

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ӘОЖ 519.644, 517.17

Қолжазба құқығында

ТУТКУШЕВА ЖАЙЛАН САЛАВАТОВНА

**БІРНЕШЕ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР ТЕГІС ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ
ГЛОБАЛДЫҚ МИНИМУМДАРЫН
ЖОҒАРЫ ДӘЛДІКПЕН АНЫҚТАУ**

6D060100 – Математика

Философия докторы (PhD) дәрежесін
алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
ф.-м.ғ.к., доцент Қайдасов Ж.Қ.

Шетелдік ғылыми кеңесші:
ф.-м.ғ.д., профессор Рамазанов М.Д.
(Ресей, Уфа)

Қазақстан Республикасы
Ақтөбе, 2024

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР	3
БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР	4
КІРІСПЕ	5
1 БІРНЕШЕ АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ГЛОБАЛДЫҚ МИНИМУМЫН ЖОҒАРЫ ДӘЛДІКПЕН ТАБУДЫҢ ТИІМДІ ӘДІСІ	22
Оптималдау есебінің көмекші функция негізінде қойылуы	22
Функцияның глобалдық минимумын табу есебі шешімінің бар болуы	23
Глобалдық минимум мәнінің «қақ бөлу» әдісімен есептеу алгоритмі және оның жинақтылығы	24
Глобалдық минимумның координаталарын анықтау алгоритмі	26
Итерация санын есептеу	27
Көмекші функция үшін соболевтік кубтық формула	31
Тесттік функцияның глобалды минимумы мен оның координатасын табу	35
2 КӨМЕКШІ ФУНКЦИЯНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГЛОБАЛДЫҚ МИНИМУМ ШАРТТАРЫ	39
2.1 Көмекші функцияның негізгі қасиеттері	39
2.2 Глобалдық минимумның қажетті және жеткілікті шарттары	48
2.3 Бірнеше айнымалылы функцияның глобалдық минимумын көмекші функцияның ең үлкен нөлі ретінде анықтау мысалдары	50
3 КӨМЕКШІ ФУНКЦИЯНЫҢ «ЕҢ ҮЛКЕН НӨЛІН» ЖУЫҚТАП ТАБУ ӘДІСТЕРІ ТУРАЛЫ	61
3.1 Симметриялық әдістерді бейімдеп қолдану	61
3.2 Көмекші функцияның туындысына қатысты әдістерді қолдану ..	66
3.3 Модификацияланған «хордалар әдісін» қолдану	71
3.4 Әдістер тиімділігіне салыстырмалы талдау	74
ҚОРЫТЫНДЫ	77
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ	79

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда келесі стандарттарға сілтемелер жасалды:

МС 7.1-2003 – Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама.
Жалпы талаптар және жобалау ережелері.

МС 7.32-2001 (2006 жылғы өзгерістермен) – Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және рәсімдеу ережелері.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

$F(x)$	– көп айнымалылы мақсаттық функция;
x	– (x_1, \dots, x_n) векторы;
N	– натурал сандар жиыны;
n	– мақсаттық функцияның айнымалылар саны;
$\hat{\alpha}$	– мақсаттық функцияның глобалдық минимумы;
$\underset{E}{\text{globmin}} F(x)$	– E жиынында $F(x)$ функциясының глобалдық минимумы;
\hat{x}	– мақсаттық функцияның глобалдық минимум мәнін қабылдайтын нүкте;
$g_m(F, \alpha)$	– α -дан тәуелді көмекші функция: $g_m(F, \alpha) = \int_Q [F(x) - \alpha - F(x) + \alpha]^m dx, \quad m \in N,$ $m > 1;$
$\mu(E)$	– E жиынының лебегтік өлшемі.

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Диссертациялық жұмыс үзіліссіз, көп айнымалылы $F(x)$ мақсаттық функцияның глобалдық минимумын алдын-ала берілген дәлдікпен арнайы құрылған көмекші функция әдісімен анықтау мәселесіне арналған.

Айтылған әдісті қолданып глобалдық минимум табу үшін берілген мақсаттық функция бойынша еселі интеграл түрінде өрнектелген көмекші функция құрылды және оның маңызды қасиеттері айқындалып тұжырымдалды. Мақсаттық функция минимумын көмекші функция мәндерін соболевтік «шекаралық қабаты бар» кубтық формулаларға сүйеніп сандық әдіспен есептеу арқылы анықтаудың қай жағынан алғанда да тиімділігі айқын көрсетілді, қатаң негізделді. Сонымен қатар, әдістің негізгі идеясына сәйкес мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу мәселесі көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» анықтауға келтірілетін болғандықтан, функция нөлдерін және дөңес функцияның минимумдарын табу үшін қажетті әр түрлі белгілі сандық әдістер қарастырылып, оларды қолдану мәселелеріне салыстырмалы талдаулар жасалды.

Бірнеше айнымалылы үзіліссіз функциялардың глобалдық минимумдарын жоғары тиімділікпен анықтаудың әр түрлі (типтік) нақты есептері көрсетілді. Оларды толық шешу үшін C++ ортасында арнайы бағдарламалар құрылды. Нәтижесінде көзделген дәлдіктер қамтамасыз етілді.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Глобалдық оптималдау мәселесі – қазіргі таңда қолданбалы және есептеу математикасының ең маңызды мәселелерінің бірі. Осы кезге дейін глобалдық оптималдау әдістері мен проблемалары туралы көп мәлімет белгілі болды және жарияланды [1-5]. Дегенмен, сан-алуан практикалық мәселелерді шешуге және зерттеуге байланысты глобалдық оптималдау есептері ғылымның әр түрлі саласында үздіксіз туындап отырады [6-13]. Оларды шешудің әмбебап алгоритмдері болмағандықтан, жаңа әдіс-тәсілдер құру қажеттілігі үнемі орын алып тұрады.

Оптималдау есептері Лагранж жұмыстарынан бастау алады деуге болады. Интерполяциялау мәселелерін шешу жолында Лагранж көпмүшеліктің белгісіз коэффициенттерін экстремалдық мәндер есептеу арқылы анықтаған.

Қазіргі уақытта барлық белгілі глобалдық оптималдау әдістерін екі категорияға бөлуге болады: детерминирленген әдістер [2, 5-6 б.] және стохастикалық әдістер [14; 15]. Ал, оптималдау есептері, әдетте, екі түрге бөлінеді: статикалық және динамикалық. Статикалық типке мақсатты функцияны экстремалды мәнмен қамтамасыз ететін аргументтер мәндерін анықтау қажет болатын есептер кіреді, ал динамикалық типке глобалдық минимумның өзінің мәнін табу есебі жатады.

Сызықтық емес мақсаттық функцияның глобалдық минимумын есептеу барысында көптеген қиындықтар кездеседі. Негізгі қиындықтар мақсаттық функцияның көпэкстремалды, көп айнымалылы болуынан және есептеу

дәлдігіне алдын-ала баға бере алмаудан туындайды. Осы мәселелер төңірегінде зерттеулер жарияланған ғылыми еңбектер де баршылық [16-18].

Мақсаттық функция үзіліссіз болған жағдайда детерминирленген әдістерді қолданған ұтымды. Ондай әдістер көп емес. Олардың бірі, қазіргі оптималдаудың негізгі сандық әдісі – *градиентпен түсу әдісі*. Француз математигі Огустин Луи Коши алғаш рет градиентпен түсу әдісін сызықтық емес тендеулер жүйесін шешу үшін қолданған. Бұл әдіс Б.Т.Поляктың 1983 жылы шыққан кітабында [19; 20] жақсы сипатталған. Сандық оптималдау әдістерінің көпшілігі осы градиентпен түсу әдісінен туындайды. Бұл әдіс есептеу математикасында тек оптималдау есептерін шешумен шектелмейді, сонымен қатар, оптималдау тілінде тұжырымдауға болатын басқа да есептерді шешу (сызықтық емес тендеулер жүйелерін шешу, кері есептерді шешу, т.с.с.) үшін қолданылады [21 - 25]. Градиентпен түсу әдісі ақырсыз өлшемді кеңістікте берілген оптималдау есептері [26] үшін де, мысалы, оптималды басқару мәселелерін [27-30] сандық әдіспен шешу, қолданылады. Деректерді талдауда соңғы кездегі құрылған оқыту алгоритмдерінің бәрінің дерлік негізінде градиентпен түсу әдісі жатыр [31-44]. Детерминирленген әдістер арқылы бүкіл анықталу облысында глобалдық минимум ізделетіндіктен, олар есептің өлшемі артқан сайын қолайлығын азайтады.

Стохастикалық әдістердің [45-47] ішіндегі ең қарапайымы және көп тарағаны – Монте-Карло әдісі [48]. Алғаш рет бұл әдісті американдық ғалым Малвин Калос ұсынды [49]. Стохастикалық әдістердің көпшілігінің негізінде осы Монте-Карло әдісі жатыр. Бұл әдістер тобына: күйдіруді имитациялау алгоритмі, кездейсоқ іздеу әдісі және тағы басқалары жатады.

Эвристикалық әдістерге табиғи құбылыстар мен физикалық процестерді негізге ала отырып құрылған әдістер жатады: эволюциялық программалау [50], генетикалық алгоритм [51-52], «эволюциялық стратегия» [53], «аралар колониясы», «құмырсқалар колониясы» [54-55] және т.б. Эвристикалық әдістер табылған жуық мәннің глобалдық минимумнан қаншалықты ауытқитынын бағалауға, яғни глобалдық минимумның қажетті дәлдікпен анықталатындығына кепілдік бермейді. Эвристикалық алгоритмдердің құрылуына, дамуына және зерттеуіне алыс-жақын шетелдің ғалымдары зор үлес қосты: Ю.И. Журавлев [56], К.В. Рудаков [57], Ю.Ю. Финкельштейн [58], И.Х. Сигал [59], А.А. Корбут [60], Ю.А. Кочетов [61], Б.Т. Поляк [62], А.В. Плясунов [63], А.П. Карпенко [64], Курейчик В.В. [65], F. Glover [66], G. Kochenberger [67], C. Cotta [68], R. Marti [69] және тағы басқалар.

Дискретті есепті шешу үшін әр түрлі детерминирленген әдістерді құрған және дамытқан ғалымдар: И.Х. Сигал [70]. Ю.Ю. Финкельштейн [71], В.П. Черенин [72], В.Р. Хачатуров [73], А.А. Лазарев [74], А. А. Колоколов [75], G. Danzig [76], E. Balas [77], D. Pisinger [78], S. Martello [79], P. Toth [80] және басқалары.

Үзіліссіз глобалдық оптималдау есебі үшін детерминирленген әдістерді құрған ғалымдар: Ю.Г. Евтушенко [81 -83], С.А. Пиявский [84], Р.Г. Стронгин [85], В.П. Гергел [86], Я.Д. Сергеев [87], А.С. Стрекаловский [88], Е.С.

Левитин [89], В.П. Булатов [90], О. В. Хамисов [91], Е. Hansen [92], R. Kearfott [93], J. Pinter [94], Н. Туу [95] және т.б. Р.Г. Стронгиннің соңғы жарияланымдары глобалдық оптималдау әдіс-тәсілдеріне арналған. Оның «Поиск глобального оптимума» [96] атты кітабында әдістердің теориялық негіздері талқыланып, практикалық есептеулерді ұйымдастыру үшін қажетті нұсқаулар мен сандық иллюстрациялар берілді. Сондай-ақ, отандық ғалымдар еңбектерінде электродинамиканың көпөлшемді сызықтандырылған қойылымдағы коэффициенттік кері есептерін шешу үшін оптималдау әдістері қолданылды [97].

Оптималдау мәселесін шешуде үлкен үлес қосқан американдық ғалым Джордж Бернارد Данциг [98-99] сызықтық программалау есептерін шешуге арналған симплекс алгоритмін құрған, ал ресейлік математик Нестеров Юрий Евгеньевич [100-107] дөңес оптималдау әдістерін құрып, сызықтық программалаудың тиімді әдістерін сызықтық емес есептерді шешу үшін бейімдеді, көзделген әдістерге қол жеткізуге әдістерді теориялық негіздеумен қатар, құрылған әдістерге сәйкес бағдарламалар жазып, оларды тәжірибеден өткізген. Қазіргі кезде Ю.Е. Нестеров пен Б. Т. Поляктың ықпалымен А.В. Гасников та [108-109] глобалдық оптималдаудың сандық әдістерін зерттеп, әр түрлі саладағы қолданбалы мәселелерді шешуде келтірген.

Өткен ғасырдың екінші жартысында математикалық физика есептерін шешу үшін интегралдық теңдеулерді сандық әдістермен шешу қажеттілігі туындады. Осы қажеттілік интегралды жуықтап есептеу әдістерінің жан-жақты зерттелуіне әсерін тигізді. Бұл бағыттағы зерттеулер академик С.Л. Соболевтің функционалдық анализ терминдері мен ұғымдары тілінде жазылған еңбектерінде жарияланған.

n айнымалылы функцияның $I(f) = \int_{\Omega} f(x)dx$ интегралының жуық мәндері, әдетте, f функциясының x^k , $k = 1, 2, \dots, N$ (тор түйіндері) нүктелеріндегі мәндерінің $\sum_{k=1}^N C_k f(x^{(k)})$ сызықтық комбинациялары түріндегі кубтық формулалармен есептеледі, мұндағы $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω – интегралдау облысы, N – тор түйіндерінің саны..

Көп айнымалылы функцияның жуық мәнің есептеу үшін кубтық формулалардың тиімді түрде құрылуы зерттелді:

1) түйіндерді жиілету арқылы қадам өлшемі нөлге ұмтылғанда, әрбір N үшін

$$\int_{\Omega} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^N C_k f(x^{(k)})$$

формуласының оптималды C_k коэффициенттерін анықтау;

2) жуықтау қателігін минимумдау: $\min_{H, \det H = \text{const}} \|I(f) - K_N(f)\|$, мұндағы $\det H = |\Omega|/N$;

3) $I(f)$ интегралын кубтық формулалар бойынша жуықтап есептеуді коэффициент пен торлардың түйіндеріне қатысты оптималдау [110, 8 б.].

Аталған мәселелер интегралдарды жуықтап есептеу теориясы мәселелерін функционалдық анализдің экстремалдық есептер бөліміне көшірді. Диссертациялық жұмыста зерттеліп құрылған жаңа әдіс детерминирленген әдіс тобына жатады, яғни оның көмегімен функцияның глобалдық минимумы белгілі дәлдікпен анықталады.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі – соңғы уақытта ғылым мен техниканың, халық шаруашылығының әр түрлі салаларында глобалдық оптималдау есептерін шешуге сұраныстың артуы, әмбебап глобалдық оптималдау әдістерінің тапшылығы, есептеуіш техникасының қарқынды дамуы.

Мәселенің маңыздылығына осы салада дүниежүзі бойынша жүргізіліп келе жатқан зерттеулер, ұдайы өткізілетін конференциялар, глобалдық оптималдау саласына арналған ғылыми басылымдардың көп болуы дәлел болады.

Сонымен, диссертациядағы зерттеулер өзекті заманауи мәселелерді шешуге арналған деуге толық негіз бар.

Диссертациялық жұмыста көп айнымалылы функцияның глобалдық минимумын табудың тиімді және үнемді әдісі қарастырылды және «көмекші функция» идеясына негізделген алгоритм ұсынылды.

Зерттеудің негізгі объектісі мақсаттық функцияның өзі емес, еселі интегралдың көмегімен бастапқы мақсаттық функцияны түрлендіру арқылы құрылған бір айнымалылы көмекші функция болып табылады.

Әдістің негізгі артықшылығы – көп айнымалылы мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу мәселесін бірайнымалылы, үзіліссіз, дөңес функцияның «ең үлкен нөлін» анықтауға келтіру және оптималдық критерийін айқындау. Оның мағынасы манада: көмекші функция және оның туындылары нөлге тең болатын аргументтің ең үлкен мәні мақсатты функцияның глобалдық минимумына тең болады.

Диссертациялық жұмыста көмекші функцияның негізгі қасиеттері айқындалды және дәлелденді, глобалдық минимумды есептеу алгоритмі құрылды, үш айнымалылы мультимодалды функциялардың глобалдық минимумдары C++ бағдарламалау ортасында есептелді.

Зерттеу тақырыбының қазіргі жағдайы. Қазіргі уақытта үлкен маңызға ие болып отырған глобалдық оптималдау тақырыбы аясында көптеген конференциялар мен конгрестер өткізіліп жатыр. Олардың негізгі мақсаты – математиктер, инженерлер және салалас басқа мамандық практиктердің глобалдық оптималдау теориясы бойынша зерттеу нәтижелерімен және жаңа идеяларымен бөлісу. Глобалдық оптималдау тақырыбындағы конгресс дүниежүзі бойынша өтіп отырады: Афина-2023 (Греция), Changsha -2009 (Қытай), Chania-2011 (Греция), Huangshang-2017 (Қытай), Gainesville-2015 (Флорида), College Station-2017 (Техас), Athens-2021 (Греция), Ресейде өтетін жыл сайынғы MOTOR, OPTIM конференциялары және тағы басқа шаралар.

Көптеген ғалымдар екпінді түрде глобалдық оптималдау әдістерін әр түрлі мәселелер үшін зерттеп, оларды модификациялап, жаңаша шешу

жолдарын іздеумен айналысып жатыр. Атап айтатын болсақ, Р.Г. Стронгин, А.В. Гасников, А.В. Кузнецов, А.И. Рубан, Джонас Мокус, Хоссейн Мобахи, Нил Такер, Тим Кутс, Марко Фальчиони және тағы басқалары.

Туындап отырған қажеттілікке қатысты зерттеулердің артуына байланысты глобалдық оптималдау тақырыбына арналған ғылыми басылымдар саны да көп. Әр түрлі саланың ғалымдары глобалдық оптималдау есебін шешу қажеттілігіне мүдделі болып, өз тараптарынан зерттеулер жүргізуде.

Диссертациялық жұмыста глобалдық минимумды табу үшін еселі интегралды есептеу қажеттілігі бар. Еселі интеграл есептеудің әртүрлі сандық әдістері белгілі.

Бірнеше еселі интегралдарды жуықтап есептеу үшін, әдетте, Монте-Карло типті интегралдау әдістері кеңінен қолданылады. Бұл әдістердің артықшылығы – интегралдау облысының күрделі формасын елемеуі және жүздеген өлшемді кеңістіктегі функциямен жұмыс жасау мүмкіндігі. Монте-Карло типті әдістердің елеулі кемшіліктері – жинақталу жылдамдығының төмен болуы және нәтиженің қателігі кепілдендірілмеген, ықтималдықты бағалануы.

Диссертациялық жұмыста зерттеу нәтижелері үшін маңызды рөл атқаратын еселі интеграл түріндегі көмекші функцияның мәндерін жоғары дәлдікпен есептеу үшін соболевтік шекаралық қабаты бар торлы кубтық формулалар қолданылды. Тор қадамы h нөлге ұмтылып, түйіндер жиілеген сайын, *дал мәнге жуықтау жылдамдығының жоғарылауы және есептеу қателігіне кепілді баға беру мүмкіндігінің артатыны белгілі*. Барлық торлы кубтық формулалардың ортақ кемшілігі де бар – кеңістіктің көп өлшемділігі. Есептеу техникасы дамуының қазіргі деңгейінде соболевтік кубтық формулаларды 10 өлшемге дейінгі кеңістіктен алынған функцияны интегралдауға қолданған тиімді. Функция аргументтері кеңістігінің өлшеміне қойылатын мұндай шектеулер шекаралық қабаты бар соболевтік кубтық формулалардың көмегімен жоғары дәлдікке қол жеткізу үшін маңызды рөл атқарады.

Кубтық формулалар мен олардың бірөлшемді аналогтары – квадраттық формулалар теориясы математикалық талдау және есептеу математикасының жақсы зерттелген бөлігі болып табылады. Бұл ғылыми бағытпен көптеген математиктер айналысты - И. Ньютон, Л. Эйлер, К. Гаусс, Ш. Эрмит, орыс және кеңес математиктері П. Л. Чебышев, С. Н. Бернштейн, С. Л. Соболев, С. М. Никольский және басқалар. Қазіргі уақытта Л.С. Соболев пен оның ізбасарлары назар аударған кубтық формулалар теориясына және оның компьютерлік есептеу қолданысына қатысты бірнеше өзекті мәселелер бар.

Соболевтік шекаралық қабаты бар торлы кубтық формулалардың шекарадан h ретті қашықтықта орналасқан ішкі түйіндегі коэффициенттері және шекараға жақын орналасқан ішкі түйіндегі коэффициенттері берілген тегіс интегранттар кеңістігінде асимптоталық оптималдылықты қамтамасыз ететін тұрақтылар. Зерттеу барысында интегранттың әр түрлі тегістігі үшін соболевтік кубтық формулалардың шекаралық коэффициенттері бөлшек

түрінде есептеліп алынды. Бұл бағытта Л.С. Соболев, М.Д. Рамазанов, Н. С. Бахвалов, В. Н. Белых, О.В.Бесов, И.В.Бойков, В.Л.Васкевич, Я.М.Жилейкин, М.В.Носков, Н.Н.Осипов, В. И. Половинкин, Г.Н.Салихов, И. М. Соболев, Ц. Б. Шойнжуров сияқты ресейлік ғалымдардың зерттеулерін [110-115] атап өту керек. Марат Давидович Рамазанов үзіліссіз функциялар үшін кубтық формулалардың дәлдігіне баға берді және торлы кубтық формулалар көмегімен кез-келген формадағы облыс бойынша интегралдау алгоритмін құрды.

М.Д. Рамазановтың шәкірті Д.Я. Рахматулин негізінде шекара қабаты бар кубтық формулалар жататын сандық интегралдаудың параллельдік бағдарламасын қарастырды. Ол өз зерттеулерінде [116-118] бағдарламаның тез және тиімді жұмыс жасауы үшін динамикалық параллельдеу тәсілін қолданды және C++ тілінде есептеулердің бағдарламасын жазды.

Ц. Б. Шойнжуров жазықтықтағы бөлшек-тегіс шекаралы облыста коэффициенттері шекаралық қабатта ғана шекара теңдеуінен тәуелді болатын кубтық формулаларды құрды және зерттеді; $W_p^m(E_n)$ соболевтік кеңістікте функция мәні мен бірінші туынды мәнінен тұратын кубтық формулалардың асимптотилық оптималдығын дәлелдеді; шекаралық қабаты бар кубтық формуланың $W_p^m(E_n)$ кеңістігінде қателік функционалының нормасына баға берді [119-121].

Диссертациялық жұмыста шекаралық қабаты бар торлы кубтық формулалар бойынша алынған зерттеу нәтижелері мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу үшін қолданылды. Бұл әдістегі көмекші функция бұрын-соңды қолданылмаған.

Интегралдық глобалдық оптималдау мәселелерімен Шанхайдың ғылым және технология университетінің профессоры, физика-математика ғылымдарының докторы Q. Zheng айналысуда. Оның зерттеулері [122-126] орта мән шартын, модификацияланған дисперсияны есептеуге негізделген. Q. Zheng өз еңбектерінде деңес емес, үзіліссіз және дискретті мақсатты функцияларды қарастырған және мақсатты функцияның еселі интеграл түріндегі орта мәні мен модификацияланған дисперсиясын есептеу үшін Монте-Карло әдісін қолданған.

Жүргізілген зерттеулер интегралдық глобалдық оптималдау әдістерінің көпэкстремалды, бірнеше айнымалылы мақсаттық функциямен жұмыс жасауға икемді екенің көрсетеді.

Зерттеу мақсаты. Бірнеше айнымалылы көпэкстремалды үзіліссіз функцияның глобалдық минимумын жоғары дәлдікпен табудың жаңа тиімді әдісін құру.

Зерттеу міндеттері:

а) көп айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның глобалдық экстремумын табу есебін шешу үшін жаңа көмекші функция енгізіп глобалдық оптималдау әдісін құру және оның жинақтылығын дәлелдеу;

ә) көп айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның глобалдық экстремумы координаталарын табу алгоритмін құру;

б) еселі интеграл түріндегі көмекші функция мәндерін тұрақты шекаралық қабаты бар соболевтік кубтық формулаларды қолданып есептеу;

в) көмекші функцияның маңызды қасиеттерін: терісеместігін, қатаң дөңестігін, монотондылығын, бірқалыпты үзіліссіздігін, дифференциалдануын зерттеу;

г) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының қажетті шартын алу;

ғ) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының жеткілікті шартын алу;

д) бірнеше айнымалылы әр түрлі тесттік функциялардың глобалдық минимумдарын табуға ұсынылып отырған жаңа әдісті қолданып C++ программалау ортасында есептеу.

Зерттеу нысаны. Үзіліссіз мақсаттық функция; бастапқы мақсаттық функцияны түрлендіру арқылы құрылған, еселі интеграл түрінде өрнектелген бір айнымалылы көмекші функция; көмекші функция негізінде құрылған глобалдық оптималдау әдісі.

Зерттеу пәні. Үзіліссіз, көп айнымалылы мақсаттық функцияның глобалдық минимумының бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары. Көмекші функцияның маңызды қасиеттері. Мақсаттық функцияның глобалдық минимумы мен оның координаталарын сандық әдіспен анықтау алгоритмі.

Ғылыми жаңалығы. Диссертациялық жұмыста үзіліссіз функцияның глобалдық экстремумын табу үшін алғаш рет құрылған арнайы көмекші функция енгізіліп зерттелді.

а) көп айнымалылы үзіліссіз функцияның глобалдық экстремумын табу үшін жаңа глобалдық оптималдау әдісі құрылды және оның жинақтылығы дәлелденді;

ә) үзіліссіз функцияның глобалдық минимумның координаталарын табудың нақты алгоритмі құрылды;

б) құрылған әдіспен глобалдық минимумды табу үшін қажетті итерациялар саны алдын-ала берілген дәлдікке сәйкес анықталды;

в) көмекші функцияның мәнін есептеу үшін «тұрақты шекаралық қабаты бар соболевтік кубтық» формулаларды қолданып есептеу;

г) көмекші функцияның маңызды қасиеттері (терісеместігі, қатаң дөңестігі, шектелген аралықта бірқалыпты үзіліссіздігі, дифференциалданатындығы және т.б.) зерттелді және дәлелденді;

ғ) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының қажетті шарты алынды;

д) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының жеткілікті шарты алынды;

е) жаңа әдіс негізінде көп айнымалылы тесттік функциялардың глобалдық минимумдарын C++ программалау ортасында есептеу тәжірибесі өткізілді.

Қорғауға ұсынылатын негізгі нәтижелер:

- а) көп айнымалылы үзіліссіз функцияның глобалдық экстремумын табуға арналған жаңа глобалдық оптималдау әдісі;
- ә) көп айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның глобалдық экстремумы координаталарын табу алгоритмі;
- б) еселі интеграл түріндегі көмекші функция мәндерін тұрақты шекаралық қабаты бар соболевтік кубтық формулаларды қолданып есептеу;
- в) көмекші функцияның қасиеттері: терісеместігі, қатаң дөңестігі, монотондылығы, бірқалыпты үзіліссіздігі, дифференциалданатындығы;
- г) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының қажетті шарты;
- ғ) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының жеткілікті шарты;
- д) C++ ортасында жаңа әдіспен көп айнымалылы тесттік функциялардың глобалдық минимумдарын табу бағдарламасы.

Алынған нәтижелердің нақтылығы және негізделуі. Диссертациялық жұмыстың ғылыми нәтижелері теоремалар, леммалар және салдарлар түрінде тұжырымдалады. Диссертацияның ғылыми жағдайы, қорытулары, мен нәтижелерінің нақтылығы және негізделуі алынған нәтижелердің жоғары рецензияланған журналдарда жариялануымен расталады.

Алынған нәтижелердің практикалық және теориялық маңыздылығы. Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер теориялық сипатқа ие. Бірнеше айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу үшін көмекші функция арқылы жаңа әдіс құрылуы; ұсынылған әдістің жинақтылығының дәлелденуі; көмекші функцияның маңызды қасиеттерінің (терісеместігі, қатаң дөңестігі, бірқалыпты үзіліссіздігі, дифференциалданатындығы және т.б.) зерттелуі; көп айнымалылы көпэкстремалды мақсаттық функцияның глобалдық минимумының қажетті және жеткілікті шарттарының алынуы; ұсынылған әдіс пен алгоритмнің маңызды қосымшалар ретінде оптималдау теориясы мен сандық әдістердің қолданыс аясын кеңейтуге оң ықпал ету мүмкіндігі. Диссертациялық жұмыс нәтижелері осы теорияның одан әрі дамуына түрткі болуы мүмкін.

Диссертациялық жұмыс нәтижелерін физика-математика, инженер, компьютерлік инженерия, есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету және т.б. мамандықтарының студенттеріне, магистранттарына және докторанттарына элективті курстар жасақтау үшін де пайдалануға болады.

Зерттеудің ғылыми мәні зор: мақсаттық функция бойынша интегралдық түрде құрылған *көмекші функция* көп айнымалылы, үзіліссіз мақсаттық функцияларды бір айнымалыдан тәуелді, дөңес, үзіліссіз дифференциалданатын функцияға түрлендіреді. Мұндай функциялармен жұмыс жасау әлдеқайда оңай әрі тиімді. Сандық есептеу процестері толық жүзеге асқан, тәжірибелер алгоритмнің дұрыстығын растап тұр.

Алынған нәтижелердің практикалық маңызы үлкен. Ғылым мен техникада, шаруашылықта мақсаттық функциялардың глобалдық

минимумдарын табу арқылы шешілетін мәселелер көп. Зерттелетін нысанның ең үлкен немесе ең кіші мәнін табу есептері қолданыста: (физикада, биологияда, экономикада, инженерияда және басқа салаларда) кеңінен кездеседі.

Зерттеудің басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс аясында жүргізілген зерттеулер бірнеше саламен сабақтасып жатыр: математикалық талдау, сандық әдістер, оптималдау теориясы. Есепті қою барысында оптималдық теорияның, көмекші функцияның қасиеттерін айқындағанда математикалық талдаудың маңызды қағидалары мен тұжырымдарын, көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» анықтау үшін сандық әдістерді, ал көмекші функциялар мәндерін есептегенде соболевтік кубтық формулаларды негізге алуға тура келді. Еселі интегралдың мәнін «ең жақсы» әдіспен есептеу үшін С.Л. Соболев, М.Д. Рамазанов, В.Л. Васкевич және басқа да ресейлік ғалымдардың зерттеу нәтижелері қолданылды [110, 8 б; 111, 18 б]. Аталған бағыттар бойынша ғылыми зерттеулер нәтижелері сарапталып, қосымша зерттеулер жүргізілді.

Докторанттың қосқан жеке үлесі. Диссертацияда келтірілген барлық нәтижелер автордың өзіне тиесілі. Қосалқы авторлар және ғылыми кеңесшілер мәселенің қойылуына және алынған нәтижелерді талқылауға үлестерін қосты.

Алынғын нәтижелерді апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

- дәстүрлі халықаралық сәуір ғылыми конференциясы, ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты (Алматы, Қазақстан, 5-8 сәуір 2021 ж.);

-«Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары» ІХ халықаралық ғылыми конференциясы, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті (Ақтөбе, Қазақстан, 24-28 мамыр 2022 ж.);

-дәстүрлі халықаралық сәуір ғылыми конференциясы, ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты (Алматы, Қазақстан, 4-8 сәуір 2022 ж.);

-«Дифференциалдық теңдеулерді зерттеудің сапалы және жуықтау әдістері» ғылыми семинары, ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор А.Т. Асанова);

-«Математиканың заманауи мәселелері» ғылыми семинары, М.В. Ломоносов атындағы ММУ-дың Қазақстандағы филиалының математика және информатика кафедрасы, Астана, Қазақстан (семинар жетекшілері – ф.-м.ғ.д., профессор Е. Д. Нурсултанов);

- «Жаратылыстану ғылымының математикалық мәселелері. Кері және қате есептер» қалалық ғылыми семинары, Эль-Фараби атындағы ҚҰУ, Алматы, Қазақстан (семинар жетекшілері –д.ф.-м.н., профессор М.А. Бектемесов);

-«Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті математика

кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Ж.А. Сартабанов);

- «Семинар по вычислительной математике и смежным вопросам» ғылыми семинары, Уфа, РФ (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Я. Ш. Ильясов);

- «Обратные и некорректные задачи в естествознании и искусственный интеллект» атты халықаралық Евразиялық ғылыми конференциясы (Алматы, Қазақстан, 17-20 сәуір 2024 ж.).

Жарияланымдар. Диссертациялық жұмыс нәтижелері 10 еңбекте жарияланды. Оның ішінде 2 мақала Scopus мәліметтер базасында индекстелген рейтингтік ғылыми журналда [127-128], 4 мақала ҚР ҒЖБССҚК ұсынған басылымдарда [129-132], 4 мақала халықаралық конференциялар материалдарында жарияланды [133-137].

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, негізгі 3 бөлімнен (біріншісінде 7 бөлімше, екіншісінде 3 бөлімше, үшіншісінде 4 бөлімше), қорытындыдан және әдебиеттер тізімінен тұрады. Формулалар, мысалдар, теоремалар мен анықтамаларды нөмірлеу екі саннан: бірінші сан бөлім нөмірін, екіншісі - бөлім ішіндегі формуланың, мысалдың, теореманың, анықтаманың тиісті нөмірін білдіреді. Жұмыстың көлемі – 87 бет. Әдебиеттер саны – 142.

Жұмыстың қысқаша мазмұны. Жұмыстың бірінші бөлімінде $Q \subset R^n$ кубында берілген $F(x)$ бірнеше айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумын ε алдын-ала берілген дәлдікпен табу мәселесі және әдістің жинақтылығы қарастырылды.

1.1 бөлімшесінде глобалдық минимум табу мәселесін тиімді шешу үшін жаңадан құрылған көмекші функция еңгізілді:

$$g_m(F, \alpha) = \int_Q [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m dx, \quad m \in N, m > 1.$$

Ол – $F(x)$ мақсаттық функция арқылы арнайы конструкциямен құрылған еселі интеграл түріндегі, бір ғана α параметрінен тәуелді функция. Мақсаттық функция берілген кеңістіктің өлшеміне байланысты, көмекші функция еселі интеграл болады.

α айнымалысы арқылы ізделінді глобалдық минимумның деңгейін анықтайтын $u = \alpha$ гипержазықтығы сипатталады.

Дербес жағдайларда: жазықтықта берілген мақсаттық функция үшін $u = \alpha$ – түзу; 3-өлшемді кеңістікте $u = \alpha$ – жазықтық.

1.2 бөлімшесінде мақсаттық функцияның глобалдық минимумы көмекші функция арқылы табылатыны дәлелденді:

егер $g_m(F, \alpha)$ функция үшін $g_m(F, c_0) = 0$ теңдігі және $g_m(F, d_0) > 0$ теңсіздігі орындалса, онда мақсаттық функцияның глобалдық минимумы $\hat{\alpha} \in [c_0, d_0)$ аралығына тиісті.

Яғни, мақсаттық функцияның глобалдық минимумы келесі аралықта болатыны анықталды:

$$c_0 \leq \hat{\alpha} < d_0.$$

Басқаша айтқанда, мақсаттық функцияның глобалдық минимумы $y = c_0$ және $y = d_0$ көлденең гипержазықтықтарының арасында орналасады.

Егер $g_m(F, d_0) > 0$, онда $y = d_0$ гипержазықтығы берілген Q тұйық жиынында глобалдық минимумнан жоғары өтеді.

Егер $g_m(F, c_0) = 0$, онда $y = c_0$ гипержазықтығы берілген Q тұйық жиынында глобалдық минимум арқылы немесе одан төмен өтеді.

1.3 бөлімшесінде мақсаттық функцияның глобалдық минимумын «қақ бөлу» әдісі арқылы табу алгоритмі құрылды және оның жинақты болатыны дәлелденді: ізделінді $\hat{\alpha}$ мәні жататын $[c_0, d_0)$ аралығы әр итерация сайын екі есе қысқарады және итерациялық процесті қажетті дәлдікке дейін жалғастыру мүмкін болады: $\hat{\alpha} \in [c_0, d_0)$. Яғни, глобалдық минимумның жуық мәні ретінде $\hat{\alpha} \approx c_n$ алынады. Осы алгоритмнің жинақтылығы және жинақталу жылдамдығы сызықты болатыны дәлелденді.

1.4 бөлімшесінде глобалдық минимумның координаталарын табу алгоритмі қарастырылды. Оны құру үшін де қақ бөлу принципі қолданылды: $F(x)$ функциясы анықталған Q кубын әр координата бойынша екіге қақ бөлеміз. Сонда n айнымалылар санына сәйкес, саны 2^n куб пайда болады. Сонан соң $g_m(F, \hat{\alpha}) > 0$ шарты орындалатындай, $\hat{\alpha}$ – глобалдық минимум жатқан аралықтың оң жақ d_n ұшындағы мәнді көмекші функцияға қойып, оны алынған кіші кубтар бойынша есептейміз. Ең болмағанда біреуінде көмекші функция оң мән қабылдайды. Сол кубты негізге алып, жоғарыдағы процесс қажетті дәлдікке қол жеткенше жалғастырылады. Глобалдық минимум координатасы ретінде соңғы куб центрінің координатасы алынады.

1.5 бөлімшесінде глобалдық минимумды және оның координаталарын алдын-ала берілген дәлдікпен есептеу үшін қажетті итерациялар саны анықталды. Әр итерацияда көмекші функцияның мәні бір рет есептеледі және бастапқы кесінді екі есе қысқарып отырады. Бастапқы ұзындық k итерациядан кейін 2^k есе қысқарады:

$$|\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}| = \frac{1}{2^k} (d_0 - c_0), \quad k = 2, 3, \dots$$

Егер алдын-ала ε дәлдігі берілген болса, онда

$$k \geq \log_2 \frac{d_0 - c_0}{\varepsilon}.$$

Мысалы, $[0,1]$ кесіндісінде берілген функцияның глобалдық минимумын $\varepsilon = 0,001$ дәлдікпен есептеу үшін қажетті итерация саны:

$$k > \log_2 \frac{1-0}{0,001} \approx 9,96.$$

Яғни, глобалдық минимум мәні 10 итерацияда табылады. Бастапқы $[0,1]$ аралық 10 итерациядан кейін $2^{10} = 1024$ есе қысқарады.

Минимум координаталарын анықтау үшін қажетті итерация саны $[k, 2^k]$ аралығында жатады. Мұндағы, $n - F(x)$ функциясының аргументтерінің саны.

Құрылған әдістің ерекшелігі, әрі артықшылығы – мақсатты функция аргументтері санының артуы глобалдық минимумды анықтау үшін қажет болатын итерация санына әсер етпейді.

Құрылған әдісті қолдануда қиындық туғызатын негізгі мәселе – көмекші функцияның мәнін ең тиімді түрде есептеу. Көмекші функция күрделі функцияның еселі интегралы болғандықтан, оны жоғары дәлдікпен есептеуге мүмкіндік беретін сандық әдіс қолданылды. Еселі интегралдың мәнін компьютердің көмегімен есептеуге арналған кубтық формулалар пайдаланылды.

1.6 бөлімшесінде көмекші функция мәндерін есептеу үшін Соболевтің «тұрақты шекаралық қабаты бар» кубтық формулалары негізге алынды.

n нақты айнымалыдан тәуелді тегіс $\varphi(x)$ функциясының Ω облысында

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x) dx$$

интегралының жуық мәнін С.Л. Соболевтің «тұрақты шекаралық қабаты бар» кубтық формулалары көмегімен есептеу үшін [111], $I(\varphi)$ интегралының жуық мәні $\varphi(x)$ функциясының $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ нүктелердегі мәндерінің сызықтық комбинациясы түрінде ізделеді:

$$K_N(\varphi(x)) = h^n \sum_{s=1}^N C_s \varphi(x^{(s)}).$$

мұндағы: N – функцияның анықталу жиынын x векторының әр компонентасы бойынша бөлетін интервалдар саны, $x^{(s)}$ – соболевтік кубтық формуланың түйіндері, h - кадам өлшемі, C_s – «шекаралық» коэффициенттері.

Негізгі мәселе – N шексіздікке ұмтылғанда, $I(\varphi)$ интегралы $K_N(\varphi(x))$ мәніне жылдам жуықтайтындай $\{C_s\}$ коэффициенттерін анықтау.

Соболев формулаларының коэффициенттері сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу арқылы табылады. Ол үшін берілген нүктелерде $\varphi(x)$ функциясымен бірдей мәндер қабылдайтын, яғни $P(x^{(s)}) = \varphi(x^{(s)})$ болатын, реті m -нен аспайтын $P(x)$ көпмүшелігін $P(x) = aX$ теңдігі, мұндағы $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ жатық матрица,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix},$$

орындалатындай етіп алсақ, онда a_1, a_2, \dots, a_m – локалдык коэффициенттері

$$a \cdot X = \varphi(x)$$

яғни

$$(a_1, \dots, a_m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix} = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m))$$

сызықты жүйесінен анықталады. Егер X матрицасына кері матрицаны табу үшін белгілі бағдарламалар қолдансақ, онда X матрицасының элементтері ондық бөлшектермен анықталады және жуықтап дөңгелектенеді, яғни ізделінді коэффициенттерді жоғары дәлдікпен анықтау үшін, сызықтық тендеулер жүйесіндегі матрицаның кері матрицасының элементтері рационал түрінде алынады.

$P(x)$ полиномының анықталған a_m локалдык коэффициенттерінің қосындысынан С.Л. Соболевтің кубтық формулаларындағы C_s шекаралық қабатының коэффициенттері анықталады:

$$\begin{cases} C_m = a_1 + a_2 + \dots + a_{m-2} + a_{m-1} + a_m, \\ C_{m-1} = a_2 + \dots + a_{m-2} + a_{m-1} + a_m, \\ \dots \dots \dots, \\ C_3 = a_{m-2} + a_{m-1} + a_m, \\ C_2 = a_{m-1} + a_m, \\ C_1 = a_m. \end{cases}$$

Шекаралық қабатының алғашқы C_1, \dots, C_m және соңғы C_{N-m+1}, \dots, C_N коэффициенттерінің мәндері үшін мына қатыстар орын алады:

$$C_1 = C_N, C_2 = C_{N-1}, C_3 = C_{N-2}, \dots, C_{m-1} = C_{N-m+2}, C_m = C_{N-m+1}.$$

Ал ішкі C_{m+1}, \dots, C_{N-m} коэффициенттерінің барлығы 1-ге тең. Анықталған коэффициенттерді ескеріп, кубтық формуланы қайта жазсақ:

$$\int_{\Omega} \varphi(x) dx \approx h^n \sum_{s=1}^N C_s \varphi(x^{(s)}), \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad (0.1)$$

мұндағы h^n - элементар ұяшықтың көлемін анықтайтын, масштабтық көбейткіш.

(0.1) формуласы интегралдық күрделі $g_m(F, \alpha)$ көмекші функциясының мәндерін үлкен дәлдікпен есептеу үшін негізгі құрал болып табылады. Осы кубтық формуладағы $\varphi(x)$ орнына $g_m(F, \alpha)$ функциясындағы интеграл астындағы өрнекті қойсақ:

$$g_m(F, \alpha) = \int_Q [|F(x) - \alpha| - (F(x) - \alpha)]^m dx \approx$$

$$\approx h^n \sum_{s=1}^N C_s [|F(h \cdot s) - \alpha| - (F(h \cdot s) - \alpha)]^m.$$

Соболевтік кубтық формулалар жоғары дәлдікпен есептеуіне байланысты $g_m(F, \alpha)$ функциясының мәндерін есептеуде қолдандық.

1.7 бөлімшесінде Растрингіннің [137] үшөлшемді кеңістікте берілген көпэкстремалды функциясының глобалдық минимумы және оның координаталары анықталды. Барлық есептеулер C++ (VisualStudio 2017) бағдарламалау ортасында орындалды [138]. Есептеу нәтижелері $\varepsilon = 10^{-10}$ дәлдігімен алынды.

Диссертациялық жұмыстың **екінші бөлімнің** 2.1 бөлімшесінде көмекші функцияның маңызды қасиеттері анықталды және дәлелденді. Олардың негізгілерін атап өтетін болсақ: терісеместігі, бірқалыпты үзіліссіздігі, қатаң дөңестігі, қажетінше дифференциалданатындығы және тағы басқалары. Негізгі қасиеттерін сипаттайтын теоремаларға тоқталып, бірнеше теоремалерды келтірейік.

0.1-теорема. $g_m(F, \alpha)$ функциясы $\forall \alpha_0 \geq \hat{\alpha}$ үшін кез-келген $(\alpha_0, \alpha_0 + h)$, $h > 0$ шектелген аралығында бірқалыпты үзіліссіз, мұндағы $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

Теореманы дәлелдеу үшін $(\alpha_0, \alpha_0 + h)$ аралығынан α_1 және α_2 мәндері алынып, осы мәндердегі көмекші функциялардың айырмасының модулі зерттелді.

0.2-теорема. $g_m(F, \alpha)$ көмекші функция $(\hat{\alpha}; +\infty)$ аралығындағы әрбір α нүктесінде дифференциалданады, мұндағы $\hat{\alpha} = \text{globmin}_E F(x)$.

Теореманы дәлелдеуі үшін көмекші функцияның өсімшесін қарастырылған. Көмекші функция реті m көрсеткішке байланысты.

0.1-салдар. Кез-келген натурал $m > 1$ саны үшін көмекші функцияның m ретті туындысы

$$\frac{d^m g_m}{d\alpha^m} = (2)^m m! \mu(E(F, \alpha)).$$

Оптималдау теориясында маңызды болып келетін функция қасиеті – функцияның дөңестігі. Дөңес оптималдау теориясының мәселелері шешімін тапқан.

0.3-теорема. $g_m(F, \alpha)$ функциясы $(\hat{\alpha}, \infty)$ аралығында қатаң дөңес, мұндағы $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

Теореманы дәлелдеу үшін

$$g_m\left(F, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(g_m(F, \alpha_1) + g_m(F, \alpha_2))$$

теңсіздігінің дұрыстығы дәлелдену керек. Теңсіздіктің сол жағы көмекші функция анықтамасы бойынша ашып, Коши теңсіздігі қолданып дәлелденді.

Көмекші функцияның өзгеру тәртібіне қатысты келесі екі теорема да маңызды ақпарат береді:

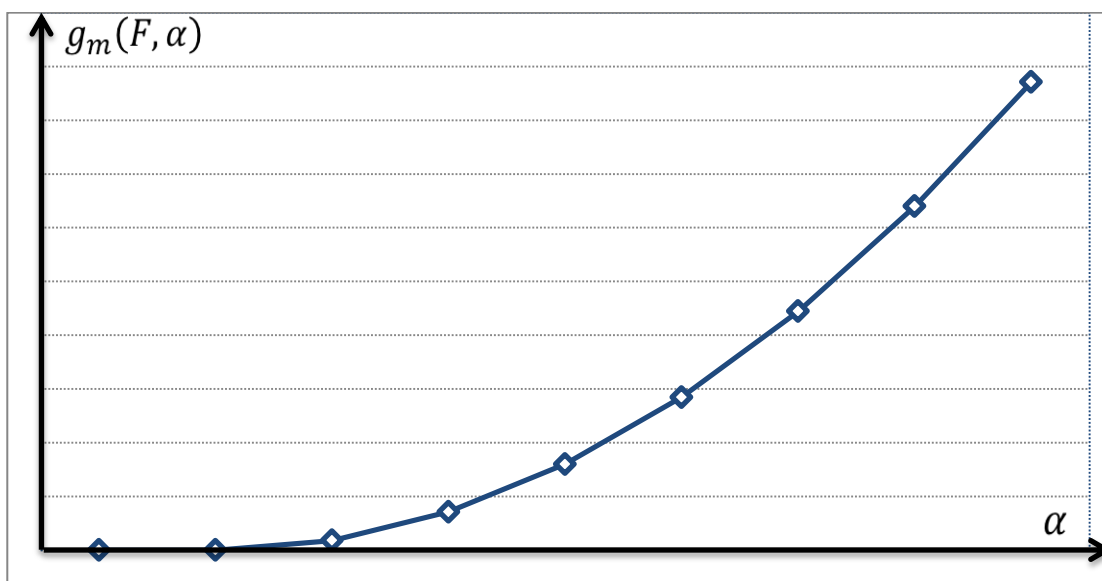
0.4-теорема. $g_m(F, \alpha)$ функциясы $(\hat{\alpha}, +\infty)$ аралығында өспелі.

0.5-теорема. Егер $\text{glob min}_E F(x) = \hat{\alpha}$, $r > m$, $r, m \in \mathbb{N}$, $r > 1$, $m > 1$ болса, онда

А) $\forall \alpha, \alpha \leq \hat{\alpha}$, үшін $g_r(F, \alpha) = g_m(F, \alpha) = 0$;

Ә) $\forall \alpha, \hat{\alpha} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, үшін $g_r(F, \alpha) \leq g_m(F, \alpha)$.

Жоғарыда дәлелденген қасиеттерге сүйеніп, көмекші функция графигінің сұлбасын кескіндеуге болады (0.1– сурет).



0.1-сурет – Көмекші функция графигінің сұлбасы

Мақсатты функцияның локалды минимумдар санына, айнымалылар санына қарамастан, алынатын көмекші функция бір ғана α параметріне тәуелді, бірқалыпты үзіліссіз, туындылары табылатын, дөңес, теріс емес, өспелі болады.

2.2 бөлімшесінде көп айнымалылы мақсаттық функцияның глобалдық минимумының қажетті және жеткілікті оптималдық шарттары алынды және дәлелденді. Алынған шарттар мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу есебінен көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу есебіне өтуге әкелді.

0.6-теорема. Егер $\text{glob min}_E F = \hat{\alpha}$, болса, онда

$$g_m(F, \hat{\alpha}) = 0. \quad (0.2)$$

0.2-салдар. F мақсаттық функцияның глобалдық минимумы $g_m(F, \alpha)$ көмекші функцияның нөлі болады.

0.7-теорема. Егер $\max_{\alpha} \{\alpha \in \mathbb{R}: g_m(F, \alpha) = 0\} = \hat{\alpha}$ болса, онда $\text{glob min}_E F = \hat{\alpha}$.

0.3-салдар. $g_m(F, \alpha)$ көмекші функциясының ең үлкен нөлі F мақсаттық функциясының глобалдық минимумының дәл мәніне тең.

0.6, 0.7 теоремаларда мақсатты функцияның глобалдық минимумы көмекші функцияның «ең үлкен нөліне» сәйкес келетіні анықталып дәлелденді. Бұл – негізгі нәтиже болып табылады. Ендігі мәселе көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» анықтау

2.3 бөлімшесінде бірнеше айнымалылы көпэкстремалды функциялардың глобалдық минимумын табу мысалдары келтірілді. А.В. Кузнецов пен А.И. Рубанның еңбектерінде [135-135] сипатталған гиперболалық және экспоненциалдық потенциалдар әдісінің көмегімен, үш айнымалылы көпэкстремалды арнайы тесттік функциялар құрылды. Көмекші функцияның әр түрлі m дәреже көрсеткіші үшін есептелген мәндері теоремадағы тұжырымның ақиқаттығын көрсетті. Тесттік функциялардың глобалдық минимумдары 42 итерациядан соң $\varepsilon = 10^{-10}$ дәлдігімен анықталды. Функцияның глобалдық минимумын табу үшін қажетті итерация саны функцияның аргументтері саны мен локалдық экстремумдары санынан тәуелсіз болады, яғни олардың саны өскенімен итерация саны артпайды.

Үшінші бөлімде көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу үшін 5 түрлі белгілі сандық әдістер бейімделді. Қаралған әдістерді атап өтсек: қақ бөлу әдісі, алтын қима әдісі, Ньютон (жанамалар) әдісі, градиентпен түсу әдісі, Вегстейн әдісі. Аталған сандық әдістердің бейімделген нұсқаларына салыстырмалы талдау жасалды. Әр әдістің жинақталу жылдамдықтары есептеліп, олардың қойылған есеп үшін тиімді және тиімсіз тұстары анықталды.

Қарастырылған әдістердің ішінде дихотомия және алтын қима әдістері дәлдікті апрерорлық бағалау әдістемесімен айқындайды. Бұл нәтиженің дәл түбірге жақсы жуықтайтының көрсетеді. Алтын қима әдісінде қажетті итерация саны ең аз болды. Ал әр итерациядағы есептеулер саны дихотомия әдісі бойынша ең аз. Жанамалар әдісі, градиентпен түсу әдісі және Вегстейн әдісі дәлдікті бағалау кезінде апостерорлық әдістемеге сүйенеді. Олар бойынша дәл түбірге жақындаймыз, бірақ одан қаншалықты ауытқитынымыз белгісіз, алдыңғы екі әдіске қарағанда итерация саны да артық орындалады.

Қорыта айтқанда, әзірше дихотомия және алтын қима әдістері көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу үшін тиімді әдістер болып тұр.

Мақсаттық функцияның глобалдық минимумын жоғарыда сипатталған әдістерді біртіндеп қолданып есептеудің көрнекілік үшін қарапайым түрде алынған мысалын қарастырайық.

Диссертациялық жұмыс нәтижелерінен шығатыны: $g_m(F, \alpha)$ функциясының маңызды қасиеттері (оның бірайнымалылы болатындығы, қатаң дөңестігі, терісеместігі, бірқалыпты үзіліссіздігі, жоғары ретті туындыларының табылатындығы) $F(x)$ мақсаттық функцияның айнымалыларының санынан да, локалдық экстремумдары санынан да тәуелді емес және оның глобалдық минимумының қажетті және жеткілікті шарттарын айқындауға, глобалдық минимумын жоғары дәлдікпен анықтау үшін үнемді әрі ұтымды әдіс құруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, $g_m(F, \alpha)$ функциясының өзгеруіне m көрсеткішінің әсерін тиімді пайдалана отырып, есептеу дәлдігін арттыруға және итерация санын азайтуға қол жеткізуге болады.

1 БІРНЕШЕ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР ТЕГІС ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ГЛОБАЛДЫҚ МИНИМУМДАРЫН ЖОҒАРЫ ДӘЛДІКПЕН АНЫҚТАУ

1.1 Оптималдау есебінің көмекші функция негізінде қойылуы

Оптималдау теориясында нақты бір практикалық мәселені шешу барысында қайсыбір шаманың ең үлкен немесе ең кіші мәнін анықтау есебі «мақсаттық функция» деп аталатын функция арқылы сипатталады және зерттеледі.

n - айнымалыдан тәуелді, экстремумдарының саны өте көп күрделі үзіліссіз мақсаттық функцияны қарастырайық:

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n), F: Q \rightarrow R. \quad (1.1)$$

Мұндағы Q – n өлшемді тұйық, шенелген куб:

$$Q = \{x \in R^n: a_j \leq x_j \leq b_j, j = \overline{1, n}\}.$$

Вейерштрасс теоремасына сәйкес, $Q \subset R^n$ тұйық жиынында үзіліссіз $F(x)$ функциясы өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін осы жиында қабылдайды. Сондықтан $F(x)$ функциясының глобалдық экстремумдарын қажетті дәлдікпен анықтау есебінің, яғни «оптималдау есебінің» шешімі бар: Q жиынына тиісті x_{min} және x_{max} нүктелері табылып, $\forall x \in Q$ үшін $F(x_{min}) \leq F(x) \leq F(x_{max})$ теңсіздігі орындалады.

$F(x)$ функциясының

$$\hat{\alpha} = glob \min_{x \in Q} F(x) \quad (1.2)$$

глобалдық минимумын және осы минимум қабылданатын

$$\hat{x} = argglobmin_{x \in Q} F(x) \quad (1.3)$$

нүктесін алдын-ала берілген ε дәлдікпен табу керек.

Мәселені тиімді шешу үшін жаңа

$$g_m(F, \alpha) = \int_Q [|F(x_1, \dots, x_n) - \alpha| - (F(x_1, \dots, x_n) - \alpha)]^m dx \quad (1.4)$$

функциясын енгіземіз. Мұнда: m - берілген натурал сан, $m > 1$. (1.4) - $F(x)$ мақсаттық функция арқылы арнайы конструкциямен құрылған еселі интеграл түріндегі, бір ғана α параметрінен тәуелді функция. Интегралдың неше еселі болатындығы, әрине, мақсаттық функция берілген кеңістіктің өлшеміне байланысты.

Анықтама. $g_m(F, \alpha)$ функциясын көмекші функция деп атаймыз.

α айнымалысы арқылы ізделінді глобалдық минимумның деңгейін анықтайтын $y = \alpha$ гипержазықтығы сипатталады.

Дербес жағдайларда: жазықтықта берілген мақсаттық функция үшін $y = \alpha$ – түзу; 3-өлшемді кеңістікте $y = \alpha$ – жазықтық.

1.2 Мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу есебі шешімінің бар болуы

(1.1) – (1.3) есеп шешімінің бар болуы мәселесін қарастырамыз.

1.1-теорема. *Егер (1.4) көмекші функция үшін $g_m(F, c_0) = 0$ және $g_m(F, d_0) > 0$, $d_0 > c_0$, болса, онда F мақсаттық функцияның $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумы $[c_0, d_0)$ аралығында жатады.*

Дәлелдеуі. Көмекші функциядағы модульге назар аударалық. Егер $F(x_1, \dots, x_n) \geq c_0$ болса, онда модуль оң таңбамен ашылып, көмекші функция мәні нөлге айналады:

$$\begin{aligned} g_m(F, c_0) &= \int_Q [|F(x_1, \dots, x_n) - c_0| - (F(x_1, \dots, x_n) - c_0)]^m dx = \\ &= \int_Q [F(x_1, \dots, x_n) - c_0 - F(x_1, \dots, x_n) + c_0]^m dx = 0, \end{aligned}$$

яғни $g_m(F, c_0) = 0$ теңдігі орынды.

Егер $F(x_1, \dots, x_n) < d_0$ болса, онда көмекші функциядағы модуль теріс таңбамен ашылып, көмекші функцияның мәні нөлден үлкен болады:

$$\begin{aligned} g_m(F, d_0) &= \int_Q [|F(x_1, \dots, x_n) - d_0| - (F(x_1, \dots, x_n) - d_0)]^m dx = \\ &= \int_Q [-F(x_1, \dots, x_n) + d_0 - F(x_1, \dots, x_n) + d_0]^m dx = \\ &= \int_Q [2(d_0 - F(x_1, \dots, x_n))]^m dx > 0. \end{aligned}$$

Сонымен:

$$\begin{cases} F(x_1, \dots, x_n) \geq c_0, \\ F(x_1, \dots, x_n) < d_0. \end{cases}$$

Демек, мақсаттық функцияның глобалдық минимумы келесі аралықта бар болатыны анықталды:

$$c_0 \leq \hat{\alpha} < d_0.$$

Басқаша айтқанда, мақсаттық функцияның глобалдық минимумы $y = c_0$ және $y = d_0$ көлденең гипержазықтықтарының арасында орналасады.

Егер $g_m(F, d_0) > 0$, онда $y = d_0$ гипержазықтығы берілген Q тұйық жиынында глобалдық минимумнан жоғары өтеді.

Егер $g_m(F, c_0) = 0$, онда $y = c_0$ гипержазықтығы берілген Q тұйық жиынында глобалдық минимум арқылы немесе одан төмен өтеді.

1.1-теорема дәлелденді.

1.3 Глобалдық минимум мәнін «қақ бөлу» әдісімен есептеу алгоритмі және оның жинақтылығы

1.1-теоремасын негізге алып, (1.2) глобалдық минимум мәнін қақ бөлу әдісімен есептеуді қарастырайық. $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумы жоғарыда алынған $[c_0, d_0)$ аралығында жататын болғандықтан, алдымен, осы аралықтың $\alpha_0 = \frac{c_0+d_0}{2}$ қақ ортасында көмекші функцияның $g_m(F, \alpha_0)$ мәнін есептейміз.

а) Егер $g_m(F, \alpha_0) > 0$ болса, онда $\hat{\alpha} \in [c_0, \alpha_0)$. Ары қарай $c_0 = c_1$, $\alpha_0 = d_1$ деп аламыз.

ә) Егер $g_m(F, \alpha_0) = 0$ болса, онда $\hat{\alpha} \in [\alpha_0, d_0)$. Бұл жағдайда: $\alpha_0 = c_1$, $d_0 = d_1$ деп ауыстырамыз.

Сонан соң $[c_1, d_1)$ аралығының α_1 қақ ортасын анықтап, $g(F, \alpha_1) > 0$ немесе $g_m(F, \alpha_1) = 0$ екеніне байланысты $[c_1, \alpha_1)$ және $[\alpha_1, d_1)$ аралықтарының бірін $[c_2, d_2)$ деп аламыз.

Осы процесті аналогиялық түрде жалғастырсақ, $\{\alpha_i\}$ тізбегін аламыз:

$$\alpha_0 = \frac{c_0+d_0}{2}, \alpha_1 = \frac{c_1+d_1}{2}, \alpha_2 = \frac{c_2+d_2}{2}, \dots, \alpha_k = \frac{c_k+d_k}{2}, \dots \quad (1.5)$$

Енді әдістің жинақтылығын дәлелдейік.

1.2-теорема. Егер 1.1-теорема шарттары орындалса, онда (1.5) тізбегі ізделінді $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумға берілген $\varepsilon \geq d_k - c_k$ дәлдікпен жинақталады.

Дәлелдеуі. (1.5) тізбегінің жалпы мүшесін қорытып жазсақ:

$$\alpha_k = \frac{1}{2}(d_k - c_k), \quad c_k \leq \alpha_k < d_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

(1.5) бойынша

$$|\alpha_1 - \alpha_0|, |\alpha_2 - \alpha_1|, \dots, |\alpha_k - \alpha_{k-1}|, \dots \quad (1.6)$$

тізбегін құрайық.

(1.6) тізбегінің глобалдық минимум мәніне жуықтайтын сандық тізбек екенің көрсетейік. Мұндағы аралықтардың c_i, d_i ұштары $g_m(F, c_i) = 0$ теңдігі мен $g_m(F, d_i) > 0$ теңсіздігіне қанағаттандырады. (1.6)-ның алғашқы k мүшесі:

$$|\alpha_1 - \alpha_0| = \frac{1}{2} |c_1 + d_1 - c_0 - d_0| = \frac{1}{2} \left| c_0 + \frac{1}{2}(d_0 + c_0) - d_0 - c_0 \right| = \frac{1}{4} |c_0 - d_0|$$

немесе

$$|\alpha_1 - \alpha_0| = \frac{1}{2} |c_1 + d_1 - c_0 - d_0| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}(d_0 + c_0) + d_0 - d_0 - c_0 \right| = \frac{1}{4} |c_0 - d_0|.$$

Аналогиялық түрде, $c_i = c_{i-1}, d_i = \frac{1}{2}(d_{i-1} + c_{i-1})$ немесе $d_i = c_i, c_i = \frac{1}{2}(d_{i-1} + c_{i-1})$ деп алып, келесі айырмаларды өрнектейік:

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \alpha_0| &= \frac{1}{4} |d_0 - c_0|, \\ |\alpha_2 - \alpha_1| &= \frac{1}{4} |d_1 - c_1| = \frac{1}{8} |d_0 - c_0|, \\ |\alpha_3 - \alpha_2| &= \frac{1}{4} |d_2 - c_2| = \frac{1}{8} |d_1 - c_1| = \frac{1}{16} |d_0 - c_0|, \\ |\alpha_4 - \alpha_3| &= \frac{1}{4} |d_3 - c_3| = \frac{1}{8} |d_2 - c_2| = \frac{1}{16} |d_1 - c_1| = \frac{1}{32} |d_0 - c_0|, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ |\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}| &= \frac{1}{2^k} |d_0 - c_0|. \end{aligned}$$

Бұдан шығатыны: $[c_0, d_0)$ аралығын қақ бөлу процесін жалғастыру арқылы, k - нің қайсыбір мәнінде $\hat{\alpha}$ глобалдық минимум жататын $[c_k, d_k)$ аралығына жетеміз және оның c_k сол жақ ұшын $\hat{\alpha}$ мәні ретінде аламыз.

1.3-теорема. 1.2-теорема шарттары орындалсын. Онда $\{\alpha_i\}$ итерациялық тізбектің шегі $F(x_1, \dots, x_n)$ мақсаттық функцияның глобалдық минимумына $\beta = 0.5$ сызықтық жылдамдықпен жуықтайды.

Дәлелдеуі. Алдыңғы теоремада $[c_k; d_k)$ кесіндісі қысқарған сайын, α_k мәні ізделінді $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумға жинақталатыны дәлелденді. Сонымен қатар, әр итерациядан кейін кесіндінің ұзындығы екі есе қысқаратыны анық. Демек,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1} - \alpha_k|}{|\alpha_k - \alpha_{k-1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{k+2}} |d_0 - c_0|}{\frac{1}{2^{k+1}} |d_0 - c_0|} = 0.5.$$

Яғни, $\{\alpha_k\}$ тізбегі глобалдық минимумға $\beta = 0.5$ жылдамдығымен жинақталады. Тізбектің мақсаттық функцияның глобалдық минимум мәніне жинақталатының ескерсек, бұл жақсы жылдамдық.

1.4 Глобалдық минимумның координаталарын табу алгоритмі n өлшемді Q кубта берілген

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$$

мақсаттық функцияның глобалдық минимумы координаталарын анықтау алгоритмін қарастырайық. Жоғарыда табылған $\hat{\alpha}$ глобалдық минимум нүктесінің координаталарын Q кубында іздейік. Табылған аралықтың сол жақ ұшын глобалдық минимумның жуық мәні $c_n \approx \hat{\alpha}$ деп алынды, ал оның координаталарын іздеу барысында табылған аралықтың оң жақ $d_k \approx \hat{\alpha}$ ұшы алынады, себебі координаталарын табу үшін $g_m(F, \hat{\alpha}) > 0$ теңсіздігі орындалғаны қажет:

$$d_n \approx \hat{\alpha} = \mathit{glob\,min}_Q F(x).$$

Табылған аралықтың ұзындығы ε болатының ескеретін болсақ, соңғы ауыстыру елеулі өзгеріс әкелмейді. Q кубын әр координата бойынша екіге қажат бөлеміз. Сонда айнымалылар санына сәйкес, пайда болатын кубтар саны 2^n болып шығады. Оларды $Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{1,3}, \dots$ т.с.с. белгілейік, мұндағы бірінші индекс итерация ретін, екінші индекс бөлуден кейінгі пайда болған квадраттардың реті.

Көмекші функцияны осы кубтарда біртіндеп есептейміз:

$$g_{m,Q_{1,1}}(F, \hat{\alpha}) = \int_{Q_{1,1}} [|F(x_1, \dots, x_n) - \hat{\alpha}| - (F(x_1, \dots, x_n) - \hat{\alpha})]^m dx ,$$

$$g_{m,Q_{1,2}}(F, \hat{\alpha}) = \int_{Q_{1,2}} [|F(x_1, \dots, x_n) - \hat{\alpha}| - (F(x_1, \dots, x_n) - \hat{\alpha})]^m dx ,$$

... ..

Ең болмағанда бір кубта көмекші функция оң мән қабылдайды. Көмекші функция оң мән қабылдаған кубты тағы 2^n кубқа бөлеміз: $Q_{2,1}, Q_{2,2}, Q_{2,3}, \dots$. Осы бөлуді қажетті дәлдікке жеткенімізше жалғастырамыз: $b - a \leq \varepsilon^*$.

Глобалдық минимум нүктесі ретінде көмекші функция оң мән қабылдайтын соңғы кубтың ортасы алынады:

$$\frac{b-a}{2} \approx \hat{x}.$$

Демек,

$$\hat{\alpha} \approx \mathit{glob\,min}_Q F(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n).$$

1.5 Итерация санын есептеу

Құрылған әдістің әр итерациясында көмекші функция бір рет есептеледі және әр итерацияда глобалдық минимум жатқан аралық екі есе қысқарып отырады (1.5). Бастапқы ұзындық k итерациядан кейін:

$$|\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}| = \frac{1}{2^k} (d_0 - c_0), \quad k = 2, 3, \dots$$

қысқарады және бұл алгоритм қажетті дәлдікке жеткенше жалғасады.

$$\varepsilon \geq \frac{1}{2^k} (d_0 - c_0) \quad (1.7)$$

Демек, егер ε дәлдігі берілсе, онда итерация санын алдын-ала есептеуге болады:

$$k \geq \log_2 \frac{d_0 - c_0}{\varepsilon} \quad (1.8)$$

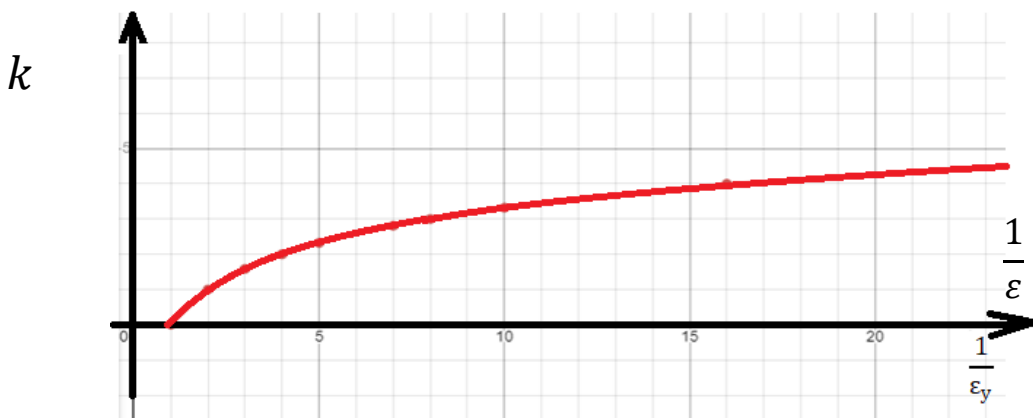
Сонымен «қақ бөлу» сандық әдісімен глобалдық минимумның жуық мәнін алдын ала берілген ε дәлдікпен таба аламыз.

Мысалы, $[0,1)$ кесіндісінде мақсаттық функцияның глобалдық минимумын $\varepsilon = 0,001$ дәлдікпен есептеу керек. Демек, $g_m(F, 1) > 0$ және $g_m(F, 0) = 0$ орындалады. Олай болса, $\hat{\alpha}$ мәнін есептеуге кететін итерация саны:

$$k > \log_2 \frac{1 - 0}{0,001} \approx 9,96$$

Яғни, бүтін санға дөңгелетсек, 10 итерация орындалу керек. Бастапқы $[0,1)$ аралық 10 итерациядан кейін $2^{10} = 1024$ есе қысқарады.

1.1-суретте k итерация санының $\frac{1}{\varepsilon}$ шамасынан тәуелділігі графиктік түрде кескінделген.



1.1-сурет – Итерация санының өсу заңдылығы

Минимум координаталарын анықтау үшін көмекші функцияны есептеу саны: $[k, 2^n k]$. Мұндағы k – итерация саны, n – $F(x)$ функцияның аргументтерінің саны.

Құрылған әдістің ерекшелігі, әрі артықшылығы – айнымалы санының артуы мен экстремум санының көптігі глобалдық минимумды есептеу үшін қажетті итерация санына әсер етпейді.

1.1-мысал. Көрнекілік үшін жарықтықта берілген бірнеше экстремумы бар үзіліссіз функцияны қарастырайық.

$[-10; 10]$ аралығында берілген

$$F(x) = x^2(x - 2)^2(x + 1)^2 - 0.8x \quad (1.9)$$

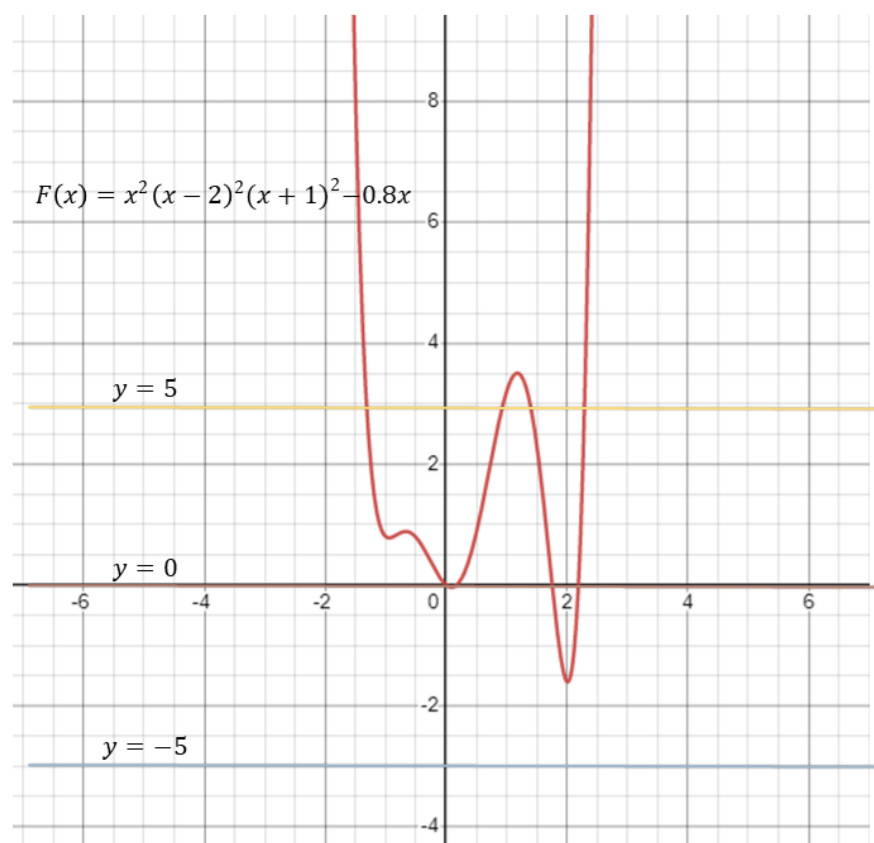
мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу керек. Аналитикалық жолмен есептейтін болсақ, глобалдық минимум: $F(2) = -1,6$.

Берілген мақсаттық функция үшін $m = 5$ жағдайында көмекші функция құрайық:

$$g_5(F, \alpha) = \int_{-3}^3 [|x^2(x - 2)^2(x + 1)^2 - 0.8x - \alpha| - (x^2(x - 2)^2(x + 1)^2 - 0.8x - \alpha)]^m dx.$$

Мақсаттық функцияның глобалдық минимумы жатқан $\hat{\alpha} \in [c_k, d_k)$ ақырсыз аз аралығын 1.1-теоремасының шарттары орындалатындай етіп анықтау керек, яғни $g_5(F, c_k) = 0$ және $g_5(F, d_k) > 0$ болуы тиіс.

(1.9) мақсаттық функциясы мен $y = \alpha$ көлденең түзулердің графиктерін 1.2-суреттен кескіндеуге болады.



1.2-сурет – (1.9) функция графигі және $y = \alpha$ түзулері

Суретте $F(x) = x^2(x - 2)^2(x + 1)^2 - 0.8x$ функцияның графигі мен $y = \alpha$ горизонталь түзулердің өзара орналасуы анық көрініп тұр. Глобалдық минимум $\hat{\alpha} \in [-5, 5)$, себебі $g_5(F, 5) > 0$ және $g_5(F, -5) = 0$. Көмекші функция таңбасы $g_5(F, 0) > 0$. Яғни глобалдық минимум тиісті келесі аралық: $\hat{\alpha} \in [-5, 0)$. Осылайша, глобалдық минимум жататын аралықты әр қадам сайын екі есеге қысқарта береміз. Әр итерацияда алынған α мен оған тәуелді $g_5(F, \alpha)$ көмекші функциясының мәндері 1.1-кестесінде келтірілген.

1.1-кесте – (1.9) мақсаттық функциясының глобалдық минимумына жуықтау қадамдары

	α	Көмекші функцияның мәні	$y = \alpha$ жазықтығының орналасуы	$\hat{\alpha}$ глобалдық минимум тиісті аралық
0	$\alpha = 10$	$g_5(10) > 0$	$y = 10$ түзуі функция графигін қияды немесе одан жоғары орналасады	$\hat{\alpha} \in (-\infty; 10)$
0	$\alpha = -10$	$g_5(-10) = 0$	$y = -10$ түзуі функция графигін жанайды немесе одан төмен орналасады	$\hat{\alpha} \in [-10; 10)$
1	$\alpha = 0$	$g_5(0) > 0$	$y = 0$ түзуі функция графигін қияды немесе одан жоғары орналасады	$\hat{\alpha} \in [-10; 0)$

1.1-кестенің жалғасы

2	$\alpha = -5$	$g_5(-5) = 0$	$y = -5$ түзуі функция графигін жанайды немесе одан төмен орналасады	$\hat{\alpha} \in [-5; 0)$
3	$\alpha = -2.5$	$g_5(-2.5) = 0$	$y = -2.5$ түзуі функция графигін жанайды немесе одан төмен орналасады	$\hat{\alpha} \in [-2.5; 0)$
4	$\alpha = -1.25$	$g_5(-1.25) > 0$	$y = -1.25$ түзуі функция графигін қияды немесе одан жоғары орналасады	$\hat{\alpha} \in [-2.5; -1.25)$
5	$\alpha = -1.875$	$g_5(-1.875) = 0$	$y = -1.875$ түзуі функция графигін жанайды немесе одан төмен орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.875; -1.25)$
6	$\alpha = -1.5625$	$g_5(-1.5625) > 0$	$y = -1.5625$ түзуі функция графигін қияды немесе одан жоғары орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.875; -1.5625)$
8	$\alpha = -1.71875$	$g_5(-1.71875) = 0$	$y = -1.71875$ түзуі функция графигін жанайды немесе одан төмен орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.71875; -1.5625)$
9	$\alpha = -1.64063$	$g_5(-1.64063) = 0$	$y = -1.64063$ түзуі функция графигін жанайды немесе одан төмен орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.64063; -1.5625)$
10	$\alpha = -1.60156$	$g_5(-1.60156) = 0$	$y = -1.60156$ түзуі функция графигін жанайды немесе одан төмен орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.60156; -1.5625)$
11	$\alpha = -1.58203$	$g_5(-1.58203) > 0$	$y = -1.58203$ түзуі функция графигін қияды немесе одан жоғары орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.60156; -1.58203)$
12	$\alpha = -1.5918$	$g_5(-1.5918) > 0$	$y = -1.5918$ түзуі функция графигін қияды немесе одан жоғары орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.60156; -1.5918)$
13	$\alpha = -1.59668$	$g_5(-1.5918) > 0$	$y = -1.59668$ түзуі функция графигін қияды немесе одан жоғары орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.60156; -1.59668)$
14	$\alpha = -1.59912$	$g_5(-1.59912) > 0$	$y = -1.59912$ түзуі функция графигін қияды немесе одан жоғары орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.60156; -1.59912)$

1.1-кестенің жалғасы

15	$\alpha = -1.60034$	$g_5(-1.60034) = 0$	$y = -1.60034$ түзуі функция графигін жанайды немесе одан төмен орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.60034; -1.59912)$
16	$\alpha = -1.59973$	$g_5(-1.59973) > 0$	$y = -1.59973$ түзуі функция графигін қияды немесе одан жоғары орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.60156; -1.59973)$
17	$\alpha = -1.60004$	$g_5(-1.60004) > 0$	$y = -1.5918$ түзуі функция графигін жанайды немесе одан төмен орналасады	$\hat{\alpha} \in [-1.60004; -1.59973)$

Нәтижесінде, 17 итерациядан кейін глобалды минимум жатқан $[-10; 10)$ аралығынан $[-1.60004; -1.59973)$ аралығына келдік. Функцияның $\hat{\alpha} \approx -1.60004$ глобалды минимумы $\varepsilon = 0.001$ дәлдігімен табылды. (1.9) функциясының глобалды минимумын жоғарыда сипатталған әдіспен Visual Studio ортасында есептеу нәтижесі 1.3-суретте көрсетілген.

```

Консоль отладки Microsoft Visual Studio
n=400
e=0.001
x1=-10
x2=10
alpha_b=-10
alpha_e=10
g_b=0
g_e=1.6132e+08
alpha=-1.60004

C:\Users\user\source\repos\ConsoleApplication50\Debug\ConsoleApplication50.exe
0.
Чтобы автоматически закрывать консоль при остановке отладки, установите параметр
"Автоматически закрыть консоль при остановке отладки".
Чтобы закрыть это окно, нажмите любую клавишу...
    
```

1.3-сурет – (1.9) функциясының глобалды минимумын VisualStudio ортасында есептеу нәтижесі

1.6 Көмекші функция үшін соболевтік кубтық формула

Максаттық функцияның глобалдық минимумын табу үшін ұсынылып отырған әдістің маңызды және қиындық туғызатын бөлігі – көмекші функция мәндерін табу, дәлірек айтқанда, оның құрамындағы еселі интегралды (1.4) тгтимді түрде есептеу. Бұндай күрделі функция мәндерін тез есептеу үшін сандық әдістерге жүгінеміз. Еселі интегралдың мәнін компьютердің көмегімен есептеуге арналған кубтық формулаларды қолданамыз. Көмекші функцияның мәнін есептеу үшін С.Л. Соболевтің кубтық формуласын [111, 5 б.] қолдану мүмкіндіктерін қарастырайық, себебі олар алгебралық жоғары дәлдікпен есептейді.

n нақты айнымалыдан тәуелді $\varphi(x)$ функциясының Ω облысы бойынша

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x) dx \quad (1.10)$$

интегралының жуық мәнін есептеу үшін С.Л. Соболевтің «тұрақты шекаралық қабаты бар» торлы кубтық формулаларын қолданайық [111, 197 б.]. Оларға сәйкес, (1.10) интегралдың жуық мәні $\varphi(x)$ функциясының $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ нүктелердегі мәндерінің сызықтық комбинациясы түрінде ізделеді:

$$K_N(\varphi(x)) = h \sum_{s=1}^N C_s \varphi(hNk), \quad (1.11)$$

мұндағы: N – функцияның анықталу жиінін x векторының әр компонентасы бойынша бөлетін интервалдар саны, $x^{(s)}$ – соболевтік кубтық формуланың түйіндері. C_s – «шекаралық» коэффициенттері, h - тордың қадамы, N – элементар ұяшық, k – қадамдардың реті.

Негізгі мәселе – N шексіздікке ұмтылғанда, $I(\varphi)$ интегралы $K_N(\varphi(x))$ мәніне жылдам жуықтайтындай $\{C_s\}$ коэффициенттерін табуға мүмкіндік беретін заңдылықты анықтау.

Соболевтік кубтық формула (1.11) қарапайым формадағы интегралдау облысы бойынша жоғары алгебралық дәлдікпен есептелген, локалдық кубтық формулалардың қосындысы болып табылады.

Соболев формулаларын құрайтын локалдық кубтық формулалардың коэффициенттері сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу арқылы табылады. Ол үшін берілген нүктелерде $\varphi(x)$ функциясымен бірдей мәндер қабылдайтын, яғни $P(x^{(k)}) = \varphi(x^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots, N$ болатын, реті m -нен аспайтын $P(x)$ полиномын табу керек. Изделінді $P(x)$ көпмүшелігін $P(x) = aX$ теңдігі, мұндағы $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ жатық матрица,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix},$$

орындалатындай етіп алсақ, онда a_1, a_2, \dots, a_m локалдық коэффициенттері

$$a \cdot X = \varphi(x)$$

яғни

$$(a_1, \dots, a_m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix} = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m)) \quad (1.12)$$

сызықты жүйесімен анықталады. Мұндағы бүтінсанды матрицаның

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \quad (1.13)$$

анықтаушы – Вандермонд анықтаушы. Ол нөлге тең емес.

Есептеулердің тиімділігі және ықшамдылығы үшін X матрицасының ретін 6-ға тең, яғни $m = 6$ деп алып, a_m локалдык коэффициенттерін есептейік:

$$\int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m}; \quad (1.14)$$

$$\int_0^1 x^{m-1} dx = \sum_{m=1}^6 a_m x^{m-1}$$

$$\left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6}\right) =$$

$$= (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Соңғы матрицалық теңдеуден a_m локалдык коэффициенттері анықталады:

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6) =$$

$$= \left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ізделінді коэффициенттерді жоғары дәлдікпен анықтау үшін, (1.15) формуладағы матрицаның кері матрицасының элементтерін рационал түрінде алу керек.

Егер кері матрицаны табудың белгілі бағдарламаларын қолдансақ, онда оның элементтері ондық бөлшектермен анықталады және жуықтап дөңгелектенеді. Сондықтан, кері матрицаны «қолмен» есептеу арқылы табайық:

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{87}{10} & \frac{29}{6} & -\frac{31}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{120} \\ -15 & \frac{117}{4} & -\frac{461}{24} & \frac{137}{24} & -\frac{19}{24} & \frac{1}{24} \\ 20 & -\frac{127}{3} & 31 & -\frac{121}{12} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{12} \\ -15 & 33 & -\frac{307}{12} & \frac{107}{12} & -\frac{17}{12} & \frac{1}{12} \\ 6 & -\frac{27}{2} & \frac{65}{6} & -\frac{95}{24} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{24} \\ -1 & \frac{137}{60} & -\frac{15}{8} & \frac{17}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{120} \end{pmatrix}.$$

Енді $P(x)$ полиномының локалды коэффициенттерін анықтаймыз:

$$\begin{aligned} (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6) &= \\ &= \left(\frac{4277}{1440} \quad -\frac{7923}{1440} \quad \frac{9982}{1440} \quad -\frac{7298}{1440} \quad \frac{2877}{1440} \quad -\frac{475}{1440} \right). \end{aligned}$$

Осы нәтижелерден, С.Л. Соболевтің кубтық формулаларындағы шекара қабатының коэффициенттері табылады. Олар локалды коэффициенттердің қосындысынан тұрады.

$$\left\{ \begin{aligned} C_6 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1, \\ C_5 &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = -\frac{2838}{1440}, \\ C_4 &= a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{5085}{1440}, \\ C_3 &= a_4 + a_5 + a_6 = -\frac{4896}{1440}, \\ C_2 &= a_5 + a_6 = \frac{2402}{1440}, \\ C_1 &= a_6 = -\frac{475}{1440}. \end{aligned} \right. \quad (1.16)$$

(1.11) кубтық формулада алғашқы C_1, \dots, C_5 және соңғы C_{N-4}, \dots, C_N коэффициенттердің мәндерін (1.16)-дан аламыз:

$$C_1 = C_N, C_2 = C_{N-1}, C_3 = C_{N-2}, C_4 = C_{N-3}, C_5 = C_{N-4},$$

ал облыстың ортасындағы C_6, \dots, C_{N-5} коэффициенттерінің барлығы 1-ге тең. Анықталған коэффициенттердің көмегімен (1.10) интегралын есептеуге мүмкіндік беретін кубтық формула

$$\int_{\Omega} \varphi(x) dx \approx h \sum_{s=1}^N C_s \varphi(x^{(s)}), s = 1, 2, \dots, N \quad (1.17)$$

түрінде алынады. Мұндағы n айнымалылар саны, h - элементар ұяшықтың көлемін анықтайтын, масштабтық көбейткіш.

Алынған кубтық формулаға көмекші функциядағы интеграл астындағы өрнекті қойсақ:

$$\begin{aligned} g_6(F, \alpha) &= \int_Q [|F(x) - \alpha| - (F(x) - \alpha)]^6 dx \approx \\ &\approx h \sum_{s=1}^N C_s [|F(x^{(s)}) - \alpha| - (F(x^{(s)}) - \alpha)]^6. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Көмекші функция мәндерін үлкен дәлдікпен есептеу үшін (1.18) соболевтік тұрақты шекаралық коэффициенттері бар кубтық формуласын қолданамыз. Еселі интегралды есептеу біреселі интегралдардың көбейтінділерімен есептеледі.

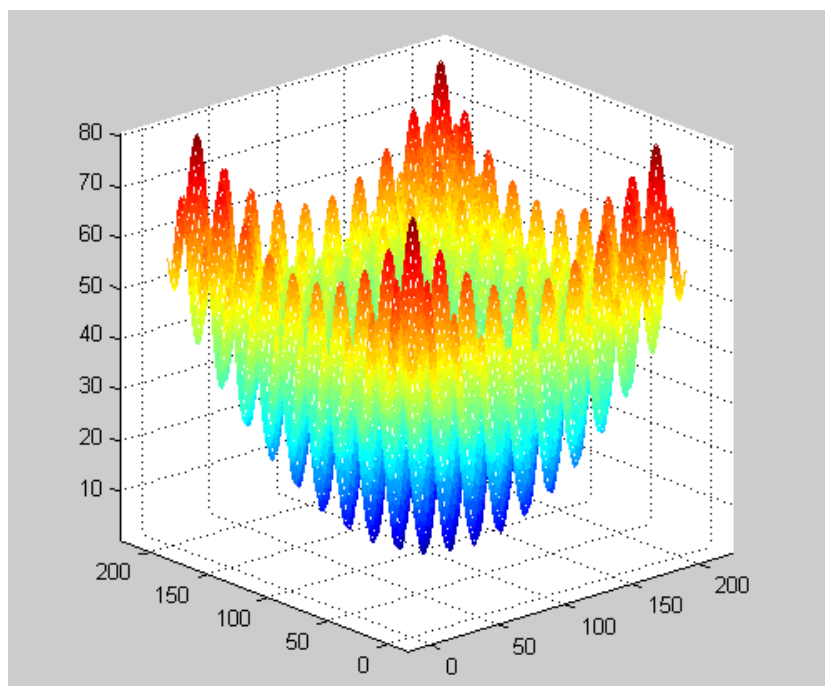
1.7 Тесттік функциялардың гобалды минимумдарын табу

Төмендегі қарастыратын мысалдарда $F(x, y)$ үшін көмекші функция мәндері (1.18) формуласы бойынша есептеу жұмыстары кең тараған C++ (VisualStudio 2017) бағдарламалау тілінде орындалды [113].

1.2-мысал. Екі айнымалылы көпэкстремалды

$$F(x, y) = 20 + x^2 + y^2 - 10 \cos(2\pi x) - 10 \cos(2\pi y) \quad (1.19)$$

Растрингин функциясын қарастырайық [112]. Бұл функцияның локалдық минимумдарының көптігі (1.4-сурет) функцияның ең кіші мәнді табуға қиындық туғызады. Сол себепті, ол глобалдық оптималдай алгоритмдерінің тиімділігін зерттеу үшін қолданатын тесттік функция болып табылады. $-5,12 \leq x, y \leq 5,12$ жиынында оның локалдық минимумдары көп.



1.4-сурет – Растрингін функциясының графигі

Жоғарыда сипаттаған жаңа алгоритмді негізге алып, (1.19) Растрингін функциясының $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумын және оның координаталарын табу мәселесін градиент әдісімен шешу мүмкін емес, себебі градиент әдісі дөңес функциялар үшін қолданылады, ал бұл жағдайда алғаш түскен локалды минимумды асып шыға алмайды. Растрингін функциясының ең кіші мәнің көмекші функция арқылы жоғары дәлдікпен табуға тырысайық.

Алдымен Растрингін функциясы үшін көмекші функцияны құрып аламыз:

$$g_m(F, \alpha) = \int_{-5,12}^{5,12} \int_{-5,12}^{5,12} [|20 + x^2 + y^2 - 10 \cos(2\pi x) - 10 \cos(2\pi y) - \alpha| - (20 + x^2 + y^2 - 10 \cos(2\pi x) - 10 \cos(2\pi y) - \alpha)]^6 dx dy, \quad (1.20)$$

мұндағы α -ның бастапқы мәні ретінде кез-келген санды алуға болады. Егер мақсаттық функцияның мәндер жиыны белгілі болса, онда α -ны сол жиыннан аламыз. Ал мәндер жиыны белгісіз болса, онда $\alpha = 0$ нүктесінен бастауға болады: $g(0) = 0$. Әрі қарай α -ның әрбір берілген мәнінде көмекші функцияның сәйкес мәнін есептейміз.

Сипатталған алгоритм бойынша, $\alpha = 0$ горизонталь жазықтығы мақсаттық функцияның графигін қимайды, оның төменгі жағынан өтеді. Қажетті дәлдікке қол жеткізілгенде есептеу тоқтатылады. 2.1-кестеде есептеу нәтижелері келтірілген:

1.2-кесте – (1.19) функциясының глобалдық минимумына жуықтау қадамдары

	α	Көмекші функция мәндері	$y = \alpha$ жазықтығының функция графигіне қатысты орналасуы	$\hat{\alpha}$ глобалдық минимумы жатқан аралық
1	$\alpha = 0$	$g_m(0) = 0$	$y = 0$ жазықтығы функция графигін жанады немесе одан төмен өтеді	$\hat{\alpha} \in [0; +\infty)$
2	$\alpha = 5$	$g_m(5) > 0$	$y = 5$ жазықтығы функция графигін қияды немесе одан жоғары өтеді	$\hat{\alpha} \in [0; 5]$
3	$\alpha = 2,5$	$g_m(2,5) > 0$	$y = 2,5$ горизонталь жазықтығы функция графигін қияды немесе одан жоғары өтеді	$\hat{\alpha} \in [0; 2,5]$
4	$\alpha = 1,25$	$g_m(1,25) > 0$	$y = 1,25$ жазықтығы функцияның графигін қияды немесе одан жоғары өтеді	$\hat{\alpha} \in [0; 1,25]$

	$\alpha = 0,000001$	$g_m(0,000001) > 0$	$y = 0,000001$ жазықтығы функцияның графигін қияды немесе одан жоғары өтеді	Берілген дәлдік орындалды: $\hat{\alpha} \in [0; 0,000001]$

Растрингін функциясының жалғыз глобалдық минимумы бар және ол $\hat{\alpha} = 0$ мәніне тең.

Жоғарыда қарастырылған мысалдарда глобалдық минимумның мәні $\varepsilon \geq 10^{-6}$ дәлдікпен 24 итерацияда анықталды. Глобалдық минимум мәні ретінде $\hat{\alpha} \in [0; 0,000001]$ аралықтың сол жақ ұшы алынды.

1.3-мысал. 1.2 мысалда берілген Растрингін функциясының глобалдық минимумның координаталарын табу керек. Глобалдық минимумның координаталарын табу үшін глобалдық минимумның мәні ретінде $\hat{\alpha} \approx 0,000001$ табылған аралықтың оң жақ ұшын аламыз. Өйткені ол көмекші функция оң мәнге ие болатындай α -мен анықталады.

Глобалдық минимумның координаталарын мақсаттық функцияның $-5,12 \leq x, y \leq 5,12$ анықталу жиынынан іздейік. Берілген $[-5,12; 5,12]_x \times [-5,12; 5,12]_y$ квадратын тең төрт бөлікке бөліп, келесі квадраттарды аламыз: $[-5,12; 0]_x \times [-5,12; 0]_y$, $[-5,12; 0]_x \times [0; 5,12]_y$, $[0; 5,12]_x \times [0; 5,12]_y$ және $[0; 5,12]_x \times [-5,12; 0]_y$. Осы квадраттар үшін төрт өзгертілген көмекші функция құрамыз. Яғни, (1.21) көмекші функцияға $\hat{\alpha}$ мәнін береміз және оны табылған кіші квадратта интегралдаймыз. Бірінші квадрат бойынша алынған өзгертілген көмекші функция мына түрде болады:

$$\begin{aligned}
 g_m(F, \hat{\alpha}) &= \\
 &= \int_{-5,12}^0 \int_{-5,12}^0 [|20 + x^2 + y^2 - 10 \cos(2\pi x) - 10 \cos(2\pi y) - 0,000001| - \\
 &\quad - (20 + x^2 + y^2 - 10 \cos(2\pi x) - 10 \cos(2\pi y) - 0,000001)]^6 dx dy. \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

Оның мәні – оң сан. Бұл мақсаттық функция осы квадратта өзінің ең кіші мәніне ие болатынын білдіреді. Қалған квадраттар бойынша қарастырмауға болады. Енді $[-5,12; 0]_x \times [-5,12; 0]_y$ бірінші квадратты төртке бөлеміз. Алынған кіші квадраттар үшін өзгертілген көмекші функцияларды есептейміз. Аналогия бойынша осы процесті жалғастырамыз, яғни өзгертілген көмекші функцияның мәні оң болатын квадраттарды тандап, оны қақ бөлеміз. Сөйтіп, глобалдық минимум жатқан квадрат анықталады. Растринг функциясының глобалдық минимумының координаталарын табуда алынған аргумент пен көмекші функция мәндері 1.3-кестеде көрсетілген.

1.3-кесте – (1.19) Растринг функциясының глобалдық минимумының координаталарын табу қадамдары көрсетілген

Интегралдау жиыны	Өзгертілген көмекші функцияның мәні	Келесі қадам
$[-5,12; 5,12]_x \times [-5,12; 5,12]_y$	$g_m(F, \hat{\alpha}) > 0$	Қаралған жиынды төртке бөлеміз
$[-5,12; 0]_x \times [-5,12; 0]_y$	$g_m(F, \hat{\alpha}) > 0$	Қаралған жиынды төртке бөлеміз
$[-5,12; -2,56]_x \times [-5,12; -2,56]_y$	$g_m(F, \hat{\alpha}) = 0$	Бұл бөлікті қарастырмаймыз, келесі квадратқа өтеміз
$[-5,12; -2,56]_x \times [-2,56; 0]_y$	$g_m(F, \hat{\alpha}) = 0$	Бұл бөлікті қарастырмаймыз, келесі квадратқа өтеміз
$[-2,56; 0]_x \times [-2,56; 0]_y$	$g_m(F, \hat{\alpha}) > 0$	Қаралған жиынды төртке бөлеміз
...
$[-0.0000010]_x \times [-0.0000010]_y$	$g_m(F, \hat{\alpha}) > 0$	Қажетті дәлдік алынды. Глобалдық минимумды іздеуді тоқтатамыз

Глобалдық минимумның координаталарын іздеу қадамдары $\varepsilon \leq 10^{-6}$ дәлдігіне қол жеткен кезде алгоритм тоқтайды.

Глобалдық минимум нүктесінің координаталары соңғы квадраттың ортасы болады: $\hat{x} \approx \frac{0+(-0,000001)}{2} \approx -0,0000005$ және $\hat{y} \approx \frac{0+(-0,000001)}{2} \approx -0,0000005$.

Сонымен, глобалдық минимумның жуық мәні мен координаталарын таптық: $f(0; 0) \approx 0$. Олар Растринг функциясының этолонды мәндерімен сәйкес келеді.

Ескеретін жәйт, қарастырылған мысалдарда нәтижелері $\varepsilon \leq 10^{-6}$ дәлдігімен алынды. Олар этолонды мәндермен сәйкес келді. Сипатталған алгоритм артық жұмыс жасамай, бірден глобалдық минимум мәніне жинақталады. Қолданылған әдістің ерекшелігі – алдымен мақсаттық функцияның глобалдық минимумы табылады, содан соң оның координаталары ізделеді. Мұндай процесс есептеулер санын күрт азайтуға ықпал етеді.

2 КӨМЕКШІ ФУНКЦИЯНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГЛОБАЛДЫҚ МИНИМУМ ШАРТТАРЫ

2.1 Көмекші функцияның негізгі қасиеттері

$E \in \mathbb{R}^n$ – n -өлшемді Евклид кеңістігіндегі тұйық жиын.

$F: E \rightarrow \mathbb{R}$ үзіліссіз функция, яғни $E(F, \alpha) = \{x \in E | F(x) \leq \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ жиыны $\forall \alpha$ үшін өлшенімді болсын.

1.1 бөлімінде қойылған негізгі мәселені шешу, яғни

$$\hat{\alpha} = \text{globmin}_{x \in E} F(x) \quad (2.1)$$

табу үшін маңызды рөл атқаратын, еселі интеграл арқылы өрнектелген бір айнымалылы

$$g_m(F, \alpha) = \int_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu, \quad m \in \mathbb{N}, m > 1, \quad (2.2)$$

көмекші функцияның негізгі қасиеттерін зерттейміз.

1.1-лемма. Көмекші функция мынадай қасиеттерге ие:

- 1) $\forall \alpha$ үшін $g_m(F, \alpha) \geq 0$;
- 2) $\forall C, C \geq \alpha$, үшін $g_m(C, \alpha) = 0$;
- 3) $\forall k \in \mathbb{R}, k \geq 0$ және $\forall \alpha, \alpha \geq \hat{\alpha}$, үшін $g_m(kF, k\alpha) = k^m g_m(F, \alpha)$;
- 4) $\forall k \in \mathbb{R}, k \geq 0$ и $\forall \alpha, \alpha \geq \hat{\alpha}$, үшін $g_m(k + F, k + \alpha) = g_m(F, \alpha)$;
- 5) $\forall \alpha, \alpha \geq \hat{\alpha}$, үшін $g_m(\alpha + F, \alpha) = g_m(F, 0)$;
- 6) $\forall \alpha, \alpha \geq 0$, үшін $g_m(\alpha F, \alpha) = \alpha^m g_m(F, 1)$.

Дәлелдеуі.

- 1) $E(F, \alpha) = \{x \in E | F(x) \leq \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ жиыны үшін

$$\begin{aligned} g_m(F, \alpha) &= \int_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu = \\ &= \int_{E \setminus E(F, \alpha)} [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu + \int_{E(F, \alpha)} [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu = \\ &= \int_{E \setminus E(F, \alpha)} [(F(x) - \alpha) - F(x) + \alpha]^m d\mu + \int_{E(F, \alpha)} [-(F(x) - \alpha) - F(x) + \alpha]^m d\mu = \\ &= \int_{E(F, \alpha)} [2(\alpha - F(x))]^m d\mu \geq 0. \end{aligned}$$

- 2) $g_m(C, \alpha) = \int_E [|C - \alpha| - C + \alpha]^m d\mu = \int_E [(C - \alpha) - C + \alpha]^m d\mu = 0$.

$$3) \quad g_m(kF, k\alpha) = \int_E [|kF(x) - k\alpha| - kF(x) + k\alpha]^m d\mu =$$

$$= k^m \int_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu = k^m g_m(F, \alpha).$$

$$4) \quad g_m(k + F, k + \alpha) = \int_E [|k + F(x) - k - \alpha| - k - F(x) + k + \alpha]^m d\mu =$$

$$= \int_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu = g_m(F, \alpha).$$

$$5) \quad g_m(\alpha + F, \alpha) = \int_E [|\alpha + F(x) - \alpha| - \alpha - F(x) + \alpha]^m d\mu =$$

$$= \int_E [|F(x) - 0| - F(x) + 0]^m d\mu = g_m(F, 0).$$

$$6) \quad g_m(\alpha F, \alpha) = \int_E [|\alpha F(x) - \alpha| - \alpha F(x) + \alpha]^m d\mu =$$

$$= \alpha^m \int_E [|F(x) - 1| - F(x) + 1]^m d\mu = \alpha^m g_m(F, 1).$$

1-лемма дәлелденді.

2.1-теорема. $g_m(F, \alpha)$ функциясы $\forall \alpha_0 \geq \hat{\alpha}$ үшін кез-келген $(\alpha_0, \alpha_0 + h)$, $h > 0$ шектелген аралығында бірқалыпты үзіліссіз, мұндағы $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

Дәлелдеуі. $\alpha_1 > \alpha_2 \geq \alpha_0$ шарттары орындалатындай кез-келген α_1 және α_2 таңдап, айырманың модулін бағалайық:

$$\begin{aligned} & |g_m(F, \alpha_1) - g_m(F, \alpha_2)| = \\ & = \left| \int_E [|F(x) - \alpha_1| - F(x) + \alpha_1]^m d\mu - \int_E [|F(x) - \alpha_2| - F(x) + \alpha_2]^m d\mu \right| = \\ & = \left| \int_{E(F, \alpha_1)} [2(\alpha_1 - F(x))]^m d\mu - \int_{E(F, \alpha_2)} [2(\alpha_2 - F(x))]^m d\mu \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{E(F, \alpha_2)} [2(\alpha_1 - F(x))]^m d\mu + \int_{E(F, \alpha_1) \setminus E(F, \alpha_2)} [2(\alpha_1 - F(x))]^m d\mu - \right. \\
&\left. - \int_{E(F, \alpha_2)} [2(\alpha_2 - F(x))]^m d\mu \right| \leq \left| \int_{E(F, \alpha_2)} [2(\alpha_1 - \alpha_2) \left((2(\alpha_1 - F(x)))^{m-1} + \right. \right. \\
&\left. \left. + (2(\alpha_1 - F(x)))^{m-2} (2(\alpha_2 - F(x))) + \dots + (2(\alpha_2 - F(x)))^{m-1} \right) \right] d\mu \right| + \\
&\quad + \left| \int_{E(F, \alpha_1) \setminus E(F, \alpha_2)} [2(\alpha_1 - F(x))]^m d\mu \right| = J_1 + J_2. \\
J_1 &= \left| \int_{E(F, \alpha_2)} [2(\alpha_1 - \alpha_2) \left((2(\alpha_1 - F(x)))^{m-1} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2(\alpha_1 - F(x)))^{m-2} (2(\alpha_2 - F(x))) + \dots + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left((2(\alpha_1 - F(x))) \right) \left((2(\alpha_2 - F(x)))^{m-2} + (2(\alpha_2 - F(x)))^{m-1} \right) \right) \right] d\mu \right| \\
J_2 &= \left| \int_{E(F, \alpha_1) \setminus E(F, \alpha_2)} [2(\alpha_1 - F(x))]^m d\mu \right|
\end{aligned}$$

$E(F, \alpha_2)$ жиынында келесі теңсіздіктер орындалатыны анық:

$$\left(2(\alpha_1 - F(x)) \right)^{m-1} \leq \left(2(\alpha_1 - \alpha_0) \right)^{m-1} = K,$$

$$\left(2(\alpha_2 - F(x)) \right)^{m-1} \leq \left(2(\alpha_1 - \alpha_0) \right)^{m-1} = K,$$

ал $E(F, \alpha_1) \setminus E(F, \alpha_2)$ жиынында:

$$\left(2(\alpha_1 - F(x)) \right)^m = \left(2(\alpha_1 - F(x)) \right)^{m-1} 2(\alpha_1 - F(x)) \leq 2K|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Сондықтан төмендегі бағаларды алу қиын емес:

$$J_1 \leq 2mK|\alpha_1 - \alpha_2|\mu(E(F, \alpha_2)) \leq 2mK|\alpha_1 - \alpha_2|\mu(E) = B_1|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

мұндағы $B_1 = 2mK\mu(E)$;

$$\begin{aligned} J_2 &\leq 2K|\alpha_1 - \alpha_2|(\mu(E(F, \alpha_1)) - \mu(E(F, \alpha_2))) = 2K|\alpha_1 - \alpha_2|\mu(E(F, \alpha_1)) \\ &\leq 2K|\alpha_1 - \alpha_2|\mu(E) \leq B_2|\alpha_1 - \alpha_2|, \end{aligned}$$

мұндағы $B_2 = 2K\mu(E)$. Олай болса, кез-келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\delta = \frac{\varepsilon}{B_1 + B_2} = \frac{\varepsilon}{2mK\mu(E) - 2K\mu(E)} = \frac{\varepsilon}{2K\mu(E)(m - 1)},$$

мұндағы $m > 1$, деп алу жеткілікті. Сонда $|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез-келген α_1, α_2 сандары үшін мына теңсіздік орындалады:

$$|g_m(F, \alpha_1) - g_m(F, \alpha_2)| = J_1 + J_2 \leq (B_1 + B_2)|\alpha_1 - \alpha_2| < \frac{(B_1 + B_2)\varepsilon}{(B_1 + B_2)} = \varepsilon.$$

Көмекші функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі дәлелденді.

2.2-теорема. $g_m(F, \alpha)$ көмекші функция $(\hat{\alpha}; +\infty)$ аралығындағы әрбір α нүктесінде дифференциалданады, мұндағы $\hat{\alpha} = \text{globmin}_E F(x)$.

Дәлелдеуі. $\alpha + h > \alpha > \hat{\alpha}$ болсын. Функцияның өсімшесін қарастырайық:

$$\begin{aligned} &g_m(F, \alpha + h) - g_m(F, \alpha) = \\ &= \int_E [|F(x) - (\alpha + h)| - F(x) + (\alpha + h)]^m d\mu - \\ &\quad - \int_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu = \\ &= \int_{E(F, \alpha+h)} [2(\alpha + h - F(x))]^m d\mu - \int_{E(F, \alpha)} [2(\alpha - F(x))]^m d\mu = \\ &= \int_{E(F, \alpha)} [2(\alpha + h - F(x))]^m d\mu + \int_{E(F, \alpha+h) \setminus E(F, \alpha)} [2(\alpha + h - F(x))]^m d\mu - \\ &\quad - \int_{E(F, \alpha)} [2(\alpha - F(x))]^m d\mu = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{E(F,\alpha)} \left[2h \left((\alpha + h - F(x))^{m-1} + (\alpha + h - F(x))^{m-2} (\alpha - F(x)) + \dots + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\alpha - F(x))^{m-2} (\alpha + h - F(x)) + (\alpha - F(x))^{m-1} \right) \right] d\mu + \\
&\quad + \int_{E(F,\alpha+h) \setminus E(F,\alpha)} [2(\alpha + h - F(x))]^m d\mu = I_1 h + I_2,
\end{aligned}$$

мұндағы

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_{E(F,\alpha)} \left[2 \left((\alpha + h - F(x))^{m-1} + (\alpha + h - F(x))^{m-2} (\alpha - F(x)) + \dots + \right. \right. \\
\left. \left. + (\alpha - F(x))^{m-2} (\alpha + h - F(x)) + (\alpha - F(x))^{m-1} \right) \right] d\mu,
\end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{E(F,\alpha+h) \setminus E(F,\alpha)} [2(\alpha + h - F(x))]^m d\mu.$$

Олай болса,

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_1 = 2 \int_{E(F,\alpha)} m [2(\alpha - F(x))]^{m-1} d\mu = 2m g_{m-1}(F, \alpha).$$

Ал $h \rightarrow 0$ -да

$$I_2 = \int_{E(F,\alpha+h) \setminus E(F,\alpha)} [2(\alpha + h - F(x))]^m d\mu$$

ақырсыз аз шама болатыны байқалады, себебі интеграл астындағы квадрат жақша ішіндегі өрнек $2h$ санынан аспайды ($F(x) \leq \alpha$) және μ өлшемінің үзіліссіз болуынан

$$0 \leq I_2 \leq (2h)^m \left(\mu(E(F, \alpha + h)) - \mu(E(F, \alpha)) \right) \rightarrow 0$$

шығады. Демек

$$\frac{dg_m}{d\alpha} = 2m g_{m-1}(F, \alpha).$$

Теорема дәлелденді.

2.1-салдар. Кез-келген натурал $m > 1$ саны үшін көмекші функцияның m ретті туындысы

$$\frac{d^m g_m}{d\alpha^m} = (2)^m m! \mu(E(F, \alpha)).$$

2.3-теорема. $g_m(F, \alpha)$ функциясы $(\hat{\alpha}, \infty)$ аралығында қатаң дөңес, мұндағы $m \in N, m > 1$.

Дәлелдеуі. $\alpha_1 > \alpha_2 > \hat{\alpha}$ орындалатындай α_1, α_2 сандарын қалауымызша таңдайық. Кез-келген $u_1, u_2 \geq 0$ үшін $(u_1 + u_2)^m < 2^{m-1}(u_1^m + u_2^m)$, $m \in N, m > 1$ (Коши) теңсіздігін қолданып, келесі теңсіздіктің дұрыстығын дәлелдейміз:

$$g_m\left(F, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(g_m(F, \alpha_1) + g_m(F, \alpha_2)).$$

Соңғы теңсіздіктің сол жағын көмекші функцияның анықтамасы бойынша ашып, түрлендірсек:

$$\begin{aligned} g_m\left(F, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) &= \int_E \left[\left| F(x) - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right| - F(x) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right]^m d\mu = \\ &= \frac{1}{2^m} \int_E [|2F(x) - (\alpha_1 + \alpha_2)| - 2F(x) + (\alpha_1 + \alpha_2)]^m d\mu = \\ &= \frac{1}{2^m} \int_E [|F(x) - \alpha_1 + F(x) - \alpha_2| - (F(x) - \alpha_1) - (F(x) - \alpha_2)]^m d\mu \leq \\ &\leq \frac{1}{2^m} \int_E [(|F(x) - \alpha_1| - F(x) + \alpha_1) + (|F(x) - \alpha_2| - F(x) + \alpha_2)]^m d\mu = I. \end{aligned}$$

1-леммадағы 1) тұжырымға сәйкес интеграл таңбасы астындағы жай жақшалар ішіндегі өрнектер теріс емес, сондықтан жоғарыдағы Коши теңсіздігіне сүйеніп, келесі бағаларды аламыз:

$$\begin{aligned} I &< \\ &< \frac{1}{2^m} \int_E 2^{m-1} [(|F(x) - \alpha_1| - F(x) + \alpha_1)^m + \\ &\quad + (|F(x) - \alpha_2| - F(x) + \alpha_2)^m] d\mu = \\ &= \frac{1}{2} (g_m(F, \alpha_1) + g_m(F, \alpha_2)), \end{aligned}$$

яғни

$$g_m\left(F, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(g_m(F, \alpha_1) + g_m(F, \alpha_2)).$$

Теорема дәлелденді.

2.4-теорема. $g_m(F, \alpha)$ функциясы $(\hat{\alpha}, +\infty)$ аралығында өспелі.

Дәлелдеуі. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in (\hat{\alpha}, +\infty), \alpha_1 < \alpha_2$, болсын.

$g_m(F, \alpha_1) < g_m(F, \alpha_2)$ теңсіздігі орындалатынын көрсетейік.

$$\begin{aligned}
 g_m(F, \alpha_2) - g_m(F, \alpha_1) &= \int_E [|F(x) - \alpha_2| - (F(x) - \alpha_2)]^m d\mu - \\
 &\quad - \int_E [|F(x) - \alpha_1| - (F(x) - \alpha_1)]^m d\mu = \\
 &= \int_{E/E(F, \alpha_2)} [|F(x) - \alpha_2| - (F(x) - \alpha_2)]^m d\mu \\
 &\quad + \int_{E(F, \alpha_2)} [|F(x) - \alpha_2| - (F(x) - \alpha_2)]^m d\mu - \\
 &\quad - \int_{E/E(F, \alpha_1)} [|F(x) - \alpha_1| - (F(x) - \alpha_1)]^m d\mu \\
 &\quad - \int_{E(F, \alpha_1)} [|F(x) - \alpha_1| - (F(x) - \alpha_1)]^m d\mu = \\
 &= \int_{E(F, \alpha_2)} 2^m \cdot [\alpha_2 - F(x)]^m d\mu - \int_{E(F, \alpha_1)} 2^m \cdot [\alpha_1 - F(x)]^m d\mu = \\
 &= \int_{E(F, \alpha_2)/E(F, \alpha_1)} 2^m \cdot [\alpha_2 - F(x)]^m d\mu + \int_{E(F, \alpha_1)} 2^m \cdot [\alpha_2 - F(x)]^m d\mu - \\
 &\quad - \int_{E(F, \alpha_1)} 2^m \cdot [\alpha_1 - F(x)]^m d\mu.
 \end{aligned}$$

Аралықта тек оң мәндер қабылдайтын функцияның осы аралық бойынша интегралы да оң сан болатындықтан:

$$\int_{E(F, \alpha_2)/E(F, \alpha_1)} 2^m \cdot [\alpha_2 - F(x)]^m d\mu > 0$$

және

$$\begin{aligned}
& \int_{E(F, \alpha_1)} 2^m \cdot [\alpha_2 - F(x)]^m d\mu - \int_{E(F, \alpha_1)} 2^m \cdot [\alpha_1 - F(x)]^m d\mu = \\
& = 2^m \int_{E(F, \alpha_1)} ([\alpha_2 - F(x)]^m - [\alpha_1 - F(x)]^m) d\mu = \\
& = 2^m \int_{E(F, \alpha_1)} (\alpha_2 - \alpha_1) [(\alpha_2 - F(x))^{m-1} + (\alpha_2 - F(x))^{m-2} (\alpha_1 - F(x)) + \\
& + \dots + (\alpha_2 - F(x)) (\alpha_1 - F(x))^{m-2} + (\alpha_1 - F(x))^{m-1}] d\mu > \\
& > 2^m \int_{E(F, \alpha_1)} (\alpha_2 - \alpha_1) [(\alpha_1 - F(x))^{m-1} + (\alpha_1 - F(x))^{m-1} + \\
& + \dots + (\alpha_1 - F(x))^{m-1} + (\alpha_1 - F(x))^{m-1}] d\mu = \\
& = 2^m m \int_{E(F, \alpha_1)} (\alpha_2 - \alpha_1) (\alpha_1 - F(x))^{m-1} d\mu > 0,
\end{aligned}$$

өйткені $\alpha_2 > \alpha_1$.

2.5-теорема. Егер $\text{glob min}_E F(x) = \hat{\alpha}$, $r > m$, $r, m \in \mathbb{N}$, $r > 1$, $m > 1$ болса, онда

А) $\forall \alpha$, $\alpha \leq \hat{\alpha}$, үшін $g_r(F, \alpha) = g_m(F, \alpha) = 0$;

Ә) $\forall \alpha$, $\hat{\alpha} < \alpha \leq \hat{\alpha} + \frac{1}{2}$, үшін $g_r(F, \alpha) \leq g_m(F, \alpha)$.

Дәлелдеуі. А) Глобалдық минимум мақсатты функцияның барлық басқа мәндерінен кіші: $\hat{\alpha} = F(\hat{x}) \leq F(x)$. $\forall \alpha$, $\alpha \leq F(\hat{x})$, үшін көмекші функциядағы модуль оң мәнмен ашылады:

$$\begin{aligned}
g_r(F, \alpha) &= \int_E [|F(x) - \alpha| - (F(x) - \alpha)]^r d\mu = \\
&= \int_E [F(x) - \alpha - F(x) + \alpha]^r d\mu = 0.
\end{aligned}$$

Тура осылайша, $g_m(F, \alpha) = 0$ орындалады. Демек, $\alpha \leq \hat{\alpha}$ болғанда мәні үшін нөлге тең.

Ә) Ал $\forall \alpha \in (\hat{\alpha}, +\infty)$ үшін, яғни $\alpha > F(\hat{x})$ болғанда модуль теріс таңбамен ашылады. Сондықтан

$$\begin{aligned}
g_r(F, \alpha) &= \int_E [|F(x) - \alpha| - (F(x) - \alpha)]^r d\mu = \\
&= \int_E [-F(x) + \alpha - F(x) + \alpha]^r d\mu = \int_E [2(\alpha - F(x))]^r d\mu =
\end{aligned}$$

$$= 2^r \int_E [\alpha - F(x)]^r d\mu > 0$$

және аналогия бойынша $g_m(F, \alpha) > 0$ орындалады, яғни $\forall \alpha, \alpha > \hat{\alpha}$, үшін көмекші функцияның мәні оң.

Енді $\alpha > \hat{\alpha}$ болғанда $g_r(F, \alpha)$ және $g_m(F, \alpha)$ функцияларының айырмасын түрлендірейік:

$$\begin{aligned} g_r(F, \alpha) - g_m(F, \alpha) &= \\ &= \int_E [|\alpha - F(x)| - (F(x) - \alpha)]^r d\mu - \int_E [|\alpha - F(x)| - (F(x) - \alpha)]^m d\mu = \\ &= \int_{E/E(F, \alpha)} [|\alpha - F(x)| - (F(x) - \alpha)]^r d\mu + \int_{E(F, \alpha)} [|\alpha - F(x)| - (F(x) - \alpha)]^r d\mu - \\ &\quad - \int_{E/E(F, \alpha)} [|\alpha - F(x)| - (F(x) - \alpha)]^m d\mu - \\ &\quad - \int_{E(F, \alpha)} [|\alpha - F(x)| - (F(x) - \alpha)]^m d\mu = \\ &= \int_{E(F, \alpha)} [|\alpha - F(x)| - (F(x) - \alpha)]^r d\mu - \int_{E(F, \alpha)} [|\alpha - F(x)| - (F(x) - \alpha)]^m d\mu = \\ &= \int_{E(F, \alpha)} 2^r \cdot [\alpha - F(x)]^r d\mu - \int_{E(F, \alpha)} 2^m \cdot [\alpha - F(x)]^m d\mu = \\ &= \int_{E(F, \alpha)} (2^r \cdot [\alpha - F(x)]^r - 2^m \cdot [\alpha - F(x)]^m) d\mu. \end{aligned}$$

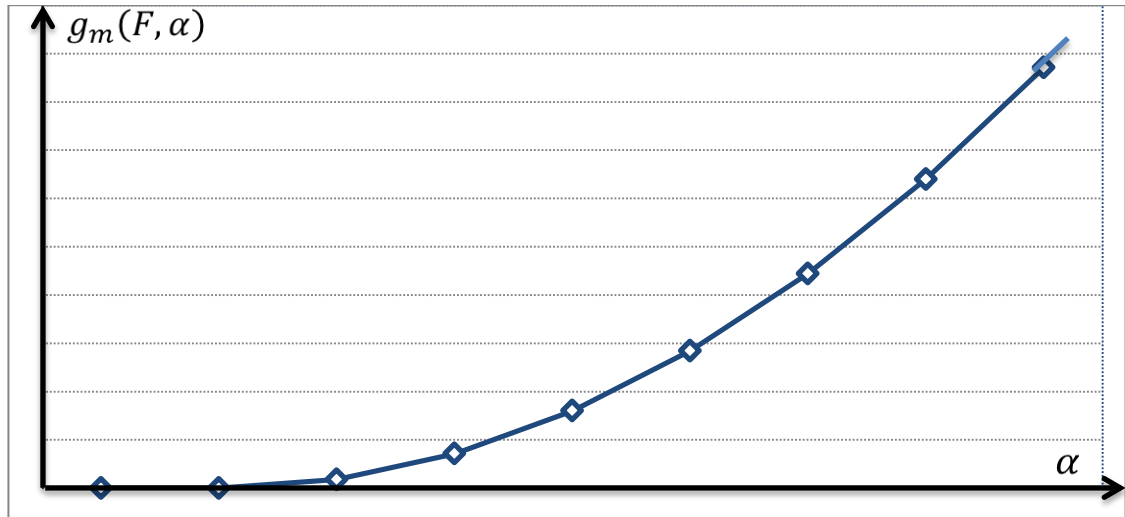
Сонымен

$$g_r(F, \alpha) - g_m(F, \alpha) = \int_{E(F, \alpha)} (2^r \cdot [\alpha - F(x)]^r - 2^m \cdot [\alpha - F(x)]^m) d\mu. \quad (2.3)$$

Интегралдың қасиетін ескеріп: Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде таңбасын сақтаса, онда $\int_a^b f(x)dx$ интегралы $f(x)$ функциясымен таңбалас болады, яғни егер $\forall x \in [a, b]$ үшін $f(x) > 0$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Егер $\hat{\alpha} < \alpha \leq \hat{\alpha} + \frac{1}{2}$, $r > m$ болса, онда $\alpha - F(x) \leq \frac{1}{2}$ және $2^r \cdot [\alpha - F(x)]^r - 2^m \cdot [\alpha - F(x)]^m \leq 0$, себебі $r > m$. Демек, (2.3) өрнегіндегі интеграл теріс мәнге ие болады $g_r(F, \alpha) \leq g_m(F, \alpha)$.

Жоғарыда дәлелденген қасиеттерге сүйеніп, көмекші функция графигінің сұлбасын 2.1-суретте кескінделген:



2.1-сурет – Көмекші функция графигінің сұлбасы

2.2 Глобалдық минимумның қажетті және жеткілікті шарттары

Мақсаттық функцияны көмекші функцияға түрлендіріп, қасиеттері зерттелді. Мақсаттық функцияның глобалдық минимумының көмекші функцияға қатысын қарастырайық.

2.6-теорема. Егер $\text{glob min}_E F = \hat{\alpha}$, болса, онда

$$g_m(F, \hat{\alpha}) = 0. \quad (2.4)$$

Дәлелдеуі. $\hat{\alpha}$ – глобалдық минимум мәні болсын, онда кез-келген $x \in E$ үшін $F(x) \geq \hat{\alpha}$ орындалады. Олай болса, 2.5-теорема бойынша

$$\begin{aligned} g_m(F, \hat{\alpha}) &= \\ &= \int_E [|F(x) - \hat{\alpha}| - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = \\ &= \int_E [(F(x) - \hat{\alpha}) - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = 0. \end{aligned}$$

2.2-салдар. $F(x)$ мақсаттық функцияның глобалдық минимумы $g_m(F, \alpha)$ көмегіші функцияның нөлі болады.

2.7-теорема. Егер $\max_{\alpha} \{\alpha \in \mathbb{R}: g_m(F, \alpha) = 0\} = \hat{\alpha}$ болса, онда $\text{glob min}_E F = \hat{\alpha}$.

Дәлелдеуі. Қарсы жору әдісін қолданайық. $\hat{\alpha} = \max_{\alpha} \{\alpha \in \mathbb{R}: g_m(F, \alpha) = 0\}$ және F функциясының глобалдық минимумы $\tilde{\alpha}$ -ға тең, бірақ $\tilde{\alpha} \neq \hat{\alpha}$, болсын. Егер $2\beta = \hat{\alpha} - \tilde{\alpha}$ және $\beta > 0$ болса, онда $E(F, \tilde{\alpha})$ жиыны $E(F, \hat{\alpha})$ жиынының ішкі жиыны болады. Сондықтан $\mu(E(F, \hat{\alpha})) > \mu(E(F, \tilde{\alpha}))$. Бұдан шығатыны:

$$\begin{aligned} g_m(F, \hat{\alpha}) &= \\ &= \int_E [|F(x) - \hat{\alpha}| - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = \int_{E \setminus E(F, \hat{\alpha})} [|F(x) - \hat{\alpha}| - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu + \\ &+ \int_{E(F, \hat{\alpha})} [|F(x) - \hat{\alpha}| - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = \int_{E \setminus E(F, \hat{\alpha})} [(F(x) - \hat{\alpha}) - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu + \\ &+ \int_{E(F, \hat{\alpha})} [-(F(x) - \hat{\alpha}) - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = \int_{E(F, \hat{\alpha})} [2(\hat{\alpha} - F(x))]^m d\mu. \end{aligned}$$

Олай болса,

$$g_m(F, \hat{\alpha}) = \int_{E(F, \hat{\alpha})} [2(\hat{\alpha} - F(x))]^m d\mu. \quad (2.5)$$

$\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} + 2\beta$ болғандықтан және $\hat{\alpha} > \tilde{\alpha} + \beta > \tilde{\alpha}$. Онда:
 $E(F, \hat{\alpha}) = \{x \in E | F(x) \leq \hat{\alpha}\}$, $E(F, \tilde{\alpha} + \beta) = \{x \in E | F(x) \leq \tilde{\alpha} + \beta\}$ және
 $E(F, \tilde{\alpha}) = \{x \in E | F(x) \leq \tilde{\alpha}\}$ жиындары үшін

$$E(F, \tilde{\alpha}) \subset E(F, \tilde{\alpha} + \beta) \subset E(F, \hat{\alpha})$$

орынды.

Егер $\tilde{\alpha} < F(x) \leq \tilde{\alpha} + \beta < \hat{\alpha}$ болса, онда келесі теңсіздіктің орындалатынына көз жеткігу қиын емес: $\hat{\alpha} - F(x) > \hat{\alpha} - (\tilde{\alpha} + \beta) = \beta$. (2.5) интегралын түрлендіріп, төменнен баға аламыз:

$$\begin{aligned} g_m(F, \hat{\alpha}) &= \\ &= \int_{E(F, \hat{\alpha})} [2(\hat{\alpha} - F(x))]^m d\mu = \int_{E(F, \hat{\alpha})/E(F, \tilde{\alpha} + \beta)} [2(\hat{\alpha} - F(x))]^m d\mu + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{E(F, \tilde{\alpha} + \beta)} [2(\hat{\alpha} - F(x))]^m d\mu \geq \int_{E(F, \tilde{\alpha} + \beta)} [2(\hat{\alpha} - F(x))]^m d\mu > \\
& > [2\beta]^m \int_{E(F, \tilde{\alpha} + \beta)} d\mu > [2\beta]^m \mu(E(F, \tilde{\alpha} + \beta)) > 0.
\end{aligned}$$

Соңғы теңсіздік (2.4) теңдігіне қайшы келеді. Демек, жоруымыз – дұрыс емес. Теорема дәлелденді.

2.3-салдар. $g_m(F, \alpha)$ көмекші функциясының ең үлкен нөлі F мақсаттық функциясының глобалдық минимумының дәл мәніне тең.

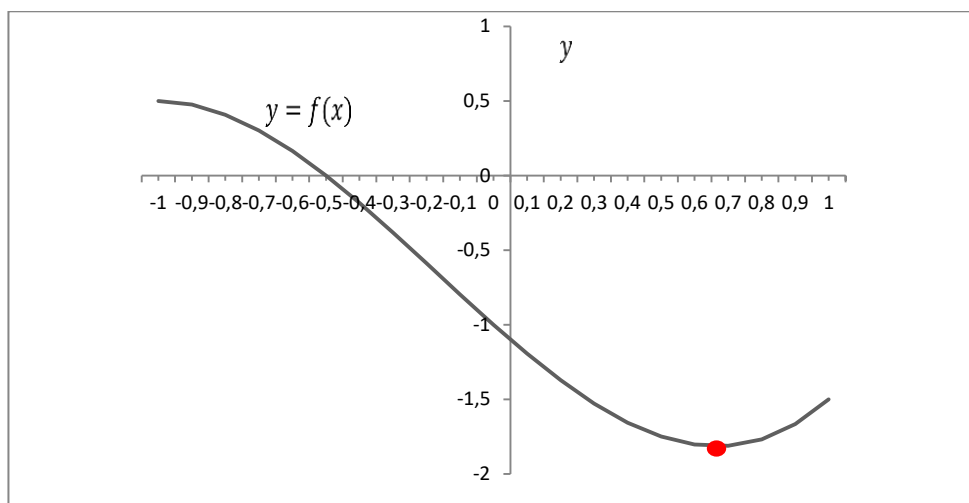
2.3 Бірнеше айнымалылы функцияның глобалдық минимумын көмекші функцияның ең үлкен нөлі ретінде анықтау мысалдары

Осы және кейінгі бөлімдерде берілген мақсаттық функцияның глобалдық минимумын анықтау үшін көмекші функция әдісін қолданудың тиімділігін көрнекі көрсету мақсатында әр түрлі негізде құрылған бірнеше айнымалылы типтік тесттік функциялар қарастырылады. Оларға сәйкес көмекші функциялардың қасиеттерін зерттеу, графиктерін стандартты Matlab, Excel бағдарламалары бойынша кескіндеу арқылы салыстырмалы талқылаулар және тиісті қорытындылар жасалады.

2.1-мысал. Көмекші функция әдісін қолданудың көрнекілігі үшін алдымен мақсаттық функцияны қарапайым етіп, яғни оның глобалдық минимумын аналитикалық жолмен де, көмекші функция арқылы да анықтап, нәтижелерін салыстыру мүмкін болатындай етіп таңдайық:

$$F_1(x) = x^3 + 0.5(x - 2)^2 - 3. \quad (2.6)$$

Бұл функцияның $[-1; 1]$ кесіндісіндегі глобалдық минимумын аналитикалық жолмен тапсақ: $F_1\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{49}{27} \approx -1,8148$. Берілген (2.5) функциясының графигі 2.2-суретте көрсетілген.

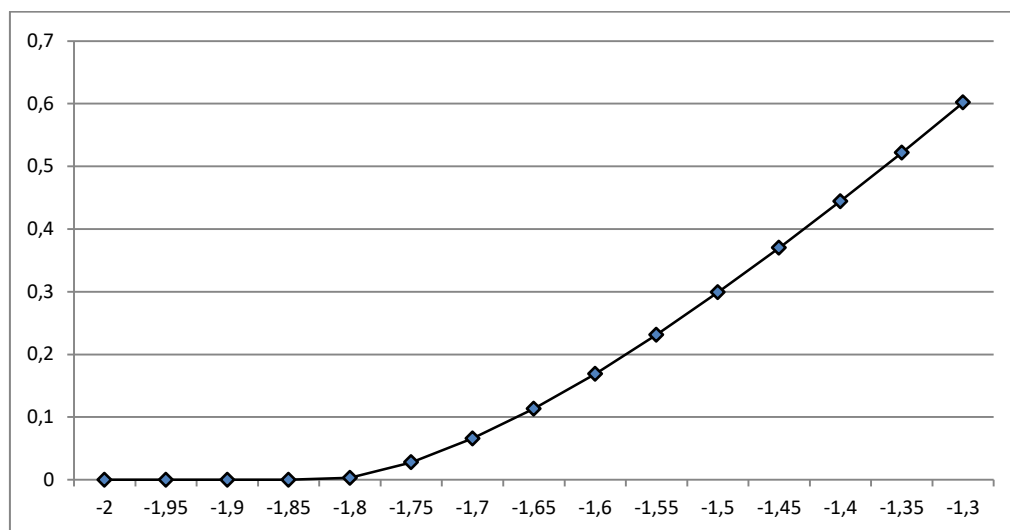


2.2-сурет – (2.6) функциясының графигі

$F_1(x)$ функциясының глобалдық минимумын құрылған әдіспен анықтау үшін көмекші функция құрамыз:

$$g_m(F_1, \alpha) = \int_{-1}^1 [|x^3 + 0.5(x - 2)^2 - 3 - \alpha| - (x^3 + 0.5(x - 2)^2 - 3 - \alpha)]^5 dx. \quad (2.7)$$

(2.6) функциясының графигі 2.3-суретте берілген.



2.3-сурет – (2.7) функциясының графигі

2.5-теоремасында дәлелденгендей, (2.6) мақсаттық функцияның глобалдық минимумының мәні оған сәйкес құрылған (2.7) көмекші функцияның ең үлкен нөліне тең болады. Көмекші функцияның ең үлкен нөлін қажет бөлу әдісін қолданып, Visual Studio ортасында есептеу нәтижелері 2.4-суретте келтірілген:

```

Консоль отладки Microsoft Visual Studio
n=400
e=0.0001
x1=-1
x2=1
alpha_b=-10
alpha_e=10
g_b=0
g_e=1.97659e+09
alpha=-1.81484

C:\Users\user\source\repos\ConsoleApplication51\Debug\ConsoleApplication51.exe
0.
    
```

2.4-сурет – (2.7) функциясының ең үлкен нөлін VisualStudio ортасында есептеу нәтижесі

Демек, оптималдау есебі көмекші функцияның ең үлкен нөлін табу есебіне ауысады. 2.4-суреттен (2.7) функциясының ең үлкен нөлінің $\varepsilon = 0.0001$ дәлдікпен алынған жуық мәні -1.8148 -ге тең.

2.2-мысал. Екі айнымалылы дөңес функция қарастырайық:

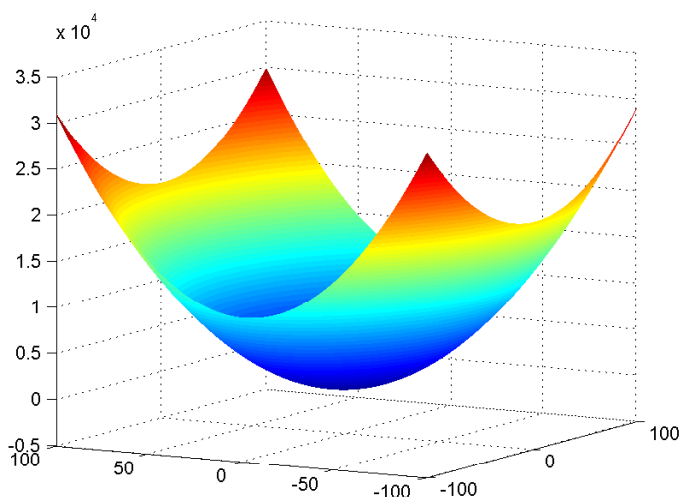
$$F_2(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 3. \quad (2.8)$$

Берілген функцияның келесі жиында:

$$-5 \leq x \leq 5, \quad -5 \leq y \leq 5$$

глобалдық минимумын табу керек.

Бұл – графигі эллипстік параболоид болатын функция (2.4-сурет). Оның жалғыз минимум нүктесі бар: $F_2(3, -1) = -8$.

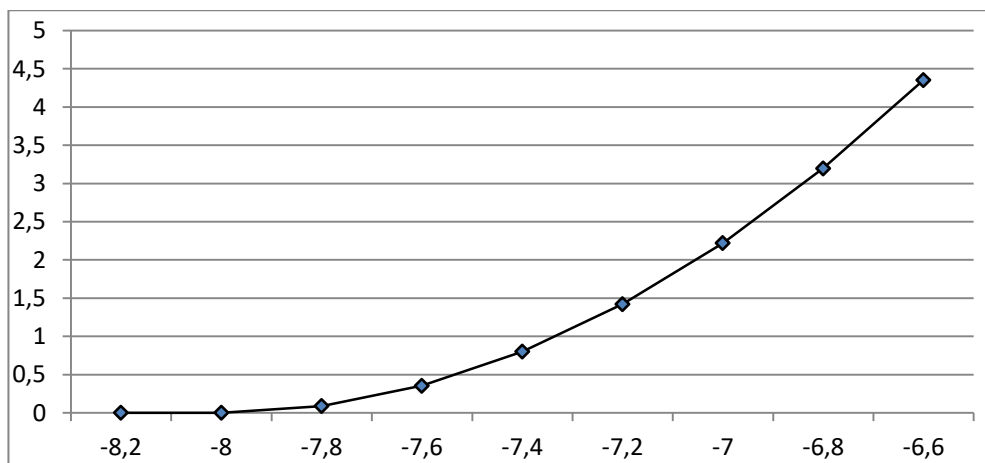


2.5-сурет – (2.8) функциясының графигі

Берілген $\{(x; y): -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5\}$ жиында функцияның глобалдық минимумын табу үшін көмекші функция құрамыз:

$$\begin{aligned} g_m(F_2, \alpha) &= \\ &= \int_{-5}^5 \int_{-5}^5 [|x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 3 - \alpha| - \\ &\quad -(x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 3 - \alpha)]^m dx dy. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Оның графигі 2.6-суретте кескінделген.



2.6-сурет– (2.8) функциясының графигі

Берілген (2.8) мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу үшін (2.9) көмекші функцияның ең үлкен нөлін табу қажетті және жеткілікті болғандықтан 2.7-суреттен көмекші функцияның ең үлкен нөлінің жуық мәні VisualStudio ортасында -8 -ге тең екені анықталды.

Консоль отладки Microsoft Visual Studio

```

n=400
m=400
e=0.000001
x1=-5
x2=5
y1=-5
y2=5
alpha_b=-10
alpha_e=10
alpha=-8

```

2.7-сурет – (2.9) функциясының ең үлкен нөлін VisualStudio ортасында есептеу нәтижесі

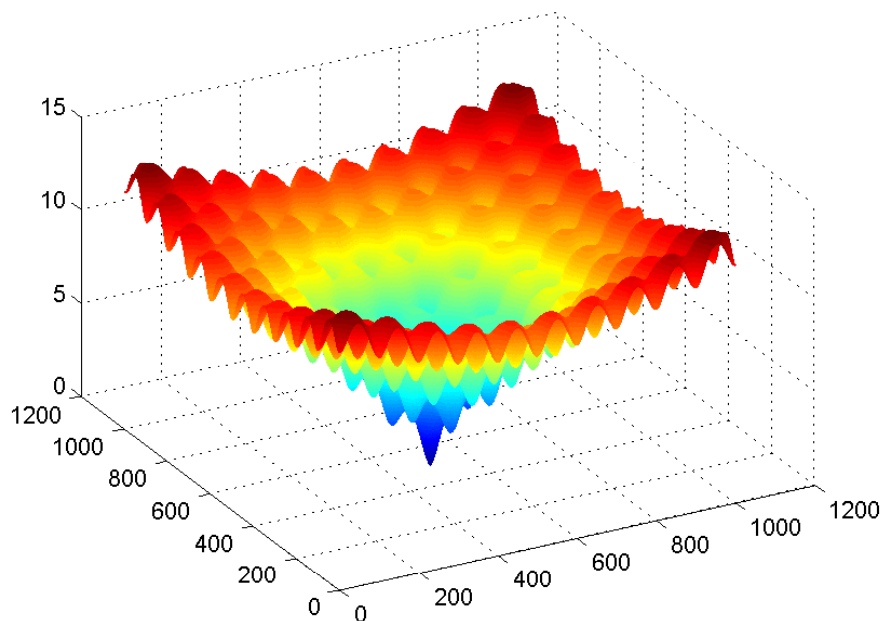
2.3-мысал. Екі айнымалылы көпэкстремалды Экли функциясын [112] қарастырамыз: Оның глобалдық минимумының эталонды мәні: $F_3(0; 0) = 0$.

$$F_3(x, y) = -20e^{-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}} - e^{0.5(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi y))} + e + 20. \quad (2.10)$$

Берілген функцияның келесі жиында:

$$-5 \leq x \leq 5, \quad -5 \leq y \leq 5$$

глобалдық минимумын табу керек. Экли функциясының графигі 2.8-суретте көрсетілген.

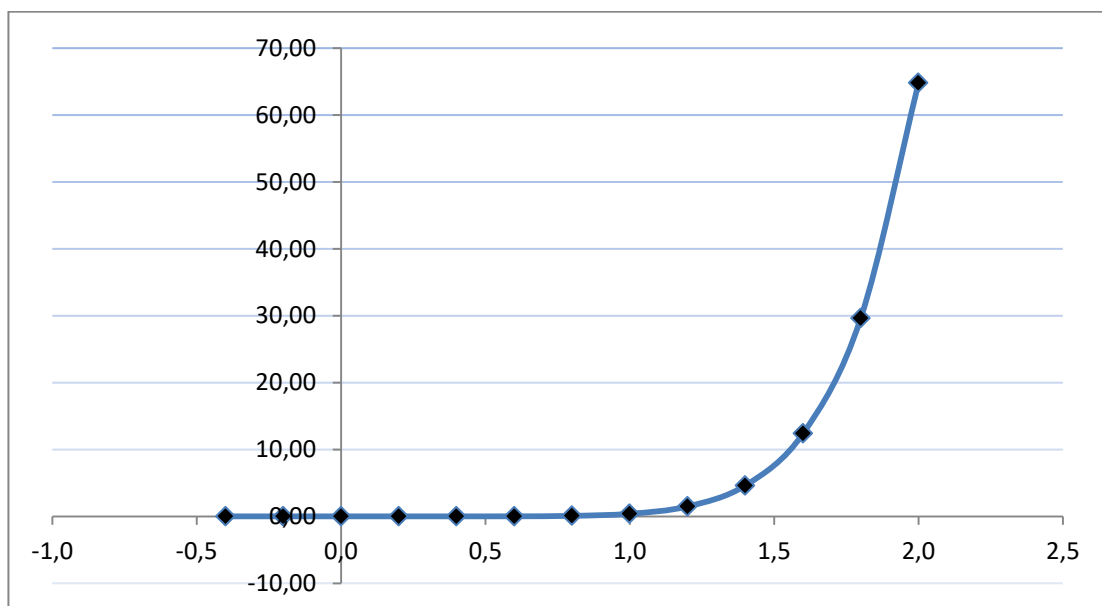


2.8-сурет– Экли функциясының графигі

Экли функциясына сәйкес көмекші функцияны қарастырайық:

$$g_m(F_3, \alpha) = \int_{-5}^5 \int_{-5}^5 \left[-20e^{-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}} - e^{0.5(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi y))} + e + 20 - \alpha \right] - \left[-20e^{-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}} - e^{0.5(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi y))} + e + 20 - \alpha \right]^6 dx dy \quad (2.11)$$

Оның графигі 2.9-суретте көрсетілген.



2.9-сурет – (2.11) функциясының графигі

Экли функциясының глобалдық минимумының эталонды мәні: $F_3(0; 0) = 0$. Есептеу тәжірибесі келесі нәтижені көрсетеді: $F_3(10^{-10}; 10^{-10}) = 10^{-10}$. Әдістің дәлдігі: $\varepsilon = 10^{-10}$.

Енді құрылған әдістің тиімділігін көрнекі көрсету мақсатында арнаулы түрлердегі тесттік функциялар құрып, оларға сәйкес көмекші функцияларды әр түрлі m үшін зерттейміз, глобалдық минимумдарын анықтаймыз.

А.В. Кузнецов пен А.И. Рубан [139-140] зерттеулерінде тесттік функциялар гиперболалық және экспоненциалдық потенциалдар негізінде құрылған. Сол әдістерді негізге алып төртөлшемді кеңістікте бірнеше минимумдары бар тесттік функциялар құрамыз. Олардың тиімділігі – локалды және глобалдық минимумдарының координаталарын өзіміз таңдаймыз, яғни глобалдық минимумның мәнін алдын-ала біле аламыз.

2.4-мысал. Гиперболалық потенциал негізінде төмендегі 3 айнымалылы тесттік функцияны қарастырайық:

$$F_4(x, y, z) = -\frac{1}{5 \cdot (|x - 3|^2 + |y - 4|^2 + |z + 1|^2) + 1} - \frac{1}{2 \cdot (|x + 5|^5 + |y + 8|^5 + |z - 2|^5) + 1.8} - \frac{1}{10 \cdot (|x + 5|^{2.2} + |y - 6|^{2.2} + |z - 9|^{2.2}) + 3} - \frac{1}{2 \cdot (|x - 7|^{2.5} + |y + 8|^{2.5} + |z + 1|^{2.5}) + 2.5}. \quad (2.12)$$

Бұл функцияның 4 локалды минимумы бар: $(3; 4; -1)$, $(-5; -8; 2)$, $(-5; 6; 9)$, $(7; -8; -1)$ және глобалдық минимум $(3; 4; -1)$ нүктесінде қабылданатынына және глобалдық минимум, $\hat{\alpha} = -1,0013255206$ екеніне көз жеткізу қиын емес.

Енді $F_4(x, y, z)$ глобалдық минимумын көмекші функцияны қолданып анықтайық.

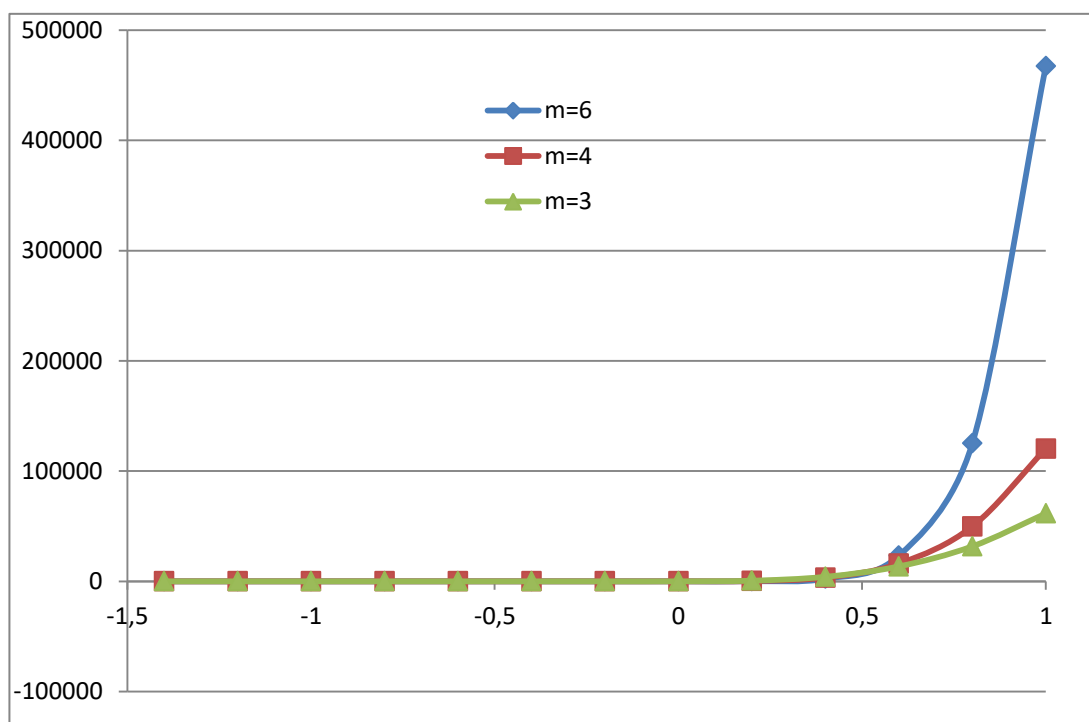
$F_4(x, y, z)$ функциясы $[-10; 10] \times [-10; 10] \times [-10; 10]$ кубында көмекші функция құрайық:

$$g_m(F_4, \alpha) = \int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} [|F_4(x, y, z) - \alpha| - (F_4(x, y, z) - \alpha)]^m dx dy dz, \quad m \in N. \quad (2.13)$$

Осылайша, $F_4(x, y, z)$ мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу есебінен $g_m(F_4, \alpha)$ көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу есебіне көштік. Көмекші функцияның бір ғана α параметрінен тәуелді екені және «тиімді» қасиеттерге (теріс емес, қатаң дөңес, бірқалыпты үзіліссіз және т.б.) ие екені

белгілі. Енді көп айнымалылы көпэкстремалды функциядан бір айнымалылы дөңес функцияға ауыстық.

(2.13) функциясын m -нің бірнеше мәндері үшін зерттейік. Ол $\forall m \in N$ үшін қатаң өспелі функция. Оның графигі төмендегі 2.10-суретте келтірілген.



2.10-сурет – (2.13) функциясының графигі

$m = 3,4,6$ жағдайлары үшін $\hat{\alpha} = \sup\{\alpha \in R: g_m(z_1, \hat{\alpha}) = 0\}$ мәндерін табу нәтижелерін есептеп көрсетейік.

2.1-кесте – (2.13) функциясының әр түрлі $m = 3,4,6$ жағдайлары үшін алынған мәндері

α	$g_6(F_4, \alpha)$	$g_4(F_4, \alpha)$	$g_3(F_4, \alpha)$
0	7,6	7,17809	8,73493
-10	0	0	0
-5	0	0	0
-2,5	0	0	0
-1,25	0	0	0
-0,625	0,0013	0,0039362	0,00755927
-0,9375	$4,3 \cdot 10^{-9}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-6}$
-1,09375	0	0	0
-1,015625	0	0	0
-0,9765925	$1,5 \cdot 10^{-11}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$
-0,99609375	$1,3 \cdot 10^{-15}$	$1,2 \cdot 10^{-11}$	$1,2 \cdot 10^{-9}$
-1,005859375	0	0	0
-1,0009765625	$1,1 \cdot 10^{-22}$	$2,4 \cdot 10^{-16}$	$3,4 \cdot 10^{-13}$

2.1-кестесінің жалғасы

-1,0034179688	0	0	0
-1,0021972657	0	0	0
-1,0015869141	0	0	0
-1,0012817383	$4,5 \cdot 10^{-28}$	$5,9 \cdot 10^{-20}$	$6,7 \cdot 10^{-16}$
-1,0014343262	0	0	0
-1,0013580323	0	0	0
-1,0013198853	$2,1 \cdot 10^{-33}$	$1,6 \cdot 10^{-23}$	$1,4 \cdot 10^{-18}$
-1,0013389588	0	0	0
-1,0013294221	0	0	0
-1,0013246537	$2,7 \cdot 10^{-38}$	$9 \cdot 10^{-27}$	$5,2 \cdot 10^{-21}$
-1,0013270379	0	0	0
-1,0013258458	0	0	0
-1,0013252498	$2,5 \cdot 10^{-41}$	$8,6 \cdot 10^{-29}$	$1,6 \cdot 10^{-22}$
-1,0013255478	0	0	0
-1,0013253988	$2,1 \cdot 10^{-43}$	$3,5 \cdot 10^{-30}$	$1,4 \cdot 10^{-23}$
-1,0013254733	$7,2 \cdot 10^{-46}$	$8 \cdot 10^{-32}$	$8,5 \cdot 10^{-25}$
-1,0013255106	$6,3 \cdot 10^{-50}$	$1,6 \cdot 10^{-34}$	$8 \cdot 10^{-27}$
-1,0013255292	0	0	0
-1,0013255199	$7,2 \cdot 10^{-57}$	$3,7 \cdot 10^{-39}$	$2,7 \cdot 10^{-30}$
-1,0013255246	0	0	0
-1,0013255223	0	0	0
-1,0013255211	0	0	0
-1,0013255205	$4,6 \cdot 10^{-62}$	$1,3 \cdot 10^{-42}$	$6,8 \cdot 10^{-33}$
-1,0013255208	0	0	0
-1,0013255207	0	0	0
-1,0013255206	0	0	0
-1,00132552055	$5 \cdot 10^{-64}$	$6,3 \cdot 10^{-44}$	$7,1 \cdot 10^{-34}$
-1,00132552058	$6,1 \cdot 10^{-67}$	$7,2 \cdot 10^{-46}$	$2,5 \cdot 10^{-35}$

Сонымен көмекші функцияның ең үлкен нөлі m -нің әр түрлі үш мәні үшін 42 итерациядан соң $\varepsilon = 10^{-10}$ дәлдігімен $\hat{\alpha} \approx -1,00132552058$ табылды. Көмекші функция мәндері VisualStudio ортасында есептелді.

2.5-мысал. Үш айнымалылы көпэкстремалды мақсаттық функцияны экспоненциалдық потенциал негізінде құрайық:

$$\begin{aligned}
 F_5(x, y, z) = & -2 \cdot e^{-3 \cdot (|x-1|^{1.5} + |y-2|^{1.5} + |z+2|^{1.5})} - \\
 & -3 \cdot e^{-7 \cdot (|x+3|^2 + |y+1|^2 + |z+5|^2)} - \\
 & -7 \cdot e^{-12 \cdot (|x-2|^4 + |y|^4 + |z-1|^4)} - 4 \cdot e^{-2 \cdot (|x+4|^{0.5} + |y-4|^{0.5} + |z+3|^{0.5})} -
 \end{aligned}$$

$$-2 \cdot e^{-5 \cdot (|x|^{1.3} + |y|^{1.4} + |z+6|^{1.4})}. \quad (2.14)$$

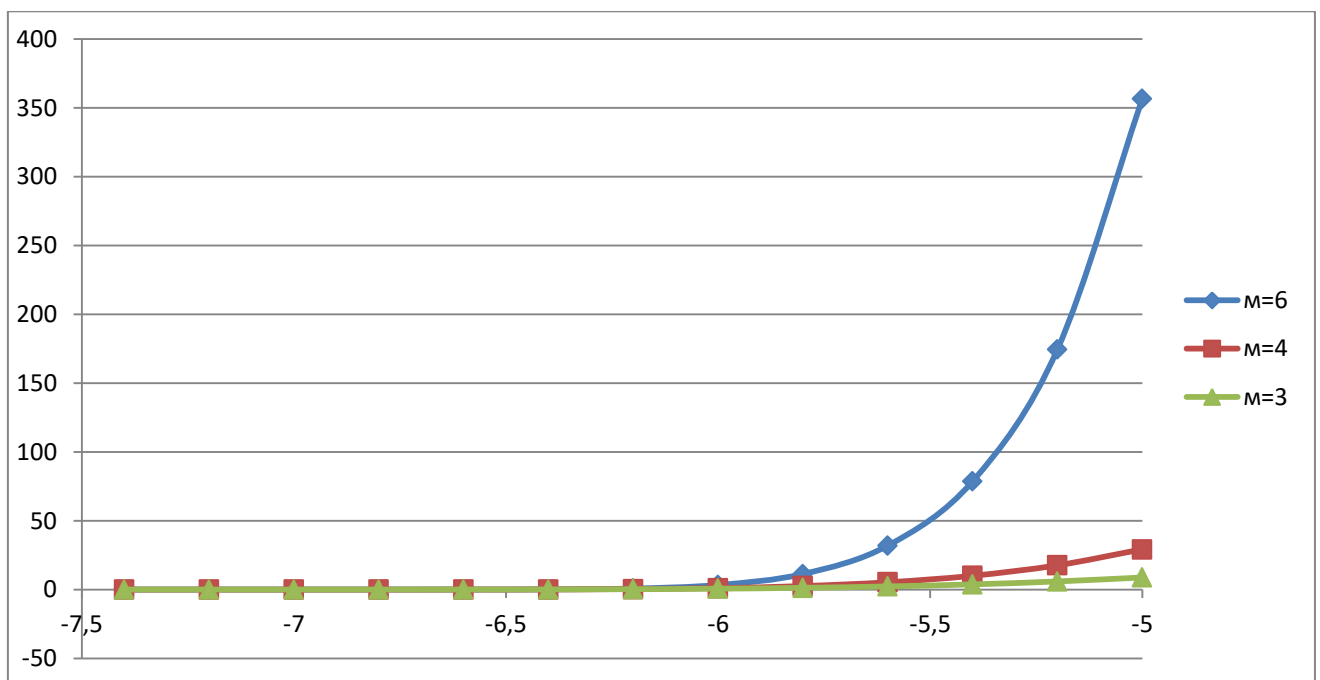
Айқын көрінетіні, (2.13) функциясының 5 локалды минимумы бар: (1; 2; -2), (-3; -1; -5), (2; 0; 1), (-4; 4; -3), (0; 0; -6) нүктелерінде. Ал глобалдық минимум (2; 0; 1) нүктесінде қабылданады және $\hat{\alpha} = -7,0000100024$.

Енді $F_5(x, y, z)$ мақсаттық функцияның глобалдық минимумын көмекші функцияны қолданып анықтайық.

$F_5(x, y, z)$ функциясы үшін $[-10; 10] \times [-10; 10] \times [-10; 10]$ кубында көмекші функция құрамыз:

$$g_m(F_5, \alpha) = \int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} [|F_5(x, y, z) - \alpha| - (F_5(x, y, z) - \alpha)]^m dx dy dz. \quad (2.15)$$

$F_5(x, y, z)$ функциясынан $g_m(F_5, \alpha)$ көмекші функциясына көшітік. Мақсаттық функцияның $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумының мәні көмекші функцияның «үлкен» нөліне сәйкес келетіндіктен, әрі қарай көмекші функцияның нөлдерін зерттейміз. m көрсеткішінің бірнеше мәні үшін функциялардың графиктері 2.11-суретте кескінделген.



2.11-сурет – (2.15) функциясының графигі

Көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу үшін алдыңғы мысалда қолданылған қаз бөлу әдісін қолданамыз. «Ең үлкен нөлге» жуықтау процессі 2.2-кестеде көрсетілген.

2.2-кесте. (2.15) функциясының әр түрлі $m = 3,4,6$ жағдайлары үшін мәндері

α	$g_6(F_5, \alpha)$	$g_4(F_5, \alpha)$	$g_3(F_5, \alpha)$
0	$1,8 \cdot 10^6$	12620,1	1132,9
-10	0	0	0
-5	356,491	29,211	8,75615
-7.5	0	0	0
-6.25	0,469733	0,27444	0,21661
-6.875	$3 \cdot 10^{-6}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$	0,00027718
-7.1875	0	0	0
-7.03125	0	0	0
-6.953125	$2,3 \cdot 10^{-9}$	$4,7 \cdot 10^{-7}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$
-6.9921875	$1,5 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-11}$	$3,8 \cdot 10^{-9}$
-7.01171875	0	0	0
-7.001953125	0	0	0
-6.9970703125	$4,1 \cdot 10^{-17}$	$1,2 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-10}$
-6.99951171875	$9,8 \cdot 10^{-22}$	$9,93 \cdot 10^{-16}$	$9,9 \cdot 10^{-13}$
-7.000732421875	0	0	0
-7.0001220703125	0	0	0
-6.99981689453125	$3,3 \cdot 10^{-24}$	$2,2 \cdot 10^{-17}$	$5,8 \cdot 10^{-14}$
-6.999969482421875	$2,8 \cdot 10^{-28}$	$4,3 \cdot 10^{-20}$	$5,3 \cdot 10^{-16}$
-7.000045776367187	0	0	0
-7.000007629394531	$1,1 \cdot 10^{-35}$	$5,1 \cdot 10^{-25}$	$1,1 \cdot 10^{-19}$
-7.000026702880859	0	0	0
-7.000017166137690000	0	0	0
-7.000012397766110000	0	0	0
-7.000010013580320000	0	0	0
-7.000008821487420000	$1,7 \cdot 10^{-37}$	$3,1 \cdot 10^{-26}$	$1,3 \cdot 10^{-20}$
-7.000009417533870000	$2,6 \cdot 10^{-39}$	$1,9 \cdot 10^{-27}$	$1,6 \cdot 10^{-21}$
-7.000009715557090000	$3,6 \cdot 10^{-41}$	$1,1 \cdot 10^{-28}$	$1,9 \cdot 10^{-22}$
-7.000009864568710000	$4,4 \cdot 10^{-43}$	$5,8 \cdot 10^{-30}$	$2,1 \cdot 10^{-23}$
-7.000009939074510000	$4,1 \cdot 10^{-45}$	$2,6 \cdot 10^{-31}$	$2 \cdot 10^{-24}$
-7.000009976327410000	$2 \cdot 10^{-47}$	$7,4 \cdot 10^{-33}$	$1,4 \cdot 10^{-25}$
-7.000009994953870000	$1,1 \cdot 10^{-50}$	$4,9 \cdot 10^{-35}$	$3,3 \cdot 10^{-27}$
-7.000010004267090000	0	0	0
-7.000009999610480000	$3 \cdot 10^{-53}$	$9,8 \cdot 10^{-37}$	$1,7 \cdot 10^{-28}$
-7.000010001938790000	$6,8 \cdot 10^{-58}$	$7,7 \cdot 10^{-40}$	$8,2 \cdot 10^{-31}$
-7.000010003102940000	0	0	0
-7.000010002520870000	0	0	0
-7.000010002229830000	$2 \cdot 10^{-60}$	$1,6 \cdot 10^{-41}$	$4,5 \cdot 10^{-32}$
-7.000010002375350000	$6,6 \cdot 10^{-65}$	$1,6 \cdot 10^{-44}$	$2,6 \cdot 10^{-34}$
-7.000010002448110000	0	0	0
-7.000010002411730000	0	0	0
-7.000010002393540000	$4,1 \cdot 10^{-67}$	$5,5 \cdot 10^{-46}$	$2 \cdot 10^{-35}$
-7.000010002402630000	$5,7 \cdot 10^{-70}$	$6,9 \cdot 10^{-48}$	$7,6 \cdot 10^{-37}$

Сонымен, көмекші функцияны қолданып, қарастырылып отырған функцияның глобалдық минимумының $\hat{\alpha} \approx -7.0000100024$ мәнін

анықтадық. Табылған мән (2.14) тесттік функцияның алдын-ала анықталған мәніне сәйкес келеді.

Глобалдық минимумды табу үшін m -нің үш түрлі мәнінде де 42 итерация орындалды және $\varepsilon = 10^{-10}$ дәлдігіне қол жеткізілді.

Қорыта айтқанда, көмекші функцияның m көрсеткіші қақ бөлу әдісінің итерация санына әсер етпейді. Туындыға қатысты әдістер тиімділігін арттыру мүмкін.

Қорыта келсек, жоғарыда дәлелденген тұжырымдардан шығатыны: $g_m(F, \alpha)$ функциясының маңызды қасиеттері (оның бірайнымалылы болатындығы, дөңестігі, терісеместігі, шектелген аралықта бірқалыпты үзіліссіздігі, жоғары ретті туындыларының табылатындығы, монотонды өспелі болуы) мақсатты функцияның айнымалыларының санынан да, локалдық экстремумдар санынан да тәуелді емес және оның глобалдық минимумының қажетті және жеткілікті шарттарын айқындауға, яғни глобалдық минимумды жоғары дәлдікпен анықтау үшін үнемді әрі ұтымды әдіс құруға мүмкіндік береді.

Сонымен қатар m көрсеткішінің функцияның өзгеруіне әсерін тиімді пайдалана отырып, итерация санын азайтуға қол жеткізуге болады.

3 КӨМЕКШІ ФУНКЦИЯНЫҢ «ЕҢ ҮЛКЕН НӨЛІН» ЖУЫҚТАП ТАБУ ӘДІСТЕРІ ТУРАЛЫ

Алдыңғы бөлімде мақсаттық функцияның глобалдық минимумын анықтау есебінен көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу есебіне өттік. Бұл бөлімде бұрыннан белгілі дихотомия [141, 39 б.], алтын қима [141, 50 б.], жанамалар [141, 134 б.], градиентпен түсу [141,126 б.] және Вегстейн әдістерін [142] көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу үшін қалай бейімдеуге болатынын талқылайық және олардың тиімді-тиімсіз тұстарын анықтайық. Дихотомия, жанамалар және Вегстейн әдістері берілген кесіндіде бір ғана түбірі болатын теңдеудің түбірін табуға арналған, ал алтын қима және градиентпен түсу әдістері – дөңес функцияның глобалдық минимумын табуға арналған әдістер.

Екінші бөлімде

$$g_m(F, \alpha) = \int_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu \quad (3.1)$$

көмекші функцияның өте маңызды қасиеттерге ие екендігі анықталды: қатаң дөңес, өспелі, кемімейді, дифференциалданады, шектелген аралықта бірқалыпты үзіліссіз, теріс емес. Осы қасиеттерді ескере отырып, жоғарыда аталған сандық әдістерді көмекші функцияның ең үлкен нөлін табу үшін бейімдеу мақсатында әр әдістің қолданылу тиімділігіне назар аударып, салыстырмалы талдау жасаймыз.

3.1 Симметриялық әдістерді қолдану

Көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу үшін екі симметриялық әдісті қарастырайық. Олар дихотомия және алтын қима әдістері.

Дихотомия әдісі – өте қарапайым және оңай жүзеге асатын, $F(x) = 0$ теңдеуінің түбірін табуға арналған әдіс. Ол $F(x)$ функцияның $[a_0, b_0)$ анықталу облысында нөлін табуды қарастырады. Әдістің негізгі шарттары: $[a_0, b_0)$ аралығында бір ғана түбірі болуы керек және $f(a_0)f(b_0) < 0$ шарты орындалуы тиіс. Аралықтың $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ центрі анықталып, осы нүктеде функция мәні есептеледі:

- а) егер $f(a_0)f(x_0) < 0$ болса, онда a_0 мәні a_1 , ал x_0 мәні b_1 деп алынады;
- ә) егер $f(x_0)f(b_0) < 0$ болса, онда x_0 мәні a_1 , ал b_0 мәні b_1 деп алынады.

Әрі қарай $[a_1, b_1)$ кесіндісімен аналогиялық жұмыс жасалады. Яғни, әр итерацияда x_n кесіндінің ортасы анықталып, пайда болған екі кесіндінің біреуі таңдалады. Әр итерацияда кесінді екі есе қысқарып отырады.

2.6, 2.7-теоремаларына сәйкес мақсаттық функцияның глобалдық минимум мәні көмекші функцияның «ең үлкен нөліне» тең болады. Енді дихотомия әдісін көмекші функцияның $\hat{\alpha}$ ең үлкен нөлін табу үшін бейімдейміз. Демек, 1.1-теорема бойынша келесі шарттар орындалса:

$$g_m(F, c_0) = 0 \text{ және } g_m(F, d_0) > 0,$$

онда $\hat{\alpha}$ мәні $[c_0, d_0)$ кесіндісінде жатады. $[c_0, d_0)$ кесіндісінің $\alpha_0 = \frac{c_0 + d_0}{2}$ центрін анықтап, табылған нүктеде $g_m(F, \alpha_0)$ көмекші функция мәнін есептейміз:

а) егер $g_m(F, \alpha_0) = 0$ болса, онда α_0 мәнін c_1 , d_0 мәнін d_1 деп белгілеп аламыз;

ә) егер $g_m(F, \alpha_0) > 0$ болса, онда c_0 мәнін c_1 , α_0 мәнін d_1 деп белгілейміз.

Әрі қарай $[a_1, b_1]$ кесіндісімен жұмыс жасаймыз. Демек, әр итерацияда алынған кесіндінің

$$\alpha_k = \frac{c_k + d_k}{2} \quad (3.2)$$

ортасын анықтап, пайда болған екі кесіндінің біреуін таңдаймыз. Андын-ала берілген дәлдікке жеткенде есептеуді тоқтатамыз:

$$\varepsilon \geq d_k - c_k.$$

Әр итерация нәтижесінде кесінді екі есе қысқарады. k -шы итерациядан соң бастапқы кесіндінің ұзындығы үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\varepsilon \geq \frac{d_0 - c_0}{2^k}.$$

Сондықтан көмекші функцияның үлкен нөлі деп соңғы кесіндінің сол жақ ұшын аламыз: $\hat{\alpha} \approx c_k$.

Әдістің ұтымды тұсы - дәлдік алдын-ала берілсе, «ең үлкен нөл» жатқан аралықты анықтауға және итерация санын алдын-ала білуге болады:

$$k \geq \log_2 \frac{d_0 - c_0}{\varepsilon}.$$

Нәтиже 10 итерацияда 3 таңбаға дейін жуықталады: $2^{10} = 1024$. Есептеу қосымшаларының көбі жадыда 16 таңбаға дейін сақтайды, ал 50 итерацияда 15 таңбаға дейін жуықтауға болады. Дихотомия әдісімен көмекші функцияң ең үлкен нөлін іздеуде 50 итерациядан артық орындаудың қажеттілігі жоқ.

Әдіс бойынша құрылған алгоритмнің жинақталу жылдамдығы туралы теореманы дәлелдейік.

3.1-теорема. *Егер 1.1-теорема шарттары орындалса, онда дихотомия әдісі бойынша құрылған $\{\alpha_k\}$ тізбегі $F(x)$ мақсаттық функциясының $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумына сызықтық жылдамдықпен жинақталады, яғни $k = 0, 1, 2 \dots$ үшін*

$$|\alpha_{k+1} - \alpha_k| = \frac{1}{2} |\alpha_k - \alpha_{k-1}|. \quad (3.3)$$

Дәлелдеуі. 1.1-теорема бойынша $g_m(F, c_0) = 0$ және $g_m(F, d_0) > 0$ шарттары орындалса, онда мақсаттық функцияның глобалдық минимумы $\hat{\alpha} \in [c_0, d_0)$ кесіндісінде жатады.

(3.3) теңдігінің сол жағын түрлендірсек:

$$\begin{aligned} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| &= \left| \frac{c_{k+1} + d_{k+1}}{2} - \frac{c_k + d_k}{2} \right| = \frac{1}{2} |c_{k+1} + d_{k+1} - c_k - d_k| = \\ &= \frac{1}{2} |c_k + \alpha_k - c_k - d_k| = \frac{1}{2} \left| c_k + \frac{c_k + d_k}{2} - c_k - d_k \right| = \\ &= \frac{1}{4} |c_k - d_k| = \frac{1}{4} |c_{k-1} - \alpha_{k-1}| = \frac{1}{4} \left| c_{k-1} - \frac{c_{k-1} + d_{k-1}}{2} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \left| \frac{c_{k-1} - d_{k-1}}{2} \right| = \frac{1}{8} |c_{k-1} - d_{k-1}| \end{aligned}$$

Сонымен:

$$|\alpha_{k+1} - \alpha_k| = \frac{1}{8} |c_{k-1} - d_{k-1}|. \quad (3.4)$$

Теоремадағы теңдіктің оң жағын өрнектесек:

$$\begin{aligned} |\alpha_k - \alpha_{k-1}| &= \left| \frac{c_k + d_k}{2} - \frac{c_{k-1} + d_{k-1}}{2} \right| = \frac{1}{2} |c_k + d_k - c_{k-1} - d_{k-1}| = \\ &= \frac{1}{2} |c_{k-1} + \alpha_{k-1} - c_{k-1} - d_{k-1}| = \\ &= \frac{1}{2} \left| c_{k-1} + \frac{c_{k-1} + d_{k-1}}{2} - c_{k-1} - d_{k-1} \right| = \frac{1}{4} |c_{k-1} - d_{k-1}| \end{aligned}$$

Яғни,

$$|\alpha_k - \alpha_{k-1}| = \frac{1}{4} |c_{k-1} - d_{k-1}|. \quad (3.5)$$

(3.4) және (3.5) теңдіктерінен, $|\alpha_{k+1} - \alpha_k| = \frac{1}{2} |\alpha_k - \alpha_{k-1}|$ екендігі шығады. Теорема дәлелденді.

Алтын қима әдісі – дөңес функцияның минимумын табуға арналған дихотомия әдісі тәрізді симметриялы әдіс. Бұл әдіс бойынша әр итерация сайын $[a_0, b_0)$ кесіндісі симметриялы екі нүкте арқылы 3 кесіндіге

$$\frac{x_1 - a_0}{b_0 - x_1} = \frac{b_0 - x_1}{b_0 - a_0} \quad \text{және} \quad \frac{x_2 - a_0}{b_0 - a_0} = \frac{b_0 - x_2}{x_2 - a_0}.$$

катынастарында бөлінеді. Алынған теңдеулерді шешу нәтижесінде екі нүкте анықталады:

$$x_1 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) \quad \text{және} \quad x_2 = a_0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0).$$

Осы нүктелерде функция мәндері есептелінеді:

а) егер $f(x_1) < f(x_2)$ орындалса, онда a_0 мәнін a_1 , x_2 мәнін b_1 деп белгілеп аламыз;

ә) егер $f(x_1) > f(x_2)$ орындалса, онда x_1 мәнін a_1 , b_0 мәнін b_1 деп белгілеп аламыз.

Әрі қарай бастапқы кесіндіде пайда болған үш бөліктің екі бөлігін қамтитын $[a_1, b_1)$ кесіндісімен жұмыс жасаймыз. а) жағдайында x_1 -ді қайта табамыз, ал x_1 нүктесі x_2 -ге ауысады; ә) жағдайында x_2 -ні қайта табамыз, ал x_2 нүктесі x_1 -ге ауысады. Әр итерацияда функция мәні бір рет есептеледі және минимумды іздеу аймағы 0,618034 есеге қысқарады. Осындай итерациялар қажетті дәлдікке жеткенше жалғасады.

Енді алтын қима әдісін көмекші функцияның $\hat{\alpha} = \operatorname{argmin}\{g_m(F, \alpha): \alpha \in [c_0; d_0)\}$ «ең үлкен нөлін» анықтау үшін қолданаық. $[c_0; d_0)$ кесіндісінде α_1 және α_2 нүктелерін анықтаймыз:

$$\alpha_1 = c_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(d_0 - c_0) \quad \text{және} \quad \alpha_2 = c_0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(d_0 - c_0).$$

α_1 және α_2 нүктелердің мәндеріне сәйкес пайд болған үш кесіндінің 1.1-теорема шарттарын қанағаттандыратын біреуін $[c_1; d_1)$ деп таңдаймыз:

а) егер $g_m(F, \alpha_1) = 0$ және $g_m(F, \alpha_2) = 0$ орындалса, онда c_0 мәнін c_1 , ал α_1 мәнін d_1 деп белгілеп аламыз;

ә) егер $g_m(F, \alpha_1) = 0$ және $g_m(F, \alpha_2) > 0$ орындалса, онда α_1 мәнін c_1 , ал x_2 мәнін d_1 деп белгілеп аламыз;

б) егер $g_m(F, \alpha_1) > 0$ және $g_m(F, \alpha_2) > 0$ орындалса, онда α_2 мәнін c_1 , d_0 мәнін d_1 деп белгілеп аламыз.

Әрі қарай $[c_1; d_1)$ кесіндісімен алгоритм қайталанатын. Егер

$$\varepsilon \geq d_k - c_k$$

шарты орындалса, онда есептеуді тоқтатамыз. Көмекші функцияның $\hat{\alpha}$ «ең үлкен нөлі» ретінде c_k алынады.

Енді осы алгоритмнің жинақталу жылдамдығы туралы теорема дәлелдейік.

3.2-теорема. *Егер 1.1-теорема шарттары орындалса, онда алтын қима әдісі бойынша құрылған $\{\alpha_k\}$ тізбегі $F(x)$ мақсаттық функциясының $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумына сызықтық жылдамдықпен жинақталады, яғни кез-келген $k = 0, 1, 2 \dots$ саны үшін $|d_{k+1} - c_{k+1}| = \beta |d_k - c_k|$ орындалатындай $\beta \in (0, 1)$ табылады.*

Дәлелдеуі. 1.1-теорема бойынша $g_m(F, c_k) = 0$ және $g_m(F, d_k) > 0$ шарттары орындалса, онда мақсаттық функцияның $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумы $[c_k, d_k)$ кесіндісінде жатады. $[c_k, d_k)$ кесіндісіне тиесілі α_1 және α_2 мәндерін тапсақ:

$$\alpha_1 = c_k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(d_k - c_k) \quad \text{және} \quad \alpha_2 = c_k + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(d_k - c_k),$$

мұндағы

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,38196 \quad \text{және} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618034.$$

1) Егер $g_m(F, \alpha_1) = 0$ орындалса, $[c_k, d_k)$ кесіндісі 0,38196 есе қысқарады:

$$\begin{aligned} d_{k+1} - c_{k+1} &= \alpha_1 - c_k = c_k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(d_k - c_k) - c_k = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(d_k - c_k) = \\ &= 0,38196 (d_k - c_k); \end{aligned}$$

2) егер $g_m(F, \alpha_2) > 0$ орындалса, $[c_k, d_k)$ кесіндісі 0,38196 есе қысқарады:

$$\begin{aligned} d_{k+1} - c_{k+1} &= d_k - \alpha_2 = d_k - c_k - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(d_k - c_k) = \\ &= 0,38196 (d_k - c_k); \end{aligned}$$

3) егер $g_m(F, \alpha_1) > 0$ және $g_m(F, \alpha_2) = 0$ шарттары орындалса, $[c_k, d_k)$ кесіндісі 0,23607 есе қысқарады:

$$\begin{aligned} d_{k+1} - c_{k+1} &= \alpha_2 - \alpha_1 = c_k + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(d_k - c_k) - c_k - \frac{3-\sqrt{5}}{2}(d_k - c_k) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) (d_k - c_k) = 0,23607 (d_k - c_k). \end{aligned}$$

Әр итерацияда $|d_{k+1} - c_{k+1}| = 0,23607 |d_k - c_k|$ немесе $|d_{k+1} - c_{k+1}| = 0,38196 |d_k - c_k|$ шығады. Яғни, $\beta = 0,38196$ немесе $\beta = 0,23607$ екені анықталады. Теорема дәлелденді.

Егер ε дәлдік алдын-ала берілсе, онда k итерация санын анықтауға болады. Ол үшін $0,23607^k (d_0 - c_0) \leq |d_k - c_k| \leq 0,38196^k (d_0 - c_0)$ және $|d_k - c_k| \leq \varepsilon$ теңсіздіктерінен

$$\log_{0,23607} \frac{\varepsilon}{d_0 - c_0} \leq k \leq \log_{0,38196} \frac{\varepsilon}{d_0 - c_0}$$

теңсіздіктерін аламыз.

Жалпы жағдайда, екінші итерациядан бастап, функция мәні бір нүктеде есептеледі. Ал көмекші функция мәні әр итерацияда екі нүктеде есептеледі, себебі үш кесіндінің ішінен біреуі ғана қалып отырады.

3.2 Көмекші функцияның туындысына қатысты әдістерді қолдану

Функцияның туындысын қолданатын бірнеше әдіс бар. Жұмыста көмекші функцияның ең үлкен нөлін табу үшін жанамалар және градиентпен түсу әдістерін бейімдеп қарастырайық. 2.2-теорема бойынша көмекші функция α бойынша дифференциалданады және 2.1-салдар бойынша кез-келген натурал $m > 1$ саны үшін көмекші функцияның m ретті туындысы болады.

Жанамалар әдісі – берілген $[a_0, b_0]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясының нөлін табуға арналған сандық әдіс. Алдыңғы симметриялық әдістерден ерекшелігі – функцияның екінші ретті туындысын табу қажет болады. Егер $f(a_0) * f'(a_0) > 0$ болса, онда бастапқы нүкте ретінде $[a_0, b_0]$ анықталу облысының сол жақ ұшы алынады: $x_0 = a_0$; егер $f(a_0) * f'(a_0) < 0$ болса, онда $[a_0, b_0]$ анықталу облысының оң жақ ұшы бастапқы нүкте болады: $x_0 = b_0$. Таңдалған бастапқы нүктеде функция графигіне жанама жүргізіліп, оның абцисса өсімен қиылысу нүктесі анықталады:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Осындай нүктелер тізбегінің жалпы мүшесі

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

рекуренттік формуласымен анықталады. Осы $\{x_k\}$ тізбегі – берілген $f(x)$ функциясының ізделінді түбірі үшін жуықтаулар тізбегі.

Жанамалар әдісінің $[a_0, b_0]$ кесіндісінде жинақты болуының жеткілікті шарттары:

- 1) $f(x)$ функциясының кемінде екі рет дифференциалдануы;
- 2) $f'(x)$ және $f''(x)$ таңбаларының өзгермеуі, яғни $f(x)$ функциясының монотондылығы мен дөңестігінің сақталуы;
- 3) $f(a_0) * f(b_0) < 0$ шартының орындалуы, яғни функция графигінің абцисса осін бір рет қиюы.

Егер қайсыбір $k = k_0$ мәнінде $|x_{k_0+1} - x_{k_0}| \leq \varepsilon$ (мұндағы ε – алдын-ала берілген дәлдік) теңдігі орындалса, онда функция түбірін іздеу тоқтатылады. Әдісті алдын-ала берілген ε дәлдікке жеткен кезде тоқтатамыз.

Енді осы әдісті $[c_0, d_0]$ кесіндісінде (3.1) көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табуға бейімдейік.

Көмекші функция үшін жанамалар әдісін бейіндейік. $g_m(F, \alpha_0) > 0$ шартын қанағаттандыратын α_0 -ды бастапқы нүкте ретінде аламыз. Яғни, көмекші функция графигіне $(\alpha_0; g_m(F, \alpha_0))$ нүктесінде жанама жүргіземіз:

$$g_m(F, \alpha) = g_m(F, \alpha_0) + g'_{m-1}(F, \alpha_0)(\alpha - \alpha_0).$$

Жанаманың абцисса өсімен $(\alpha_1; 0)$ қиылысу нүктесін табамыз:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{1}{g'_{m-1}(F, \alpha_0)} g_m(F, \alpha_0).$$

Егер $g_m(F, \alpha_1) > 0$ болса, онда $(\alpha_1; g_m(F, \alpha_1))$ нүктесінде жүргізілетін жанаманың абцисса өсімен қиылысу нүктесі α_2 анықталады. Осылайша жалғастырып, «ең үлкен нөлге» жуықтаулардың $\{\alpha_k\}$ тізбегін аламыз:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{g_m(F, \alpha_k)}{g'_{m-1}(F, \alpha_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Бұл тізбектің жинақталатын болуы үшін $g_m(F, \alpha)$ функцияның дифференциалданатын болуы, яғни

$$g'_m(F, \alpha) = 2 \int_{E(F, \alpha)} m[2(\alpha - F(x))]^{m-1} d\mu = 2m g_{m-1}(F, \alpha),$$

туындысынның бар болуы жеткілікті, өйткені көмекші функция – мақсаттық функцияның түрі мен өлшеміне тәуелді емес, дөңес (2.4-теорема) және кемімейді (2.1-лемма).

Ізделінді $\hat{\alpha}$ мәнің алдын-ала берілген ε дәлдікпен анықтау жұмысы, $|\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалғанда тоқтатылады: $\hat{\alpha} \approx \alpha_{k+1}$.

Енді жанамалар әдісіне құрылған алгоритмнің жинақталу жылдамдығы туралы теорема дәлелдейік.

3.3-теорема. $g_m(F, \alpha_0) > 0$ шарты орындалса, онда жанамалар әдісі бойынша құрылған $\{\alpha_k\}$ итерациялық тізбегі $F(x)$ мақсаттық функциясының глобалдық минимумына сызықтық жылдамдықпен жинақталады, яғни $\forall k, k = 0, 1, 2, \dots$ үшін $|\alpha_{k+1} - \hat{\alpha}| < \beta |\alpha_k - \hat{\alpha}|$ орындалатындай $\beta \in (0, 1)$ саны табылады.

Дәлелдеуі. $\{\alpha_k\}$ итерациялық тізбектің $\hat{\alpha}$ мақсаттық функцияның глобалдық минимумына жуықтайтыны 2.1-лемма мен 2.5-теоремадан шығады. Барлық $k \geq 0$ үшін $\alpha_{k+1} \leq \alpha_k$ теңсіздігі орындалатының көрсетейік. (3.6) рекуренттік формуласынан келесі теңдіктің орындалатыны шағады:

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = - \frac{\int_{E(F, \alpha_k)} [2(\alpha_k - F(x))]^m d\mu}{2m \int_{E(F, \alpha_k)} [2(\alpha_k - F(x))]^{m-1} d\mu}.$$

Соңғы теңдіктің оң жағының оң еместігі 2.1-лемманың 1-ші тұжырымынан шығады: $\alpha_{k+1} - \alpha_k \leq 0$, яғни $\forall k \geq 0$ үшін

$$\alpha_{k+1} \leq \alpha_k \quad (3.7)$$

орындалады. Сонымен қатар

$$\begin{aligned} |\alpha_{k+1} - \hat{\alpha}| < |\alpha_k - \hat{\alpha}| &= \left| \alpha_{k-1} - \frac{g_m(F, \alpha_{k-1})}{g'_{m-1}(F, \alpha_{k-1})} - \hat{\alpha} + \frac{g_m(F, \hat{\alpha})}{g'_{m-1}(F, \hat{\alpha})} \right| = \\ &= \left| (\alpha_{k-1} - \hat{\alpha}) \alpha'_k(\alpha_{k-1}) \right|. \end{aligned}$$

Енді E жиынында $\alpha'_k(\alpha_{k-1})$ туындысына баға берейік:

$$\begin{aligned} 0 \leq |\alpha'_k(\alpha_{k-1})| &= \left| \left(\alpha_{k-1} - \frac{g_m(F, \alpha_{k-1})}{g'_{m-1}(F, \alpha_{k-1})} \right)'_{\alpha_{k-1}} \right| = \\ &= \left| 1 - \frac{(g'_{m-1}(F, \alpha_{k-1}))^2 - g_m(F, \alpha_{k-1})g''_{m-2}(F, \alpha_{k-1})}{(g'_{m-1}(F, \alpha_{k-1}))^2} \right| = \\ &= \left| \frac{2^m \int_{E(F, \alpha_{k-1})} [\alpha_{k-1} - F(x)]^m d\mu \cdot 2^m m(m-1) \int_{E(F, \alpha_{k-1})} [\alpha_{k-1} - F(x)]^{m-2} d\mu}{(2^m m)^2 \left(\int_{E(F, \alpha_{k-1})} [\alpha_{k-1} - F(x)]^{m-1} d\mu \right)^2} \right| = \\ &= \left| \frac{(m-1) \int_{E(F, \alpha_{k-1})} [\alpha_{k-1} - F(x)]^m d\mu \int_{E(F, \alpha_{k-1})} [\alpha_{k-1} - F(x)]^{m-2} d\mu}{m \left(\int_{E(F, \alpha_{k-1})} [\alpha_{k-1} - F(x)]^{m-1} d\mu \right)^2} \right| = \\ &= \left| \frac{(m-1) [\alpha_{k-1} - F(x)]^{m+1} [\alpha_{k-1} - F(x)]^{m-1} (\mu(E(F, \alpha_{k-1})))^2}{m([\alpha_{k-1} - F(x)]^{2m} \mu(E(F, \alpha_{k-1})))^2} \right| = \\ &= \left| \frac{m-1}{m} \right| = \beta < 1. \end{aligned}$$

Олай болса,

$$|\alpha_{k+1} - \hat{\alpha}| < |\alpha_k - \hat{\alpha}| = \left| \frac{m-1}{m} \right| |(\alpha_{k-1} - \hat{\alpha})|.$$

Теорема дәлелденді.

Жанамалар әдісінің кемшілігі – дәлдікті нақты бағалай алмайтынымызда. Өйткені α_k, α_{k+1} мәндерінің екеуі де жуық мәндер, дәлдікті $\varepsilon \geq |\alpha_{k+1} - \alpha_k|$ бағалауымыз апостериорлық сипатқа ие.

Көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» жанамалар әдісімен табудың ерекшелігі – функцияның монотондығы мен дөңестігін зерттеудің, екінші туындысын табудың қажеті жоқ, көмекші функцияның түрі алдын-ала белгілі. Жалпы жағдайдағыдай, берілген аралықта функцияның бір ғана нөлі болу керек деген шарт қою да артық.

Қазіргі уақытта көбірек қолданатын негізгі оптималдау әдістерінің бірі – *градиентпен түсу* әдісі. Бұл әдісті ең алғаш өз еңбектерінде 1847 жылы О. Л. Коши ұсынған. Әдіс Б.Т.Поляктың 1983 жылы шыққан кітабында жақсы сипатталған [20]. Оптимизациялауда қолданылатын сандық әдістердің көпшілігі осы әдістен туындайды. Градиенттік әдістердің басым бөлігінің негізінде жататыны және олардың ішіндегі ең қарапайымы – градиентпен түсу әдісі.

Жалпы жағдайда градиентпен түсу әдісі дөңес функция үшін қолданылады. Бастапқы нүкте ретінде $[a_0, b_0]$ анықталу облысының кез-келген x_0 нүктесі алынады. Итерациялық тізбек құрылады:

$$x_{k+1} = x_k - hf'(x), \quad (3.8)$$

мұндағы h - қадамның ұзындығы.

Итерациялық процесс:

$$\varepsilon \geq |x_{k+1} - x_k|$$

орындалғанда тоқтатылады, мұндағы ε - әдістің дәлдігі.

$g_m(F, \alpha)$ функциясының «ең үлкен нөлін» градиентпен түсу әдісімен табуды қарастырайық. $g_m(F, \alpha_0) > 0$ шартын қанағаттандыратын α_0 мәнін бастапқы жуықтау нүктесі ретінде алып, α_1 жуықтауды есептейміз:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - hg'_m(F, \alpha_0).$$

$\{\alpha_k\}$ тізбегінің қалған мүшелерін анықтайтын рекуренттік формула:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - hg'_m(F, \alpha_k). \quad (3.9)$$

Көмекші функцияның α бойынша туындысының формуласын ескерсек:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - 2hm \int_{E(F, \alpha_k)} [2(\alpha_k - F(x))]^{m-1} d\mu. \quad (3.10)$$

Егер алынған α_{k+1} жуықтау үшін $g_m(F, \alpha_{k+1}) = 0$ болса, онда итерациялық процесс тоқтап қалады. Егер $g_m(F, \alpha_{k+1}) > 0$ шарты орындалса, онда тізбек

тез жинақталатын h қадамды таңдау керек. Төмендегі шарт орындалғанда, процесс аяқталады:

$$\varepsilon \geq |\alpha_{k+1} - \alpha_k|,$$

мұндағы ε – алдын-ала берілген есептеу дәлдігі.

α_{k+1} мәні көмекші функцияның «ең үлкен нөлі» деп қабылданады.

Енді градиентпен түсу әдісіне құрылған алгоритмнің жинақталу жылдамдығы туралы теорема құрып, дәлелдейік. Алдағы уақытта керек болатын белгілеулерді жазып кетейік:

3.4-теорема. Егер $g_m(F, \alpha_0) > 0$ шарты орындалса, онда градиентпен түсу әдісі бойынша құрылған $\{\alpha_k\}$ итерациялық тізбегі $F(x)$ мақсаттық функциясының глобалдық минимумына сызықтық жылдамдықпен жинақталады, яғни $\forall k, k = 0, 1, 2, \dots$, үшін $|\alpha_{k+1} - \hat{\alpha}| < \beta |\alpha_k - \hat{\alpha}|$ теңсіздігі орындалатындай $\beta \in (0, 1)$ саны (m мен h -тан тәуелді) табылады.

Дәлелдеуі. $\{\alpha_k\}$ итерациялық тізбектің $\hat{\alpha}$ мақсаттық функцияның глобалдық минимумына жуықтайтынын дәлелдейік.

$$|\alpha_{k+1} - \hat{\alpha}| = |\alpha_k - hg'_m(F, \alpha_k) - \hat{\alpha} + hg'_m(F, \hat{\alpha})| = |(\alpha_k - \hat{\alpha})\alpha'_{k+1}(\alpha_k)|.$$

мұндағы: $\alpha'_{k+1}(\alpha_k)$ - (3.10) функциясының α_k бойынша туындысы.

Енді E жиынында $\alpha'_{k+1}(\alpha_k)$ туындысына баға берейік.

$$\begin{aligned} 0 \leq |\alpha'_{k+1}(\alpha_k)| &= \left| \left(\alpha_k - 2hm \int_{E(F, \alpha_k)} [2(\alpha_k - F(x))]^{m-1} d\mu \right)' \right| = \\ &= \left| 1 - 2^m hm(m-1) \int_{E(F, \alpha_k)} [\alpha_k - F(x)]^{m-2} d\mu \right| = \\ &= \left| 1 - 2^m hm(\alpha_k - F(x))^{m-1} \mu(E(F, \alpha_k)) \right| < \\ &< \left| 1 - 2^m hm(\alpha_k - \hat{\alpha})^{m-1} \mu(E(\hat{\alpha}, \alpha_k)) \right| = \\ &= |1 - 2^m hm(\alpha_k - \hat{\alpha})^m| = |1 - hm(2(\alpha_k - \hat{\alpha}))^m|. \end{aligned}$$

Сонымен, $\alpha'_{k+1}(\alpha_k)$ жатқан аралықты таптық:

$$0 \leq |\alpha'_{k+1}(\alpha_k)| < |1 - hm(2(\alpha_k - \hat{\alpha}))^m|.$$

$|\alpha_{k+1} - \hat{\alpha}| < \beta |\alpha_k - \hat{\alpha}|$ теңсіздігіне сәйкес:

$$|\alpha_{k+1} - \hat{\alpha}| = |(\alpha_k - \hat{\alpha})\alpha'_{k+1}(\alpha_k)| <$$

$$< |(\alpha_k - \hat{\alpha})(1 - hm(2(\alpha_k - \hat{\alpha}))^m)|.$$

$$|1 - hm(2(\alpha_k - \hat{\alpha}))^m| = \beta$$

белгілеуін қабылдайық. Бұдан шығатыны β шамасы h пен m -ге тәуелді, яғни осы параметрлерді таңдау арқылы жинақталу жылдамдығына әсер етуге болады. $hm(2(\alpha_k - \hat{\alpha}))^m$ өрнегінің мәні оң сан болатыны белгілі, себебі $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$ – градиентпен түсу әдісінің қадамы, ал $\alpha_k - \hat{\alpha}$ айырмасы 2.1-леммаға сәйкес оң сан. Олай болса,

$$h = \frac{1 - \beta}{m(2(\alpha_k - \hat{\alpha}))^m}.$$

Яғни әдістің тез жинақталуы үшін m параметрі мен $\beta \in (0,1)$ жылдамдықты тиімді таңдау керек, бірақ көмекші функцияның $\hat{\alpha}$ глобалдық минимумы белгісіз. Сондықтан h -ты тиімді таңдау мәселесі зерттеуді қажет етеді.

3.3 Модификацияланған «киюшылар әдісін» қолдану

Бұл әдіс «киюшылар әдісінің» модификациясы десек те болады. Кейбір әдебиеттерде Вегстейн әдісі деп аталады. $f(x) = 0$ теңдеуін шешу үшін екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуінен әдістің рекурренттік формуласын қорытып жазамыз:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1} - x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}.$$

Байқап отырғандай, бұл әдіс екіқадамды, сондықтан екі бастапқы жуықтау x_0 және x_1 берілуі керек. $f(x) = 0$ теңдеуін $x = \psi(x)$ теңдеуімен алмастырсақ, жай итерациялық әдісті түрлендірген боламыз:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1} - g(x_{k-1})}{1 - \frac{g(x_{k-1}) - g(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}}}.$$

Вегстейн әдісін [142] $g_m(F, \alpha) = 0$ көмекші функцияның α -ға қатысты үлкен нөлін анықтауға қолданайық. Алдағы қарастыруларымыз үшін төмендегі белгілеулерді қабылдайық:

$$\Psi(\alpha) = \alpha - Ag_m(F, \alpha),$$

$$A = \frac{1}{2^m m B}, \quad B = \int_E |F(x)|^{m-1} d\mu.$$

[137] зерттеу жұмысына сәйкес, A коэффициентін қалауымызша таңдай аламыз және итерациялық процесс келесі екі рекуренттік формуладан тұрады:

$$\alpha_{k+1} = \Psi(\tilde{\alpha}_k) \quad (3.10)$$

яғни,

$$\alpha_{k+1} = \tilde{\alpha}_k - \frac{\int_E [|F(x) - \tilde{\alpha}_k| - F(x) + \tilde{\alpha}_k]^m d\mu}{2^m m \int_E |F(x)|^{m-1} d\mu},$$

және

$$\tilde{\alpha}_{k+1} = \alpha_{k+1} - \frac{[\alpha_{k+1} - \alpha_k][\alpha_{k+1} - \tilde{\alpha}_k]}{\alpha_{k+1} - \alpha_k - \tilde{\alpha}_k + \tilde{\alpha}_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

$x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$ бастапқы жуықтауды таңдап алған соң, алғашқы екі жуықтау ретінде $\alpha_0 = F(x_0)$, $\alpha_1 = \Psi(\alpha_0)$ есептейміз және $\tilde{\alpha}_0 := \alpha_0$, $\tilde{\alpha}_1 := \alpha_1$ деп белгілейміз. Сонан соң (3.8) және (3.9) формулаларын қолданамыз. Әр итерациядан соң $\frac{|\tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k+1}|}{|\tilde{\alpha}_k|} \leq \varepsilon$ шартын тексереміз. Егер осы шарт орындалса, онда итерация тоқтайды және теңдеудің түбірі ретінде $\tilde{\alpha}_{k+1}$ – алынады, ал орындалмаса, процесс қайталанады.

Енді осы алгоритмнің жинақталу жылдамдығы туралы теорема құрып, дәлелдейік.

3.5 – теорема. *2.5 теоремасының шарттары орындалса, онда Вегстейн алгоритмі бойынша құрылған $\{\tilde{\alpha}_k\}$ итерациялық тізбегі $F(x)$ мақсаттық функциясының глобалдық минимумына сызықтық жылдамдықпен жинақталады, яғни $\forall k > N$, $N \in \mathbb{N}$, үшін $|\tilde{\alpha}_{k+1} - \hat{a}| < \beta |\tilde{\alpha}_k - \hat{a}|$ орындалатындай $\beta \in (0, 1)$ саны табылады.*

Дәлелдеуі. $\{\tilde{\alpha}_k\}$ итерациялық тізбектің \hat{a} мақсаттық функцияның глобалдық минимумына жуықтайтыны 2.1-леммадан және 2.5-теоремадан шығады. Барлық $k \geq 3$ үшін $\alpha_{k+1} \leq \tilde{\alpha}_k$ теңсіздігі орындалатынын көрсетейік. Вегстейн алгоритмінен: $\alpha_{k+1} = \Psi(\tilde{\alpha}_k)$. Сондықтан мына теңдік орындалады:

$$\alpha_{k+1} - \tilde{\alpha}_k = -A \int_E [|F(x) - \tilde{\alpha}_k| - F(x) + \tilde{\alpha}_k]^m d\mu.$$

Соңғы теңдіктің оң жағының оң еместігі 1-лемманың 1-ші тұжырымынан шығады: $\alpha_{k+1} - \tilde{\alpha}_k \leq 0$.

Вегстейн алгоритмі $k = 3$ бастап қолданатындықтан, барлық $k \geq 3$ үшін

$$\alpha_{k+1} \leq \tilde{\alpha}_k.$$

Сонымен қатар, бұл әдістің негізгі идеясынан [137] кез-келген $k \geq 3$ үшін $\tilde{\alpha}_k$ мәні α_{k+1} және α_k арасында жататыны шығады. Сондықтан (3.9) ескерсек, барлық $k \geq 3$ үшін $\alpha_{k+1} \leq \tilde{\alpha}_k \leq \alpha_k$ теңсіздіктері орындалады. Олай болса,

$$\alpha_{n+2} \leq \tilde{\alpha}_{n+1} \leq \alpha_{n+1}. \quad (3.12)$$

(3.12) негізінде, келесі айырманың абсолюттік мәніне баға аламыз:

$$|\tilde{\alpha}_{k+1} - \hat{\alpha}| \leq |\alpha_{n+1} - \hat{\alpha}| = |\Psi(\tilde{\alpha}_k) - \Psi(\hat{\alpha})| = |(\tilde{\alpha}_k - \hat{\alpha})\Psi'(\tau)|, \quad (3.13)$$

мұндағы τ - $\tilde{\alpha}_k$ және $\hat{\alpha}$ арасында.

$\{\tilde{\alpha}_k\}$ тізбегінің жинақтылығынан, $\forall k > N$ үшін $N \in \mathbb{N}$ табылады және $|\tau - F(x)| \leq |F(x)|$ теңсіздігі орындалады. Енді E жиынында $\Psi'(\tau)$ туындысына баға берейік:

$$\begin{aligned} 0 \leq |\Psi'(\tau)| &= \left| (\alpha - Ag_m(F, \alpha))'_{\alpha=\tau} \right| = \left| 1 - 2mAg_{m-1}((F, \tau)) \right| = \\ &= \left| 1 - \frac{2m \int_E [|F(x) - \tau| - F(x) + \tau]^{m-1} d\mu}{2^m m \int_E |F(x)|^{m-1} d\mu} \right| = \\ &= \left| 1 - \frac{2^m m \int_{E(F, \tau)} [\tau - F(x)]^{m-1} d\mu}{2^m m \int_E |F(x)|^{m-1} d\mu} \right| \leq \\ &\leq \left| 1 - \frac{2^m m \int_{E(F, \tau)} |F(x)|^{m-1} d\mu}{2^{m+p} m \int_E |F(x)|^{m-1} d\mu} \right| = \beta < 1. \end{aligned}$$

Олай болса, (3.12) қостеңсіздігін ескерсек, келесі бағаны аламыз:

$$|\tilde{\alpha}_{k+1} - \hat{\alpha}| \leq |\Psi'(\tau)| |\tilde{\alpha}_k - \hat{\alpha}| < \beta |\tilde{\alpha}_k - \hat{\alpha}|.$$

3.4-теорема дәлелденді.

3.1-салдар. Егер $F(x)$ мақсаттық функция үшін

$$\int_{E(F, \tau)} |F(x)|^{m-1} d\mu \leq \int_E |F(x)|^{m-1} d\mu$$

теңсіздігі орындалса, онда (3.8) тізбегінің жинақталу жылдамдығы:

$$\beta = \left| 1 - \frac{2^m m \int_{E(F, \tau)} |F(x)|^{m-1} d\mu}{2^{m+p} m \int_E |F(x)|^{m-1} d\mu} \right| \leq \left| 1 - \frac{1}{2^p} \right|,$$

мұндағы p – натурал сан.

3.4 Әдістерге талдау жасау

$g_m(F, \alpha) = 0$ теңдеуін шешу үшін қолданылатын жоғарыдағы итерациялық әдістердің қайсысы болмасын дөңгелектеу қателігін жинақтамайды. Жалпы, дөңгелектеу қателігі соңғы итерациядағы есептеулерге ғана қатысты, алдыңғы итерациялардағы есептеулерден тәуелсіз.

Қарастырылған сандық әдістерді көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу үшін қолданудың тиімді тұстары мен қолайсыз жақтары анықталды. Төмендегі 3.1-кестеде әдістердің сипаттамалары салыстырмалы түрде жинақталған.

3.1-кесте. Қарастырылған әдістердің ерекшеліктері

Сандық әдістер	Бастапқы мәлімет	Әр итерацияда функция н/е туынды мәнін есептеу саны	Берілген дәлдікпен есептеу үшін итерация саны	Функция туындысын қолдану қажеттілігі	Дәлдікке априорлық баға берілуі
Дихотомия	$\alpha_0 \leq \hat{\alpha} \leq \alpha_1$	1	$k \geq \log_2 \frac{d_0 - c_0}{\varepsilon}$	–	+
Алтын қима әдісі	$\alpha_0 \leq \hat{\alpha} \leq \alpha_1$	2	$\log_{0,23607} \frac{\varepsilon}{d_0 - c_0} \leq k \leq \leq \log_{0,38196} \frac{\varepsilon}{d_0 - c_0}$	–	+
Жанамалар әдісі	$\hat{\alpha} \leq \alpha_1$	2	–	+	–
Градиентпен түсу әдісі	$\hat{\alpha} \leq \alpha_1$	2	–	+	–
Вегстейн әдісі	$\hat{\alpha} \leq \alpha_1 \leq \alpha_0$	2	–	–	–

Дихотомия және алтын қима әдістері симметриялық әдістерге жатады. Олар бойынша табылған «ең үлкен нөлге» жуықтауларда функцияның мәні ғана есептеліп отырады. Жуықтау дәлдігін нақты бағалауға және алдын-ала берілген дәлдікпен жуықтау үшін орындалуы қажетті итерация санын анықтауға болады. Дихотомия әдісінде функция мәні бір нүктеде, ал алтын қима әдісінде екі нүктеде есептелсе, ал итерация саны бойынша алтын қима әдісі тиімдірек.

Жанамалар және градиентпен түсу әдістері көмекші функцияның туындысын қарастыруды қажет етеді. Бұл әдістер бойынша алынған жуықтау дәлдігін нақты бағалай алмаймыз. Өйткені α_k, α_{k+1} - екеуі де жуық мәндер болғандықтан, $\varepsilon \geq |\alpha_{k+1} - \alpha_k|$ дәлдікті бағалауымыз апостериорлық сипатта болады.

Соңғы екі әдісте алгоритм барысында функция мәнін де, туындының мәнін де есептеуді қажет етеді. Бастапқы нүкте ретінде $g_m(F, d_0) > 0$ шартын қанағаттандыратын d_0 нүктесі таңдалады. Яғни симметриялық әдістердегідей ізделінді нүкте жатқан аралық емес, шартты қанағаттандыратын бір ғана нүкте алынады. Бұл әдістерде итерация саны алдын-ала берілген дәлдікке, бастапқы нүктеге және көмекші функцияның көрсеткіші m -ге, әдістің қадамына тәуелді болатыны анықталды. Жуықтау жылдамдығын арттыру үшін m -нің мәнін өзгертіп отырудың маңызды екені түсінікті болды. Әрине, бұл мәселе алдағы уақытта тереңірек зерттеуді қажет етеді.

Градиентпен түсу әдісін көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу үшін қолдану – тәжірибе жасау барысында тиімсіз екені анықталды. Егер қадам тым үлкен болса, әдіс жинақталмайды, ал қадам қысқа болса, ұзақ жинақталады. Екінші бөлімде дәлелденген 2.7-теорема бойынша $\hat{\alpha} + \frac{1}{2}$ шамасына дейін m -нің кіші мәнін, $\hat{\alpha} + \frac{1}{2}$ шамасынан кейін m -нің үлкен мәнін қолданған тиімді екені анықталды. Яғни m -нің бір мәнімен есептеулер жүргізу мүмкін емес. Басқаша айтқанда, бұл әдіс – әзірше тиімсіз және алдағы уақытта оның тиімділігі көмекші функцияның көрсеткіші мен әдістің қадамын таңдау арқылы жақсарту мәселесі зерттеуді қажет етеді.

Вегстейн әдісі баяу жинақталады және әдістің дәлдігі апостериорлық бағалау әдістемесімен орындалғандықтан, алынған нәтиженің дәл түбірден қаншалықты ауытқитындығы туралы нақты айту қиын.

Жұмыста орындалған зерттеулер мен талдауларға сүйенсек, дихотомия әдісі ең қарапайым, сенімді және тиімді.

Қарастырылған әдістердің ішінде дихотомия және алтын қима әдістері дәлдікті апостериорлық бағалау әдістемесімен айқындайды. Бұл нәтиженің дәл түбірге жақсы жуықтайтының көрсетеді. Алтын қима әдісінде қажетті итерация саны ең аз болды. Ал әр итерациядағы есептеулер саны дихотомия әдісі бойынша ең аз. Жанамалар әдісі, градиентпен түсу әдісі және Вегстейн әдісі дәлдікті бағалау кезінде апостериорлық әдістемеге сүйенеді. Олар бойынша дәл түбірге жақындаймыз, бірақ одан қаншалықты ауытқитынымыз белгісіз, алдыңғы екі әдіске қарағанда итерация саны да артық орындалады.

Қорыта айтқанда, әзірше дихотомия және алтын қима әдістері көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу үшін тиімді әдістер болып тұр.

Мақсаттық функцияның глобалдық минимумын жоғарыда сипатталған әдістерді біртіндеп қолданып есептеудің көрнекілік үшін қарапайым түрде алынған мысалын қарастырайық.

3.1-мысал.

$$F_6(x) = x^3 + 0.5(x - 2)^2 - 3 \quad (3.14)$$

мақсаттық функцияның $[-1; 1]$ кесіндісінде глобалдық минимумын $\varepsilon = 0.000001$ дәлдікпен анықтайық. Алдымен (3.14) мақсаттық функция бойынша $m = 6$ көрсеткішімен көмекші функция құрамыз:

$$g_6(F_6, \alpha) = \int_{-1}^1 [|x^3 + 0.5(x - 2)^2 - 3 - \alpha| - (x^3 + 0.5(x - 2)^2 - 3 - \alpha)]^6 dx \quad (3.15)$$

Енді осы функцияның «ең үлкен нөлін» жоғарыда аталған әдістермен жуықтап анықтайық.

Барлық әдістер үшін C++ тілінде жазылған Visual Studio бағдарламалау ортасында кодтары құрылды. 1-5 қосымшаларда (3.14) функциясының глобалдық минимумын 5 түрлі әдіспен есептеуге құрылған бағдарлама келтірілген. Барлық әдістер үшін соболевтік кубтық формуладағы қадам саны $n = 400$ деп алынды. 2-кестеде әр әдіс бойынша итерация саны, әр итерациядағы есептеу саны, қажетті бастапқы мәлімет, дәлдіктің орындалғаны туралы ақпарат 3.2-кестеде көрсетілген:

Кесте 3.2 – (3.15) функциясының ең үлкен нөлін табуды бірнеше әдіспен есептеу

Әдістер	Бастапқы мәлімет	Бір итерацияда функция мәнін есептеу саны	10^{-6} дәлдікпен есептеу үшін итерация саны	Нәтиже
Дихотомия	$\alpha_0 \leq \hat{\alpha} \leq \alpha_1$	1 есептеу	22	-1,81481
Алтын қима әдісі	$\alpha_0 \leq \hat{\alpha} \leq \alpha_1$	2 есептеу	17	-1,81481
Жанамалар әдісі	$\hat{\alpha} \leq \alpha_1$	2 есептеу	83	-1,8148
Градиентпен түсу әдісі	$\hat{\alpha} \leq \alpha_1$	2 есептеу	∞	
Вегстейн әдісі	$\hat{\alpha} \leq \alpha_1 \leq \alpha_0$	2 есептеу	41	-1,80742

Берілген мақсаттық функцияның глобалдық минимумының аналитикалық жолмен алынған жуық мәні: $\hat{\alpha} \approx -1,814814$.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық зерттеу нәтижелері бойынша қысқаша қорытындылар. Көп айнымалылы функцияның глобалдық минимумын жоғары дәлдікпен табудың тиімді әдісін құру барысында келесі нәтижелер алынды:

- көп айнымалылы үзіліссіз функцияның глобалдық экстремумын табуға арналған жаңа глобалдық оптималдау әдісі;
- көп айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның глобалдық экстремумы координаталарын табу алгоритмі;
- еселі интеграл түріндегі көмекші функция мәндерін тұрақты шекаралық қабаты бар соболевтік кубтық формулаларды қолданып есептеу;
- көмекші функцияның қасиеттері: терісместігі, қатаң дөңестігі, монотондылығы, бірқалыпты үзіліссіздігі, дифференциалданатындығы;
- көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының қажетті шарты;
- көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының жеткілікті шарты;
- C++ ортасында жаңа әдіспен көп айнымалылы тесттік функциялардың глобалдық минимумдарын табу бағдарламасы;

Диссертациялық жұмыста жаңа көмекші функция негізінде глобалдық минимумды табудың тиімді жаңа әдісі алғаш рет ұсынылды.

Қойылған міндеттерді шешу толықтығын бағалау. Диссертациялық жұмыста қойылған мәселенің шешілуінің толықтық деңгейі жоғары: көмекші функция енгізіліп, көп айнымалылы мақсаттық функцияның глобалдық минимумы мен оның координаталарын жоғары дәлдікпен табудың тиімді әдісі құрылды. Көмекші функцияның маңызды қасиеттері зерттеліп, дәлелденді. Ең жиі қолданылатын бірнеше сандық әдістер (дихотомия, жанамалар, градиентпен түсу, алтын қима, Вегстейн әдістері) көмекші функцияның ең үлкен нөлін табу үшін бейімделді және алгоритмі қаралды, олардың жинақталу жылдамдықтары айқындалды және тиімділік тұрғысынан салыстырмалы талдау жасалды.

$g_m(F, \alpha)$ функциясының негізгі қасиеттері F мақсаттық функцияның айнымалыларының санынан да, локалдық экстремумдары санынан да тәуелді емес. Функцияның глобалдық минимумның қажетті және жеткілікті шарттары глобалды минимумды жоғары дәлдікпен анықтау үшін үнемді әрі ұтымды әдіс құруға мүмкіндік береді.

Жаңа әдістің негізгі идеясына – мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу мәселесінен көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» анықтауға келтіру және дөңес функцияның «ең үлкен нөлін» табу үшін әр түрлі белгілі сандық әдістерді бейімдеп қолдану.

Нәтижелерін нақты қолдану бойынша ұсыныстар мен бағдарларын дамыту. Зерттеу нәтижелері теориялық және практикалық сипатқа ие.

Глобалдық оптималдау мәселелері ғылым мен техниканың барлық салаларында, сонымен қатар, әр түрлі өндірістік мәселелерді шешуде кездеседі. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері физика-математикалық, инженерлік мамандықтар студенттері, магистранттары мен докторанттары үшін элективті курстар ұйымдастыруда қолданылуы мүмкін.

Осы саладағы ең жақсы жетістіктермен салыстырғанда орындалған жұмыстың ғылыми деңгейін бағалау. Орындалған ғылыми жұмыстың нәтижелері 10 ғылыми еңбекте жарияланды. Оның ішінде 2 мақала Scopus мәліметтер базасында индекстелген рейтингтік ғылыми журналда, 4 мақала ҚР Ғылым және жоғары білім саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдарда және 4 мақала халықаралық конференциялар материалдарында жарияланды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Horst R., Pardalos P. M. Thoai N.V. Introduction to Global Optimization. – New York: Springer Science & Business Media, 2000. – 354 p.
2. Numerica A. Complete Search in Continuous Global Optimization and Constraint Satisfaction. – Cambridge University Press, 2004.– 94 p.
3. Locatelli M., Schoen F. (Eds.). Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications. Philadelphia. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. – 666 p.
4. Floudas C. A., Pardalos P. M. Recent Advances in Global Optimization. – Princeton: Princeton University Press, 2014. - 644 p.
5. Liberti L., Maculan N. (Eds.). Global Optimization: From Theory to Implementation. – New York: Springer Science & Business Media, 2006. – 428 p.
6. Wu, Z. The effective energy transformation scheme as a special continuation approach to global optimization with application to molecular conformation // SIAM Journal on Optimization. – 1996. - Vol.6(3). – P.748-768.
7. Floudas C. A., Akrotirianakis I. G., Caratzoulas S., Meyer C. A., Kallrath J. Global optimization in the 21st century: Advances and challenges // Comput. Chem. Eng. – 2005. – Vol.(29). – P. 1185–1202.
8. Pinter, J. D. Global Optimization: Scientific and Engineering Case Studies. – New York: Springer Science & Business Media, 2006. – 559 p.
9. Huster W. R., Bongartz D., Mitsos A. Deterministic global optimization of the design of a geothermal organic rankine cycle // Energy Procedia, 2017. - Vol. 129. – P. 50-57.
10. Kunde C., Michaels D., Micovic J., Lutze P., Górak A., Kienle A. Deterministic global optimization in conceptual process design of distillation and melt crystallization // Chemical Engineering and Processing: Process Intensification. – 2015. - Vol. 99. - P. 132-142.
11. González-Díaz, J., González-Rodríguez, B., Leal, M., Puerto, J. Global optimization for bi-level portfolio design: economic insights from the dow jones index // Omega. – 2021. - Vol. 102. – P. 1-18.
12. Locatelli M., Schoen F. (Global) Optimization: historical notes and recent developments // EURO Journal on Computational Optimization. – 2021. – Vol. 9, № 1. – P. 1-15.
13. Klepeis J. L., Pieja M. J., Floudas C. A. Hybrid global optimization algorithms for protein structure prediction // Alternating hybrids. Biophysical journal. – 2003.- Vol. 84(2). – P.869-882.
14. Liberti, L., Sergei, K. Comparison of deterministic and stochastic approaches to global optimization // Int. Trans. Oper. Res. – 2005. – Vol. 12(3). - P. 263–285.
15. Zhigljavsky, A., Zilinskas, A. Stochastic Global Optimization. – New York: Springer Science & Business Media, 2007. – 262 p.

16. Zhu, W., Ali, M. M. Solving nonlinearly constrained global optimization problem via an auxiliary function method // *Journal of computational and applied mathematics*. – 2009. – 230(2). – P. 491-503.
17. Wang Y. J., Zhang J. S. A new constructing auxiliary function method for global optimization // *Mathematical and Computer Modelling*. – 2008. – Vol. 47(11-12). – P. 1396-1410.
18. Sergeyev Y. D., Kvasov D. E. A deterministic global optimization using smooth diagonal auxiliary functions // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015. - Vol. 21. – P. 99-111.
19. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
20. Поляк Б.Т. Градиентные методы минимизации функционалов, решения уравнений и неравенств. – М.: МГУ, 1963. – 70 с.
21. Воронцова Е.А., Гасников А.В., Горбунов Э.А. Ускоренные спуски по случайному направлению с неевклидовой прокс-структурой // *Автоматика и Телемеханика*. – 2019. – № 4. – С. 126–143.
22. Гасников А.В., Кубентаева М.Б. Поиск стохастических равновесий в транспортных сетях с помощью универсального прямо-двойственного градиентного метода // *Компьютерные исследования и моделирование*. – 2018. – Т. 10(3). – С. 335–345.
23. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. – М.: МГУ, 2006. – 281 с.
24. Friedman E.J., Oren S.S. The Complexity of resource allocation and price mechanisms under bounded rationality // *Economic Theory*. – 1995. – Vol. 6(2). – P. 225–250.
25. Juditsky A., Nesterov Yu. Deterministic and stochastic primal-dual subgradient algorithms for uniformly convex minimization // *Stoch. System*. – 2014. – V. 4(1). – P. 44–80.
26. Pele O., Werman M. Fast and robust earth mover's distances // *2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision*. – 2009. – P. 460–467.
27. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Т. 2. – М.: МЦНМО, 2011. – 433 с.
28. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 482 с.
29. Евтушенко Ю.Г. Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. – М.: ВЦ РАН, 2013. – 144 с.
30. Matyukhin V., Kabanikhin S.I., Gasnikov A.V. Convex Optimization with Inexact Gradients in Hilbert Space and Applications to Elliptic Inverse Problems // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*. – 2021. – P. 159-175.
31. Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвиль А. Глубокое обучение. – ДМК Пресс, 2017. – 652 с.
32. Николенко С., Кадурын А., Архангельская Е. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей. – СПб.: Питер, 2018. – 480 с.

33. Beck A., Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems // *SIAM Journal on Imaging Sciences*. – 2009. – Vol. 2. – P. 183–202.
34. Bottou L., Curtis F.E., Nocedal J. Optimization methods for large-scale machine learning. – arXiv.org e-Print archive, 2016. – 95 p.
35. Bubeck S. Convex optimization: algorithms and complexity // *Foundations and Trends in Machine Learning*. – 2015. – Vol. 8, № 3–4. – P. 231–357.
36. Cevher V., Becker S., Schmidt M. Convex optimization for Big Data: Scalable, randomized and parallel algorithms for big data analytics // *IEEE Signal Processing Magazine*. – 2014. – V. 31, № 5. – P. 32–43.
37. Hazan E. Introduction to online convex optimization // *Foundations and Trends® in Optimization*. – 2016. – Vol.2, № 3–4. – P. 157–325.
38. Jaggi M. Revisiting Frank–Wolfe: Projection-free sparse convex optimization // *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning*. – Atlanta, Georgia, USA, 2013. – P. 427-435.
39. Lan G. Gradient sliding for composite optimization // *Math. Prog. Ser. A and B*. – 2016. – 159, №1 –2. – P. 201–235.
40. Nesterov Yu., Stich S. Efficiency of accelerated coordinate descent method on structured optimization problems // *SIAM J. Optim*, 2017. – Vol. 27, № 1. – P. 110–123.
41. Roulet V., d’Aspremont A. Sharpness, restart and acceleration // *NIPS*. – 2017. – P. 1119–1129.
42. Shalev-Shwartz S. et al. Learnability, stability and uniform convergence // *Journal of Machine Learning Research*. – 2010. – Vol. 11. – P. 2635– 2670.
43. Spielman D.A., Teng S.H. Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time // *Journal of the ACM (JACM)*. – 2004. – V. 51, № 3. – P. 385–463.
44. Woodworth B.E., Srebro N. Tight complexity bounds for optimizing composite objectives // *Advances in neural information processing systems*. – 2016. – P. 3639–3647.
45. Ali M., Törn A., Viitanen S. Stochastic Global Optimization: Problem, Classes and Solution Techniques // *J. of Global Optimization*. – 1999. – Vol. 14. – P. 437-447.
46. Moccus J. Application of Bayesian Approach to Numerical Methods of Global and Stochastic Optimization // *J. Global Optimization*. – 1994. – Vol. 4, №4, P. 347-356.
47. Rinnoy Kan A.H.G., Timmer G.T. Stochastic Global Optimization Methods // *Mathematical programming*. – 1987. – Vol. 9. – P. 27-78.
48. Kalos M.H. Monte Carlo methods // M.H.Kalos, P.A.Whitlock. - 2nd rev. and enl. ed. - Weinheim: Wiley-Blackwell. – 2008. - 203 p.
49. Malvin H. Kalos, Paula A. Whitlock Monte Carlo methods / Weinheini, 2004. – 193 p.
50. Fogel D.B. Applying evolutionary programming to selected traveling salesman problem // *Cybernetics and Systems*. – 1993. – Vol. 24, №1. – P. 27–36.

51. Freisleben B., Merz P. A genetic local search algorithm for solving symmetric and asymmetric traveling salesman problems // Nagoya, Japan: IEEE International Conference on Evolutionary Computation. – 1996. – P. 616–621.
52. Yegin K., Martin A.Q. On the design of broad-band loaded wire antennas using the simplified real frequency technique and a genetic algorithm // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – 2003. – Vol. 51. №2. – P. 220–228.
53. Back T., Hoffmeister F., Schwefel H.P. A Survey of Evolution Strategies // Proceedings of the 4th International Conference on Genetic Algorithms / Eds.: R.K. Belew, L.B. Booker. – San-Diego: Morgan Kaufman Publishers Inc. – 1991. – P. 2–9.
54. Dantzig G. B. Linear Programming Mathematics. – Princeton University Press and the RAND Corporation, 1963. – 611 p.
55. Dantzig G. B. Notes on Linear Programming. – Princeton University Press and the RAND Corporation, 1958. – 16 p.
56. Дюкова Е.В., Журавлев Ю.И., Рудаков К.В. Об алгебро-логическом синтезе корректных процедур распознавания на базе элементарных алгоритмов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.. – 1996. – Т. 36 №8. С. 215-223
57. Рудаков К.В. Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. – 1987. – P.30-34.
58. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. – М.: Наука, 1976.
59. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автомат, и телемех. – 1989. – №11. – С. 3-26.
60. Дюбин Г.Н., Корбут А.А. Поведение в среднем жадных алгоритмов для минимизационной задачи о ранце - общие распределения коэффициентов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, №9. – С. 1556-1570.
61. Кочетов Ю.А. Вычислительные возможности локального поиска в комбинаторной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, №5. – С. 788-807.
62. Граничин О. Н., Поляк Б. Т. Рандомизированные алгоритмы оптимизации и оценивания при почти произвольных помехах. – М.: Наука, 2003. – 289 с.
63. Кочетов Ю.А., Плясунов А.В. Генетический локальный поиск для задачи о разбиении графа на доли ограниченной мощности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, №1. – С. 164-176.
64. Карпенко А. П., Митина Е. В., Семенихин А. С. Когенетический алгоритм Парето-аппроксимации в задаче многокритериальной оптимизации / Карпенко А. П., Митина Е. В., Семейихин А. С. // Информационные технологии. – 2013. – №1. – С. 22-32.
65. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. – М.: Физматлит, 2006. – 366 с.
66. Glover F., Kochenberger G. A. (ed.). Handbook of metaheuristics. – Springer, 2003. – 556 p.

67. Kochenberger G.A., McCarl B.A., Paul Wyman F. A heuristic for general integer programming // *Decision Sciences*. – 1974. – Т. 5, №. 1. – P. 36-44.
68. Neri F., Cotta C., Moscato P. (ed.). *Handbook of memetic algorithms*. – Springer, 2011. – Vol. 379. – 363 p.
69. Glover F., Laguna M., Marti R. Fundamentals of scatter search and path relinking // *Control and cybernetics*. – 2000. – Т. 39, №. 3. – P. 653-684.
70. Меламед И.И., Сигал И.Х. Исследование параметров алгоритмов ветвей и границ решения симметричной задачи коммивояжера // *Автомат, и телемех.* – 1997. – №10. – С. 186-192.
71. Финкельштейн Ю.Ю. О полиномиальном алгоритме ε -оптимизации в многомерной задаче о ранце // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1980. – Т. 20, №3. – С. 800-802.
72. Черенин В. П., Хачатуров В. Р. Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о размещении производства // *Экономико-математические методы*. М.: Наука. – 1965. – №2. – С. 279-290.
73. Хачатуров В.Р. Аппроксимационно-комбинаторный метод и некоторые его приложения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1974. – Т. 14, №6. – С. 1464-1487.
74. Лазарев А.А. Графический подход к решению задач комбинаторной оптимизации // *Автомат, и телемех.* – 2007. – №4. – С. 13-23.
75. Колоколов А.А. Регулярные разбиения и отсеечения в целочисленном программировании // *Сиб. журн. исслед. опер.* - 1994. – Т.1, №2. – С. 18-39.
76. Dantzig G. B. et al. The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints // *Pacific Journal of Mathematics*. – 1955. – Vol.5, №2. – P. 183-195.
77. Balas E. An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables // *Operations Research*. – 1965. – Vol.13, №4. – P. 517-546.
78. Pisinger D., Ropke S. A general heuristic for vehicle routing problems // *Computers & operations research*. – 2007. – Vol.34, №8. – P. 2403-2435.
79. Lodi A., Martello S., Monaci M. Two-dimensional packing problems: A survey // *European Journal of Operational Research*. – 2002. – Vol.141, №2. – P. 241-252.
80. Christofides N., Mingozzi A., Toth P. Exact algorithms for the vehicle routing problem, based on spanning tree and shortest path relaxations // *Mathematical programming*. – 1981. – Vol.20, №1. – P. 255-282.
81. Евтушенко Ю.Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // *ЖВМ и МФ.* – 1971. – Т.11, №6. – С. 1390-1403.
82. Евтушенко Ю.Г., Ратькин В.А. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных // *Техническая кибернетика*. – 1987. – №1. – С. 119-127
83. Евтушенко Ю.Г., Малкова В.У., Станевичюс А.А. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // *ЖВМ и МФ.* – 2009. – Т. 49, №2. – С. 255-269.

84. Пиявский С. А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972. – Т.12, №. 4. – С. 888-896.
85. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах: (Информационно-статистические алгоритмы) монография. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1978. – 238 с.
86. Гергель В. П., Гришагин В. А., Городецкий С. Ю. Современные методы принятия оптимальных решений. – Нижний Новгород, 2001. – 122 с.
87. Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
88. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003. – 356 с.
89. Волошинов В. В., Левитин Е. С. Приближенная глобальная минимизация невыпуклых функций, близких к выпуклым // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37, №7. – С. 771-784.
90. Булатов В. П., Касинская Л. И. Некоторые методы минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике и их приложения // Новосибирск: Наука. Методы оптимизации и их приложения. Сиб. отд-ние. – 1982. – С. 32-35.
91. Хамисов О. В. Невыпуклая оптимизация с нелинейными опорными функциями // Тр. ИММ УрО РАН. – 2013. – Т.19, №2. – С. 295-306.
92. Hansen E., Sengupta S. Bounding solutions of systems of equations using interval analysis //BIT Numerical Mathematics. – 1981. – Т.21, №2. – P. 203-211.
93. Kearfott R. B. Rigorous global search continuous problems. – Springer, 2013. –264 p.
94. Pinter J. Branch-and bound algorithms for solving global optimization problems with Lipschitzian structure // Optimization. – 1988. – Т. 19, №1. - P. 101-110.
95. Horst R., Tuy H. Global optimization: Deterministic approaches. – Springer, 1996. – 730 p.
96. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума // М.: Знание., 1990. – 48 с.
97. Исаков К.Т., Кусаинова А.Т. Оптимизационный метод решения обратной задачи электродинамики в линеаризованной постановке // Вестник Карагандинского университета. -2014.- Т.4, № 76. – С. 57-63.
98. Данциг, Джордж Б. Программирование взаимозависимых действий: вторая математическая модель // Эконометрика. – 1949. – Т.17, № 3. – С. 200-211.
99. Данциг, Джордж Б. Оптимальное решение динамической модели Леонтьева с подстановкой // Эконометрика. – 1955. – Т.23, №3. – P.295–302.
100. Nesterov Yu. Excessive gap technique in nonsmooth convex minimization // SIAM J. Optim. – 2004. – Vol.16, №1. – P.235-249.
101. Nesterov Yu. Smoothing technique and its applications in semidefinite optimization // Mathematical Programming. – 2007. – Vol.110, №2 – P.245-259.

102. Nesterov Yu. Rounding of convex sets and efficient gradient methods for linear programming problems // Optimization Methods and Software. – 2008. – Vol.23, №1. – P.109-135.
103. Nesterov Yu. Unconstrained convex minimization in relative scale // Mathematics of Operation Research, 2009. – Vol.34, №1. – P. 180-193.
104. Nesterov Yu. Primal-dual subgradient methods for convex problems // Mathematical programming. – 2009. – Vol.120, №1– P. 221-259.
105. Nesterov Yu. Rounding of convex sets and efficient gradient methods for linear programming problems // Optimization Methods and Software. – 2008. – Vol.23, №1. – P.109-135.
106. Nesterov Yu., Vial J.-Ph. Augmented self-concordant barriers and nonlinear optimization problems with finite complexity // Mathematical Programming. – 2004. – Vol.99, №1. – P.149-174.
107. Nesterov Yu. Smooth minimization of non-smooth functions // Mathematical Programming. – 2005. – Vol.103, №1. – P.127-152.
108. Гасников А. В., Двинских Д. М., Двуреченский П. Е., Камзолов Д. И., Матюхин В. В., Пасечнюк Д. А., Тупица Н. К., Чернов А. В. Ускоренный метаалгоритм для задач выпуклой оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2021. – Vol.61, №1. – С.20–31.
109. А. В. Гасников, Э. А. Горбунов, Д. А. Ковалёв, А. А. М. Мохаммед, Е. О. Черноусова. Обоснование гипотезы об оптимальных оценках скорости сходимости численных методов выпуклой оптимизации высоких порядков // Компьютерные исследования и моделирование. – 2018. – Vol.10, №6. – С.737–753.
110. Рамазанов М. Д. Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. – Уфа: ДизайнПолиграфСервис, 2009. – 178 с.
111. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Математический университет Соболева, 1996. – 484 с.
112. Ramazanov, M.D. Theory of lattice cubature formulas with a bounded boundary layer // Ufa mathematical journal, 2010. – Vol. 2, №3. – P. 63-82.
113. Рамазанов М. Д. Современное состояние теории и приложений кубатурных формул С. Л. Соболева. – Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры, Материалы 7-ой международной научной конференции, Актюбинский Государственный Университет им.К. Жубанова, 2015. – P.291–293.
114. Рамазанов М. Д. Новый алгоритм асимптотически оптимальных решетчатых кубатурных формул. – Уфимский математический журнал, 2010. – Т2, №3. – С. 62-83.
115. Рамазанов М. Д. Асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем и свойством ненасыщаемости. – Математический сборник, 2013. – Т.204, №7.– С. 71-96.
116. Рамазанов М. Д., Рахматуллин Д. Я. Достижение наилучшего порядка приближения интегралов функций из $W_p^m(R_n)$ на решетчатых

кубатурных формулах за счет поворота решетки узлов // Материалы VIII международного семинара-совещания 15-22 августа 2005 г., ВСГТУ, г. Улан-Удэ. – 2005. – С. 109-116.

117. Рахматуллин Д. Я. Вычисление интегралов по многомерным областям на многопроцессорных вычислительных системах // Международная уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике с участием студентов, аспирантов и молодых ученых, БашГУ, Уфа, 30 ноября - 06 декабря 2005 года. - Уфа: РИО БашГУ, 2005. - С. 151-157.

118. Рахматуллин Д. Я. Вычисление интегралов по многомерным областям на многопроцессорных вычислительных системах // Вычислительные технологии. – 2006. —Т. 11, №3. — С. 118-125.

119. Шойнжуров, Д. Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных. – Улан-Удэ, 1977. - 235 с.

120. Шойнжуров, ЦБ. Асимптотически оптимальные квадратурные и кубатурные формулы. – Новосибирск, 1979. - С. 28.

121. Шойнжуров, Ц.Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. - Улан-Удэ: Изд-во Бурятского научного центра СО РАН, 2005. - 247 с.

122. Zheng Q. Optimality conditions for global optimization (I) // Acta Mathematicae Applicatae Sinica. – 1985. – Vol. 2. – P. 66-78.

123. Zheng Q. Robust analysis and global optimization // Computers & Mathematics with Applications. – 1991. – Vol.21, №6-7. – 17-24.

124. Chew S. H., Zheng Q. Integral global optimization: Theory, implementation and applications. – Berlin: New York: Springer, 2012. – 196 p.

125. Zheng Q., & Zhuang D. Integral global minimization: algorithms, implementations and numerical tests // Journal of Global Optimization. – 1995. – Vol. 7. – P. 421-454.

126. Wu D. H., Yu W. Y., Zheng Q. A sufficient and necessary condition for global optimization // Applied mathematics letters. – 2010. – Vol. 23, № 1. – P. 17-21.

127. Kaidasov, Zh, Tutkusheva Zh. Algorithm for Calculating the Global Minimum of a Smooth Function of Several Variables // Mathematical Modelling of Engineering Problems. – 2021. – Vol. 8, №4. – P. 591-596.

128. Tutkusheva Zh.S., Kazbekova G. N., Seilkhanova R.B., Kairakbaev A. K. Wegstein's method for calculating the global extremum // Mathematical Modelling of Engineering Problems. – 2022. – Vol.9, №2. – P. 405-410.

129. Ramazanov M. D., Kaidasov Zh, Tutkusheva Zh. Studying the effectiveness of a new algorithm with a defining function for finding the global minimum of a smooth function // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. - 2020. – Vol.332, №4. – P. 95-102.

130. Рамазанов М.Д., Туткушева Ж.С. Вычисление координат глобального минимума произвольной гладкой функции нескольких

переменных // Вестник КазНИТУ. Физико-математические науки. - 2020. - №3(139). – С. 662-666.

131. Туткушева Ж.С. Применение метода деления отрезка пополам в глобальной оптимизации на основе вспомогательной функции // Вестник КазНПУ им. Абая. Физико-математические науки. – 2022. – Т.79, №3. – С. 591-596.

132. Кайракбаев А.К, Туткушева Ж.С. О свойствах одной вспомогательной функции для вычисления глобального экстремума // Вестник НИА РК №1 2024. – Т.91, №1. – С. 178-188.

133. Определение координат глобального минимума произвольной гладкой функции // Современные инновации. IX международная заочная научно-практическая конференция «Современные инновации в эпоху глобализации: теория, методология, практика» (19-20 август 2019 г.). – 2019. – №4(32). – С. 5-7.

134. Туткушева Ж.С. Теоремы о сходимости нового метода глобальной оптимизации // Тезисы докладов Традиционной международной апрельской научной конференции. – Алматы. – 2022. – С. 113-115.

135. Туткушева Ж.С. Алгоритм глобальной оптимизации гладких функций нескольких переменных // Тезисы докладов Традиционной международной апрельской научной конференции. – Алматы. – 2021. – С. 63-64.

136. Туткушева Ж.С. Свойства вспомогательной функции глобальной оптимизации // IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе. – 2022. – С. 243-250.

137. Jakob Bossek. Single- and Multi-Objective Optimization Test Functions // The R Journal. – 2017. – Vol.9, №1. – P. 103-113.

138. Джо М. Самоучитель Microsoft Visual Studio. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 464 с.

139. Kuznetsov, A.V., Ruban A.I. Search for the main minima of multiextremal functions with active consideration of inequality constraints // Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies. – 2010. – Vol.3. – P. 335-346.

140. Rouban, A. I. Global optimization method based on the selective averaging coordinate with restrictions // J. Control and Computer Science. – 2013. – Vol.1(22). – P. 114-123.

141. Мицель А. А., Шелестов А. А., Романенко В. В. Методы оптимизации. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2020. – 350 с.

142. Wegstein J. H. Accelerating convergence of iterative processes. Communications of the ACM. – 1958. – Vol.1, №6. – P. 9–13.