ldots$, болатындай $C_4 > 0$ саны табылады.

Келесі тұжырымдар орындалады:

а) $n \to \infty$ болғанда u_n мәні $A(u) - f = 0$ теңдеуінің u шешіміне ұмтылады және $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |A(u_n) - f| = 0$;

б) $|S_n| = |A(u_n) - f| = 0$ саны нольге бірқалыпты ұмтылады және $n > n_0$ болғанда (18) бағалау орындалады.

Ескерту 1. Теоремадан шығатын алгоритмді сандық орындау кезінде $B^{-1}(u_n)S_n$ мәнін есептеу ең қиын тұс болуы ықтимал. Бірақ оны орындамау мүмкін емес. Ол элементті табу

$$B(u_n)\upsilon_n = S_n \tag{19}$$

сызықтық теңдеуін шешу арқылы жүзеге асады. Және де υ_n мәні $B^{-1}(u_n)S_n$ мәніне тең болады.

Егер (1) сызықсыз теңдеуді h>0 дәлдікпен шешкіміз келсе, онда теоремадан $m(h)$ (19) сызықтық теңдеулерді шешу қажеттігі туындайды. Сонымен қатар $m(h) = 0(\ln \ln(1/h))$. ε_n сандарын таңдау $|S_n|$ есептеуіне және C_4 мәніне байланысты. C_4 санын бағалау үшін $B^{-1}(u_n)$ нормасының жоғарғы бағасы қажет. C_4 үшін ақиқат мәнге жақын бағалауды табу кей жағдайларда күрделі бағалауларды жасай білу шеберлігін талап етеді. Бірақ ондай бағалауларды жасау барлық жағдайда мүмкін бола бермейді. Осыларды ескере отырып, біз таңдаудың келесі қарапайымдау түрін ұсынамыз.

Ескерту 2. Келесі рекурренттік формулалармен:

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon_n B^{-1}(u_n)S_n$$

есептеуді $\varepsilon_0 \in [-1;1]$ кез келген мәнінен бастайық. $\varepsilon_n \in [-1;1]$ таңдалды және u_{n+1} есептелді деп ұйғарайық. Есептейміз:

$$\begin{aligned} u_{n+2,1} &= u_{n+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_n B^{-1}(u_{n+1})S_{n+1}, \\ u_{n+2,0} &= u_{n+1} + \varepsilon_n B^{-1}(u_{n+1})S_{n+1}, \\ u_{n+2,-1} &= u_{n+1} - \min(1,-2\varepsilon_n)B^{-1}(u_{n+1})S_{n+1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Белгілеулер енгізейік: $\varepsilon_{n+1,1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n, \quad \varepsilon_{n+1,0} = \varepsilon_n, \quad \varepsilon_{n+1,-1} = \min\{1,-2\varepsilon_n\}$.

Есептейміз: $\alpha_1 = \left|S_{n+2,1}(u_{n+2,1})\right|, \quad \alpha_0 = \left|S_{n+2,0}(u_{n+2,0})\right|, \quad \alpha_{-1} = \left|S_{n+2,-1}(u_{n+2,-1})\right|$.
$\alpha_1 \le \alpha_0 \le \alpha_{-1}$ болсын. Егер $\alpha_1 \le \alpha_0$, онда ε_{n+1}ретінде $\varepsilon_{n+1,1}$-ді аламыз.
Егер де $\alpha_1 = \alpha_0 \le \alpha_{-1}$, онда ε_{n+1}ретінде $min\{\varepsilon_{n+1,1};\varepsilon_{n+1,0}\}$ санын аламыз.
Егер $\alpha_1 = \alpha_0 = \alpha_{-1}$, онда $\varepsilon_{n+1} = \min\{\varepsilon_{n+1,1};\varepsilon_{n+1,0};\varepsilon_{n+1,-1}\}$ деп ұйғарамыз.
ε_n-ді осылай таңдаған кезде u_n тізбегі $n \to \infty$ кезде $A(u) = f$ теңдеуінің u шешіміне жинақталатынын оңай дәлелдеуге болады және де $n \ge n_0$ болғанда келесі бағалаулар орындалады:

$$\left|S_n\right| \le C_8 2^{-2^{n-n_0}}, \quad \left|u_n - u\right| \le C_9 \cdot 2^{-2^{n-n_0}},$$

мұндағы C_8, C_9, n_0 - тұрақты сандар.

Ескерту 3. $\left|B^{-1}(u_n) - \widetilde{B}(u_n)\right| \le C_{10}\varepsilon$ болсын, мұндағы $\widetilde{B}(u_n)$ - қандай да бір оңай есептелетін оператор, яғни, $B^{-1}(u_n)$ операторлық нормамен $C_{10}\varepsilon$ дәлдікке дейін есептеледі деп ұйғарамыз. Сонда алатынымыз:

$$\left|S_{n+1}\right| \le \left|S_n + \varepsilon S_n\right| + C_{10}\varepsilon^2 \left|\varepsilon\widetilde{B}(u_n)\right|\left|S_n\right| + \varepsilon^2 \left|\widetilde{B}S_n\right|^2 C\left(\left|u_n\right|, \left|\widetilde{B}S_n\right|\right).$$

(2)-(4) шарттар орындалғанда бұл теңсіздік (9)-теңсіздікке алып келеді, бірақ басқа a_n-мен. Олай болса, 1-теореманың нәтижесі $B^{-1}(u_n)S_n$ есептеу қателігіне қатысты орнықты.

$B^{-1}(u_n)$ есептеуімен салыстырғанда $B(u)$ операторының түйіндес операторы $B^*(u_n)$-ны есептеу әлдеқайда оңай. H – гильберт кеңістігі деп есептейік және (2), (3) шарттар мен келесі шарт орындалсын делік:

$$\gamma_0\left(\left|u\right|\right) \le B(u)B^*(u) \le \gamma_1\left(\left|u\right|\right), \tag{21}$$

мұндағы $\gamma_i\left(\left|u\right|\right), \; i = 0,1,$ - үзіліссіз оң функциялар, $\gamma_1\left(\left|u\right|\right)$ бірқалыпты кемімейді, $\gamma_0\left(\left|u\right|\right)$ - өспейді. Егер (4) орындалса, онда төменгі (21) бағалау да орындалады.

u_n - H-тағы кез келген элемент болсын, оны $A(u)=f$ (1) теңдеуінің шешімінің бастапқы жуықтауы ретінде алайық.

$A(u_n + \varepsilon\upsilon_n), \; \varepsilon \in [-1;0)$, бағалайық, мұнда υ_n ретінде келесіні алайық:

$$\upsilon_n = B^*(u_n)\left(A(u_n) - f\right) = B^*(u_n)S_n. \tag{22}$$

Келесі бар екені белгілі:

$$\left|S_{n+1}\right| = A\left(u_n + \varepsilon\upsilon_n\right) - f \le \left|S_n\right| \left[1 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2 \frac{\left|B^*(u_n)S_n\right|^2}{\left|S_n\right|} C\left(\left|u_n\right|, \left|B^*(u_n)S_n\right|\right)\right].$$

Осының оң жағын ε бойынша кішірейте отырып,

$$\varepsilon = \min\left\{\gamma_1^{-1}, \frac{|S_n|\gamma_0}{2|B^* S_n|^2 C(|u_n|,|B^* S_n|)}\right\}$$

болғанда, келесі теңсіздіктің орындалатынын байқаймыз:

$$|S_{n+1}| \le |S_n|\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\gamma_0\right).$$

Соңғы екі бағалаудан шығатын

Теорема 2. (2), (3) және (21) шарттар орындалады деп ұйғарайық. u_0 дегеніміз $A(u) - f = 0$ теңдеуінің u шешіміне бастапқы жуықтау болсын. Рекурренттік формулалар арқылы құрылған

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon B^*(u_n) S_n, \quad S_n = A(u_n) - f\ ,$$

$A(u) = f$ теңдеуінің шешіміне жинақталатындай $\varepsilon_0 \in (-1;0)$ саны табылып, келесі бағалау орындалады:

$$|S_n| \le \delta^n, \qquad |u_n - u| \le C_{11}\delta^n.$$

Бұл теоремадағы жинақталу жылдамдығы 1-теоремамен салыстырғанда нашарлау, бірақ мұндағы рекурренттік формулалармен есептеу әлдеқайда жеңіл.

Сызықсыз шекаралық есептерді шешуге арналған осы жуықтау әдісті мысал арқылы тексеріп көрелік.

C[0,1]-дегі [0;1] кесіндісінде Ay=f есебін шығарайық. Жеке жағдайда оны келесі түрде қарастыруға болады:

$$\begin{cases} y'' - y^3 = f, \\ y(0) = y'(1) = 0, \end{cases}$$

мұнда $y = \cos\pi x - 1$ дәл шешім болып табылады. Операторлық түрде есепті келесі түрде жазуға болады:

$$Ay = y - \int_0^x (x-t)y^3(t)dt.$$

Онда

$$A(y+\upsilon) - Ay = \upsilon - \int_0^x (x-t)[(y+\upsilon)^3 - y^3]dt$$

болғандықтан $|\upsilon|_{C[0,1]}$, $|y|_{C[0,1]} \leq 1$ болғанда келесі мүмкін болады:

$$\left| A(y+\upsilon) - Ay + 3\int_0^x (x-t)y^2(t)\upsilon(t)dt \right|_{C[0,1]} =$$

$$= \left| \upsilon - \int_0^x (x-t)[(3y\upsilon^2 + \upsilon^3)dt \right| \leq C(y)\left(|\upsilon|_C^2 + |\upsilon|_C^3\right).$$

$B(y)\upsilon$ ретінде келесіні аламыз: $B(y)\upsilon = -3\int_0^x (x-t)y^2(t)\upsilon(t)dt.$

Жоғарыда баяндалған әдіс бойынша y жуықталған шешімін табамыз. Есептеу тәжірибесі әдістің жақсы жинақтылығын көрсетті. Демек, бұл әдісті қолдану математикалық физиканың көптеген есептерінің шешімдерін тез және дұрыс табуға мүмкіндік береді.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1. Дьяконов Е.Г. Минимизация вычислительной работы. – М., Наука, 1989.
2. Мухамбетжанов А.Т., Отелбаев М.О., Смагулов Ш.С. // Об одном приближенном методе решения нелинейных краевых задач. Препринт №21, ИА РК, Алматы, 1997, 34 с.
3. Отелбаев М.О., Рысбайулы Б. Приближенный метод решения нелинейных операторных уравнений: итерационный процесс, оценка скорости сходимости // Алматы: ДАН РК.- №5. – 1999. – с.20-22.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М., Наука, 1983, 153 с.
5. Самарский А.А., Лазарев Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М., Высшая школа, 1987, 296 с.

УДК 517.946

НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ГУМБЕРТА

[1]Убаева Ж.К., [2]Тасмамбетов Ж.Н.

[1]Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова

[2]Западноказахстанский университет имени М.Утемисова

Аннотация. Построены нормально-регулярные решения неоднородной системы Гумберта (Φ_3). Изучены некоторые свойства и связь этой системы с системой Гумберта (Φ_2).

Ключевые слова: нормально-регулярные решения, система, однородная, неоднородная, свойства, вырожденная, соотношения.

Функции Гумберта (Φ_2) и (Φ_3) являются частными случаями введенной В.И. Художниковым новой функции $\Phi_{B,n}^{k,l}$ полученной путем предельного перехода из функции Лауричелла F_B [1]. Между этими функциями справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\Phi_2(\alpha_1,\alpha_2;\gamma;z_1,z_2)=\Phi_{B,2}^{0,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2\\ \gamma & \end{matrix}\middle| z_1,z_2\right),\\ \Phi_3(\alpha_1;\gamma;z_1,z_2)=\Phi_{B,2}^{0,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1\\ \gamma\end{matrix}\middle| z_1,z_2\right).\end{gathered} \tag{1}$$

Функции Гумберта получены из функции Аппеля F_3 и хорошо исследованы [2]. Однако, существования нормально-регулярного решения неоднородной системы (Φ_3) требует дополнительного исследования. С этой целью, сначала установим нормально-регулярные решения соответствующей однородной системы.

Теорема 1. Вырожденная гипергеометрическая система

$$\begin{gathered}z_1 w_{z_1 z_1}+z_2 w_{z_2 z_2}+(\gamma-z_1)w_{z_1}-\alpha_1 w=0,\\ z_2 w_{z_2 z_2}+z_1 w_{z_2 z_2}+(\gamma-z_2)w_{z_2}-\alpha_2 w=0\end{gathered} \tag{2}$$

полученная из системы (1) путем предельного перехода имеют три линейно-независимые частные решения $w_t\,(t=1,2,3)$, одним из которых является функция

$$w_1(z_1,z_2)=\Phi_3(\alpha_1;\gamma;z_1,z_2)=\Phi_{B,2}^{0,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1\\ \gamma\end{matrix}\middle| z_1,z_2\right). \tag{3}$$

Решения $w_t(t=1,2,3)$ можно построить методом Фробениуса-Латышевой [3].

Теперь докажем, что система (2) имеет нормально-регулярные решения вида

$$w(z_1,z_2)=\exp(\alpha_{10}z_1+\alpha_{01}z_2)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}A_{m_1,m_2}z_1^{m_1}z_2^{m_2},\, A_{10}\neq 0 \tag{4}$$

где $\alpha_{1,0},\alpha_{0,1};\rho_1,\rho_2,A_{m,n}(m_1,m_2=0,1,2,...)-$неизвестные постоянные.

Теорема 2. Вспомогательная система

$$
\begin{aligned}
&z_1U_{z_1z_1}+z_2U_{z_1z_2}+\{2\alpha_{10}z_1+\alpha_{01}z_2+(\gamma-z_1)\}U_{z_1}+\alpha_{10}z_2U_{Z_2}+\\
&\{(\alpha_{10}^2-\alpha_{10})z_1+\alpha_{10}\alpha_{01}z_2+\alpha_{10}\gamma-\beta\}U=0,\\
&z_2U_{z_2z_2}+z_1U_{z_1z_2}+\alpha_{01}z_1U_{z_1}+\{2\alpha_{01}z_2+\alpha_{10}z_1+\gamma\}U_{z_2}+\\
&\{\alpha_{01}^2z_2+\alpha_{10}\alpha_{01}z_1+\alpha_{01}\gamma-1\}U=0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

полученная из системы (2) с помощью преобразования

$$
w(z_1,z_2)=\exp(\alpha_{10}z_1+\alpha_{01}z_2)U(z_1,z_2),\tag{6}
$$

при выполнении условия

$$
\alpha_{10}^2-\alpha_{10}=0,\alpha_{01}^2=0\tag{7}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&f_{0,0}^{(1)}(\rho_1,\rho_2)=\rho_1(\rho_1-1+\rho_2+\gamma)=0,\\
&f_{0,0}^{(2)}(\rho_1,\rho_2)=\rho_2(\rho_2-1+\rho_1+\gamma)=0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

имеют одно нормально-регулярное решение

$$
w(z_1,z_2)=e^{z_1}(1-\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma}z_1+\frac{1}{\gamma}z_2-\frac{\gamma+1-\alpha_1}{\gamma(\gamma+1)}z_1,z_2+\frac{(\gamma-\alpha_1)(\gamma+1-\alpha_1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z_1^2+\frac{z_2^2}{2!\gamma(\gamma+1)}+...\tag{9}
$$

Доказательство. В преобразовании (6) неизвестные постоянны, α_{10} и α_{01} определяются из равенства (7). Это позволяет установить вид определяющего множителя $\exp(\alpha_{10}z_1+\alpha_{01}z_2)$. Система характеристических уравнений (7) имеет две пары корней:

I. $(\alpha_{10}=0,\alpha_{01}=0)$. При этих значениях из вспомогательной системы (5) получаем исходному систему (2), одним из решений которой является функция (3).

II. При $(\alpha_{10}=1,\alpha_{01}=0)$ получается присоединенная система [4]:

$$
\begin{aligned}
&z_1U_{z_1z_1}+z_2U_{z_1z_2}+(z_1+\gamma)U_{z_1}+z_2U_{z_2}+(\gamma-\alpha_1)U=0,\\
&z_2U_{z_2z_2}+z_1U_{z_1z_2}+(z_1+\gamma)U_{z_2}-U=0,
\end{aligned}
$$

которая имеет единственное нормально-регулярное решение

$$
\begin{aligned}
&w(z_1,z_2)=e^{z_1}U(z_1,z_2)=e^{z_1}[1-\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma}z_1+\frac{1}{\gamma}z_2-\frac{\gamma+1-\alpha_1}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\\
&+\frac{(\gamma-\alpha_1)(\gamma+1-\alpha_1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z_1^2+\frac{1}{2!\gamma(\gamma+1)}z_2^2+...]=e^{z_1}\Phi_3(\gamma-\alpha_1+1;\gamma;-z_1,z_2-z_1).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Решение построим методом Фробениуса-Латышевой, как в работе [4].

Теперь докажем, что правая часть нормально-регулярного решения (10) совпадает с функцией Гумберта-Художникова (3).

Теорема 3. Имеет место соотношения

$$
\begin{aligned}
&\Phi_3(\alpha_1;\gamma;z_1,z_2)=w(z_1,z_2)=e^{z_1}U(z_1,z_2)=e^{z_1}[1-\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma}z_1+\frac{1}{\gamma}z_2-\frac{\gamma+1-\alpha_1}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\\
&+\frac{(\gamma-\alpha_1)(\gamma+1-\alpha_1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+...].
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Доказательство. Для доказательства раскроем правую часть (11), путем разложения e^{z_1} в ряд. Тогда, после умножения рядов и после небольших преобразований получим

$$e^{z_1}\left[1-\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma}z_1+\frac{1}{\gamma}z_2-\frac{\gamma+1-\alpha_1}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\frac{(\gamma-\alpha_1)(\gamma+1-\alpha_1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+...\right]=$$

$$=\left(1+\frac{z_1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}+...+\frac{z_1^n}{n!}+...\right)\left\{1-\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma}\frac{z_1}{1!}+\frac{1}{\gamma}\frac{z_2}{1!}-\frac{\gamma+1-\alpha_1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1z_2}{1!}+\frac{(\gamma-\alpha_1)(\gamma+1-\alpha_1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+...\right\}=$$

$$=\left\{1+\frac{\alpha_1}{\gamma}\frac{z_1}{1!}+\frac{1}{\gamma}\frac{z_2}{2!}+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{\alpha_1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1z_2}{1!}+\frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+...\right\}=$$

$$=\Phi_3(\alpha_1;\gamma;z_1,z_2)=\Phi_{B,2}^{0,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1\\ \gamma\end{matrix}\middle| z_1,z_2\right),$$

то есть совпадает с функцией Гумберта-Художникова (3).

Аналогично доказывается утверждение.

Теорема 4. Имеет место соотношения

$$e^{-z_1}\Phi_3(\alpha_1;\gamma;z_1,z_2)=\left\{1-\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma}z_1+\frac{1}{\gamma}z_2-\frac{\gamma+1-\alpha_1}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\frac{(\gamma-\alpha_1)(\gamma+1-\alpha_1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+...\right\}. \quad (12)$$

Следует отметить, что предельные переходы осуществляются по разному. Например, следующие предельные переходы

$$\lim_{\varepsilon\to0}F_1\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};\alpha_2;\gamma;z_1,\varepsilon\cdot z_2\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\alpha_2,n}{(\gamma,m+n)}\frac{z_1^m}{(1,m)}\frac{z_2^n}{(1,n)}=\Phi_3(\alpha_2,\gamma;z_1,z_2),$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}F_1\left(\frac{1}{\varepsilon},\alpha_1,\frac{1}{\varepsilon};\gamma;\varepsilon\cdot z_1,\varepsilon^2\cdot z_2\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\alpha_1,m}{(\gamma,m+n)}\frac{z_1^m}{(1,m)}\frac{z_2^n}{(1,n)}=\Phi_3(\alpha_1,\gamma;z_1,z_2)$$

показывают связь этой функций с функцией Аппеля F_1.

Соотношение

$$\Phi_3(\alpha_1,\gamma;z_1,z_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1,m)}{(\gamma,m)(1,m)}z(\gamma+m,z_2)z_1^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma,n)(1,n)}G(\alpha_1,\gamma+n,z_1)z_2^m \quad (13)$$

показывает, что из функций $\Phi_3(\alpha_1,\gamma;z_1,z_2)$ можно выделить функции $j(\gamma+m,z)$ и $G(\alpha_1,\gamma+n,z_1)$, то есть вырожденную функцию приводящееся к функциям Бесселя и Куммера.

Следующее соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Phi_2\left(\alpha_1,\frac{1}{\varepsilon};\gamma;z_1,\varepsilon\cdot z_2\right)=\Phi_3(\alpha_1,\gamma;z_1,z_2) \quad (14)$$

устанавливает связь между функциями Гумберта Φ_2 и Φ_3. Эти соотношения будут использованы нами при обобщении отдельных свойств функции Гумберта $\Phi_3(\alpha_1,\gamma;z_1,z_2)$.

Нормально-регулярные решения неоднородной системы (Φ_3)

Будем заниматься построением нормально- регулярных решений неоднородной системы

$$\begin{aligned} z_1 w_{z_1 z_1} + z_2 w_{z_2 z_2} + (\gamma - z_1) w_{z_1} - \alpha_1 w &= f_1(z_1, z_2), \\ z_2 w_{z_2 z_2} + z_1 w_{z_2 z_2} + (\gamma - z_2) w_{z_2} - \alpha_2 w &= f_2(z_1, z_2). \end{aligned} \tag{15}$$

В отличие от системы Φ_2 которая состоит из двух уравнений с параметром (α_1), в системе Φ_3 первое уравнение относится к системе с параметром, а второе уравнение к системе без параметра, полученные из системы с параметром путем предельного перехода. Именно, присутствие второго уравнения без параметра обеспечивает выделение в соотношении (13) вырожденные функции $j(\gamma + m, z)$и $G(\alpha_1, \gamma + n, z_1)$.

Теорема 5. Вырожденная гипергеометрическая система Горне Φ_3 неоднородной правой частью

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2) &= \alpha_{00}^{(1)} \exp(\alpha_{10} z_1 + \alpha_{01} z_2) z_1^{\rho_1 - 1} z_2^{\rho_2}, \\ f_2(z_1, z_2) &= \alpha_{00}^{(2)} \exp(\alpha_{10} z_1 + \alpha_{01} z_2) z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2 - 1} \end{aligned} \tag{16}$$

при выполнении двух необходимых условий (7) и (8) имеют частные решения в виде нормально-регулярных рядов:

$$1).\ w_{\rho_1,\rho_2}(z_1, z_2) = z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2} \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(\rho_1 + \alpha_1)_{m_1} (\rho_2 + \alpha_2')_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1} (\rho_1 + \gamma - 1)_{m_1+1} (\rho_2)_{m_2+1} (\rho_2 + \gamma - 1)_{m_2+1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \tag{17}$$

при $(\alpha_{10} = 0, \alpha_{01} = 0)$;

$$w_{\rho_1,\rho_2}(z_1, z_2) = \exp(z_1) z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2} \cdot$$

$$2).\ \cdot \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+m_2} (\rho_2 + \alpha_1)_{m_1} (\rho_1 + \rho_2 + \gamma - \alpha_2')_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1} (\rho_1 + \gamma - 1)_{m_1+1} (\rho_2)_{m_2+1} (\rho_2 + \gamma - 1)_{m_2+1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \tag{18}$$

при $(\alpha_{10} = 1, \alpha_{01} = 0)$.

Неизвестные коэффициенты $\alpha_{0,0}^{t} (t = 1,2)$ в правой части (16) выбираются в зависимости от значения корней системы характеристических уравнений. Они обеспечивают совместность нахождения коэффициентов рядов частных решений (17) и (18).

Преобразование (6) позволяет определить две пары корней: I. $(\alpha_{10} = 0, \alpha_{01} = 0)$ и II. $(\alpha_{10} = 1, \alpha_{01} = 0)$ системы характеристических уравнений (7). Сокращение на $\exp(\alpha_{10} z_1 + \alpha_{01} z_2) \neq 0,$ позволяют получить две вспомогательные системы без определяющего множителя $\exp(\alpha_{10} z_1 + \alpha_{01} z_2)$.

1. Так, при I. $(\alpha_{10} = 0, \alpha_{01} = 0)$ получим неоднородную систему

$$\begin{aligned} z_1 w_{z_1 z_1} + z_2 w_{z_1 z_2} + (\gamma - z_1) w_{z_1} - \alpha_1 w &= \alpha_{00}^{(1)} z_1^{\rho_1 - 1} z_2^{\rho_2}, \\ z_2 w_{z_2 z_2} + z_1 w_{z_1 z_2} + \gamma w_{z_2} - w &= \alpha_{00}^{(2)} z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2 - 1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Как и в работе [4] решение (19) ищем в виде переменных

$$U(z_1,z_2)=z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}A_{m_1,m_2}z_1^{m_1}z_2^{m_2},\ A_{0,0}\neq 0 \tag{20}$$

где $\lambda_t\,(t=1,2),\,A_{m_1,m_2}\,(m_1,m_2=0,1,2,...)$ – неизвестные постоянные, которые определяются из системы рекуррентных последовательностей

$$\begin{aligned}
&A_{0,0}f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1,\lambda_2)=\alpha_{0,0}^{(t)},\ A_{0,0}\neq 0,\ t=1,2\\
&A_{1,0}f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1+1,\lambda_2)+A_{0,0}f_{1,0}^{(t)}(\lambda_1,\lambda_2)=\alpha_{1,0}^{(t)},\\
&A_{0,1}f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1,\lambda_2+1)+A_{0,0}f_{0,1}^{(t)}(\lambda_1,\lambda_2)=\alpha_{0,1}^{(t)},\\
&A_{1,1}f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1+1,\lambda_2+1)+A_{1,0}f_{0,1}^{(t)}(\lambda_1+1,\lambda_2)+A_{0,1}f_{1,0}^{(t)}(\lambda_1,\lambda_2+1)+A_{0,0}f_{1,1}^{(t)}(\lambda_1,\lambda_2)=\alpha_{1,1}^{(t)},\\
&A_{2,0}f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1+2,\lambda_2)+A_{1,0}f_{1,0}^{(t)}(\lambda_1+1,\lambda_2)+A_{0,0}f_{2,0}^{(t)}(\lambda_1,\lambda_2)=\alpha_{2,0}^{(t)},\\
&-----------------------------------\\
&-----------------------------------
\end{aligned} \tag{21}$$

полученное из (15) с правой частью (16) путем подстановки вместо $w=z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}$.

Далее, рассуждая как в [4] начальный коэффициент $A_{0,0}$ ряда (20) определим в виде

$$A_{0,0}=\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-1+\gamma)\lambda_2(\lambda_2-1+\gamma)}. \tag{22}$$

Учитывая то, что $\lambda_1-1=\rho_1-1,\lambda_2-1=\rho_2-1$, то есть $\lambda_1=\rho_1,\lambda_2=\rho_2$, последовательно определим неизвестные $A_{m_1,m_2}(m_1,m_2=0,1,2,...)$ частное решение неоднородной системы (19) находим в виде

$$\begin{aligned}
U(z_1,z_2)&=\frac{z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}}{\left[\rho_1(\rho_1-1+\gamma)\right]\cdot\left[\rho_2(\rho_2-1+\gamma)\right]}\{1+\frac{(\rho_1+\alpha_1)z_1}{(\rho_1+1)(\rho_1+\gamma)}+\frac{(\rho_2+\alpha_2^{'})z_2}{(\rho_2+1)(\rho_2+\gamma)}+\\
&+\frac{(\rho_1+\alpha_1)(\rho_2+\alpha_2^{'})z_2z_1}{(\rho_1+1)(\rho_2+1)(\rho_2+\gamma)(\rho_1+\gamma)}+\frac{(\rho_1+\alpha_1)(\rho_1+1+\alpha_1)}{(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+\gamma)(\rho_1+1+\gamma)}z_1^2+...\}=\\
&=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\rho_1+\alpha_1)_{m_1}(\rho_2+\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2}.
\end{aligned} \tag{23}$$

При $\alpha_{10}=0$ и $\alpha_{01}=0$, то из (6) получим равенство $w(z_1,z_2)=U(z_1,z_2)$, то есть получим решение (23).

2. При II. $(\alpha_{10}=0,\alpha_{01}=0)$ из вспомогательной системы после сокращения на $\exp(z_1)$ находим присоединенную систему

$$\begin{aligned}
&z_1U_{z_1z_1}+z_2U_{z_1z_2}+(z_1+\gamma)U_{z_1}+z_2U_{z_2}+(\gamma-\alpha_1)U=f_1^{(1)}(z_1,z_2),\\
&z_2U_{z_2z_2}+z_1U_{z_1z_2}+(\gamma+z_1-z_2)U_{z_2}-\alpha_2^{'}U=f_2^{(2)}(z_1,z_2),
\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
&f_1^{(1)}(z_1,z_2)=\alpha_{0,0}^{(1)}z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2},\\
&f_2^{(1)}(z_1,z_2)=\alpha_{0,0}^{(2)}z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Как и в предыдущем случае частное решение неоднородной системы (24) ищем в виде обобщенного степенного ряда (20) и находим в виде

$$U(z_1, z_2) = z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2} \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+m_2} (\rho_1 + \rho_2 + \gamma - \alpha_1)_{m_1} (1)_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1} (\rho_1 + \gamma - 1)_{m_1+1} (\rho_2)_{m_2+1} (\rho_2 + \gamma - 1)_{m_2+1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

Подставляя полученное решение в (6) окончательно находим нормальное-регулярное решение неоднородное системы

$$w(z_1, z_2) = \exp(z_1) z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2} \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+m_2} (\rho_1 + \rho_2 + \gamma - \alpha_1)_{m_1} (1)_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1} (\rho_1 + \gamma - 1)_{m_1+1} (\rho_2)_{m_2+1} (\rho_2 + \gamma - 1)_{m_2+1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

Список использованной литературы

1. Художников В.И. Две новые вырожденные гипергеометрические функции многих переменных и интегральные уравнения с ними// Дифф.уравнения, 2003, том 39, №6, с.835-843.
2. Appell P., Kampe de Feriet M.J. —Paris: Gauthier Villars, 1926. — 434 p.
3. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Актобе: ИП Жандилдаева С.Т., 2015. —464 с.
4. Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Об особенностях построения нормально-регулярных решений вырожденных систем. Вестник Актюбинского регионального университета им. К. Жубанова, №2 (67), июнь, 2022.

Секция №3

Section №3

АЛГЕБРА, МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЛОГИКА ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯ

ALGEBRA, MATHEMATICAL LOGIC AND GEOMETRY

WEAK LEIBNIZ ALGEBRAS AND TRANSPOSED POISSON ALGEBRAS

Dzhumadil'daev A.S.
Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
dzhuma@hotmail.com

A weak Leibniz algebra is defined by the following polynomial identities

$$[a,b]c = 2a(bc) - 2b(ac), \qquad a[b,c] = 2(ab)c - 2(ac)b.$$

Example. Any two-sided Leibniz algebra is weak Leibniz. In particular, any Lie algebra is weak Leibniz.

Example. Let $\epsilon_i \in K$, for $i \in I$, and A_ϵ is an algebra with base e_i, $i \in Z$, and multiplication

$$e_i e_j = (i-j)e_{i+j} + \sum_{s\in I} \epsilon_s e_{i+j+s}.$$

Then the algebra A_ϵ is non-Lie simple weak Leibniz algebra. Note that any simple Leibniz algebra is Lie.

An algebra with two binary operations $(A,\circ,\bullet)$ is called transposed Poisson (see [1]), if $(A,\circ)$ is Lie, $(A,\bullet)$ is associative commutative and associative part acts on Lie part as 1/2-derivation,

$$2a \bullet (b \circ c) = (a \bullet b) \circ c + b \bullet (a \circ c), \quad \forall a, b, c \in A.$$

Theorem 1. $(p \neq 2)$ If A is weak Leibniz, then the algebra $(A,\circ,\bullet)$ is transposed Poisson, where $a \circ b = ab - ba$, $a \bullet b = ab + ba$. Conversely, if $(A,\circ,\bullet)$ is transposed Poisson, then the algebra A with multiplication $ab = 1/2(a\circ b + b\circ a)$ is weak Leibniz.

An algebra $(A,\cdot,\bullet)$ is called Novikov-Poisson, if

I. $(A,\cdot)$ is (left) Novikov, for any $a, b, c \in A$,

$$(a \cdot b - b \cdot a) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) - b \cdot (a \cdot c), \quad (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b,$$

II. $(A,\bullet)$ is associative commutative, such that for any $a, b, c \in A$,

$$a \bullet (b \cdot c) = (a \bullet b) \cdot c, \qquad a \cdot (b \bullet c) = (a \cdot b) \bullet c + b \bullet (a \cdot c),$$

Proposition. Let $A = (A,\cdot,\bullet)$ be Novikov-Poisson algebra. Then for any $u,v \in A$ the algebra $A_{u,v} = (A,\circ_u,\bullet_v)$, where

$$a \circ_u v = u \bullet (a\, b - b\, a), \qquad a \bullet_v b = v \bullet (a \bullet b),$$

is transposed Posson and the algebra $A_{u,v}$ under multiplication $ab = 1/2(a \circ_u b + a \bullet_v b)$ is weak Leibniz.

A weak Leibniz algebra $(A,\cdot)$ is called special, if there exists transposed Poisson algebra $B_{u,v}$ constructed by Novikov-Poisson algebra B for some $u, v \in B$, such that A is a subalgebra of $B_{u,v}$.

Let us construct a non-associative non-commutative polynomial of degree 5 by

$$h(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) =$$

$$(((t_5t_1)t_2)t_3)t_4 - (((t_5t_1)t_3)t_2)t_4 - (((t_5t_2)t_1)t_3)t_4 +$$

$$(((t_5t_2)t_3)t_1)t_4 + (((t_5t_3)t_1)t_2)t_4 - (((t_5t_3)t_2)t_1)t_4 -$$

$$2(((t_5t_1)t_4)t_2)t_3 + 2(((t_5t_1)t_4)t_3)t_2 + 2(((t_5t_2)t_4)t_1)t_3 -$$

$$2(((t_5t_2)t_4)t_3)t_1 - 2(((t_5t_3)t_4)t_1)t_2 + 2(((t_5t_3)t_4)t_2)t_1.$$

The polynomial $h(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ is skew-symmetric under variables t_1, t_2, t_3.

Theorem 2. The identity $h = 0$ is an exceptional weak Leibniz identity, i.e., it holds for special weak Leibniz algebras, but not for all weak Leibniz algebras.

In particular $h=0$ is identity for the algebra A_ϵ. Any simple Lie algebra except sl_2 and Witt algebra W_1 is exceptional. It will be interesting to construct non-Lie simple exceptional weak Leibniz algebra (if exists).

A notion of transposed Poisson algebras can be easily generalized for n-ary case (see [2]). It is an algebra $(A,\omega,\bullet)$ with n-ary operation ω and binary operation $\bullet$, such that (A,ω) is n-Lie, $(A,\bullet)$ is associative commutative and for any $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$na_0 \bullet \omega(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \ \omega(a_0 \bullet a_i, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n)$$

Construction details of n-Lie algebras considered below see [3],[4].

Theorem 3. Let A be W -type (n + 1)-Lie algebras defined on $A = K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ by

$$\omega(a_1, \ldots a_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n+1} \\ \partial_1 a_1 & \partial_1(a_2) & \ldots & \partial_1(a_{n+1}) \\ \partial_2 a_1 & \partial_2(a_2) & \ldots & \partial_2(a_{n+1}) \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ \partial_n a_1 & \partial_n(a_2) & \ldots & \partial_n(a_{n+1}) \end{pmatrix}.$$

Then $(A,\omega,\cdot)$ is transposed (n + 1)-Poisson.

Theorem 4. Let p = 3 and A = K[x] with 4-wronskian

$$\omega(a_1,a_2,a_3,a_4\ ) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \partial(a_1) & \partial(a_2) & \partial(a_3) & \partial(a_4) \\ \partial^2(a_1) & \partial^2(a_2) & \partial^2(a_3) & \partial^2(a_4) \\ \partial^3(a_1) & \partial^3(a_2) & \partial^3(a_3) & \partial^3(a_4) \end{pmatrix}.$$

Then (A,ω,·) is transposed 4-Poisson.

Let W_n be wronskian, defined on differentiable functions $g_1 = g_1(x), \dots, g_n = g_n(x)$ by

$$W_n(g_1,\dots,g_n\ ) = \det\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_1' & g_2' & \dots & g_n' \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ g_1^{(n-1)} & g_2^{(n-1)} & \dots & g_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Then for any functions f = f (x), $g_1 = g_1(x), \dots, g_n = g_n(x)$ the following identity holds

$$nfW_n(g_1,\dots,g_n) = \\ W_n(fg_1,g_2,\dots,g_n) + W_n(g_1,fg_2,\dots,g_n) + \dots + W_n(g_1,g_2,\dots,fg_n).$$

Theorem 5. Let L = K[x] with n-Wronskian

$$\omega(a_1,a_2,\dots a_n\ ) = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \partial(a_1) & \partial(a_2) & \dots & \partial(a_n) \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \partial^{n-1}(a_1) & \partial^{n-1}(a_2) & \dots & \partial^{n-1}(a_n) \end{bmatrix}.$$

Then (L,ω) is homotopy n-Lie and (L,ω,·) is homotopy transposed n-Poisson.

Theorem 6. Let 3-product in L = K[x] is given by

$$\omega(a_1,a_2,a_3\ ) = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \partial(a_1) & \partial(a_2) & \partial(a_3) \\ \partial^5(a_1) & \partial^5(a_2) & \partial^5(a_3) \end{bmatrix} + \\ 2\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \partial^2(a_1) & \partial^2(a_2) & \partial^2(a_3) \\ \partial^4(a_1) & \partial^4(a_2) & \partial^4(a_3) \end{bmatrix} + \\ \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \partial^2(a_1) & \partial^2(a_2) & \partial^2(a_3) \\ \partial^3(a_1) & \partial^3(a_2) & \partial^3(a_3) \end{bmatrix}$$

Then (L,ω) is homotopy 3-Lie. If p = 3, then (L,ω,·) is homotopy transposed 3-Poisson.

References

1. Bai C., Bai R., Guo L., Wu Y., *Transposed Poisson algebras, Novikov-Poisson algebras, and 3-Lie algebras,* arXiv:2005.01110, 2021.
2. Patricia Damas Beites, Bruno Leonardo Macedo Ferreira, Ivan Kaygorodov, *Transposed Poisson structures*, arXiv:2007.00281v1, 2022.
3. A.S. Dzhumadil'daev, *Identities and derivations for Jacobian algebras*, Contemp. Math. v.315, 245-278, 2002.
4. A.S. Dzhumadil'daev, *n-Lie Structures That Are Generated by Wronskians*, Siberian Math. Journal, **46**(2005), No.4, pp. 601 - 612.

МАЗМҰНЫ / CONTENTS

Секция №1
ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР, ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗ
DIFFERENTIAL EQUATIONS, FUNCTION THEORY AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Секция №2
МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ТЕҢДЕУЛЕРІ
EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Секция №3
АЛГЕБРА, МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЛОГИКА ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯ
ALGEBRA, MATHEMATICAL LOGIC AND GEOMETRY

Халықаралық ғылыми семинар материалдары
"Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары"
(Ақтөбе, 20 қаңтар 2023 жыл)

МАТЕРИАЛДАРЫ
I ТОМ
Международный научный семинар
"Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры"
(Актобе, 20 января 2023 год)

МАТЕРИАЛЫ

INTERNATIONAL SCIENTIFIC SEMINAR
"Problems of Differential Equations, Analisys and Algebra"
(Aktobe, January 20, 2023)

PROCEEDINGS

Жауапты шығарушылар:
Бекбауова А.У., Ахметова А.У., Иманчиев А.Е.,
Талипова М.Ж., Жахина Р.У.