Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ӘОЖ 517.928.7 Қолжазба құқығында

МҰҚАШ МЕЙРАМБЕК ӘМІРЖАНҰЛЫ

Импульс әсерлі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешімінің талдауы және сапалық қасиеттері

8D05401 – Математика

Философия докторы (PhD) ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер:

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор $\boxed{\text{Джумабаев Д.С.}}$

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Асанова А.Т.

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Станжицкий А.Н.

Қазақстан Республикасы
Ақтөбе, 2024

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР

Осы диссертацияда стандарттарға келесі сілтемелер қолданылды: ҚР СОСЕ 5.04.034-2011. Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура.

Мемлекеттік стандарт 7.32-2001 (2006 жылғы өзгерістер). Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Ұсыну құрылымы мен ережелері.

Мемлекеттік стандарт 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар мен ережелер.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

$\mathbb{C}([t_1, t_2], R^n)$ – $\|x\|_0 = \max_{t\in[t_1,t_2]} \|x(t)\|$ нормалы үзіліссіз $x: [t_1, t_2] \to R^n$ функциялар кеңістігі;

$\mathbb{PC}([a, b]\backslash t_*, R^n)$ – $\|x\|_1 = \max\left\{ \sup_{t\in[a,t_*)} \|x(t)\|, \sup_{t\in(t_*,b]} \|x(t)\| \right\}$ нормалы бөлік-үзіліссіз функциялар кеңістігі;

$\mathbb{PC}([0, T]\backslash I_k, R^n)$ – $\|x\|_1 = \max_{i=\overline{0,k}} \sup_{t\in[t_i,t_{i+1})} \|x(t)\|$ нормалы бөлік -үзіліссіз вектор-функциялар кеңістігі;

$\mathbb{C}\big([0, T], I_k, R^{(k+1)n}\big)$ – $\|x\|_1 = \max_{i=\overline{0,k}} \sup_{t\in[t_i,t_{i+1})} \|x(t)\|$ нормалы барлық $i = \overline{1, k+1}$ үшін $\lim_{t\to t_r-0} x_r(t)$ ақырлы шектері бар $x_r: [t_{r-1}, t_r) \to R^n$ элементімен $[t_{r-1}, t_r)$ аралығында үзіліссіз $x[t] = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), x_{k+1}(t)\big)$ функциялар жүйесінің кеңістігі;

$\mathbb{C}([t_1, t_2], t_0, R^{2n})$ – $\|x[\cdot]\|_1 = \max_{r=1,2} \sup_{t\in\Delta_r} \|x_r(t)\| < \infty$ нормалы $x[t] = (x_1(t), x_2(t))$ функциялар жүйесінің Банах кеңістігі, мұндағы $x_r: \Delta_r \to R^n, (r = 1,2)$ үзіліссіз және $\lim_{t\to t_0-0} x_1(t) < \infty$, $\lim_{t\to t_0+0} x_2(t) < \infty$.

$\mathbb{PC}([t_1, t_2]\backslash\{t^0\}, R^n)$ – $\|x\|_1 = \max\left\{ \sup_{t\in[t_1,t_0)} \|x(t)\|, \sup_{t\in(t_0,t_2]} \|x(t)\| \right\}$ нормалы бөлік-үзіліссіз функциялар кеңістігі.

КІРІСПЕ

Диссертациялық жұмыстың жалпы сипаттамасы. Диссертациялық жұмыс уақыттың бекітілмеген мезетіндегі импульс әсерлі жәй дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің шешімінің сапалық қасиеттерін зерттеуге және қарастырылған есептерді шешуге арналған.

Зерттеудің өзектілігі жаратылыстану есептерін шешуде импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулердің көптеген қолданыстарына, сонымен қатар, импульстік дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешімділігін тиімді анықтауға және олардың шешімдерін табуға мүмкіндік беретін жаңа конструктивті әдістерді дамыту қажеттілігіне байланысты.

Жәй дифференциалдық теңдеулердің импульстік жүйелері объектілердің математикалық модельдері ретінде қызмет етеді, олардың эволюциясы кезінде қысқа мерзімді күштердің әсеріне ұшырайды. Қысқа мерзімді ауытқуы бар нақты процестердің эволюциясын математикалық сипаттауда көбінесе ауытқу ұзақтығын елемеу және бұл ауытқулар «лездік» сипатта деп болжауға болады. Мұндай сипаттау үзілісті траекториялары бар динамикалық жүйелерді немесе импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулерді зерттеу қажеттілігін тудырады.

Осы тектес мәселелер IX ғасырдың соңы – XX ғасырдың басы, сызықты емес механиканың қалыптасу кезеңінде, ғалымдардың назарын қайтадан өзіне аударды. Ең алдымен, олар сызықты емес тербелмелі жүйелердегі процестерді пара-пар сипаттау мүмкіндігімен физиктердің назарын аударды. Сағат үлгісін сипаттайтын мысалды пайдалана отырып, Н.М. Крылов пен Н.Н. Боголюбов [1] импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесін зерттеуге сызықты емес механиканың асимптотикалық әдістерін қолданудың орындылығын көрсетті. Соңғы кездегі технологияның қарқынды дамуы математиктердің үзілісті траекториялары бар жүйелерді одан әрі зерттеу үшін қызығушылықтарын арттырды. Қолданбалы есептердің мысалдарына импульстік автоматты басқару жүйелері, импульстік есептеу жүйелері және т.б. жатады. Зерттеу нәтижелері көптеген инженерлік, техникалық, экономикалық, биомедициналық және басқа мәселелерде қолданыс табады, олардың шолуын Н.А. Перестюк, А.А. Асланян [2] еңбектерінен табуға болады.

Импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулердің сапалық теориясы А.Д. Мышкис, А.М. Самойленко [3], А. Халанай, Д. Векслер [4] және т.б. жұмыстардан көрініс табады.

Импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер теориясы Киев математиктер мектебінің еңбектерінде маңызды дамуға ие болды.

Импульс әсерлі жәй дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік және периодты жағдайдағы шеттік есептер А.М. Самойленко, Н.И.Ронто [5], А.М. Самойленко, Н.А.Перестюк [7], Н.А.Перестюк, В.Н.Шавкопляс [8], Ю.В. С.И.Трофимчук [9] және т.б. қарастырылған.

Тақырыптың қазіргі жағдайы.

Импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін әртүрлі есептер, оларды шешу әдістерін және импульс теориясының басқа да мәселелерін К. К. Кенжебаев, А. Н. Станжицкий [10], И. Рахункова, Ю. Томочек [11], Л. И.

Каранжулов [12], И. Бажо, Е. Лиз [13], С. Г. Христов, Д. Д. Байнов [14], И. Бажо, Н. Ян [15], А. Б. Дишлиев, Д. Д. Байнов [16], К. Шароп Каул [17], В. Лакшмикантам, Д. Д. Байнов, П. С. Симеонов [18], А. А. Мартынюк, Л. Н. Чернетская [19] және басқаларда [20 - 35] қарастырған.

Импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді зерттеуде түрлі әдістерді қолдану әртүрлі терминдермен қорытылған тұжырымдарға келтіріледі.

Осылайша, жәй дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйесінің жалпы шешімін пайдалану импульс әсерлі екінүктелі шеттік есептің бірмәнді шешілу мүмкіндігінің қажетті және жеткілікті шарттарын іргелі матрица тұрғысынан алуға мүмкіндік береді.

Алайда, егер айнымалылы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін іргелі матрицаны сирек жағдайларда ғана құруға болатынын ескерсек, бұл бірмәнді шешілімділік критерийі шеттік есептердің тар класы үшін ғана қолданылады.

Импульстік әсері бар сызықтық емес шеттік есептер үшін олардың шешілімдігінің жеткілікті шарттары бұрын ғана белгіленген, бұл белгілі бір ұйғарымдарды қанағаттандыратын шеттік есептердің кластарын зерттеуге мүмкіндік береді.

Қарастырылып отырған жәй дифференциалдық теңдеулердің сызықты емес жүйелерінің жалпы шешімі белгілі болса, онда импульстік әсер ету шарттарын және шеттік шарттарды пайдалана отырып, кез-келген тұрақтыларға қатысты сызықты емес жүйені құруға болады. Есептің шешілімділігі осы құрастырылған жүйенің шешімінің бар болуымен пара-пар болады. Әдетте, қарапайым дифференциалдық теңдеулердің сызықтық емес жүйелері үшін жалпы шешімді табу мүмкін болмағандықтан, шешілімділіктің мұндай белгісі импульс әсерлі сызықтық емес шеттік есептерде ерекше жағдайларда қолданылады.

Бекітілмеген импульсті бастапқы мән мәселелері бойынша көптеген зерттеулер жүргізілді. Осы мәселелер үшін шешімдердің бар болуы, орнықтылығы және басқа асимптотикалық қасиеттері [36-39] жұмыста және көптеген басқа да жұмыстарда зерттелген. Дегенмен, импульс әсерлі теңдеулер үшін шеттік есептерге қатысты нәтижелердің көпшілігі тек бекітілген уақыт мезетіндегі импульс әсеріне қатысты. Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульстардың болуы шеттік есептердің қасиеттерін айтарлықтай өзгертетінімен байланысты және [40] жұмыста егжей-тегжейлі түсіндіріледі. Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті жүйелер үшін шеттік есептердің алғашқы нәтижелері периодты жағдай үшін [41] жұмыста алынған. Әлсіз сызықты емес бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті жүйелердің периодты шешімдерін зерттеу үшін авторлар аталған мәселені осыған ұқсас бекітілген уақыт мезетіндегі импульсті есептер жиынтығына келтіріп шешуді ұсынды. Осы техника периодты дерлік шешімдерді зерттеуге сәтті қолданылды [42-44]. Дегенмен, осы айтылған техника бойынша бастапқы жүйенің шамамен сызықтық бөлігі және шағын сызықты еместігі бар деп болжанады және бұл шешімдерді Грин функциясының көмегімен интегралдық түрде іздеуге әкелетінін көрсетеді. Шеттік есептердің осындай түрін зерттеудің тағы бір тәсілі [45-48] жұмыстарда ұсынылған. Ол әдіс Самойленконың сандық-аналитикалық әдісінің идеяларына негізделген. Авторлар шеттік есептердің шешімдерінің бар болуын дәлелдеп қана қоймайды, сонымен бірге конструктивті жуықтауды дамыту, оларды іздеу схемаларын ұсынады.

Осы жұмыста бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешуде Н.М. Крылов пен Н.Н. Боголюбов ұсынған «орталау» әдісі қолданылады. Орталау әдісі сызықты емес динамикалық жүйелер талдауының ең кең тараған және тиімді әдістерінің бірі. Жай дифференциалдық теңдеулер үшін орталау әдісінің математикалық негіздемесі Н.М. Крылов пен Н.Н. Боголюбовтың іргелі жұмыстарынан бастау алады. Дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі класстары үшін орталау әдісін жасауда Е.А. Гребеников, Ю.А. Митропольский, Н.Н. Моисеев, Н.А. Перестюк, В.А. Плотников, А.М. Самойленко, А.Н. Филатова және басқалардың еңбектері үлкен роль атқарады. Импульстік әсерсіз шеттік есептерге орталау әдісі көп жиілікті тербелмелі жүйелер үшін, резонанс жағдайындағы, кейбір шеттік есептерді шешуде қолданыс тапқан. Кейіннен орталау әдісі оптимальді басқару мәселелерінде, стохастикалық жүйелерде, импульсті жүйелерде, Фредгольм интегралдық дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді шешуде кеңінен қолданылды [49-60]. Орталау әдісінің көмегімен импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептің шешілімділігі орталанған шеттік есептің шешімділігіне келтіріледі. Бұл сәйкес орталанған шеттік есеп үшін орнатылған нәтижелерді бастапқы есептің шешілімділігін зерттеуге пайдалануға мүмкіндік береді.

Үзілісті динамикалық және нейрондық жүйелердің мәселелері [61-63], импульсті интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін асимптотикалық жағдайлар, импульсті сызықты және квази сызықты жүйелердің болжанбайтын шешімдері [64-67] жұмыстарда қарастырылған. Сонымен қатар, импульсті сингулярлы жағдай, импульсті жүйелердің бифуркациялық процесстері және басқа да мәселелер [68-74] жұмыстарда зерттелген. Бастапқы секірісті сингулярлы ауытқыған интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер және олардың шешімдерінің асимптотикалық жағдайлары [75-79] жұмыстарда келтірілген.

Д.С. Джумабаев импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді зерттеуге және шешуге параметрлеу әдісіне [80] негізделген жаңа тәсілді ұсынды. Шеттік есеп қарастырылған аралық бөліктерге бөлінеді, шешімнің ішкі аралықтардың бастапқы нүктелеріндегі мәндері қосымша параметрлер ретінде енгізіледі және бастапқы шеттік есеп ішкі аралықтарда анықталған функциялар үшін эквивалентті параметрлі есепке келтіріледі. Қосымша параметрлерді енгізу жаңа белгісіз функциялар үшін ішкі аралықтардың бастапқы нүктелерінде бастапқы мәндерді береді. Параметрлердің бекітілген мәндерінде қарапайым дифференциалдық теңдеулері үшін Коши есебі алынады. Осылайша, импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі қарастырылған аралықты бөліктеу, осы теңдеуге Коши есебін сәйкес қояды. Егер бұл есеп бірмәнді шешілімді болса, онда оның шешімін енгізілген параметрлер мен дифференциалдық теңдеудің бастапқы деректері арқылы өрнектеуге болады. Бұл өрнектерді шеттік шарттар мен импульстік шарттарға қойып, енгізілген параметрлерге қатысты сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Шеттік есептің шешілімділігі осы жүйенің шешілімділігіне эквивалентті екендігі дәлелденеді.

Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті шешуде басқаша жағдай орын алады. Коши есебінің шешімін енгізілген параметрлер мен дифференциалдық теңдеудің бастапқы деректері арқылы өрнектеп, сол өрнекті шеттік шарттар мен импульстік шарттарға қойып, енгізілген параметрлерге қатысты сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Сонымен қатар, бекітілмеген мезеттегі импульс пен есептің шешімімен байланысты шарттан сызықты емес теңдеу құрылады. Қарастырылатын шеттік есептің шешімділігі аталған теңдеулер жүйесі мен бекітілмеген мезеттегі импульске қатысты сызықты емес теңдеудің шешілімділігіне эквивалентті екендігі дәлелденеді.

Д.С. Джумабаевтың еңбектерінде шенелмеген операторлары бар сызықтық емес теңдеулер үшін итерациялық процестер құрылды және олардың жинақтылық шарттары орнатылды. Осы нәтижелер жәй дифференциалдық теңдеулер мен дербес туындылы теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептерге қолданылды [81-85].

Д.С. Джумабаевтың параметрлеу әдісі сызықты емес шеттік есептердің оқшауланған шешімдерін табу, Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептерді шешу, импульсті жүктелген гиперболалық теңдеулердің периодты шешімдерін табу, импульс әсерлі жоғары ретті дербес туындылы теңдеулер жүйесі үшін бейлокал есептерді шешу және сызықты емес импульсті шеттік есептерді шешу мәселелерінде кеңінен қолданыс тапты [86-95].

Дифференциалдық теңдеулердің сызықтық емес болуы осы теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептердің сапалық қасиеттерін зерттеуде де, олардың шешімдерін табуда да түбегейлі қиындықтарға әкеледі.

Сызықты емес есептерді шешуде көп жағдайда итерациялық әдістер пайдаланылады. Ньютон, Ньютон-Канторович әдістері сияқты тиімді итерациялық әдістер "жақсы" бастапқы жуықтауды таңдауды талап етеді. Итерациялық процестердің жинақтылық мәселелері, бастапқы жуық мәнді таңдау мәселелері [96-100] және т.б. монографияларда жан-жақты талқыланған.

Жұмыстың мақсаты: Импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешуде орталау және параметрлеу әдістерін қолдану және есепті шешудің тиімді тәсілдерін құру.

Зерттеу міндеттері:

а) импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулері жүйесінің шешімінің бастапқы шарттардан үзіліссіз тәуелділігін анықтау;

b) импульсті жүйенің вариациялау теңдеуін орталау әдісімен шешу;

c) бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есебі шешілімділік шарттарын орталау әдісі арқылы орнату;

d) импульсті дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық емес шеттік есептің шешімділік шарттарын алу және оның шешімін табудың тиімді алгоритмін құру;

e) бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешілімділік шарттарын параметрлеу әдісі арқылы анықтау;

f) бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеудің ось бойындағы екі жақты шенелген шешімдерінің бар болу шарттарын орнату.

Зерттеу нысаны бекітілген және бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер болып табылады.

Зерттеу пәні импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешімділік мәселелері, кіші сандық параметрі бар бастапқы және шеттік есептер үшін орталау және параметрлеу әдісін негіздеу.

Ғылыми жаңалық.

1. Импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін орталанған шеттік есептің шешімінің бар болуы жағдайында бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есебінің шешімінің бар болу шарттары орнатылды.
2. Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеудің ось бойындағы екіжақты, шенелген шешімдерінің бар болу шарттары орталау әдісі арқылы анықталды.
3. Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісі бекітілген уақыт мезетіндегі импульсті сызықты емес жәй дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептерді шешуге қолданылды.
4. Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісі бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті шешуге қолданылды.
5. Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есепті шешудің алгоритмдері және олардың сандық жүзеге асырылуы жасалды.

Қорғауға шығарылатын негізгі ережелер:

- импульсті жүйенің вариациялау теңдеуінің орталау әдісімен шешімін табу;
- бекітілген және бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептің шешімдерінің бар болуын зерттеуге орталау әдісін қолдану;
- бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеудің ось бойындағы екі жақты шенелген шешімдері орталау әдісі арқылы анықтау;
- бекітілген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептің шешімділік шарттары;
- бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешілімділік шарттарын параметрлеу әдісі арқылы анықтау;

- импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есепті параметрлеу әдісімен шешу;
- бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есепті шешудің алгоритмдері және олардың сандық жүзеге асырылуы;
- импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің параметрлерге қатысты сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімін табу алгоритмі құрылды.

Сенімділік және негізділік. Диссертацияда импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер теориясының әдістері мен нәтижелері кеңінен қолданылады. Диссертацияда қарастырылған есептерді зерттеудің және шешудің негізгі әдістері орталау және параметрлеу әдістері болып табылады.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертацияның нәтижелері негізінен теориялық сипатта болып табылады. Жұмыстың ғылыми маңыздылығы бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін зерттеу мен есептерді шешудің конструктивті әдісін құру болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс "Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсері бар дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешу әдістері" (№ AP15473190, 2022-2024 жж.) жобасы аясында «Жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулер» басымдығы бойынша гранттық қаржыландыру шеңберінде орындалды.

Автордың жеке үлесі диссертациялық жұмыста келтірілген барлық нәтижелерді автор тарапынан алынды. Бірлескен авторлар мен ғылыми кеңесшілердің үлесі есептерді қоюдан және алынған нәтижелерді талқылаудан тұрады.

Жұмысты апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

– Сәуір айындағы дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Математика және математикалық моделдеу институты. Алматы, Қазақстан (сәуір 2020 ж., сәуір 2024 ж.);

– «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері» тақырыбында Халықаралық ғылыми конференция. Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті. Ақтөбе, Қазақстан (24-28 мамыр 2022 ж.);

– Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications – MADEA 9, Бішкек, Қырғызстан (21-25 маусым, 2021ж.);

– International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations QUALITDE – 2020, Тбилиси, Грузия (19-21 желтоқсан, 2020 ж.);

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 8 жұмыс жарияланды [110-117], оның ішінде Scopus базасында индекстелетін рейтингтік ғылыми журналда 2 жарияланым, ҚР ҒЖБМ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған ғылыми нәтижелерді жариялау тізіміне енетін ғылыми басылымдарда 2 мақала, халықаралық конференциялар мен семинарлар материалдарында 4 мақала жарияланды.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттердің 117 шығу көзін қамтитын тізімнен тұрады. Формулалардың, теоремалардың, леммалар мен анықтамалардың нөмірленуі үш таңбалы: бірінші сан бөлім нөмірін, екіншісі ішкі бөлім нөмірін, үшіншісі формуланың меншікті нөмірін, теореманы, лемманы, ішкі бөлім ішіндегі анықтамаларды білдіреді. Диссертациялық жұмыс 141 беттен тұрады.

Диссертацияның қысқаша мазмұны. Кіріспе қарастырылып отырған есептердің қазіргі жәй-күйін бағалауды, ғылыми-зерттеу жұмыстарын жүргізу қажеттілігінің негіздемесін қамтиды. Кіріспеде тақырыптың өзектілігі мен жаңалығы, зерттеудің негізгі мақсаттары мен міндеттері, қорғауға ұсынылған ережелер көрсетілген.

Бірінші бөлімде бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешудің орталау әдісі қарастырылады.

1.1 ішкі бөлімінде бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің қойылымы және оған қойылатын негізгі және қосымша шарттар, анықтамалар келтіріледі.

Кіші параметрмен импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін келесі шеттік есеп қарастырылады:

$$\begin{gathered} \dot{x} = \varepsilon X(t,x), t \neq t_i(x), \\ \Delta x|_{\,t=t_i(x)} = \varepsilon I_i(x), \end{gathered} \tag{0.1}$$

$$F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0. \tag{0.2}$$

Мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, $T > 0$ бекітілген сан, $t_i(x) < t_{i+1}(x)$ $(i = 1, 2, \dots)$ – импульс әсерлі мезеттер, $I_i: R^d \to R^d$, $X: R^d \times R^d \to R^d$ және $F: R^d \times R^d \to R^d$ функциялары d өлшемді вектор функциялар, $\Delta x = x(t+0) - x(t)$.

0.1-анықтама. $A = \left\{t \in \left(0, \frac{T}{\varepsilon}\right], \text{қайсыбір } i \text{ үшін } t = t_i(x)\right\}$ ақырлы импульс әсерлі нүктелер жиыны (мүмкін бос) үшін

(i) барлық $t \in \left(0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \backslash A$ үшін үзіліссіз дифференциалданатын;

(ii) барлық $t \in \left(0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \backslash A$ үшін (0.1) жүйенің дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыратын;

(iii) барлық $t \in A$ үшін $\Delta x = x(t+0) - x(t) = \varepsilon I_i\big(x(t)\big)$ теңдеуін қанағаттандыратын $x(t): \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \to R^d$ функциясын (0.1) жүйенің шешімі деп атаймыз.

Сонымен қатар, егер $x(t)$ функциясы $F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0$ шартын қанағаттандырса, онда ол $(0.1), (0.2)$ шеттік есептің шешімі болады.

Біз $x(t)$ функциясы сол жақты үзіліссіз, яғни барлық $t \in A$ үшін $x(t) = x(t-0)$ деп ұйғарамыз.

Айталық,

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)dt\,, \qquad I_0(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{0<t_i(x)<T} I_i(x), \qquad (0.3)$$

шектері бар болсын және $(0.1), (0.2)$ шеттік есепке сәйкес

$$\begin{aligned} &\dot{y} = \varepsilon[X_0(y) + I_0(y)] \\ &F\left(y(0), y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \end{aligned} \qquad (0.4)$$

орталанған шеттік есебін немесе баяу уақыт шакаласында $\tau = \varepsilon t$

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{d\tau} = X_0(y) + I_0(y) \\ &F\big(y(0), y(T)\big) = 0 \end{aligned} \qquad (0.5)$$

есебін қояйық.

$(0.1), (0.2)$ есебі үшін

1.1. $X(t,x)$ және $I_i(x)$ функциялары $Q = \{t \geq 0, x \in U_a\}$ жиынында үзіліссіз, $M > 0$ тұрақтысымен шенелген және x бойынша $L > 0$ тұрақтысымен Липшиц шартын қанағаттандырсын;

1.2. Бірқалыпты (0.3) шектері ($x \in U_a$ бойынша) табылсын;

1.3. (0.5) орталау есебінің қайсыбір ρ маңайымен U_a жиынында жататын шешімі бар болсын. Осы маңайда $X(t,x)$ функциясының x бойынша бірқалыпты үзіліссіз $\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}$ дербес туындылары және $I_i(x)$ функцияларының i бойынша бірқалыпты үзіліссіз $\frac{\partial I_i(x)}{\partial x}$ дербес туындылары бар болсын. $X_0(x)$, $I_0(x)$ және $F(x,y)$ функциялары көрсетілген ρ маңайда $\frac{\partial X_0(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial I_0(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ және $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ үзіліссіз дербес туындылары бар және

$$det\frac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0} \neq 0, \qquad (0.6)$$

орындалсын, мұндағы $x_0 = y(0)$, $F_0(x_0) = F\big(x_0, y(T, x_0)\big)$;

1.4. Бірқалыпты ($x \in U_a$ бойынша)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial X(t,x)}{\partial x}dt = \frac{\partial X_0(x)}{\partial x}, \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{0<t_i(x)<T}\frac{\partial I_i(x)}{\partial x} = \frac{\partial I_0(x)}{\partial x}$$

шектері бар болсын;

1.5. Импульс әсерлі $\{t_i(x)\}$ мезеттері U_a жиынында үзіліссіз функциялар болсын, ал $t = t_i(x)$ беті бөлектеу шартын қанағаттандырсын, яғни

$$\min_{x \in U_a} t_{i+1}(x) < \max_{x \in U_a} t_i(x), (i = 1, 2, ...); \tag{0.7}$$

шарттары орындалсын.

Айталық, барлық $t > 0$ и $x \in U_a$ үшін

$$i(t, x) \leq C \cdot t \tag{0.8}$$

орындалатын $C > 0$ тұрақтысы табылсын, мұндағы $i(t, x)$ шамасы $(0, t)$ аралығындағы импульс саны.

Сондай-ақ, (0.1) жүйенің шешімі әрбір $t = t_i(x)$ бетімен бірден артық емес рет қиылыссын.

Бізге $y = y(\varepsilon t)$ қисығы мен $t = \frac{T}{\varepsilon}$ үшін $t = t_i(x)$ бетінің орналасуына қатысты қосымша шарттарды қою қажет. Әрбір ε үшін 1.5 шартына сәйкес $t = \frac{T}{\varepsilon}$ жазықтығы мен $t = t_i(x)$ беттерінің орналасуына қатысты үш мүмкін жағдай орын алады:

1) $t = \frac{T}{\varepsilon}$ жазықтығы $t = t_i(x)$ беттерінің ешқайсымен қиылыспайды;
2) қайсыбір i үшін $t_i(x) \equiv \frac{T}{\varepsilon}, x \in U_a$;
3) қайсыбір i үшін $t = \frac{T}{\varepsilon}$ жазықтығы $t = t_i(x)$ бетімен қиылысады.

(0.7) шартынан жазықтықтың бірден артық емес осы беттермен қиылыспайтындығы шығады. $N_i(\varepsilon) = \left\{x \in U_a : \frac{T}{\varepsilon} = t_i(x)\right\}$ белгілеуін енгізейік.

***A* шарты.** Егер қайсыбір $\varepsilon < \upsilon$ үшін $N_i(\varepsilon) \neq \emptyset$ және $N_i(\varepsilon) \neq U_a$ болатын $\mu > 0$ және $\nu > 0$ сандары табылады, онда

$$\rho\big(y(T), N_i(\varepsilon)\big) > \mu.$$

1.2 ішкі бөлімінде импульс әсерлі теңдеулер жүйесінің шешімінің бастапқы шарттардан үзіліссіз тәуелділігі қарастырылады.

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі

$$\begin{gathered} \dot{x} = X(t, x), \qquad t \neq t_i(x), \\ \triangle x|_{\ t = t_i(x)} = I_i(x), \end{gathered} \tag{0.9}$$

$t \in [0, T]$ және $x \in U_a$ үшін қарастырылады. (0.9) жүйесі 1.1 және 1.5 шарттарын қанағаттандырсын.

(0.8) шарты бойынша $(0, T)$ аралығында импульс мезеттері CT шамасынан артпайды. $y_1, \dots, y_p \in U_a$ нүктелерін аламыз және олар импульс әсерлі мезеттер тудырады, дәлірек айтқанда $\{\tau_i(y_i)\}_1^p$. Жалпылықты жоғалтпау үшін $\tau_p(y_p) \leq T$ болсын.

Айталық, $x(t,y)$, мұндағы $y(y_1, \dots, y_p)$, функциясы $x(0,y) = x(y)$ бастапқы шартымен бекітілген мезеттер үшін

$$\dot{x} = X(t,x), \qquad t \neq t_i(y_i),$$
$$\Delta x|_{\ t=t_i(y_i)} = I_i(x(t_i)),$$

импульстік жүйесінің шешімі болсын. Айталық, $x(t,z)$ функциясы $z = (z, \dots, z_p), z_i \in U_a$ жиыны үшін импульстік мезеттердің жиынын қолдану арқылы құрылатын $x(0,z) = x(z)$ бастапқы шартымен ұқсас жүйенің шешімі. $t_i(x)$ функциясының үзіліссіздігі $z \to y$ болғанда $t_i(z_i) \to t_i(y_i)$ екенін білдіреді. Осыдан z нүктесінің y нүктесіне мейлінше жақын болғанда $[0,T]$ аралығында $t_i(z_i)$ импульстер саны $p-1$ шамасынан кем есе және p шамасынан артық емес болады.

Айталық, $\underline{t_i} = min\{t_i(y_i), t_i(z_i)\}, \overline{t_i} = max\{t_i(y_i), t_i(z_i)\}$ болсын.

0.1-лемма. (Үзіліссіз тәуелділік). *1.1 және 1.5 шарттары үшін, егер* $z \to y$ *және* $x(z) \to x(y)$ *болса, онда*

$$\sup_{\substack{t\in(\overline{t_i},\underline{t}_{i+1}] \\ i=\overline{1,p-1}}} |x(t,z) - x(t,y)| \to 0 \tag{0.10}$$

орындалады.

Енді бекітілген мезеттегі импульстік әсері бар дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің бастапқы берілгендер бойынша үзіліссіз дифференциалдануын зерттейміз.

$$\begin{gathered} \dot{x} = X(t,x), \qquad t \neq t_i, \\ \Delta x|_{\ t=t_i} = I_i(x) \end{gathered} \tag{0.11}$$

уақыттың бекітілген мезетіндегі импульстік жүйесін қарастырамыз, мұндағы $t \in [0,T]$, $x \in U_a$ және $t_i < t_{i+1}$ нүктелері $[0,T]$ аралығындағы импульс мезеттері. Сондай-ақ, импульс мезеттері $[0,T]$ аралығында ақырлы болсын.

Айталық, $x(t,x_0)$ функциясы $[0,T]$ аралығындағы $x(0,x_0) = x_0$ бастапқы шартымен (0.11) жүйенің шешімі болсын.

0.2-лемма. (Бастапқы берілгендер бойынша үзіліссіз дифференциалдану). *Айталық,* (0.11) *жүйе 1.1 және 1.5 шарттарын қанағаттандырады және* $X(t,x)$ *және* $I_i(x)$ *функциялары* $t \in [0,T]$, $x \in U_a$ *болғанда x бойынша үзіліссіз дифференциалдансын. Онда* $x(t,x_0)$ *шешімі* x_0 *бойынша үзіліссіз дифференциалданады және* $z(t) = \frac{\partial X(t,x_0)}{\partial x_0}$ *функциясы импульс әсерлі сызықты вариациялау*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial X\big(t, x(t, x_0)\big)}{\partial x} z, \qquad t \neq t_i,$$
$$\triangle z|_{\ t=t_i} = \frac{\partial I_i(t, x_0)}{\partial x} z(t_i).$$

теңдеуін қанағаттандырады.

1.3 ішкі бөлімінде бекітілген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі жүйенің вариациялау теңдеуін орталау әдісімен шешу қарастырылады.

Бекітілген t_i уақыт мезетінде импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырамыз:

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \qquad t \neq t_i,$$
$$\triangle x|_{\ t=t_i} = \varepsilon I_i\big(x(t_i)\big), \tag{0.12}$$

мұндағы $i = 1,2, \ldots;\ \varepsilon > 0$ – кіші параметр.

Айталық, келесі шарттар орындалсын:

1.2.1. $X(t, x)$ және $I_i(x)$ функциялары $t \geq 0$ және $x \in D$; $D \subset \mathbb{R}^d$ үшін 1.1 шартын қанағаттандырсын;

1.2.2. Бірқалыпты ($x \in D$ бойынша) шектер бар болсын:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = X_0(x), \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0<t_i<T} I_i(x) = I_0(x)$$

шектері бар болсын;

1.2.3.

$$i(t) \leq Ct \tag{0.13}$$

теңсіздігі орындалатын $C > 0$ тұрақтысы табылсын, мұндағы $i(t)$ шамасы $(0, T)$ аралығындағы импульс саны;

1.2.4. Орталанған жүйенің

$$\dot{y} = \varepsilon[X_0(y) + I_0(y)] \tag{0.14}$$

$\varepsilon = 1$ және $t \in [0, T]$ үшін $y = y(\varepsilon t, x_0), y(0, x_0) = x_0 \in D$ шешімі бар және ол ρ маңайымен D облысына тиісті;

1.2.5. $X(t, x)$ және $I_i(x)$ функциялары $t \geq 0, x \in D$ үшін үзіліссіз дифференциалдансын және

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} dt = \frac{\partial X_0(x)}{\partial x}, \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0<t_i<T} \frac{\partial I_i(x)}{\partial x} = \frac{\partial I_0(x)}{\partial x} \tag{0.15}$$

бірқалыпты ($x \in D$ бойынша) шектері бар болсын.

0.1-теорема. *(Вариациялау теңдеуінің орталауы туралы). Айталық, 1.2.1 – 1.2.5 шарттары орындалсын және* $\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}$ *және* $\frac{\partial I_i(x)}{\partial x}$ *функциялары* $t \geq 0, x \in D$ *үшін L тұрақтысымен x бойынша липшицтік функциялар болсын. Онда кез-келген* $\eta > 0$ *үшін* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *болғанда* (0.12) *дәл теңдеудің және* (0.14) *орташаланған теңдеуінің шешімдерінің бастапқы берілгендер бойынша туындылары*

$$\left\| \frac{\partial x(t,z)}{\partial z} |_{\, z=x_0} - \frac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z} |_{\, z=x_0} \right\| \leq \eta, t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \qquad (0.16)$$

теңсізідігін қанағаттандыратын $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$ *саны табылады.*

1.4 ішкі бөлімінде бекітілген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешімі қарастырылады.

$$F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \qquad (0.17)$$

шеттік шартымен (0.12) жүйе үшін шеттік есепті қарастырамыз.

0.2-теорема. *Айталық, 2.1–2.3 шарттары және сонымен қатар 1.2.6.*

$$\dot{y} = \varepsilon[X_0(y) + I_0(y)],$$

$$F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0,$$

орталанған шеттік есебінің қайсыбір ρ *маңайымен D облысына тиісті* $y = y(\varepsilon t) = y(\tau)$ *шешімі және* $X(t,x)$ *функциясының* $y(t)$ *нүктесінің* ρ *маңайында x бойынша үзіліссіз* $\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}$ *дербес туындылары, ал* $I_i(x)$ *функцияларының* $i \in N$ *бойынша бірқалыпты үзіліссіз* $\frac{\partial I_i(x)}{\partial x}$ *дербес туындылары бар болады.* $X_0(x), I_0(x)$ *және* $F(x,y)$ *функцияларының көрсетілген* ρ *маңайда* $\frac{\partial X_0(x)}{\partial x}, \frac{\partial I_0(x)}{\partial x}, \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ *үзіліссіз дербес туындылары бар болсын және*

$$det \frac{\partial F_0(x)}{\partial x_0} \neq 0,$$

мұндағы $x_0 = y(0), F_0(x_0) = F\big(x_0, y(T, x_0)\big)$.

1.2.7. $y(t)$ *нүктесінің* ρ *– маңайында x үшін шектер бар болсын:*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}dt=\frac{\partial X_0(x)}{\partial x},\qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{0<t_i<T}\frac{\partial I_i(x)}{\partial x}=\frac{\partial I_0(x)}{\partial x}$$

шарттары орындалсын.

Онда $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *болғанда* (0.12), (0.17) *шеттік есептің* $y(\varepsilon t)$ *нүктесінің* σ_0*-маңайына тиісті болатын* $x(t,\varepsilon)$ *жалғыз шешімі бар болатындай* $\varepsilon_0>0$ *және* $\sigma_0<\rho$ *сандары табылады, яғни*

$$|x(t,\varepsilon)-y(\varepsilon t)|<\sigma_0, t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right], \varepsilon\in(0,\varepsilon_0) \tag{0.18}$$

және

$$\sup_{t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]}|x(t,\varepsilon)-y(\varepsilon t)|\to 0, \varepsilon\to 0. \tag{0.19}$$

1.5 ішкі бөлімінде бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепті орталау әдісімен шешу қарастырылады.

Кіші параметрмен бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін

$$\begin{gathered}\dot{x}=\varepsilon X(t,x), t\neq t_i(x),\\ \Delta x|_{\,t=t_i(x)}=\varepsilon I_i(x),\\ F\left(x(0),x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right)=0\end{gathered} \tag{0.20}$$

шеттік есебін қарастырамыз. Мұндағы $\varepsilon>0$ – кіші параметр, $T>0$ бекітілген, $t_i(x)<t_{i+1}(x)$ $(i=1,2,\dots)$ – импульс әсерлі мезеттер, X, I_i және F функциялары d өлшемді вектор функциялар.

Айталық, барлық $t>0$ және $x\in U_a$ үшін

$$i(t,x)\leq C\cdot t \tag{0.21}$$

орындалатын $C>0$ тұрақтысы табылсын, мұндағы $i(t,x)$ шамасы $(0,t)$ аралығындағы импульс саны.

Сондай-ақ, (0.21) жүйенің шешімі әрбір $t=t_i(x)$ бетімен бірден артық емес рет қиылыссын.

0.3-теорема. Айталық, 1.1-1.5 шарттары орындалсын. Онда барлық $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ үшін (0.20) шеттік есебінің $y(\varepsilon t)$ нүктесінің σ_0 маңайында шешімі бар болатын $\varepsilon_0>0$ және $0<\sigma_0<\rho$ сандары табылады, яғни

$$|x(t,\varepsilon)-y(\varepsilon t)|<\sigma_0, t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right], \text{және} \sup_{t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]}|x(t,\varepsilon)-y(\varepsilon t)|\to 0, \varepsilon\to 0.$$

1.6 ішкі бөлімінде бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульстік әсері бар дифференциалдық теңдеудің ось бойындағы екі жақты шенелген шешімдері қарастырылады.

Кіші параметрмен бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі

$$\dot{x}=\varepsilon X(t,x),\ t\neq t_i(x), \tag{0.22}$$

$$\Delta x|_{t=t_i(x)}=\varepsilon I_i(x) \tag{0.23}$$

$$x(0)=x_0 \tag{0.24}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылады, мұндағы $\varepsilon>0$ – кіші параметр, $t_i(x)<t_{i+1}(x)$ $(i=1,2,\dots)$ – импульс әсерлі мезеттер, X және I_i функциялары d өлшемді вектор функциялар.

$U_a=\{x\in R^d: |x|\leq a\}$ болсын. Айталық, келесі шарттар орындалсын:

1. $X(t,x)$ және $I_i(x)$ функциялары $Q=\{t\geq 0, x\in U_a\}$ жиынында үзіліссіз, $M>0$ тұрақтысымен шенелген және x бойынша $L>0$ тұрақтысымен Липшиц шартын қанағаттандырады;

2. $t\geq 0, x\in U_a$ үшін t,x бойынша бірқалыпты

$$X_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}X(s,x)ds$$

$$I_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t<t_i(x)<T}I_i(x);$$

ақырлы шектері бар болсын;

3. Орталанған жүйенің

$$\dot{y}=\varepsilon[X_0(y)+I_0(y)] \tag{0.25}$$

$y=y(t),\ \ y(0)=x(0)$ шешімі $t\geq 0$ үшін анықталған және қайсыбір ρ маңайымен U_a жиыныда жатады және бірқалыпты асимптотикалық орнықты;

4. Импульс әсерлі $\{t_i(x)\}$ мезеттері $i\in N$ бойынша U_a жиынында бірқалыпты үзіліссіз функциялар болсын, ал $t=t_i(x)$ беті бөлектеу шартын қанағаттандырсын, яғни

$$\min_{x\in U_a}t_{i+1}(x)<\max_{x\in U_a}t_i(x), (i=1,2,\dots)$$

Айталық, барлық $t > 0$ и $x \in U_a$ үшін

$$i(t,x) \le C \cdot t$$

орындалатын $C > 0$ тұрақтысы табылсын, мұндағы $i(t,x)$ шамасы $(0,t)$ аралығындағы импульс саны.
Сонымен қатар, $(0.22) - (0.24)$ есебінің шешімі әрбір $t = t_i(x)$ бетімен бірден артық емес рет қиылыссын, яғни соғу болмасын.

0.4-теорема. *Айталық, 1-4 шарттары орындалсын. Онда кез-келген $\eta > 0$ үшін $t \ge 0$ болғанда $\varepsilon < \varepsilon_0$ үшін*

$$|x(t) - y(t)| < \eta \tag{0.26}$$

теңсіздігі орындалатын ε_0 саны табылады, мұндағы $x(t)$ $(x(0) = y(0) = x_0)$ функциясы $(0.22) - (0.24)$ дәл жүйенің шешімі.

$(0.22) - (0.24)$ импульстік жүйені қарастырамыз және импульс нүктелері барлық осьте анықталған болсын делік, яғни $t_i(x)$ импульс нүктелері $i \in Z$, $i = \pm 1, \pm 2, \dots$ үшін анықталған.

0.5-теорема. *Айталық, $X(t,x)$ және $I_i(x)$ функциялары $Q = \{t \in R, x \in U_a\}$ $(U_a = \{x \in R^d: |x| \le a\})$ облысында анықталған және осы облыста*

1. *$X(t,x)$ және $I_i(x)$ функциялары айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз, $M > 0$ тұрақтысымен шенелген және x бойынша $L > 0$ тұрақтысымен Липшиц шартын қанағаттандырады*;

2. *Бірқалыпты $t \in R$ және $x \in U_a$ бойынша келесі шектер бар болсын*

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(s,x)ds,$$

$$I_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t<t_i(x)<T} I_i(x);$$

шектері бар болсын;

3. *Орталанған (0.26) жүйесінің U_a облысында x_0 асимптотикалық орнықты тепе-теңдік жағдайы бар болсын;*

4. *Импульс әсерлі $\{t_i(x)\}$ мезеттері U_a облысында $i \in N$ бойынша бірқалыпты үзіліссіз функциялар болсын, ал $t = t_i(x)$ беті*

$$\min_{x\in U_a} t_{i+1}(x) < \max_{x\in U_a} t_i(x), (i = 1, 2, \dots);$$

бөлектеу шартын қанағаттандырсын;

5. *$t = t_{-1}(x)$ және $t = t_1(x)$ беттері $t = 0$ гипержазықтығымен қиылыспасын.*

Онда кел-келген $\eta > 0$ үшін $\varepsilon < \varepsilon_0$ болғанда $t \in R$ үшін дәл жүйенің $x(t)$ шешімі болатын және

$$|x(t) - x_0| < \eta$$

бағалауы орындалатын ε_0 саны табылады.

2.1 ішкі бөлімінде импульс әсерлі сызықты емес жәй дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті параметрлеу әдісімен шешу қарастырылады.

Жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін импульс әсерлі

$$\dot{x} = f(t, x), t \in (0, T)\backslash\{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \tag{0.27}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, x \in R^n, d \in R^n \tag{0.28}$$

$$x(t_i + 0) - x(t_i - 0) = s_i, s_i \in R^n, i = \overline{1, k}, \tag{0.29}$$

есебін қарастырамыз, мұндағы $f: [0, T] \times R^n \to R^n$ мүмкін $t = t_i$, $i = \overline{1, k}$ нүктелерінде үзілісті вектор-функция; B және C $(n \times n)$ тұрақты матрицалар; $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = T$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Белгілеу енгізейік: $I_k = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$.

Айталық, $PC([0, T]\backslash I_k, R^n)$ кеңістігі

$$\|x\|_1 = \max_{i=\overline{0,k}} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1})} \|x(t)\|$$

нормасылы бөлік-үзіліссіз вектор-функциялар кеңістігі болсын.

0.2 - анықтама. $(0.27) - (0.29)$ импульс әсерлі есептің шешімі деп

- (0.27) теңдеуін (уақыт бойынша $t = 0, t = T$ нүктелерінде $x_+^*(0), x_-^*(T)$ біржақты туындылары қанағаттандырады);
- (0.28) шеттік шартын;
- I_k нүктелерінде (0.29) импульс әсер шартын

қанағаттандыратын $(0, T)\backslash I_k$ аралығында бөлік-үзіліссіз дифференциалданатын $x^*(t) \in PC([0, T]\backslash I_k, R^n)$ функциясын атаймыз.

$[0, T]$ кесіндісін

$$[0, T) = \cup_{r=1}^{k+1} [t_{r-1}, t_r).$$

түріндегі бөлік интервалдарға бөлеміз.

Айталық, $C\big([0, T], I_k, R^{(k+1)n}\big)$ арқылы $\|x[\cdot]\|_2 = \max\limits_{r=\overline{1,k+1}} \sup\limits_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|x_r(t)\|$ нормалы барлық $i = \overline{1, k+1}$ үшін $\lim\limits_{t \to t_r - 0} x_r(t)$ ақырлы шектері бар $x_r: [t_{r-1}, t_r) \to R^n$ элементімен $[t_{r-1}, t_r)$ аралығында үзіліссіз $x[t] = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), x_{k+1}(t)\big)$ функциялар жүйесінің кеңістігін белгілейік.

Бөлік интервалдардағы $x(t)$ функциясының тарылуын $x_r(t)$: $x_r(t) = x(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, k+1}$ арқылы белгілейміз және $x_r(t)$ функциясы

$$\dot{x_r} = f(t, x_r), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, k+1} \qquad (0.30)$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \to T-0} x_{k+1}(t) = d, \qquad (0.31)$$

$$x_{i+1}(t_i + 0) - \lim_{t \to t_i - 0} x_i(t) = s_i, i = \overline{1, k}. \qquad (0.32)$$

көпнүктелі есебін қағаттандырады.

Бөлікше интервалдың ортасында белгісіз функцияның мәні ретінде $\xi_r = x_r\left(\frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right), r = \overline{1, k+1}$ параметрін енгіземіз және әрбір r – інші интервалда $x_r(t) = y_r(t) + \xi_r$ алмастыруын жасаймыз.
$(0.30) - (0.32)$ есебін оған эквивалентті ξ_r параметрлі есебіне көшіреміз:

$$\dot{y_r} = f(t, y_r + \xi_r), t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad (0.33)$$

$$y_r\left(\frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right) = 0, r = \overline{1, k+1} \qquad (0.34)$$

$$By_1(0) + B\xi_1 + C \lim_{t \to T-0} y_{k+1}(t) + C\xi_{k+1} = d, \qquad (0.35)$$

$$y_{i+1}(t_i + 0) + \xi_{i+1} - \lim_{t \to t_i - 0} y_i(t) - \xi_i = s_i, i = \overline{1, k}. \quad (0.36)$$

$[t_r, t_{r-1})$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын және (0.33) жүйесін, (0.34) шартын және $\xi_r = \xi_r^*$, $r = \overline{1, k+1}$ параметрімен бірге $(0.35), (0.36)$ шарттарын қанағаттандыратын $y_r^*(t), r = \overline{1, k+1}$ функциялары үшін $(y^*[t], \xi^*)$ жұбы, мұндағы $y^*[t] = \left(y_1^*(t), y_2^*(t), \dots, y_{k+1}^*(t)\right) \in C\left([0, T], I_k, R^{(k+1)n}\right)$, $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_{k+1}^*) \in R^{(k+1)n}$, $(0.33) - (0.36)$ есебінің шешімі деп аталады.

$(0.27) - (0.29)$ және $(0.33) - (0.36)$ есептерінің эквиваленттілігін келесі мағынада түсінеміз.

Айталық, $x^*(t)$ функциясы $(0.27) - (0.29)$ импульс әсерлі есебінің шешімі болсын, онда $(y^*[t], \xi^*)$ жұбы $(0.33) - (0.36)$ параметрлі есебінің шешімі болады, мұндағы

$$y^*[t] = \left(x^*(t) - x^*\left(\frac{t_1 + t_0}{2}\right), x^*(t) - x^*\left(\frac{t_2 + t_1}{2}\right), \dots, x^*(t) - \right.$$

$$\left. - x^*\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right), x^*(t) - x^*\left(\frac{t_{k+1} + t_k}{2}\right)\right)$$

және

$$\xi^* = \left(x^*\left(\frac{t_1 + t_0}{2}\right), x^*\left(\frac{t_2 + t_1}{2}\right), \dots, x^*\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right), x^*\left(\frac{t_{k+1} + t_k}{2}\right)\right).$$

Керісінше, егер $\tilde{y}[t] = \left(\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \dots, \tilde{y}_{k+1}(t)\right) \in C\left([0,T], I_k, R^{(k+1)n}\right)$ және $\tilde{\xi} = \left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_{k+1}\right) \in R^{(k+1)n}$ элементтерімен $\left(\tilde{y}[t], \tilde{\xi}\right)$ жұбы $(0.33)-(0.36)$ параметрлі есептің шешімі болса, онда $\tilde{x}(t) = \tilde{y}_r + \tilde{\xi}_r, t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, k+1}$, және $\tilde{x}(T) = \lim\limits_{t\to T-0} \tilde{y}_{k+1}(t) + \tilde{\xi}_{k+1}$ арқылы анықталған $\tilde{x}(t)$ функциясы $(0.27)-(0.29)$ импульс әсерлі есептің шешімі болады.

$(0.33)-(0.36)$ параметрлі есебінің $(0.30)-(0.32)$ есебінен айырмашылығы оның $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, k+1}$ бөлік интервалдарда ізделінді функция мәні үшін (0.34) шартының болуында.

Бұл параметрлеу әдісінің модификациясы. Ізделінді функция үшін бастапқы шарт орнына $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, k+1}$ бөлік интервалдардың орталарында ізделінді функция мәндерімен (0.34) шарты пайда болатын $(0.33)-(0.36)$ параметрлі есебін аламыз.

Айталық, барлық $r = \overline{1, k+1}$ үшін ξ_r белгілі болсын. Сонда (0.33), (0.34) есебі сызықты емес екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуі

$$y_r(t) = \int_t^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} f(\tau, y_r(\tau) + \xi_r)\, d\tau, t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right), r = \overline{1, k+1}, \quad (0.37)$$

$$y_r(t) = \int_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} f(\tau, y_r(\tau) + \xi_r)\, d\tau, t \in \left[\frac{t_r + t_{r-1}}{2}, t_{r-1}\right), r = \overline{1, k+1}. \quad (0.38)$$

түріндегі есепке эквивалентті.

Белгісіз $y_r(t)$ функциясының мәндерін табу үшін $t = t_r, r = \overline{1, k+1}$ нүктелерінің орналасуына байланысты (0.37) немесе (0.38) берілулерін пайдаланамыз.

$$y_1(0) = \int_0^{\frac{t_1}{2}} f(\tau, y_1(\tau) + \xi_1)\, d\tau, \quad (0.39)$$

$$\lim_{t\to T-0} y_{k+1}(t) = \int_{\frac{t_{k+1}+t_k}{2}}^{t} f(\tau, y_{k+1}(\tau) + \xi_{k+1})\, d\tau, \quad (0.40)$$

$$y_{i+1}(t_i + 0) = \int_{t_i}^{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} f(\tau, y_{i+1}(\tau) + \xi_{i+1})\, d\tau, \quad (0.41)$$

$$\lim_{t\to t_i-0} y_i(t) = \int\limits_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}}^{t_i} f(\tau, y_i(\tau)+\xi_i)\,d\tau, i=\overline{1,k}. \quad (0.42)$$

$(0.39)-(0.42)$ берілулерін (0.35) және (0.36) қатынастарына және сәйкесінше $y_1(0)$, $\lim\limits_{t\to T-0} y_{k+1}(t)$, $y_{i+1}(t_i+0)$, $\lim\limits_{t\to t_i-0} y_i(t)$, $i=\overline{1,k}$ мәндерін қойып,

$$B\xi_1 + B\int\limits_0^{\frac{t_1}{2}} f(\tau, y_1(\tau)+\xi_1)\,d\tau + C\xi_{k+1} +$$

$$+C\int\limits_{\frac{t_{k+1}+t_k}{2}}^{T} f(\tau, y_{k+1}(\tau)+\xi_{k+1})\,d\tau - d = 0, \quad (0.43)$$

$$\int\limits_{t_i}^{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} f(\tau, y_{i+1}(\tau)+\xi_{i+1})\,d\tau + \xi_{i+1} -$$

$$-\int\limits_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}}^{t_i} f(\tau, y_i(\tau)+\xi_i)\,d\tau - \xi_i - s_i = 0, i=\overline{1,k}, \quad (0.44)$$

теңдіктерін аламыз.

Белгілі $y_r(t)$ $\left(i=\overline{1,k+1}\right)$ функциялары үшін (0.43), (0.44) жүйесі $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+1})$ параметрлеріне қатысты

$$Q(\xi, y) = 0, \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+1}) \in R^{(k+1)n}$$

теңдеулер жүйесін құрайды.

***E* шарты.** *I_k таңдауы үшін $Q(\xi,0)=0$ сызықты емес теңдеулер жүйесінің $\xi^{(0)} = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_{k+1}^{(0)}\right) \in R^{(k+1)n}$ шешімі бар болады.*

Айталық, *E* шарты орындалсын.

$$\dot{y}_r = f\left(t, y_r + \xi_r^{(0)}\right), t \in [t_{r-1}, t_r),$$

$$y_r\left(\frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right) = 0, r = \overline{1, k+1},$$

есебінің $y_r^{(0)}(t),\ t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, k+1}$ шешімі бар және $y_r^{(0)}[t] = \left(y_1^{(0)}(t), y_2^{(0)}(t), \dots, y_{k+1}^{(0)}(t)\right)$ функциялар жүйесі $C\left([0,T], I_k, R^{(k+1)n}\right)$ кеңістігіне тиісті болсын.

$\left(y^{(0)}[t], \xi^{(0)}\right)$ жұбын ескере отырып, $[0,T]$ аралығында бөлік-үзіліссіз функцияны анықтаймыз: $x^{(0)}(t) = y^{(0)}(t) + \xi_r^{(0)}, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, k+1}$ және $x^{(0)}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} y_{k+1}^{(0)}(t) + \xi_{k+1}^{(0)}$.

Алдымен $\rho_\xi > 0, \rho_y > 0, \rho_x > 0$ сандарын таңдаймыз және

$$S\left(\xi^{(0)}, \rho_\xi\right) = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+1}) \in R^{(k+1)n}: \left\|\xi - \xi^{(0)}\right\| = \right.$$

$$\left. = \max_{r=\overline{1,k+1}} \left\|\xi_r - \xi_r^{(0)}\right\| < \rho_\xi\right\},$$

$$S\left(y^{(0)}[t], \rho_y\right) = \left\{y[t] \in C\left([0,T], I_k, R^{(k+1)n}\right): \left\|y[\cdot] - y^{(0)}[\cdot]\right\|_2 < \rho_y\right\},$$

$$S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right) = \left\{x(t) \in PC([0,T] \backslash I_k, R^n): \left\|x - x^{(0)}\right\|_1 < \rho_x\right\},$$

$$G(\rho_x) = \left\{(t,x): t \in [0,T], x \in S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right)\right\}.$$

жиындарын анықтаймыз.

Айталық E шарты орындалсын.

Келесі алгоритм бойынша $\left(y^{(m)}[t], \xi^{(m)}\right), m \in N$ тізбектер жұбын құрамыз.

1-қадам.

(1) Біз $Q\left(\xi, y^{(0)}\right) = 0$ теңдеулер жүйесінен

$$\xi^{(1)} = \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_{k+1}^{(1)}\right) \in R^{(k+1)n}$$

табамыз;

(2) Содан соң $\xi_r = \xi_r^{(1)}, r = \overline{1, k+1}$ үшін $(0.33), (0.34)$ есебін шеше отырып $y^{(1)}[t] = \left(y_1^{(1)}(t), y_1^{(1)}(t), \dots, y_{k+1}^{(1)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің элементтерін табамыз.

2-қадам.

(1) Біз $Q\left(\xi, y^{(1)}\right) = 0$ теңдеулер жүйесінен

$$\xi^{(2)} = \left(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_{k+1}^{(2)}\right) \in R^{(k+1)n}$$

табамыз;

(2) Содан соң $\xi_r = \xi_r^{(1)}, r = \overline{1, k+1}$ үшін $(0.33), (0.34)$ есебін шеше отырып $y^{(2)}[t] = \left(y_1^{(2)}(t), y_1^{(2)}(t), \dots, y_{k+1}^{(2)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің элементтерін табамыз.

Осылай процессті жалғастыра отырып m-қадам аламыз.

m-қадам.

(1) Біз $Q\left(\xi, y^{(m-1)}\right) = 0$ теңдеулер жүйесінен

$$\xi^{(m)} = \left(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_{k+1}^{(m)}\right) \in R^{(k+1)n}$$

табамыз;

(2) $\xi_r = \xi_r^{(m)}, r = \overline{1, k+1}$ үшін $(0.33), (0.34)$ есебін шеше отырып $y^{(m)}[t] = \left(y_1^{(m)}(t), y_1^{(m)}(t), \dots, y_{k+1}^{(m)}(t)\right), m = 1,2, \dots$ функциялар жүйесінің элементтерін табамыз.

C шарты. *$f(t,x)$ функциясы үзіліссіз және $G(\rho_x)$ облысында бірқалыпты үзіліссіз $f_x'(t,x)$ дербес туындылары бар және барлық $(t,x) \in G(\rho_x)$ үшін*

$$\|f_x'(t,x)\| \leq L$$

орындалатындай $L > 0$ саны табылады.

Белгілеулер енгізейік

$$h = \max_{i=\overline{1,k+1}} \left\{ \sup_{t \in \left[t_{i-1}, \frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)} \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} - t \right), \sup_{t \in \left[\frac{t_i + t_{i-1}}{2}, t_i\right)} \left(t - \frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \right\}.$$

0.6-теорема. *Айталық I_k, $\rho_\xi > 0$, $\rho_y > 0$, $\rho_x > 0$ үшін E шарты және C шарттары орындалсын, және $\frac{\partial Q(\xi, y)}{\partial \xi}: R^{(k+1)n} \to R^{(k+1)n}$ Якоби матрицасы барлық $(y[t], \xi) \in S\left(y^{(0)}[t], \rho_y\right) \times S\left(\xi^{(0)}[t], \rho_\xi\right)$ үшін қайтымды болсын, және келесі теңсіздіктер орындалсын:*

i) $\left\| \left(\frac{\partial Q(\xi, y)}{\partial \xi} \right)^{-1} \right\| \leq \beta, \beta - const;$

ii) $q = \beta \max\{2, h\|B\| + h\|C\|\} \cdot \max_{i=\overline{1,k+1}} \left\{ e^{L\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)} - 1 - L\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \right\} < 1;$

iii) $\frac{\beta}{1-q} \left\| Q\left(\xi^{(0)}, y^{(0)}\right) \right\| \leq \rho_\xi;$

iv) $\dfrac{\beta}{1-q}\max_{i=1,k+1}\left\{e^{L\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}\right)}-1\right\}\left\|Q\left(\xi^{(0)},y^{(0)}\right)\right\| \leq \rho_y$;

v) $(1+Lh)\,\rho_\xi + Lh\,\rho_y < \rho_x$.

Онда алгоритм бойынша анықталған $S\left(y^{(0)}[t],\rho_y\right)\times S\left(\xi^{(0)}[t],\rho_\xi\right)$ *облысына тиісті және* $(y^*[t],\xi^*)$ *жұбына жинақталатын* $\left(y^{(k)}[t],\xi^{(k)}\right), k\in N$ *жұп тізбегі* $(0.33)-(0.36)$ *есебінің* $S\left(y^{(0)}[t],\rho_y\right)\times S\left(\xi^{(0)}[t],\rho_\xi\right)$ *облысында оқшауланған шешімі болады және*

$$\left\|\xi^*-\xi^{(k)}\right\| \leq \frac{q^k}{1-q}\beta\left\|Q\left(\xi^{(0)},y^{(0)}\right)\right\|,$$

$$\left\|y_r^*(t)-y_r^{(k)}(t)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\xi^*-\xi^{(k)}\right\|\max_{i=1,k+1}\left\{e^{L\left(t-\frac{t_i+t_{i-1}}{2}\right)}-1, e^{L\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}-t\right)}-1,\right\}$$

бағалаулары орынды.

$(0.27)-(0.29)$ және $(0.33)-(0.36)$ есептері эквивалентті болғандықтан келесі тұжырым орынды.

0.7 - теорема. *Айталық, 0.6-теореманың шарттары орындалсын. Онда* $(0.27)-(0.29)$ *есебінің* $S\left(x^{(0)}(t),\rho_x\right)$ *облысында оқшауланған шешімі бар болады.*

2.2 ішкі бөлімінде жәй дифференциалдық теңдеу үшін екінүктелі шеттік есепті шешудің алгоритмінің бір модификациясы қарастырылады.

Екінүктелі сызықты шеттік есебін қарастырамыз:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t), t\in(t_1,t_2), x\in R^n, \qquad (0.45)$$

$$Bx(t_1)+Cx(t_2)=d, d\in R^n \qquad (0.46)$$

мұндағы $A(t), f(t) -$ $[t_1,t_2]$ аралығында үзіліссіз, B және $C -$ берілген $n\times n$ матрицалар, $d -$ берілген $n -$ вектор, $\|x\| = \max_{r=1,2}|x_i|, \|A(t)\| = \max_{r=1,2}\sum_j^n\left|a_{i,j}(t)\right| \leq \alpha, \alpha = const.$

$C([t_1,t_2],R^n)$ арқылы $\|x\|_0 = \max_{t\in[t_1,t_2]}\|x(t)\|$ нормалы үзіліссіз $x\colon[t_1,t_2]\to R^n$ функциялар кеңістігін белгілейік.

0.3 – анықтама. $(0.45), (0.46)$ *есебінің шешімі деп* (t_1,t_2) *аралығында үзіліссіз дифференциалданатын және* (0.45) *дифференциалдық теңдеуін*, (0.46)

шеттік шартын қанағаттандыратын $x^*(t) \in C([t_1,t_2],R^n)$ *функциясын атаймыз.*

Есептің қойылымы. $(0.45), (0.46)$ есебін шешу алгоритмін құру және оның жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттарын орнату қажет.

Айталық $t_0 \in (t_1,t_2)$ болсын. Келесі белгілеулер енгіземіз:

$$\Delta_r = [t_r, t_0) = \begin{cases} [t_r, t_0), t_r < t_0, \\ (t_0, t_r], t_r > t_0, \end{cases} r = 1,2,$$

және

$$I_r[t_r, t_0) = \begin{cases} 1, t \in \Delta_r, \\ 0, t \notin \Delta_r, \end{cases} r = 1,2,$$

Δ_r аралығында функция индикаторы.

$C([t_1,t_2],t_0,R^{2n})$ арқылы $\|x[\cdot]\|_1 = \max\limits_{r=1,2} \sup\limits_{t\in\Delta_r} \|x_r(t)\| < \infty$ нормалы банах кеңістігіндегі $x[t] = (x_1(t), x_2(t))$ функциялар жүйесін белгілейміз, мұндағы $x_r\colon \Delta_r \to R^n, (r = 1,2)$ үзіліссіз және $\lim\limits_{t\to t_0-0} x_1(t) < \infty$, $\lim\limits_{t\to t_0+0} x_2(t) < \infty$.

$\lambda_1 = x(t_1), \lambda_2 = x(t_2)$ параметрлерін енгіземіз және $u_r(t) = x(t) \cdot I_{\Delta_r}(t) - \lambda_r, t \in \Delta_r, r = 1,2$ алмастыруын жасап, келесі

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(\lambda_r + u_r) + f(t), t \in \Delta_r, r = 1,2, \tag{0.47}$$

$$u_r(t_r) = 0, r = 1,2, \tag{0.48}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_2 = d, \tag{0.49}$$

$$\lambda_1 + \lim_{t\to t_0-0} u_1(t) = \lambda_2 + \lim_{t\to t_0+0} u_2(t) \tag{0.50}$$

параметрлі көпнүктелі шеттік есепті аламыз.

$(0.47) - (0.50)$ есебінің шешімі элементтері $\lambda^* = (\lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*) \in R^{2n}, u^*[t] = \left(u_1{}^*(t), u_2{}^*(t)\right) \in C([t_1,t_2],t_0,R^{2n})$ болатын $(\lambda^*, u^*[t])$ жұбы болып табылады, мұндағы $u_r{}^*(t)$ функциясы $\lambda_r = \lambda_r{}^*, r = 1,2$, болғанда (0.47), (0.48) Коши есебінің шешімі және $\lim\limits_{t\to t_0-0} u_1(t)$, $\lim\limits_{t\to t_0+0} u_2(t)$ үшін (0.49), (0.50) теңдіктері орындалады.

Бекітілген λ_r параметрі үшін (0.47), (0.48) Коши есебі

$$u_r(t) = \int_{t_r}^{t} A(\tau_1)(\lambda_r + u_r(\tau_1))d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} f(\tau_1)d\tau_1, t \in \Delta_r, r = 1,2. \tag{0.51}$$

екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне эквивалентті болады.

(0.51) теңдікте $u_r(t)$ орнына сәйкесінше теңдіктің оң жағын қойып және осы процессті υ рет ($\upsilon \in \mathbb{N}$) қайталап, $u_r(t)$ үшін келесі өрнекті аламыз:

$$u_r(t) = \left(\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon \dots d\tau_1 \right) \cdot \lambda_1 + \left(\int_{t_r}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1}) \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} f(\tau_\upsilon)\, d\tau_\upsilon \dots d\tau_1 \right) +$$

$$+ \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1}) \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon) u_r(\tau_\upsilon)\, d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1} \dots d\tau_1 \,, t \in [t_1, t_2], r = 1{,}2.$$

Өрнекті қысқаша жазу мақсатында

$$D_{\upsilon,r}(t) = \int_{t_r}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+ \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon \dots d\tau_1,$$

$$F_{\upsilon,r}(t) = \int_{t_r}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+ \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1}) \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} f(\tau_\upsilon)\, d\tau_\upsilon \dots d\tau_1,$$

$$G_{\upsilon,r}(u_r, t) = \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1}) \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon) u_r(\tau_\upsilon)\, d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1} \dots d\tau_1,$$

$$t \in [t_1, t_2], r = 1{,}2. \quad (0.52)$$

белгілеулерін енгізіп, (0.52) теңдігін

$$u_r(t) = D_{v,r}(t)\cdot\lambda_1 + F_{v,r}(t) + G_{v,r}(u_r,t), t\in(t_0,t_r], r = 1,2.$$

түрінде жазамыз.
Енді

$$\lim_{t\to t_0-0} u_1(t) = D_{v,1}(t_0)\cdot\lambda_1 + F_{v,1}(t_0) + G_{v,1}(u_1,t_0),$$

$$\lim_{t\to t_0+0} u_2(t) = D_{v,2}(t_0)\cdot\lambda_2 + F_{v,2}(t_0) + G_{v,2}(u_2,t_0),$$

шектерінің мәндерін (0.50) теңдігіне қойып, λ параметрі мен t_0 мәндеріне қатысты

$$Q_v(t_0)\cdot\lambda = F_v(t_0) + G_v(u,t_0), \qquad \lambda = (\lambda_1,\lambda_2)\in R^{2n}, \quad (0.53)$$

$$P_v(t_0,\lambda_1,u_1) = 0, \qquad t_0\in R,$$

теңдеуін жазамыз, мұндағы

$$Q_v(t_0) = \begin{pmatrix} B & C \\ I + D_{v,1}(t_0) & -I - D_{v,2}(t_0)\end{pmatrix},$$

$$F_v(t_0) = \begin{pmatrix} d \\ F_{v,2}(t_0) - F_{v,1}(t_0)\end{pmatrix}, G_v(u,t_0) = \begin{pmatrix} O_{n\times 1} \\ G_{v,2}(u_1,t_0) - G_{v,1}(u_2,t_0)\end{pmatrix},$$

$$P_v(t_0,\lambda_1,u_1) = t_0 + \beta\cdot\left(\left(I + D_{v,1}(t_0)\right)\cdot\lambda_1 + F_{v,1}(t_0) + G_{v,1}(u_1,t_0)\right).$$

(0.53) теңдеуінің бірмәнді шешілуі үшін $Q_v(t_0)$ матрицасының қайтымды болсын. Осы мақсатпен блокты матрицаның кері матрицасын табу үшін Фробениус формуласын [120, 62-бет] пайдаланамыз. Алдымен

$$H_v^{-1}(t_0) = -\left(I + D_{v,2}(t_0)\right) - \left(I + D_{v,1}(t_0)\right)\cdot B^{-1}\cdot C$$

матрицасын анықтаймыз. Сонда $Q_v(t_0)$ матрицасына кері матрица

$$\left(Q_v(t_0)\right)^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} B^{-1}\cdot\left(I + C\cdot H_v^{-1}(t_0)\cdot\left(I + D_{v,1}(t_0)\right)\cdot B^{-1}\right) & -B^{-1}\cdot C\cdot H_v^{-1}(t_0) \\ -H_v^{-1}(t_0)\cdot\left(I + D_{v,1}(t_0)\right)\cdot B^{-1} & -H_v^{-1}(t_0)\end{pmatrix},$$

түрінде болады.

Элементтері $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^{2n}, u[t] = \left(u_1(t), u_2(t)\right) \in C([t_1, t_2], t_0, R^{2n})$ болатын $(\lambda, u[t])$ жұптар тізбегін құрамыз.

0 - қадам.

(a) $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}\right) \in R^{2n}$ параметрін $Q_\nu(t_0)\lambda = F_\nu(t_0)$ теңдеулер жүйесінен табамыз;

(b) $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\left(\lambda_r^{(0)} + u_r\right) + f(t), u_r(t_r) = 0, t \in \Delta_r, r = 1,2,$$

Коши есебін шешу арқылы табамыз;

(c)

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(0)} + u_1^{(0)}(t), t \in [t_1, t_0) \text{ болса} \\ \lambda_1^{(0)} + \lim\limits_{t \to t_0 - 0} u_1^{(0)}(t) \text{ немесе } \quad \lambda_2^{(0)} + \lim\limits_{t \to t_0 + 0} u_2^{(0)}(t),\ t = 0 \text{ болса,} \\ \lambda_2^{(0)} + u_2^{(0)}(t),\ t \in (t_0, t_2] \text{ болса} \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

1 - қадам.

(a) $\lambda^{(1)} = \left(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}\right) \in R^{2n}$ параметрін $Q_\nu(t_0)\lambda = F_\nu(t_0) + G_\nu\left(v^{(0)}, t_0\right)$ теңдеулер жүйесінен табамыз;

(b) $u^{(1)}[t] = \left(u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\left(\lambda_r^{(1)} + u_r\right) + f(t), u_r(t_r) = 0, t \in \Delta_r, r = 1,2,$$

Коши есебін шешу арқылы табамыз;

(c)

$$x^{(1)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(1)} + u_1^{(1)}(t), t \in [t_1, t_0) \text{ болса} \\ \lambda_1^{(1)} + \lim\limits_{t \to t_0 - 0} u_1^{(1)}(t) \text{ немесе } \quad \lambda_2^{(1)} + \lim\limits_{t \to t_0 + 0} u_2^{(1)}(t),\ t = 0 \text{ болса,} \\ \lambda_2^{(1)} + u_2^{(1)}(t),\ t \in (t_0, t_2] \text{ болса} \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

Осы процессті жалғастырып, $\left\{\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ жұптар тізбегін және $\left\{x^{(k)}(t)\right\}_{k=0}^{\infty}$ функциялар тізбегін аламыз.

Ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының, сонымен қатар $(0.47) - (0.50)$ есебінің жалғыз шешімінің бар болуының да жеткілікті шарттарын тұжырымдаймыз.

0.8 - теорема. *Айталық, қайсыбір* $t_0 \in (t_1, t_2), \nu \in N$ *үшін B,* $H_\nu(t_0): R^n \to R^n$ *матрицалары қайтымды және*

$$\|Q_\nu(t_0)^{-1}\| \leq \gamma_\nu(t_0),$$

$$q_\nu(t_0) < 1,$$

теңсіздіктері орындалсын, мұндағы

$$q_\nu(t_0) = \gamma_\nu(t_0) \cdot 2 \max_{r=1,2} \left(e^{\alpha \cdot |t_0 - t_r|} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha|t_0 - t_r|)^j}{j!} \right).$$

Онда ұсынылған алгоритм жинақталады, яғни $\left\{\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ *жұптар тізбегі* $k \to \infty$ *болғанда* $(0.47) - (0.50)$ *есебінің* $(\lambda^*, u^*[t])$ *жалғыз шешіміне жинақталады және*

$$\left\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\right\| \leq \frac{q_\nu^k(t_0)}{1 - q_\nu(t_0)} \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|,$$

$$\left\|u^*[\cdot] - u^{(k)}[\cdot]\right\|_1 \leq \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1\right) \left\|\lambda^{(*)} - \lambda^{(k)}\right\|, k = 0, 1, 2, \ldots$$

бағалаулары орынды.

2.3 ішкі бөлімінде бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі жәй дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті параметрлеу әдісімен шешу қарастырылады.

$[t_1, t_2]$ кесіндісінде бекітілмеген t^0 уақыт мезетіндегі импульс әсерлі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f_1(t) \cdot I_{[t_1, t_0)}(t) + f_2(t) \cdot I_{(t_0, t_2]}(t), t \in (t_1, t_2) \backslash \{t^0\}, x \in R^n \quad (0.54)$$

$$x(t^0 - 0) - x(t^0 + 0) = p, \; p \in R^n \quad (0.55)$$

$$t^0 + \beta \cdot x(t^0 - 0) = 0, \quad (0.56)$$

$$Bx(t_1) + Cx(t_2) = d, \; d \in R^n, \quad (0.57)$$

екінүктелі шеттік есебі қарастырылады.

Мұндағы $A(t),\; f_1(t),\; f_2(t) \in C([t_1, t_2]),\; B,\; C$ - берілген $(n \times n)$-өлшемді матрицалар, $p,\; d$ - берілген n - өлшемді векторлар, β - матрица-жол, $\|x\| = \max\limits_{r=1,2} |x_i| < \infty,\; \|A(t)\| = \max\limits_{r=1,2} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}(t)\right| \leq \alpha, \alpha = const,$

$$I_{[t_r,t_0)}(t) = \begin{cases} 1, t \in [t_r, t_0) \text{ болғанда}, \\ 0, t \notin [t_r, t_0) \text{ болғанда}, \end{cases} r = 1{,}2.$$

$PC([t_1,t_2]\backslash\{t^0\}, R^n)$ арқылы $\|x\|_1 = \max\left\{\sup_{t\in[t_1,t_0)}\|x(t)\|, \sup_{t\in(t_0,t_2]}\|x(t)\|\right\}$ нормалы бөлік-үзіліссіз функциялар кеңістігін белгілейміз.

0.4 – анықтама. $(0.54) - (0.57)$ есебінің шешімі деп

• (0.54) дифференциалдық теңдеуін,

• (0.55) импульс әсер шартын,

• (0.56) шартын,

• (0.57) шеттік шартын

қанағаттандыратын $(x^*(t), t^*)$ жұбын атаймыз, мұндағы $x^*(t) \in PC([t_1,t_2]\backslash\{t^0\}, R^n)$ және $t^0 \in (t_1,t_2)$.

Есептің қойылымы. $(0.54) - (0.57)$ есебін шешу алгоритмін құру және оның жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттарын орнату қажет.

Белгілеулер енгіземіз: $\Delta_r^0 = \begin{cases} [t_r, t^0), \text{егер } t_r < t^0, \\ (t^0, t_r], \text{егер } t_r > t^0, \end{cases}$ $r = 1, 2$. Әрі қарай қайсыбір Δ аралықтың индикаторы болатын $I_\Delta(t) = \begin{cases} 1, \text{егер } t \in \Delta, \\ 0, \text{егер } t \notin \Delta, \end{cases}$ функциясын пайдаланамыз.

$C([t_1,t_2], t^0, R^{2n})$ арқылы $\|x[\cdot]\|_1 = \max_{r=1,2} \sup_{t\in\Delta_r^0}\|x_r(t)\| < \infty$ нормалы $x[t] = (x_1(t), x_2(t))$ функциялар жүйесінің банах кеңістігін белгілейміз, мұндағы $x_r: \Delta_r \to R^n$ $(r = 1, 2)$ үзіліссіз және $\lim_{t\to t_0-0} x_1(t) < \infty$, $\lim_{t\to t_0+0} x_2(t) < \infty$ шектері табылады.

$\lambda_1 = x(t_1), \lambda_2 = x(t_2)$ параметрлерін енгіземіз және $u_r(t) = x(t) - \lambda_r, t \in [t_1,t_2], r = 1, 2$ алмастыруларын жасап,

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(\lambda_r + u_r) + f_r(t), t \in [t_1,t_2], r = 1, 2, \tag{0.58}$$

$$u_r(t) = 0, r = 1, 2, \tag{0.59}$$

$$\lambda_1 + \lim_{t\to t^0-0} u_1(t) - \lambda_2 - \lim_{t\to t^0+0} u_2(t) - p = 0, \tag{0.60}$$

$$t^0 + \beta \cdot \left(\lambda_1 + \lim_{t\to t^0-0} u_1(t)\right) = 0, \tag{0.61}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_2 - d = 0 \tag{0.62}$$

көпнүктелі параметрлі есепті аламыз.

$(0.58) - (0.62)$ есебінің шешімі деп компоненттері (0.58) теңдеуін және $(0.59) - (0.62)$ теңдіктерін қанағаттандыратын $\left((\lambda^*, u^*[t]), t^*\right)$ жиынтығын атаймыз, мұндағы $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \in \mathbb{R}^{2n}$, $u^*[t] = \left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right) \in C([t_1, t_2] \setminus \{t^*\}, \mathbb{R}^{2n})$.

Егер $\left((\lambda^*, u^*[t]), t^*\right)$ жиынтығы $(0.58) - (0.62)$ есебінің шешімі болса, онда $(x^*(t), t^*)$ жұбы $(0.54) - (0.57)$ есебінің шешімі болады, мұндағы

$$x^*(t) = \begin{cases} \lambda_1^*, & t = t_1 \text{ болса}, \\ \lambda_1^* + u_1^*(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_{1^*}}, & t = \dot{\Delta}_{1^*} \text{ болса}, \\ \lambda_2^* + u_2^*(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_{2^*}}, & t = \dot{\Delta}_{2^*} \text{ болса}, \\ \lambda_2^*, & t = t_2 \text{ болса}, \end{cases} \quad \dot{\Delta}_{r^*} = \begin{cases} (t_r, t^*), \text{егер } t_r < t^*, \\ (t^*, t_r), \text{егер } t_r > t^*, \end{cases} r = 1,2.$$

Керісінше, егер $(\tilde{x}(t), \tilde{t})$ жұбы $(0.54) - (0.57)$ есебінің шешімі болса, онда $\left((\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t]), \tilde{t}\right)$ жиынтығы

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2)),\ \tilde{u}[t] = \left(\left(\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_1)\right) \cdot I_{\tilde{\Delta}_1}(t), \left(\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_2)\right) \cdot I_{\tilde{\Delta}_2}(t)\right)$$

элементтерімен $(0.58) - (0.62)$ есебінің шешімі болады, мұндағы

$$\tilde{\Delta}_r = \begin{cases} [t_r, \tilde{t}), \text{егер } t_r < \tilde{t}, \\ (\tilde{t}, t_r], \text{егер } t_r > \tilde{t}, \end{cases} r = 1,2.$$

Айталық, λ_r белгілі болсын. Онда (0.58), (0.59) Коши есебі

$$u_r(t) = \int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\left(\lambda_r + u_r(\tau_1)\right) d\tau_1, t \in (t_0, t_r], r = \overline{1,2}. \qquad (0.63)$$

екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне эквивалентті болады.

(0.63) теңдікте $u_r(t)$ орнына сәйкесінше теңдіктің оң жағын қойып және осы процессті υ рет $(\upsilon \in \mathbb{N})$ қайталап, $u_r(t)$ үшін келесі өрнекті аламыз:

$$u_r(t) = \left(\int_{t_r}^{t} A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \ldots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon) d\tau_\upsilon \ldots d\tau_1 \right) \cdot \lambda_1 + \left(\int_{t_r}^{t} f(\tau_1) d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \ldots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1}) \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} f(\tau_\upsilon)\, d\tau_\upsilon \ldots d\tau_1 \right) +$$

$$+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1})\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon)u_r(\tau_\upsilon)\,d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1}\ldots d\tau_1\,, t\in[t_1,t_2], r=1{,}2.$$

$$D_{\upsilon,r}(t)=\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\int_{t_r}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+$$

$$+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\upsilon,r}(t)=\int_{t_r}^{t} f(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\int_{t_r}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+$$

$$+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1})\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} f(\tau_\upsilon)\,d\tau_\upsilon\ldots d\tau_1,$$

$$G_{\upsilon,r}(u_r,t)=\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1})\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon)u_r(\tau_\upsilon)\,d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1}\ldots d\tau_1,$$

$$t\in[t_1,t_2], r=1{,}2.$$

белгілеулерін пайдаланып, $u_r(t)$ берілуін

$$u_r(t)=D_{\upsilon,r}(t)\cdot\lambda_r+F_{\upsilon,r}(t)+G_{\upsilon,r}(u_r,t), t\in(t_0,t_r], r=1{,}2. \quad (0.64)$$

түрінде жазамыз.
Енді

$$\lim_{t\to t_0-0} u_1(t)=D_{\upsilon,1}(t_0)\cdot\lambda_1+F_{\upsilon,1}(t_0)+G_{\upsilon,1}(u_1,t_0),$$

$$\lim_{t\to t_0+0} u_2(t)=D_{\upsilon,2}(t_0)\cdot\lambda_2+F_{\upsilon,2}(t_0)+G_{\upsilon,2}(u_2,t_0),$$

шектерінің мәндерін (0.60) теңдігіне қойып, λ параметрі мен t^0 мәндеріне қатысты

$$Q_\upsilon(t^0)\cdot\lambda=F_\upsilon(t^0)+G_\upsilon(u,t^0), \qquad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in R^{2n}, \qquad (0.65)$$

$$P_\upsilon(t^0,\lambda_1,u_1)=0, \qquad t^0\in R,$$

теңдеуін жазамыз, мұндағы

$$Q_v(t^0) = \begin{pmatrix} B & C \\ I + D_{v,1}(t^0) & -I - D_{v,2}(t^0) \end{pmatrix},$$

$$F_v(t^0) = \begin{pmatrix} d \\ F_{v,2}(t^0) - F_{v,1}(t^0) \end{pmatrix}, G_v(u, t^0) = \begin{pmatrix} O_{n\times 1} \\ G_{v,2}(u_2, t^0) - G_{v,1}(u_1, t^0) \end{pmatrix},$$

$$P_v(t^0, \lambda_1, u_1) = t^0 + \beta \cdot \left(\left(I + D_{v,1}(t^0) \right) \cdot \lambda_1 + F_{v,1}(t^0) + G_{v,1}(u_1, t^0) \right).$$

(0.65) теңдеуінің бірмәнді шешілуі үшін $Q_v(t^0)$ матрицасы қайтымды болсын.

0.1 – ескерту. $\left(Q_v(t^0)\right)^{-1}$ *матрицасы келесі түрде анықталады:*

$$\left(Q_v(t^0)\right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} B^{-1} \cdot \left(I + C \cdot H_v^{-1}(t^0) \cdot \left(I + D_{v,1}(t^0) \right) \cdot B^{-1} \right) & -B^{-1} \cdot C \cdot H_v^{-1}(t^0) \\ -H_v^{-1}(t^0) \cdot \left(I + D_{v,1}(t^0) \right) \cdot B^{-1} & -H_v^{-1}(t^0) \end{pmatrix},$$

мұндағы $H_v^{-1}(t^0) = -\left(I + D_{v,2}(t^0) \right) - \left(I + D_{v,1}(t^0) \right) \cdot B^{-1} \cdot C.$

0.1 – шарт.

$i)$ $Q_v\left(0.5(t_1 + t_2)\right) \cdot \mu = F_v\left(0.5(t_1 + t_2)\right)$ *орындалатын жалғыз* $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*) \in R^{2n}$ *параметрі табылсын.*

$ii)$ $P_v(t^0, \mu_1^*, O_{n\times 1}) = 0$ *орындалатын жалғыз* $\theta \in (t_1, t_2)$ *нүктесі табылсын.*

Айталық, 2.3.1 – шарт орындалсын және таңдалған v үшін $Q_v(\theta): R^{2n} \to R^{2n}$ матрицасы қайтымды болсын.

Төмендегі алгоритм бойынша $\left(\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t] \right), t^{(k)} \right)$ тізбектер жиынтығын тұрғызамыз, мұндағы $\lambda^{(k)} = \left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)} \right), u^{(k)}\,[t] = \left(u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t) \right).$

0 - қадам.

(0.1) $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)} \right)$ параметрін $Q_v(\theta)\lambda = F_v\left(t^{(0)}\right)$ теңдеулер жүйесінен табамыз.

(0.2) $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t) \right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\left(\lambda_r^{(0)} + u_r \right) + f_r(t), \;\; u_r(t_r) = 0, \qquad r = 1,2$$

Коши есебін шешу арқылы анықтаймыз.

(0.3) $t^{(0)}$ нүктесін $P_v\left(t, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right) = 0$ теңдеуінен табамыз.

(0.4)

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(0)}, & t = t_1 \text{ болса}, \\ \lambda_1^{(0)} + u_1^{(0)}(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_1^{(0)}}(t), & t = \dot{\Delta}_1^{(0)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(0)} + u_2^{(0)}(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_2^{(0)}}(t), & t = \dot{\Delta}_2^{(0)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(0)}, & t = t_2 \text{ болса} \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

1 – қадам .

(1.1) $\lambda^{(1)} = \left(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}\right)$ параметрін $Q_v(\theta)\lambda = F_v(\theta) + G_v\left(u^{(0)}, \theta\right)$ теңдеулер жүйесінен табамыз.

(1.2) $u^{(1)}[t] = \left(u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\left(\lambda_r^{(1)} + u_r\right) + f_r(t), \;\; u_r(t_r) = 0, t \in [t_1, t_2], r = 1{,}2$$

Коши есебін шешу арқылы анықтаймыз.

(1.3) $t^{(1)}$ нүктесін $P_v\left(t, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right) = 0$ теңдеуінен табамыз.

(1.4)

$$x^{(1)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(1)}, & t = t_1 \text{ болса}, \\ \lambda_1^{(1)} + u_1^{(1)}(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_1^{(1)}}(t), & t = \dot{\Delta}_1^{(1)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(1)} + u_2^{(1)}(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_2^{(1)}}(t), & t = \dot{\Delta}_2^{(1)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(1)}, & t = t_2 \text{ болса} \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

k - қадам.

(k.1) $\lambda^{(k)} = \left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right) \in R^{2n}$ параметрін $Q_v(\theta)\lambda = F_v(\theta) + G_v\left(u^{(k-1)}, \theta\right)$ теңдеулер жүйесінен табамыз.

(k.2) $u^{(k)}[t] = \left(u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\left(\lambda_r^{(k)} + u_r\right) + f_r(t), \;\; u_r(t_r) = 0, t \in [t_1, t_2], r = 1{,}2$$

Коши есебін шешу арқылы анықтаймыз.

(k.3) $t^{(k)}$ нүктесін $P_v\left(t, \lambda_1^{(k-1)}, u_1^{(k-1)}\right) = 0$ теңдеуінен табамыз.

(k.4)

$$x^{(k)}(t)=\begin{cases}\lambda_1^{(k)}, & t=t_1 \text{ болса},\\ \lambda_1^{(k)}+u_1^{(k)}(t)\cdot I_{\dot\Delta_2^{(k)}}(t), & t=\dot\Delta_1^{(0)} \text{ болса},\\ \lambda_2^{(k)}+u_2^{(k)}(t)\cdot I_{\dot\Delta_2^{(k)}}(t), & t=\dot\Delta_2^{(0)} \text{ болса},\\ \lambda_2^{(k)}, & t=t_2 \text{ болса}\end{cases}$$

фунциясын табамыз.

Осылайша $\left\{\left(\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right),t^{(k)}\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ тізбектер жиынтығы және сонымен қатар $\left\{x^{(k)}(t)\right\}_{k=0}^{\infty}$ функциялар тізбегін аламыз.

0.2 – шарт. *Барлық (t,λ_1,u_1) үшін*

(1) $P_v'(t,\lambda_1,u_1)$ туындысы $S(\theta^*,\rho_*)=\{t\in(t_1,t_2):|t-\theta^*|<\rho_*\}$ шарында бірқалыпты үзіліссіз;

(2) кез-келген $t\in S(\theta^*,\rho_*)$ үшін $\left(P_v'(t,\lambda_1,u_1)\right)^{-1}$ табылады және $\left\|\left(P_v'(t,\lambda_1,u_1)\right)^{-1}\right\|\le\chi,\ \chi-const;$

(3) $\chi\cdot|P_v(\theta^*,\lambda_1,u_1)|\le\rho_*$

шарттары орындалсын.

Ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының, сонымен қатар $(0.58)-(0.62)$ есебінің жалғыз шешімінің бар болуының да жеткілікті шарттарын тұжырымдаймыз.

0.9 – теорема. *Айталық, қайсыбір v (v – натурал сан) үшін 0.1-ші және 0.2-ші шарттары орындалсын, $Q_v(\theta): R^{2n}\to R^{2n}$ матрицасы қайтымды болсын және*

(a) $\left\|\left(Q_v(\theta)\right)^{-1}\right\|\le\gamma_v\left(t^{(0)}\right),$

(b) $q_v(\theta)<1,$

(c)

$$2\cdot\chi\cdot\left\|P_v\left(\theta,\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)\right\|+\frac{2\gamma_v(\theta)\cdot\chi\cdot\|\beta\|}{1-q_v(\theta)}\sup_{t\in(t_1,t_2)}e^{\alpha\cdot|t-t_r|}\cdot$$

$$\cdot\max\left\{\frac{\left(\alpha(\theta-t_1)\right)^v}{v!},\frac{\left(\alpha(t_2-\theta)\right)^v}{v!}\right\}\cdot\max_{r=1,2}\left\{\sup_{t\in[t_r,\theta)}\left(\left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|}-1\right)\cdot\gamma_v(\theta)\cdot M\cdot\right.\right.$$

$$\cdot max\left\{1,1+\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\left(\alpha\cdot\left(t^{(0)}-t_1\right)\right)^{j+1}}{j!}+\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\left(\alpha\cdot\left(t_2-t^{(0)}\right)\right)^{j+1}}{j!}\right\}\Bigg\}+$$

$$+|t_r-\theta|\cdot\sup_{t\in[t_r,\theta)}\|f_r(t)\|<\rho,$$

мұндағы

$$\gamma_v(\theta)-const,\quad q_v(\theta)=2\cdot\gamma_v(\theta)\cdot\max_{r=1,2}\left(e^{\alpha|\theta-t_r|}-\sum_{j=0}^{v}\frac{(\alpha|\theta-t_r|)^j}{j!}\right)$$

теңсіздіктері орындалсын.

Онда ұсынылған алгоритм жинақталады, яғни $\left\{\left(\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right),t^{(k)}\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ *тізбегі* $k\to\infty$ *болғанда* $(0.58)-(0.62)$ *есебінің* $\left(\left(\lambda^{(*)},u^{(*)}[t]\right),t^{(*)}\right)$ *жалғыз шешіміне жинақталады және*

$$\left\|\lambda^*-\lambda^{(k)}\right\|\le\frac{q_v^k(\theta)}{1-q_v(\theta)}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|,k\ge1$$

$$\left\|u_r^*(t)-u_r^{(k)}(t)\right\|\le\left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|}-1\right)\cdot\left\|\lambda_r^*-\lambda_r^{(k)}\right\|,k\ge1,t\in[t_1,t_2,],r=1{,}2$$

$$\left\|t^*-t^{(k)}\right\|\le\chi\cdot\|\beta\|\sup_{t\in(t_1,t_2)}e^{\alpha\cdot|t-t_1|}\cdot\left\|\lambda_r^*-\lambda_r^{(k)}\right\|,k\ge1$$

бағалаулары орынды.

Автор 2019 жылдан бастап өмірінің соңы - 2020 жылдың 20 ақпанына дейін ғылыми кеңесшісі болған Математика және математикалық моделдеу институтының Математикалық физика және моделдеу бөлімінің меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Дулат Сыздықбекұлы Джумабаевқа есептің қойылымы, пайдалы кеңестері мен ескертулері үшін шынайы алғысын білдіре отырып, рухына тағзым етеді. Автор ғылыми кеңесшілері Математика және математикалық моделдеу институтының бас ғылыми қызметкері, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Анар Тұрмағанбетқызы Асановаға және Т.Г. Шевченко атындағы Киев Ұлттық университетінің Жалпы математика кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Александр Николаевич Станжицкийге диссертациялық жұмыста орнатылған ғылыми нәтижелерді талқылау кезіндегі пайдалы кеңестері, жан-жақты қолдаулары үшін үлкен ризашылығын білдіреді.

Автор Қазақстан Республикасының Үкіметіне және Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университетіне көрсеткен қолдауы үшін және шетелдік ғылыми кеңесшімен жұмыс жасауға мүмкіндік бергені үшін рақмет айтады.

1 ИМПУЛЬС ӘСЕРЛІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІ ЗЕРТТЕУДІҢ ОРТАЛАУ ӘДІСІ

Бірінші бөлімде бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті орталау әдісімен шешу келтіріледі. 1.2,1.3 және 1.4 бөлімшелерде 1.5 бөлімшеде алынған негізгі нәтижені дәлелдеу үшін қажетті көмекші нәтижелер, яғни шешімнің бастапқы шарттардан үзіліссіз тәуелділігі, шешімнің бастапқы берілгендер бойынша үзіліссіз дифференциалдануы және бекітілген мезеттегі импульс әсерлі жүйе үшін вариациялау теңдеуін орталау әдісімен шешу және бекітілген мезеттегі импульс әсерлі шеттік есептің шешілімдік шарттары келтіріледі.

1.1 Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің қойылымы

Кіші параметрлі бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін келесі шеттік есепті қарастырамыз:

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x), t \neq t_i(x), \ \ x \in R^d \tag{1.1.1}$$

$$\Delta\, x|_{\ t=t_i(x)} = \varepsilon I_i(x), \tag{1.1.2}$$

$$F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0. \tag{1.1.3}$$

Мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, $T > 0$ бекітілген сан, $t_i(x) < t_{i+1}(x)$ $(i = 1, 2, \dots)$ – импульс әсерлі мезеттер, $I_i\colon R^d \to R^d$, $X\colon R^d \times R^d \to R^d$ және $F\colon R^d \times R^d \to R^d$ функциялары d өлшемді вектор функциялар, $\Delta x = x(t+0) - x(t)$.

1-анықтама. $A = \left\{t \in \left(0, \frac{T}{\varepsilon}\right], \text{қайсыбір } i \text{ үшін } t = t_i(x)\right\}$ ақырлы импульс әсерлі нүктелер жиыны (мүмкін бос) үшін

(i) барлық $t \in \left(0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \backslash A$ үшін үзіліссіз дифференциалданатын;

(ii) барлық $t \in \left(0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \backslash A$ үшін (0.1) жүйенің дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыратын;

(iii) барлық $t \in A$ үшін $\Delta x = x(t+0) - x(t) = \varepsilon I_i\big(x(t)\big)$ теңдеуін қанағаттандыратын $x(t)\colon \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \to R^d$ функциясын (1.1.1) жүйенің шешімі деп атаймыз.

Сонымен қатар, егер $x(t)$ функциясы $F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0$ шартын қанағаттандырса, онда ол $(1.1.1), (1.1.2)$ шеттік есептің шешімі болады.

Біз $x(t)$ функциясы сол жақты үзіліссіз, яғни барлық $t \in A$ үшін $x(t) = x(t-0)$ деп ұйғарамыз.

Айталық,

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)dt\,, I_0(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{0<t_i(x)<T} I_i(x), \quad (1.1.4)$$

шектер бар болсын және $(1.1.1)-(1.1.3)$ шеттік есепке сәйкес

$$\begin{gathered}\dot{y} = \varepsilon[X_0(y) + I_0(y)] \\ F\left(y(0), y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0\end{gathered} \qquad (1.1.5)$$

орталау шеттік есебін немесе баяу уақыт шакаласында $\tau = \varepsilon t$

$$\begin{gathered}\frac{dy}{d\tau} = X_0(y) + I_0(y) \\ F\big(y(0), y(T)\big) = 0\end{gathered} \qquad (1.1.6)$$

есебін қояйық.

Бұл жұмыстың мақсаты егер $(1.1.5)$ орталау шеттік есебінің шешімі бар болса, онда ε параметрінің мейлінше аз мәні үшін орталау есебінің шешімінің маңайында берілген $(1.1.1)-(1.1.3)$ шеттік есебінің де шешімі бар болатынын дәлелдеу.

Келесі белгілеулер қолданылады: $|\cdot|$ нормасы R^d кеңістігіндегі норма және $\|\cdot\|$ нормасы векторға сәйкес матрицаның нормасы. $U_a = \{x \in R^d: |x| \leq a\}$ деп алайық.

Келесі шарттар $(1.1.1)-(1.1.3)$ есебі үшін орындалсын делік:

1.1. $X(t,x)$ және $I_i(x)$ функциялары $Q = \{t \geq 0, x \in U_a\}$ жиынында үзіліссіз, $M > 0$ тұрақтысымен шенелген және x бойынша $L > 0$ тұрақтысымен Липшиц шартын қанағаттандырады;

1.2. Бірқалыпты $(1.1.4)$ шектері ($x \in U_a$ бойынша) бар болады;

1.3. $(1.1.6)$ орталау есебінің қайсыбір ρ маңайымен U_a жиынында жататын шешімі бар болсын. Осы маңайда $X(t,x)$ функциясының x бойынша бірқалыпты үзіліссіз $\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}$ дербес туындылары және $I_i(x)$ функцияларының i бойынша бірқалыпты үзіліссіз болатын $\frac{\partial I_i(x)}{\partial x}$ дербес туындылары бар болады. $X_0(x), I_0(x)$ және $F(x,y)$ функциялары көрсетілген ρ маңайда $\frac{\partial X_0(x)}{\partial x}, \frac{\partial I_0(x)}{\partial x}, \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ және $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ үзіліссіз дербес туындылары және

$$det\frac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0} \neq 0, \qquad (1.1.7)$$

бар болсын, мұндағы $x_0 = y(0)$, $F_0(x_0) = F\big(x_0, y(T,x_0)\big)$;

1.4. Бірқалыпты ($x \in U_a$ бойынша)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}dt=\frac{\partial X_0(x)}{\partial x}, \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{0<t_i(x)<T}\frac{\partial I_i(x)}{\partial x}=\frac{\partial I_0(x)}{\partial x}$$

шектері бар болсын;

1.5. Импульс әсерлі $\{t_i(x)\}$ мезеттері U_a жиынында үзіліссіз функциялар болсын, ал $t=t_i(x)$ беті бөлектеу шартын қанағаттандырсын, яғни

$$\min_{x\in U_a} t_{i+1}(x) < \max_{x\in U_a} t_i(x), (i=1,2,\ldots). \tag{1.1.8}$$

Айталық, барлық $t>0$ и $x\in U_a$ үшін

$$i(t,x)\le C\cdot t \tag{1.1.9}$$

теңсіздігі орындалатындай $C>0$ тұрақтысы табылсын, мұндағы $i(t,x)$ шамасы $(0,t)$ аралығындағы импульс саны.

Сондай-ақ $(1.1.1)-(1.1.3)$ есебінің шешімі әрбір $t=t_i(x)$ бетімен бірден артық емес рет қиылыссын.

1.1.1-ескерту. Шешімдердің әрбір бетпен бірден артық емес рет қиылысу жағдайлары үшін жеткілікті шарттар жақсы зерттелген (мысалы, [44, 48, 102]).

Бізге $y=y(\varepsilon t)$ қисығы мен $t=\frac{T}{\varepsilon}$ үшін $t=t_i(x)$ бетінің орналасуына қатысты қосымша шарттарды қою қажет. Әрбір ε үшін 1.5 шартына сәйкес $t=\frac{T}{\varepsilon}$ жазықтығы мен $t=t_i(x)$ беттерінің орналасуына қатысты үш мүмкін жағдай орын алады:

1) $t=\frac{T}{\varepsilon}$ жазықтығы $t=t_i(x)$ беттерінің ешқайсымен қиылыспайды;
2) қайсыбір i үшін $t_i(x)\equiv\frac{T}{\varepsilon}, x\in U_a$;
3) қайсыбір i үшін $t=\frac{T}{\varepsilon}$ жазықтығы $t=t_i(x)$ бетімен қиылысады.

(1.1.8) теңсіздігінен жазықтықтың бірден артық емес осы беттермен қиылыспайтындығы шығады. Осы мезеттерді белгілейік:

$$N_i(\varepsilon)=\left\{x\in U_a:\frac{T}{\varepsilon}=t_i(x)\right\}.$$

***A* шарты.** Егер қайсыбір $\varepsilon<\upsilon$ үшін $N_i(\varepsilon)\ne\emptyset$ және $N_i(\varepsilon)\ne U_a$ болатын $\mu>0$ және $\nu>0$ сандары табылады, онда

$$\rho\big(y(T),N_i(\varepsilon)\big)>\mu.$$

1.2 Бекітілген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің бастапқы шарттардан үзіліссіз тәуелділігі

Импульсті дифференциалдық теңдеулер жүйесін

$$\dot{x} = X(t,x), t \neq t_i(x), \tag{1.2.1}$$

$$\Delta\, x|_{\,t=t_i(x)} = I_i(x), \tag{1.2.2}$$

$t \in [0,T]$ және $x \in U_a$ үшін қарастырамыз. (1.2.1) жүйесі 1.1 және 1.5 шарттарын қанағаттандырсын.

(1.1.9) шарты бойынша $(0,T)$ аралығында импульс мезеттері CT шамасынан артпайды. $y_1, \dots, y_p \in U_a$ нүктелерін аламыз және олар импульс әсерлі мезеттер тудырады, дәлірек айтқанда $\{\tau_i(y_i)\}_1^p$. Жалпылықты жоғалтпау үшін $\tau_p(y_p) \le T$ болсын.

Айталық, $x(t,y)$, мұндағы $y = (y_1, \dots, y_p)$, функциясы $x(0,y) = x(y)$ бастапқы шартымен бекітілген мезеттер үшін импульстік жүйенің

$$\dot{x} = X(t,x), t \neq t_i(y_i), \tag{1.2.3}$$

$$\Delta\, x|_{\,t=t_i(y_i)} = I_i\big(x(t_i)\big), \tag{1.2.4}$$

шешімі болсын. Айталық, $x(t,z)$ функциясы $z = (z, \dots, z_p), z_i \in U_a$ жиыны үшін импульстік мезеттердің жиынын қолдану арқылы құрылатын $x(0,z) = x(z)$ бастапқы шартымен ұқсас жүйенің шешімі. $t_i(x)$ функциясының үзіліссіздігі $z \to y$ болғанда $t_i(z_i) \to t_i(y_i)$ екенін білдіреді. Осыдан z нүктесінің y нүктесіне мейлінше жақын болғанда $[0,T]$ аралығында $t_i(z_i)$ импульстер саны $p-1$ шамасынан кем емес және p шамасынан артық емес болады.

Айталық $\underline{t_i} = min\{t_i(y_i), t_i(z_i)\}, \overline{t_i} = max\{t_i(y_i), t_i(z_i)\}$ болсын.

1.2.1-лемма. (Үзіліссіз тәуелділік). *1.1 және 1.5 шарттары үшін, егер $z \to y$ және $x(z) \to x(y)$ болса, онда*

$$\sup_{\substack{t \in (\overline{t_i}, \underline{t}_{i+1}] \\ i=\overline{1,p-1}}} |x(t,z) - x(t,y)| \to 0 \tag{1.2.5}$$

орындалады.

Дәлелдеуі. Жалпылықты шектемей $t_i(y_i) \le t_i(z_i), i = \overline{1,p}$ деп санауға болады. $[0, t_1(y_1)]$ аралығында келесі теңсіздік

$$|x(t,y) - x(t,z)| \le |x(y) - x(z)| e^{LT}. \tag{1.2.6}$$

орындалатыны айқын.

Енді $(t_1(z_1), t_2(y_2)]$ аралығында шешімдердің айырмасын бағалаймыз. Келесіні аламыз:

$$x(t,y) = x(t_1(z_1), y) + \int_{t_1(z_1)}^{t} X\big(s, x(s,y)\big)ds,$$

$$x(t,z) = x(t_1(z_1), z) + I_1\big(x\big(t_1(z_1)\big), z\big) + \int_{t_1(z_1)}^{t} X\big(s, x(s,z)\big)ds.$$

Сонымен қатар,

$$x(t_1(z_1), y) = x(t_1(y_1), y) + I_1\big(x\big(t_1(y)\big), y\big) + \int_{t_1(y_1)}^{t_1(z_1)} X\big(t, x(t,y)\big)dt.$$

$x(t_1(z_1), z) - x(t_1(y_1), y)$ айырымын бағалай отырып,

$$|x(t_1(z_1), z) - x(t_1(y_1), y)| \le$$

$$\le |x(t_1(z_1), z) - x(t_1(y_1), z)| + |x(t_1(y_1), z) - x(t_1(y_1), y)|.$$

теңсіздігін аламыз.
Бірақ

$$x(t_1(z_1), z) = x(t_1(y_1), z) + \int_{t_1(y_1)}^{t_1(z_1)} X\big(t, x(t,z)\big)dt$$

теңдігі 1.1 шартынан шығатын болғандықтан

$$|x(t_1(z_1), z) - x(t_1(y_1), z)| \le M|t_1(z_1) - t_1(y_1)| \quad (1.2.7)$$

орындалады.
Сонда (1.2.6) және (1.2.7) өрнектерінен

$$|x(t_1(z_1), z) - x(t_1(y_1), y)| \to 0, \;\; z \to y \quad (1.2.8)$$

аламыз.
Сонымен, біз

$$|x(t,y) - x(t,z)| \le$$

$$\leq |x(t_1(z_1),z) - x(t_1(y_1),y)| + \left|I_1\big(x\big(t_1(y_1)\big),y\big) - I_1\big(x\big(t_1(z_1)\big),z\big)\right|$$

$$+\left|\int_{t_1(y_1)}^{t_1(z_1)} X\big(t,x(t,y)\big)dt\right| + \int_{t_1(z_1)}^{t} \left|X\big(s,x(s,y)\big) - X\big(s,x(s,z)\big)\right|ds \leq$$

$$\leq |X(t_1(z_1),z) - X(t_1(y_1),y)| + L|X(t_1(y_1),y) - X(t_1(z_1),z)|$$

$$+M|t_1(z_1) - t_1(y_1)| + L\int_{t_1(z_1)}^{t} |X(s,y) - X(s,z)|ds$$

аламыз. Сондықтан Гронуолл теңсіздігін пайдаланып, (1.2.8) және $t_1(x)$ үзіліссіздігін ескеріп $\big(t_1(z_1),t_1(y_1)\big)$ интервалында (1.2.5) аламыз. Келесі интервалдарда дәлелдеулер осыған ұқсас түрде алынады. Осыдан $[0,T]$ аралығында $\big(\overline{t_i},\underline{t}_{i+1}\big]$ ақырлы интервалдар санын ескере отырып, 1.2.1-лемманың дәлелдеуін аяқтаймыз.

Енді бекітілген мезеттегі импульс әсері бар дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің бастапқы берілгендер бойынша үзіліссіз дифференциалдануын зерттейміз:

$$\dot{x} = X(t,x), t \neq t_i, \tag{1.2.9}$$

$$\Delta\, x|_{\,t=t_i} = I_i(x). \tag{1.2.10}$$

Мұндағы $t \in [0,T]$, $x \in U_a$ және $t_i < t_{i+1}$ нүктелері $[0,T]$ аралығындағы импульс мезеттері. Сондай импульс мезеттері $[0,T]$ аралығында ақырлы деп санаймыз.

Айталық, $x(t,x_0)$ функциясы $[0,T]$ аралығындағы $x(0,x_0) = x_0$ бастапқы шартымен (1.2.9), (1.2.10) жүйенің шешімі болсын.

1.2.2-лемма. (Бастапқы берілгендер бойынша үзіліссіз дифференциалдану). *Айталық* (1.2.9), (1.2.10) *жүйе 1.1 және 1.5 шарттарын қанағаттандырады және* $X(t,x)$ *және* $I_i(x)$ *функциялары* $t \in [0,T]$, $x \in U_a$ *болғанда x бойынша үзіліссіз дифференциалдансын. Сонда* $x(t,x_0)$ *шешімі* x_0 *бойынша үзілліссіз дифференциалданады және* $z(t) = \frac{\partial X(t,x_0)}{\partial x_0}$ *функциясы импульс әсерлі сызықты вариациялау*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial X\big(t,x(t,x_0)\big)}{\partial x}z, \qquad t \neq t_i,$$
$$\Delta\, z|_{\,t=t_i} = \frac{\partial I_i(t,x_0)}{\partial x}z(t_i).$$

теңдеуін қанағаттандырады.

Дәлелдеуі. $[0, t_1]$ кесіндісінде $x(t, x_0)$ функциясы $\dot{x}(t, x_0) = X\big(t, x(t, x_0)\big)$ жәй дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырады және осы аралықта Коши есебінің шешімінің бастапқы берілгендер бойынша дифференциалдануы туралы классикалық теореманың шарттары орындалады, сәйкесінше $z(t) = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0}$ функциясы $[0, t_1]$ кесіндісінде $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial X\left(t, x(t, x_0)\right)}{\partial x} z$ вариациялық теңдеуін қанағаттандырады. Әрі қарай $[t_1, t_2]$ кесіндісінде $(1.2.9), (1.2.10)$ импульсті жүйенің $x(t, x_0)$ шешімі $x(t_1) = x(t_1 - 0, x_0) + I_1\big(x(t_1 - 0, x_0)\big)$ бастапқы берілгенімен $\dot{x} = X(t, x)$ қарапайым дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады. Осыдан $x(t, x_0)$ функциясы $[t_1, t_2]$ кесіндісінде

$$x(t, x_0) = x(t_1 - 0, x_0) + I_1\big(x(t_1 - 0, x_0)\big) + \int_{t_1}^{t} X\big(s, x(s, x_0)\big) ds \quad (1.2.11)$$

интегралдық теңдеуін қанағаттандырады.

Енді $[t_1, t_2]$ кесіндісінде жаңа

$$\dot{x} = X(t, x)$$

$$x(t_1) = x(t_1 - 0, x_0) + I_1\big(x(t_1 - 0, x_0)\big)$$

Коши есебі үшін x_0 шамасын параметр ретінде қарастыруға болады және параметр бойынша шешімнің дифференциалдануы туралы классикалық теореманың шарттары орындалады. Осыдан $x(t, x_0)$ функциясы үзіліссіз дифференциалданады. Енді (1.2.11) интегралдық теңдеуін x_0 бойынша дифференциалдап

$$\frac{\partial x(t, x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial x(t_1 - 0, x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial I_1\big(x(t_1 - 0, x_0)\big)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(t_1 - 0, x_0)}{\partial x_0} +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \frac{\partial X\big(s, x(s, x_0)\big)}{\partial x_0} \frac{\partial x(s, x_0)}{\partial x_0} ds$$

аламыз, бұл біздің белгілеулер бойынша $[t_1, t_2]$ кесіндісінде Коши есебі түрінде

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial X\big(t, x(t, x_0)\big)}{\partial x} z,$$

$$z(t_1 + 0) = z(t_1 - 0) + \frac{\partial I_1\big(z(t_1 - 0)\big)}{\partial x}$$

жазылады. Басқа интервалдарда да осыған ұқсас түрде талқылай отырып, қажетті нәтижені аламыз.

1.3 Бекітілген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі жүйе үшін вариациялау теңдеуін орталау әдісімен шешу.

Бекітілген t_i уақыт мезетінде импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырамыз:

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \qquad t \neq t_i, \tag{1.3.1}$$

$$\triangle\, x|_{\,t=t_i} = \varepsilon I_i\big(x(t_i)\big), \tag{1.3.2}$$

мұндағы $i = 1,2, \dots ;\ \varepsilon > 0$ – кіші параметр.

Айталық, келесі шарттар орындалсын.

2.1. $X(t, x)$ және $I_i(x)$ функциялары $t \geq 0$ және $x \in D;\ D \subset \mathbb{R}^d$ үшін 1.1 шартын қанағаттандырады;

2.2. Бірқалыпты ($x \in D$ бойынша) шектер бар болсын:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)dt = X_0(x), \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0<t_i<T} I_i(x) = I_0(x).$$

2.3.

$$i(t) \leq Ct \tag{1.3.3}$$

теңсіздігі орындалатындай $C > 0$ тұрақтысы табылсын, мұндағы $i(t)$ – $(0, T)$ аралығындағы импульс саны.

2.4. Орталанған жүйенің

$$\dot{y} = \varepsilon[X_0(y) + I_0(y)] \tag{1.3.4}$$

$\varepsilon = 1$ және $t \in [0, T]$ үшін $y = y(\varepsilon t, x_0), y(0, x_0) = x_0 \in D$ шешімі бар және ол ρ маңайымен D облысына тиісті.

Келесі тұжырым А.М. Самойленконың импульстік жүйелерді орталау [52, 105 б] туралы классикалық теоремасынан тікелей шығады.

1.3.1-тұжырым. Айталық 2.1 – 2.4 шарттары орындалсын. Онда кез-келген $\eta > 0$ үшін барлық $\varepsilon < \varepsilon_0$ орындалатындай $(1.3.1) - (1.3.2)$ теңдеулер жүйесінің $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығында анықталған және

$$|x(t, x_0) - y(\varepsilon t, x_0)| \leq \eta, t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $x(t,x_0)$, $(x(0,x_0)=x_0)$ жалғыз шешімі бар болатындай $\varepsilon_0(\eta)>0$ саны табылады.

1.3.1-ескерту. 2.2 шартынан $t\to\infty$ болғанда

$$\left|\int_0^t X(s,x)ds - X_0(x)t\right| + \left|\sum_{0<t_i(x)<t} I_i(x) - I_0(x)t\right| \le \varphi(t)t \quad (1.3.5)$$

орындалатын монотонды түрде нөлге ұмтылатын $\varphi(t)$ үзіліссіз функциясының табылатындығы шығады.

Әрі қарай, жоғарыда айтылған Самойленко теоремасының дәлелдемесінен 1-тұжырымдағы ε_0 саны $\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығындағы $\{t_i\}$ импульс әсері нүктелерінің жағдайынан тәуелді емес, ол тек $(1.3.3)$ мажорантты бағалаудағы C тұрақтысынан және $(1.3.5)$ формуладағы $\varphi(t)$ функциясынан тәуелді болатыны шығады.

1.3.2-ескерту. $x(t,x_0)$ шешімі анығында ε шамасынан тәуелді. Ыңғайлылық үшін алдағы жазуларда ол тәуелділікті жазбаймыз.

2.1 – 2.4 шарттарынан бөлек келесі шарт орындалсын.

2.5. $X(t,x)$ және $I_i(x)$ функциялары $t\ge 0, x\in D$ үшін үзіліссіз дифференциалданады және келесі бірқалыпты ($x\in D$ бойынша) шектер бар болсын:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial X(t,x)}{\partial x}dt = \frac{\partial X_0(x)}{\partial x}, \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{0<t_i<T}\frac{\partial I_i(x)}{\partial x} = \frac{\partial I_0(x)}{\partial x}. \quad (1.3.6)$$

1.3.2-теорема. *(Вариациялау теңдеуінің орталауы туралы). Айталық 2.1 – 2.5 шарттары орындалсын және* $\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}$ *және* $\frac{\partial I_i(x)}{\partial x}$ *функциялары* $t\ge 0$, $x\in D$ *үшін* L *тұрақтысымен* x *бойынша липшицтік функциялар болсын. Сонда кез-келген* $\eta>0$ *үшін* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *болғанда* $(1.3.1)-(1.3.2)$ *дәл теңдеудің және* $(1.3.4)$ *орталанған теңдеудің шешімдерінің бастапқы берілгендер бойынша туындылары*

$$\left\|\frac{\partial x(t,z)}{\partial z}\Big|_{z=x_0} - \frac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z}\Big|_{z=x_0}\right\| \le \eta, t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right] \quad (1.3.7)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\eta)$ *саны табылады.*

Дәлелдеуі. Алдымен $z(t)=\frac{\partial x(t,z)}{\partial z}\Big|_{z=x_0}$ және $z_1(t)=\frac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z}\Big|_{z=x_0}$ белгілеулерін енгіземіз. 1.3.2-лемма бойынша $z(t)$ функциясы сызықты вариациялық матрицалық

$$\dot{z} = \varepsilon \frac{\partial X\big(t, x(t, x_0)\big)}{\partial x} z, \qquad t \neq t_i,$$
$$\triangle z|_{\ t=t_i} = \varepsilon \frac{\partial I_i\big(x(t_i, x_0)\big)}{\partial x} z(t_i)$$

теңдеуін және $z_1(t)$ функциясы

$$\dot{z}_1 = \varepsilon \frac{\partial \Big(X_0\big(y(\varepsilon t, x_0)\big) + I_0\big(y(\varepsilon t, x_0)\big)\Big)}{\partial x} z_1 \qquad (1.3.8)$$

теңдеуін қанағаттандырады.

1.3.1-тұжырымнан $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ болғанда дәл жүйенің $x(t, x_0)$ шешімі $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ үшін D облысында жататындай $\varepsilon_1 > 0$ саны табылатыны шығады. Осыдан, $x(t, x_0)$ шешімі үшін $|x(t, x_0)| \leq |x_0| + TM, t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ бағалауы орындалады. Орталанған есеп үшін де осыған ұқсас бағалау орынды. $z(t)$ шешімінің интегралдық берілуі

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial X\big(s, x(s, x_0)\big)}{\partial x} z(s) ds + \varepsilon \sum_{0<t_i<t} \frac{\partial I_i(x(t_i), x_0)}{\partial x} z(t_i),$$

түрінде және бұл шешім барлық $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығында анықталған. X және I_i функциялары липшицтік функциялар, осыдан олардың $\frac{\partial X}{\partial x}$ және $\frac{\partial I_i}{\partial x}$ дербес туындылары барлық $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ үшін L тұрақтысымен шектелген. Сонымен, біз келесі

$$\|z(t)\| \leq \|z(0)\| + \varepsilon \int_0^t L \|z(s)\| ds + \varepsilon \sum_{0<t_i<t} L \, \|z(t_i)\|$$

теңсіздігін аламыз. Осыдан Гронуолл леммасына [17] ұқсас түрде

$$\|z(t)\| \leq \|z(0)\| (1 + \varepsilon L)^{i(t)} e^{\varepsilon L t} (1 + \varepsilon L)^{C\frac{T}{\varepsilon}} \leq \|z(0)\| e^{LT + C\frac{T}{L}} \quad (1.3.9)$$

бағалауын аламыз.

(1.3.8) жүйенің шешіміне Гронуолл леммасын қолданып $\|z_1(t)\| \leq \|z_1(0)\| e^{2LT}$ бағалауы орынды екенін көрсетеміз.

Енді $\eta > 0$ санын бекітіп және $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығында $z(t) - z_1(t)$ айырымын бағалаймыз. Айталық $x(t, x_0) = x(t)$ және $y(\varepsilon t, x_0) = y(t)$. Сонда

$$\|z(t)-z_1(t)\| = \left\| \varepsilon \int_0^t \frac{\partial X\big(s, x(s,x_0)\big)}{\partial x} z(s)ds + \varepsilon \sum_{0<t_i<t} \frac{\partial I_i(x(t_i),x_0)}{\partial x} z(t_i) - \right.$$

$$-\varepsilon \int_0^t \frac{\partial X_0\big(y(s)\big)}{\partial x} z_1(s)ds - \varepsilon \int_0^t \frac{\partial I_0\big(y(s)\big)}{\partial x} z_1(s)ds \Bigg\| \le \varepsilon \left\| \int_0^t \left[\frac{\partial X\big(s,x(s)\big)}{\partial x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial X\big(s,y(s)\big)}{\partial x} \right] z(s)ds \right\| + \varepsilon \left\| \sum_{0<t_i<t} \left[\frac{\partial I_i\big(x(t_i)\big)}{\partial x} - \frac{\partial I_i\big(y(t_i)\big)}{\partial x} \right] z(t_i) \right\| +$$

$$+\varepsilon \left\| \int_0^t \frac{\partial X\big(s,y(s)\big)}{\partial x} [z(s)-z_1(s)]ds \right\| + \varepsilon \left\| \int_0^t \left[\frac{\partial X\big(s,y(s)\big)}{\partial x} - \frac{\partial X_0\big(y(s)\big)}{\partial x} \right] z_1(s)ds \right\|$$

$$+\varepsilon \left\| \sum_{0<t_i<t} \frac{\partial I_i\big(y(t_i)\big)}{\partial x} [z(t_i)-z_1(t_i)] \right\| + \varepsilon \left\| \sum_{0<t_i<t} \frac{\partial I_i\big(y(t_i)\big)}{\partial x} z_1(t_i) - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \frac{\partial I_0\big(y(s)\big)}{\partial x} z_1(s)ds \right\| = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 \qquad (1.3.10)$$

орындалады. Осыдан (1.3.10) өрнегінің әрбір мүшесін бағалаймыз. $\frac{\partial X}{\partial x}$ функциясы Липшицтік екенін және (1.3.9) ескерсек, онда (1.3.10) үшін

$$J_1 \le \varepsilon \int_0^t L|x(s)-y(s)|ds \|z(0)\| e^{LT + C\frac{T}{L}}$$

бағалауын орынды. 1.3.1-тұжырым бойынша $|x(s)-y(s)|$ шамасы мейлінше аз болатындай ε мәнін таңдауға болады. Осыдан $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ үшін

$$J_1 \le \frac{\eta}{b}, \qquad (1.3.11)$$

бағалауы орындалатындай $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ саны табылады, мұндағы $b > 0$ тұрақтысы төменде анықталады.

Осыған ұқсас екінші қосылғыш J_2 бағаланады:

$$J_2 \leq \varepsilon \sum_{0<t_i<t} L|x(t_i) - y(t_i)| \|z(0)\| e^{LT + C\frac{T}{L}} \leq \frac{\eta}{b}. \quad (1.3.12)$$

J_3 мүшесі үшін

$$J_3 \leq \varepsilon L \int_0^t \|z(s) - z_1(s)\| ds \quad (1.3.13)$$

бағалауын аламыз.

Төртінші қосылғыш J_4 бағалау үшін t-ның оң жағында интеграл астындағы функция нөлге тең болсын деп барлық $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығында интегралдауды орындаймыз. $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығын $\{\tau_k\}_1^n$ нүктелерінде n тең бөліктерге бөлеміз. Сонда

$$J_4 \leq \varepsilon \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left[\left(\frac{\partial X(s, y(s))}{\partial x} z_1(s) - \frac{\partial X(s, y(\tau_k))}{\partial x} \right) z_1(\tau_k) ds + \right.\right.$$

$$\left. + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left(\frac{\partial X_0(s, y(s))}{\partial x} z_1(\tau_k) - \frac{\partial X_0(s, y(\tau_k))}{\partial x} \right) z_1(s) ds \right] +$$

$$\left. + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left(\frac{\partial X(s, y(\tau_k))}{\partial x} z_1(s) - \frac{\partial X_0(s, y(\tau_k))}{\partial x} \right) ds z_1(\tau_k) \right\| =$$

$$= \|J_{41} + J_{42} + J_{43}\| \quad (1.3.14)$$

түрінде болады.

J_{41} үшін

$$\|J_{41}\| = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left\| \left(\frac{\partial X(s, y(s))}{\partial x} - \frac{\partial X(s, y(\tau_k))}{\partial x} \right) z_1(s) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial X(s, y(\tau_k))}{\partial x} \big(z_1(s) - z_1(\tau_k)\big) \right\| ds \right] \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \big(L|y(s) - y(\tau_k)| \|z_1(s)\| + L\|z_1(s) - z_1(\tau_k)\|\big) ds$$

бағалауын аламыз.
Бірақ

$$y(t) = y(\tau_k) + \varepsilon \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left[X_0\big(y(s)\big) + I_0\big(y(s)\big)\right] ds.$$

Сонымен, бізде

$$|y(t) - y(\tau_k)| \le \varepsilon 2M \frac{T}{\varepsilon n} = \frac{2MT}{n}, t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$$

және осыған ұқсас

$$\|z_1(s) - z_1(\tau_k)\| \le \int_{\tau_k}^{s} \left\| \frac{\partial \Big(X_0\big(y(t)\big) + I_0\big(y(t)\big)\Big)}{\partial x} z_1(t) \right\| dt \le 2\frac{T}{n} L \|z_1(0)\| e^{2LT}.$$

Сондықтан

$$\|J_{41}\| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{LMT}{n}\frac{T}{\varepsilon n}\|z_1(0)\|e^{2LT} + 2L^2\frac{T}{n}\|z_1(0)\|e^{2LT}\frac{T}{\varepsilon n}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}(2LMT^2\|z_1(0)\|e^{2LT} + 2L^2T^2\|z_1(0)\|e^{2LT}), \qquad (1.3.15)$$

$$\|J_{42}\| \le$$

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left\| \left(\frac{\partial X_0\big(y(\tau_k)\big)}{\partial x} - \frac{\partial X_0\big(y(s)\big)}{\partial x} \right) z_1(\tau_k) + \frac{\partial X_0\big(y(s)\big)}{\partial x} \big(z_1(\tau_k) - z_1(s)\big) \right\| ds$$

$$\le \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (L|y(\tau_k) - y(s)|\|z_1(\tau_k)\| + L\|z_1(\tau_k) - z_1(s)\|)ds \le$$

$$\le \frac{1}{n}(2LMT^2\|z_1(0)\|e^{2LT} + 2L^2T^2\|z_1(0)\|e^{2LT}), \qquad (1.3.16)$$

бағалаулары орынды.
Енді J_{43} мүшесін бағалаймыз:

$$\|J_{43}\| \leq \|z_1(0)\|e^{2LT}\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\int_0^{\tau_{k+1}}\left(\frac{\partial X(s,y(\tau_k))}{\partial x}-\frac{\partial X_0(y(\tau_k))}{\partial x}\right)ds\right\|+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\int_0^{\tau_k}\left(\frac{\partial X(s,y(\tau_k))}{\partial x}-\frac{\partial X_0(y(\tau_k))}{\partial x}\right)ds\right\|\right). \qquad (1.3.17)$$

(1.3.6) шарттарындағы бірінші шарт бойынша

$$\left\|\int_0^{t}\left(\frac{\partial X(s,x)}{\partial x}-\frac{\partial X_0(x)}{\partial x}\right)ds\right\| \leq t\psi(t), \qquad (1.3.18)$$

теңсіздігі орындалатындай $t \to \infty$ болғанда нөлге монотонды ұмтылатын $x \in D$ бойынша бірқалыпты үзіліссіз $\psi(t)$ функциясын беруге болатынын байқаймыз. Сонымен, егер t айнымалысы бірінші кесіндіден басқа кез-келген $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ кесіндісіне тиісті болса, онда (1.3.17) үшін

$$\|z_1(0)\|e^{2LT}\left(\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\tau_{k+1}\psi(\tau_{k+1})+\sum_{k=0}^{n-1}\tau_k\psi(\tau_k)\right) \leq$$

$$\leq \|z_1(0)\|e^{2LT}2nT\psi\left(\frac{T}{n\varepsilon}\right), \qquad (1.3.19)$$

бағалауын аламыз.

Бірақ, егер $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon n}\right]$ болса, онда Дини теоремасы бойынша $\varepsilon \to 0$ болғанда

$$\|J_{43}\| \leq \|z_1(0)\|e^{2LT}\varepsilon t\psi(t) = \|z_1(0)\|e^{2LT}\tau t\psi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \leq$$

$$\leq \|z_1(0)\|e^{2LT}\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\tau\psi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) \to 0 \qquad (1.3.20)$$

бағалауын аламыз. Сондықтан (1.3.14)-(1.3.20) бойынша

$$\|J_4\| \leq \frac{1}{n}(4LMT^2\|z_1(0)\|e^{2LT}+4L^2T^2\|z_1(0)\|e^{2LT})+\|z_1(0)\|e^{2LT}2nT\psi\left(\frac{T}{n\varepsilon}\right)+$$

$$+\|z_1(0)\|e^{2LT}\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\tau\psi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right). \qquad (1.3.21)$$

бағалауын орнатамыз.

J_5 мүшесі J_3 мүшесіне ұқсас бағаланады:

$$\|J_5\| \leq \varepsilon L \sum_{0<t_i<t} \|z(t_i) - z_1(t_i)\|. \qquad (1.3.22)$$

Ендігі кезекте (1.3.10) формуладағы J_6 үшін

$$\|J_6\| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{\substack{\tau_k<t_i<\tau_{k+1} \\ t_i<t}} \frac{\partial I_i(y(t_i))}{\partial x} z_1(t_i) - \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial I_0(y(s))}{\partial x} z_1(s) ds \right]$$

бағалауын аламыз.

Енді соңғы қосындының әрбір мүшесін бағалаймыз:

$$\varepsilon \left(\sum_{\substack{\tau_k<t_i<\tau_{k+1} \\ t_i<t}} \frac{\partial I_i(y(t_i))}{\partial x} z_1(t_i) - \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial I_0(y(s))}{\partial x} z_1(s) ds \right) =$$

$$= \varepsilon \left[\sum_{\substack{\tau_k<t_i<\tau_{k+1} \\ t_i<t}} \frac{\partial I_i(y(t_i))}{\partial x} z_1(t_i) - \frac{\partial I_0(y(\tau_k))}{\partial x} z_1(\tau_k)(\tau_{k+1} - \tau_k) - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial I_0(y(s))}{\partial x} z_1(s) ds \right]. \qquad (1.3.23)$$

Бірақ

$$\left\| \frac{\partial I_0(y(\tau_k))}{\partial x} z_1(\tau_k)(\tau_{k+1} - \tau_k) - \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial I_0(y(s))}{\partial x} z_1(s) ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left[\frac{\partial I_0(y(\tau_k))}{\partial x} z_1(\tau_k) - \frac{\partial I_0(y(s))}{\partial x} z_1(s) \right] ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left[\left(\frac{\partial I_0(y(\tau_k))}{\partial x} - \frac{\partial I_0(y(s))}{\partial x} \right) z_1(\tau_k) + \frac{\partial I_0(y(s))}{\partial x} [z_1(\tau_k) - z_1(s)] \right] ds \right\| \le$$

$$\le L \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (|y(\tau_k) - y(s)| \|z_1(\tau_k)\| + L\|z_1(\tau_k) - z_1(s)\|) ds \le$$

$$\le \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left(\frac{2LMT}{n} \|z_1(0)\| e^{2LT} + \frac{2L^2T}{n} \|z_1(0)\| e^{2LT} \right) ds \le$$

$$\le \left(\frac{2LMT}{n} \|z_1(0)\| e^{2LT} + \frac{2L^2T}{n} \|z_1(0)\| e^{2LT} \right) \frac{T}{n\varepsilon}. \qquad (1.3.24)$$

(1.3.23) формуладағы бірінші мүшені бағалаймыз:

$$\sum_{\substack{\tau_k < t_i < \tau_{k+1} \\ t_i < t}} \frac{\partial I_i(y(t_i))}{\partial x} z_1(t_i) - \frac{\partial I_0(y(\tau_k))}{\partial x} z_1(\tau_k)(\tau_{k+1} - \tau_k) =$$

$$= \sum_{\substack{\tau_k < t_i < \tau_{k+1} \\ t_i < t}} \frac{\partial I_i(y(t_i))}{\partial x} z_1(t_i) - \sum_{\substack{\tau_k < t_i < \tau_{k+1} \\ t_i < t}} \frac{\partial I_i(y(\tau_k))}{\partial x} z_1(\tau_k) +$$

$$+ \sum_{\substack{\tau_k < t_i < \tau_{k+1} \\ t_i < t}} \frac{\partial I_i(y(\tau_k))}{\partial x} z_1(\tau_k) - \frac{\partial I_0(y(\tau_k))}{\partial x} z_1(\tau_k)(\tau_{k+1} - \tau_k). \quad (1.3.25)$$

(1.3.25) формуладағы бірінші айырманы

$$\sum_{\substack{\tau_k < t_i < \tau_{k+1} \\ t_i < t}} \left\| \left(\frac{\partial I_i(y(t_i))}{\partial x} - \frac{\partial I_i(y(\tau_k))}{\partial x} \right) z_1(t_i) + \frac{\partial I_i(y(\tau_k))}{\partial x} \big(z_1(t_i) - z_1(\tau_k) \big) \right\| \le$$

$$\le \sum_{\substack{\tau_k < t_i < \tau_{k+1} \\ t_i < t}} (L|y(\tau_k) - y(s)|) \|z_1(t_i)\| + L\|z_1(t_i) - z_1(\tau_k)\| \le$$

$$\leq \sum_{\substack{\tau_k<t_i<\tau_{k+1}\\ t_i<t}} \left(\frac{2LMT}{n}\|z_1(0)\|e^{2LT} + \frac{2LT}{n}\|z_1(0)\|e^{2LT}\right) \quad (1.3.26)$$

түрде бағалаймыз.
(1.3.25) формуладағы екінші айырма үшін

$$\left\|\sum_{\substack{\tau_k<t_i<\tau_{k+1}\\ t_i<t}} \left[\frac{\partial I_i\big(y(\tau_k)\big)}{\partial x} z_1(\tau_k) - \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial I_0\big(y(\tau_k)\big)}{\partial x} z_1(\tau_k) ds\right]\right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \left(\sum_{\substack{0<t_i<\tau_k\\ t_i<t}} \frac{\partial I_i\big(y(\tau_k)\big)}{\partial x} - \int_0^{\tau_k} \frac{\partial I_0\big(y(\tau_k)\big)}{\partial x} ds + \right.$$

$$\left. + \left\|\sum_{\substack{0<t_i<\tau_{k+1}\\ t_i<t}} \frac{\partial I_i\big(y(\tau_k)\big)}{\partial x} - \int_0^{\tau_{k+1}} \frac{\partial I_0\big(y(\tau_k)\big)}{\partial x} ds\right\|\right) \|z_1(0)\|e^{2LT} \quad (1.3.27)$$

бағалауы орынды.
(1.3.6) шарттарындағы екінші шарт бойынша (1.3.27) өрнегінің бағалауы (1.3.19) формуладағы бағалауға ұқсас түрде шығады. Нақтылай түссек, бірінші өрнек $\tau_k\psi(\tau_k)$ шамасынан, ал екінші өрнек $\tau_{k+1}\psi(\tau_{k+1})$ шамасынан артпайды. Осылайша, (1.3.26) және (1.3.27) бойынша (1.3.25) өрнегінің бағалауын аламыз:

$$\left(\sum_{\substack{\tau_k<t_i<\tau_{k+1}\\ t_i<t}} \left(\frac{2LMT}{n} + \frac{2LM}{n}\right) + \tau_k\psi(\tau_k) + \tau_{k+1}\psi(\tau_{k+1}) \right) \|z_1(0)\|e^{2LT}. \quad (1.3.28)$$

(1.3.24) және (1.3.28) формулаларынан (1.3.23) өрнегінің

$$\left[\left(\frac{2LMT}{n} + \frac{2LM}{n}\right)\frac{T}{n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{\tau_k<t_i<\tau_{k+1}\\ t_i<t}} \left(\frac{2LMT}{n} + \frac{2LM}{n}\right) + \tau_k\psi(\tau_k) + \tau_{k+1}\psi(\tau_{k+1})\right] \|z_1(0)\|e^{2LT}$$

бағалауын аламыз.
Сонда $(1.3.27)$ және $(1.3.23)$ бойынша және $(1.3.1)-(1.3.2)$ ескере отырып J_6 үшін

$$\|J_6\| \leq \frac{2LMT+2L^2T}{n}T+\frac{2LMT+2LM}{n}\varepsilon\sum_{0<t_i<\frac{T}{\varepsilon}}1+$$

$$+\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}[\tau_k\psi(\tau_k)+\tau_{k+1}\psi(\tau_{k+1})] \leq \frac{2LMT+2L^2T}{n}T+$$

$$+\frac{2LMT+2LM}{n}CT+2\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\frac{T}{\varepsilon}\psi\left(\frac{T}{\varepsilon n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}[2LMT^2+2L^2T^2+(2LMT+2LM)CT]+2nT\psi\left(\frac{T}{\varepsilon n}\right) \qquad (1.3.29)$$

бағалауын аламыз.
$(1.3.21)$ және $(1.3.29)$ өрнектерінің бірінші мүшелері $\frac{\eta}{b}$ шамасынан кіші болатын мейлінше үлкен n санын таңдаймыз және осы n санын бекітеміз. Сонда бекітілген n саны үшін $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ санын мейлінше аз қылып таңдай отырып және барлық $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ үшін $(1.3.21)$ және $(1.3.29)$ өрнектерінің қалған мүшелерін $\frac{\eta}{b}$ шамасынан кіші қылатындай мүмкіндік аламыз.
Сонымен, $(1.3.11)$-$(1.3.13)$ теңсіздіктерінен және $(1.3.21)$, $(1.3.22)$, $(1.3.29)$ бағалауларынан

$$\|z(t)-z_1(t)\| \leq \frac{\eta}{b}+\frac{\eta}{b}+\varepsilon L\int_0^t\|z(s)-z_1(s)\|ds+$$

$$+\frac{\eta}{b}+\varepsilon L\sum_{0<t_i<t}\|z(t_i)-z_1(t_i)\|+\frac{\eta}{b}$$

бағалауын аламыз.
Енді Гронуолла леммасының [102, 13 б] аналогын пайдаланып және b шамасына сәйкесінше таңдау жасап 1.3.2-теореманың дәлелдеуін аяқтаймыз.

1.3.4-ескерту. 1.3.2-теореманың дәлелдеуінен 1.3.2-ескертудегі сияқты сондағы алынған бағалаулар $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығында $\{t_i\}$ импульс әсерлі нүктелердің орналасуынан (жағдайынан) тәуелсіз, бірақ $(1.3.3)$ бағалаудағы C тұрақтысынан және $(1.3.18)$ формуладағы $\psi(t)$ функциясынан тәуелді болатындығы шығады. Осыдан ε_0 шамасы $\{t_i\}$ позициясынан тәуелді емес.

1.4. Бекітілген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешімі

$(1.3.1) - (1.3.2)$ жүйе үшін

$$F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \qquad (1.4.1)$$

шартымен бірге шеттік есепті қарастырамыз.

1.4.1-теорема. *Айталық 2.1–2.3 шарттары және сонымен қатар келесі шарттар орындалсын:*
2.6.

$$\dot{y} = \varepsilon[X_0(y) + I_0(y)],$$

$$F\left(y(0), y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0,$$

орталанған шеттік есебінің қайсыбір ρ *маңайымен* D *облысына тиісті* $y = y(\varepsilon t) = y(\tau)$ *шешімі және* $X(t,x)$ *функциясының* $y(t)$ *нүктесінің* ρ *маңайында* x *бойынша үзіліссіз* $\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}$ *дербес туындылары, ал* $I_i(x)$ *функцияларының* $i \in N$ *бойынша бірқалыпты үзіліссіз* $\frac{\partial I_i(x)}{\partial x}$ *дербес туындылары бар болады.* $X_0(x), I_0(x)$ *және* $F(x,y)$ *функцияларының көрсетілген* ρ *маңайда* $\frac{\partial X_0(x)}{\partial x}, \frac{\partial I_0(x)}{\partial x}, \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ *үзіліссіз дербес туындылары бар болады және*

$$det\frac{\partial F_0(x)}{\partial x_0} \neq 0,$$

мұндағы $x_0 = y(0)$, $F_0(x_0) = F\big(x_0, y(T, x_0)\big)$.
2.7. Төмендегі шектер $y(t)$ *нүктесінің* ρ *маңайында* x *үшін бар болсын:*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial X(t,x)}{\partial x}dt = \frac{\partial X_0(x)}{\partial x}, \qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{0<t_i<T}\frac{\partial I_i(x)}{\partial x} = \frac{\partial I_0(x)}{\partial x}.$$

Онда $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *болғанда* $(1.3.1) - (1.3.2), (1.4.1)$ *шеттік есептің* $y(\varepsilon t)$ *нүктесінің* σ_0 *маңайына тиісті* $x(t,\varepsilon)$ *жалғыз шешімі бар болатындай* $\varepsilon_0 > 0$ *және* $\sigma_0 < \rho$ *сандары табылады, яғни*

$$|x(t,\varepsilon) - y(\varepsilon t)| < \sigma_0, t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \qquad (1.4.2)$$

және

$$\sup_{t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]} |x(t,\varepsilon) - y(\varepsilon t)| \to 0, \varepsilon \to 0. \qquad (1.4.3)$$

Дәлелдеуі. Айталық $x_0 = y(0)$ – шешімнің бастапқы мәні. $(1.3.1) - (1.3.2)$, $(1.4.1)$ шеттік есептің шешімін

$$x(t,\varepsilon) = x(t, x_0 + \bar{x}, \varepsilon), \qquad (1.4.4)$$

түрінде іздейміз, мұндағы $\bar{x}$ параметрі нөлдің маңайынан таңдалады. Орталанған есептің $y(\tau, x_0 + \bar{x})$ шешімін қарастырамыз. $y(\tau)$ және $y(\tau, x_0 + \bar{x})$ айырмасы үшін Гронуолл теңсіздігі бойынша

$$|y(\tau) - y(\tau, x_0 + \bar{x})| \leq |\bar{x}|e^{LT}, \qquad (1.4.5)$$

теңсіздігі $y(\tau, x_0 + \bar{x})$ шамасы D облысының шекарасына жеткенше орындалады. Сонымен, егер $|\bar{x}| \leq \frac{\rho}{2}e^{-LT}$ болса, онда $y(\tau, x_0 + \bar{x})$ шешімі $t \in [0,T]$ үшін бар болады және у(τ) шамасының $\frac{\rho}{2}$ маңайында жатады.

$(1.4.4)$ теңдігіндегі белгісіз $\bar{x}$ параметрін

$$F\left(x_0 + \bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \bar{x}, \varepsilon\right)\right) = 0 \qquad (1.4.6)$$

теңдеуінен анықтаймыз.

1.3.1-тұжырым бойынша мейлінше аз $\varepsilon > 0$ үшін $\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығында дәл жүйенің $x(t, x_0 + \bar{x}, \varepsilon)$ шешімі бар болады және кез-келген $\eta > 0$ үшін $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ болғанда

$$|x(t, x_0 + \bar{x}, \varepsilon) - y(\varepsilon t, x_0 + \bar{x})| < \eta(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0 \qquad (1.4.7)$$

теңсіздігі орындалатын $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$ саны табылатынын байқаймыз.

Осылайша, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ үшін, егер ε_0 мейлінше аз болса, онда $(1.4.6)$ теңдеуіндегі бейнелеу $\bar{x}$ бейнелеу сияқты $B_r(0)$, $r = \frac{\rho}{2}e^{-LT}$ шарында қисынды анықталған. Сонымен қатар, $t \in [0,T]$ үшін $y(\tau)$ функциясы шенелген болғандықтан $(1.4.5)$ және $(1.4.7)$ бойынша $x(t, x_0 + \bar{x}, \varepsilon)$ шешімі $t \in \left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ үшін шектелген анықталу облысына тиісті болатынын атап айтуға болады.

2.6 шартынан $(1.3.1) - (1.3.2)$ жүйесі 1.3.2-лемманың шарттарын қанағаттандыратыны шығады. Осыдан $F\left(x_0 + \bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \bar{x}, \varepsilon\right)\right)$ бейнелеуінің $\bar{x} \in B_r(0)$ үшін $\frac{\partial F}{\partial x}$ және $\frac{\partial F}{\partial x}$ бірқалыпты үзіліссіз дербес туындылары бар және $\bar{x}$

бойынша үзіліссіз дифференциалданады. Осыдан $\bar{x} \in B_r(0)$ үшін $\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\| \leq N(\tau)$ және $\left\|\frac{\partial F}{\partial y}\right\| \leq N(\tau)$ орындалатын $N(\tau) > 0$ тұрақтысы бар болады.

Әрі қарай

$$F\left(x_0+\bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\bar{x}, \varepsilon\right)\right) - F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0)\big) =$$

$$= F\left(x_0+\bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\bar{x}, \varepsilon\right)\right) - F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big) +$$

$$+F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big) - F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0)\big)$$

аламыз.

Айталық $R_1(\bar{x}, \varepsilon) = F\left(x_0+\bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\bar{x}, \varepsilon\right)\right) - F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big)$ болсын. (1.4.7) бойынша

$$|R_1(\bar{x}, \varepsilon)| \leq N(r)\left|x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\bar{x}, \varepsilon\right) - y(T, x_0+\bar{x})\right| \leq N(r)\eta(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0. \quad (1.4.8)$$

бағалауы орынды.

Енді

$$F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big) - F\big(x_0, y(T, x_0)\big) =$$

$$= \left(\frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial x} + \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(T, x_0)}{\partial x_0}\right)\bar{x} +$$

$$+\int_0^1 \left(\frac{\partial F\big(x_0+s\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big)}{\partial x} - \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\right)\bar{x}ds +$$

$$+\int_0^1 \left(\frac{\partial F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+s\bar{x})\big)}{\partial x} \cdot \frac{\partial y(T, x_0+s\bar{x})}{\partial z}\ \Big|_{z=x_0+s\bar{x}} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\ \Big|_{z=x_0}\bar{x}ds\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial F(x_0, y(T, x_0))}{\partial x} + \frac{\partial F(x_0, y(T, x_0))}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z} \Big|_{z=x_0} \right) \bar{x} +$$

$$+R_2(\bar{x})\bar{x} + R_3(\bar{x})\bar{x} \qquad (1.4.9)$$

түрлендіруін аламыз.
(1.4.9) түрлендірудегі әрбір қосылғышты бөлек қарастырамыз. Бірінші қосылғышты 2.6 - шартындағы $F_0(x_0)$ анықтамасы бойынша $\frac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0}$ түрінде көрсетуге болады.

Екінші қосылғыш үшін дербес туындылардың бірқалыпты үзіліссіздігінен және (1.4.5) бойынша $|\bar{x}| \le \tau$ үшін $\|R_2(\bar{x})\| \le \delta(r) \to 0, r \to 0,\ r \le \frac{\rho}{2} e^{-LT}$ орындалатын $\delta(r)$ қайсыбір функциясы бар болады.

Үшінші қосылғышты бағалау үшін $\frac{\partial y(T,z)}{\partial z}$ туындысы z параметрі бойынша үзіліссіз функция болатынын байқаймыз. Осыдан үшінші мүшеде $|\bar{x}| \le r$ үшін дербес туындының бірқалыпты үзіліссіздігінен $\delta_1(r)$ қайсыбір функциясымен $\|R_3(\bar{x})\| \le \delta_1(r) \to 0, r \to 0$ бағалауын аламыз.

Енді (1.4.6) теңдеуіне тоқталып, оны

$$\bar{x} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} \left(R_1(\bar{x}, \varepsilon) + R_2(\bar{x}) + R_3(\bar{x})\right)\bar{x},$$

немесе

$$\bar{x} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(x, \varepsilon) \qquad (1.4.10)$$

түрінде қайта жазамыз.

$M(x, \varepsilon)$ үшін

$$|M(x, \varepsilon)| \le N(r)\eta(\varepsilon) + \delta_2(r)\bar{x}, \qquad (1.4.11)$$

бағалауы орынды, мұндағы $\delta_2(r) = \max\{\delta(r), \delta_1(r)\}$. Сондай-ақ, $\varepsilon \to 0$ болғанда $\eta(\varepsilon) \to 0$ және $r \to 0$ болғанда $\delta_2(r) \to 0$ орындалатынына назар аударамыз.

Енді $\frac{\partial M}{\partial \bar{x}}$ өрнегін бағалаймыз. Біз

$$F\left(x_0 + \bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \bar{x}, \varepsilon\right)\right)$$

$$\frac{\partial R_1(\bar{x},\varepsilon)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial F\left(x_0+\bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\bar{x},\varepsilon\right)\right)}{\partial x}\Big|_{\bar{x}=x+x_0}$$

$$+\frac{\partial F\left(x_0+\bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\bar{x},\varepsilon\right)\right)}{\partial y}\cdot\frac{\partial x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\bar{x},\varepsilon\right)}{\partial z}\Big|_{z=\bar{x}+x_0} -$$

$$-\frac{\partial F\big(x_0+\bar{x}, y(\tau, x_0+\bar{x})\big)}{\partial x}\Big|_{x=\bar{x}+x_0} -$$

$$-\frac{\partial F\big(x_0+\bar{x}, y(\tau, x_0+\bar{x})\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(\tau, x_0+\bar{x})}{\partial z}\Big|_{z=\bar{x}+x_0}$$

аламыз.

1.3.2-теорема бойынша шарттары орындалатын

$$\frac{\partial x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\bar{x},\varepsilon\right)}{\partial z} - \frac{\partial y(\tau, x_0+\bar{x})}{\partial z}$$

айырмасын ε шамасын сәйкесінше таңдау арқылы мейлінше аз қылуға болатынын байқаймыз. Сонымен, (1.4.7) бойынша және $|\bar{x}| \le r$ облысында $\frac{\partial F}{\partial x}$ және $\frac{\partial F}{\partial y}$ туындылардың бірқалыпты үзіліссіздігінен қайсыбір $\delta_3(\varepsilon)$ функциясы үшін

$$\left\|\frac{\partial R_1(\bar{x},\varepsilon)}{\partial \bar{x}}\right\| \le \delta_3(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0, |\bar{x}| \le r \qquad (1.4.12)$$

бағалауын аламыз.

Енді $\frac{\partial R_2}{\partial x}$ өрнегін бағалаймыз. (1.4.9) формуладан R_2

$$R_2(\bar{x}) = F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big) - F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big) - \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial x}\bar{x}$$

түрінде жазамыз.

Содан соң

$$\left\|\frac{\partial R_2(\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right\| \leq \left\|\frac{\partial F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big)}{\partial x} - \frac{\partial F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big)}{\partial x}\right\| +$$

$$+\left\|\frac{\partial F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(T, x_0+\bar{x})}{\partial z}\ \Big|_{z=\bar{x}+x_0} -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(T, x_0+\bar{x})}{\partial z}\ \Big|_{z=\bar{x}+x_0}\right\| \leq \delta_4(\bar{x}) \to 0,$$

$$r \to 0 \quad (1.4.13)$$

орынды екендігі шығады.
Осыған ұқсас

$$R_3(\bar{x}) = F\big(x_0, y(T, x_0+\bar{x})\big) - \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\ \Big|_{z=x_0}\bar{x},$$

екенін ескере отырып, $\frac{\partial F}{\partial y}$ және $\frac{\partial y(T,z)}{\partial z}$ туындыларының бірқалыпты үзіліссіздігінен $\frac{\partial R_3}{\partial \bar{x}}$ үшін

$$\left\|\frac{\partial R_3(\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right\| \leq \left\|\frac{\partial F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(T, x_0+\bar{x})}{\partial z}\ \Big|_{z=\bar{x}+x_0} -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\ \Big|_{z=x_0}\right\| \leq \delta_5(\bar{x}) \to 0, r \to 0 \quad (1.4.14)$$

бағалауын аламыз.

Осыдан $(1.4.12)$ – $(1.4.14)$ бойынша

$$\left\|\frac{\partial M(\bar{x}, \varepsilon)}{\partial \bar{x}}\right\| \leq \delta_3(\varepsilon) + \delta_6(r) = \zeta(\varepsilon, r) \to 0, \varepsilon \to 0, r \to 0.$$

бағалауын орынды. Айталық, $C_1 = \left\|\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right\|^{-1}$ болсын.

$$\delta_r(r) \leq \frac{1}{2} \text{ және } \eta(\varepsilon) \leq \frac{r}{2C_1 N(r)} \quad (1.4.15)$$

теңсіздіктері орындалатын сәйкесінше r және $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ сандарын таңдаймыз. Сонда, егер $|\bar{x}| \leq r$ болса, онда $(1.4.11)$ теңсіздігінен

$$C_1|M(\bar{x},\varepsilon)| \leq C_1(N(r)\eta(\varepsilon) + \delta_2(r)|\bar{x}|) \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

шығады.

Осылайша, егер $(1.4.15)$ теңсіздігі орындалса, онда $\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\bar{x},\varepsilon)$ өрнегі $B_r(0)$ шарын өз-өзіне бейнелейді. Сондай-ақ, егер ε және r шамаларын $(1.4.15)$ қатар $\zeta(\varepsilon,r) < 1$ теңсіздігі орындалатын етіп таңдасақ, онда $(1.4.10)$ бейнелеуі қысушы бейнелеу болады. Сәйкесінше, бұл бейнелеудің $\bar{x}^* = \bar{x}^*(\varepsilon,r)$ жалғыз қозғалмайтын нүктесі бар болады және ол $(1.3.1) - (1.3.2)$, $(1.4.1)$ шеттік есептің шешімінің бастапқы мәні болады. $(1.4.7)$ және $(1.4.8)$ бағалауларын $\sigma_0 > 0$ үшін $(1.4.2)$ бағалауына қатыстырамыз.

Енді $\varepsilon \to 0$ болғанда $r(\varepsilon) \to 0$ орындалатын етіп r шамасын ε параметрінің функциясы ретінде таңдап алып, және $(1.4.8)$ формуладағы $\eta(\varepsilon)$ функциясы үшін

$$\frac{\eta(\varepsilon)}{r(\varepsilon)} \leq \frac{r}{2C_1N\big(r(\varepsilon)\big)}$$

теңсіздігі орындалатын $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ санын таңдап алуға мүмкіндік алайық. Мұндай таңдау жасауға болады, өйткені $\frac{\partial F}{\partial x}$ және $\frac{\partial F}{\partial y}$ дербес туындыларын $B_r(0)$ шарында шектейтін $N\big(r(\varepsilon)\big)$ функциясы $r(\varepsilon)$ кемігенде сәйкесінше артпайтынын байқаймыз. Сонда $(1.4.3)$ бағалауы $(1.4.5)$ және $(1.4.7)$ формулаларынан шығады. 1.4.1-теорема дәлелденді.

1.4.1-ескерту. 1.4.1-теореманың дәлелдеуінде дәл және орталау есептерінің шешімдерінің айырмасының бағалаулары және бастапқы берілгендер бойынша олардың туындыларының айырымының бағалаулары ($(1.3.7)$ бойынша) пайдаланылды. Бұл бағалаулар $\left[0;\frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығындағы $\{t_i\}$ нүктелерінің орналасуынан тәуелсіз, бірақ тек C тұрақтысынан және $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ функцияларынан тәуелді.

1.5. Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепті орталау әдісімен шешу

Кіші параметрмен уақыт бекітілмеген мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x), t \neq t_i(x), \tag{1.5.1}$$

$$\Delta\, x|_{\,t=t_i(x)} = \varepsilon I_i(x), \tag{1.5.2}$$

$$F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0. \tag{1.5.3}$$

шеттік есебін қарастырамыз.

Мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, $T > 0$ бекітілген сан, $t_i(x) < t_{i+1}(x)$ $(i = 1, 2, \dots)$ – импульс әсерлі мезеттер, $I_i\colon R^d \to R^d$, $X\colon R^d \times R^d \to R^d$ және $F\colon R^d \times R^d \to R^d$ функциялары d өлшемді вектор функциялар, $\Delta x = x(t+0) - x(t)$.

Айталық, барлық $t > 0$ и $x \in U_a$ үшін

$$i(t, x) \leq C \cdot t \tag{1.5.4}$$

орындалатын $C > 0$ тұрақтысы табылсын, мұндағы $i(t, x)$ - $(0, t)$ аралығындағы импульстер саны.

Сондай-ақ, $(1.5.1) - (1.5.3)$ шеттік есебінің шешімі әрбір $t = t_i(x)$ бетімен бірден артық емес рет қиылыссын.

1.5.1-теорема. *Айталық, 1.1-1.5 шарттары және А шарты орындалсын. Онда барлық* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *үшін* $(1.5.1) - (1.5.3)$ *шеттік есебінің* $y(\varepsilon t)$ *нүктесінің* σ_0 *маңайында* $x(t, \varepsilon)$ *шешімі бар болатындай* $\varepsilon_0 > 0$ *және* $0 < \sigma_0 < \rho$ *сандары табылады, яғни*

$$|x(t, \varepsilon) - y(\varepsilon t)| < \sigma_0, t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right],$$

және

$$\sup_{t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]} |x(t, \varepsilon) - y(\varepsilon t)| \to 0, \varepsilon \to 0. \tag{1.5.5}$$

Дәлелдеуі. U_a жиынында кез-келген $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ нүктелер жиынтығын аламыз және оларды $\tau_1(y_1), \tau_2(y_2), \dots, \tau_n(y_n), \dots$ импульс әсерлі мезеттер тізбегін құру үшін пайдаланамыз. Таңдалған жиынтық үшін $\{\tau_n(y_n)\}, i = 1,2, \dots$, бекітілген уақыт мезеттеріндегі импульс әсерлі жүйені

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \qquad t \neq t_i(y_i), \tag{1.5.6}$$

$$\Delta x|_{\ t = t_i(y_i)} = \varepsilon I_i(x), \tag{1.5.7}$$

шеттік шартымен

$$F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \tag{1.5.8}$$

тұрғызамыз.

Кез-келген $x \in U_a$ және $t > 0$ таңдаймыз және оларды бекітеміз. $[0, t)$ интервалы дәл n нүктені $\tau_1(y_1) < \tau_2(y_2) < \ldots < \tau_n(y_n) < t$ қамтиды деп ұйғарамыз. (1.5.4) бойынша $n \le Ct$ аламыз. Бұдан 1.5 шартынан кез-келген натурал i үшін $t_i(x) < A_i < t_{i+1}(y),\ x, y \in U_a$ теңсіздігі орындалатын импульс мезеттері үшін $\{A_i\}_1^\infty$ өспелі сандар тізбегі табылатындығы шығады. Осыдан кейін біз

$$t_1(y_1) < A_1 < t_2(y_2) < A_3 < t_3(y_3) < \cdots < A_{n-2} < t_{n-1}(y_{n-1}) < A_{n-1} < \tau_n(x)$$

аламыз. Осыдан $\sum_{0<t_i(y_i)<t} I_i(x)$ қосындысындағы қосылғыштар саны n, немесе $n-1$, немесе $n+1$ сандарына тең бола алады.

Сонымен, бізде үш мүмкін жағдай бар:

$$\frac{1}{t}\sum_{0<t_i(y_i)<t} I_i(x) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_{0<t_i(y_i)<t} I_i(x)\,, \\ \dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_{0<t_i(y_i)<t} I_i(x) - \dfrac{1}{t}\cdot I_n(x)\,, \\ \dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_{0<t_i(y_i)<t} I_i(x) + \dfrac{1}{t} I_{n+1}(x). \end{array}\right.$$

Әрбір жағдайда 1.2 шарты бойынша және сондай-ақ $I_i(x)$ функциясының M тұрақтысымен шектелуінен біз $t \to \infty$ болғанда

$$\frac{1}{t}\sum_{0<t_i(y_i)<t} I_i(x),$$

y_i және x бойынша бірқалыпты $I_0(x)$ шамасына ұмтылатынын аламыз. Сонымен қатар

$$\left|\sum_{0<t_i(y_i)<t} I_i(x) - I_0(x)t\right| \le \varphi_1(t)t, \tag{1.5.9}$$

орындалады және $(0, t)$ аралығында $t_i(y_i)$ нүктелер саны $Ct + 1$ шамасынан аспайды.

Осылайша, кез-келген $\{y_i\} \in U_a$ жиыны үшін $(1.5.6) - (1.5.8)$ шеттік есебі 1.4.1-теореманың шарттарын қанағаттандырады. Осыдан, кіші ε параметрі үшін орташаланған есептің шешімінің қайсыбір маңайына тиісті дәл есептің жалғыз шешімі бар болады. Сонымен қатар, (1.5.9) және 1.4.1-ескерту бойынша 1.4.1-теоремадан ε_0 және σ_0 мәндері кез-келген $\{y_i\}_1^\infty \in U_a$ жиыны үшін бірдей болып қала береді.

Енді $\varepsilon < \varepsilon_0$ болғанда орталанған есептің шешімінің σ_0 маңайына тиісті болатын $(1.5.1) - (1.5.3)$ шеттік есебінің жалғыз шешімі бар болатынын және (1.5.5) орынды екенін көрсетейік. Алдымен $\varepsilon < \varepsilon_0$ санын таңдаймыз, содан соң оны бекітеміз және $\left[0; \frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығын қарастырамыз. Айталық $t_i(x) < \frac{T}{\varepsilon}$ орындалатын $t_i(x)$ функциялар саны p шамасына тең болсын. Теореманың шарты $i = \overline{1, p-1}$ үшін $t_i(x) < \frac{T}{\varepsilon}$ орындалатынын білдіретінін байқаймыз. Біздің шеттік есеп үшін $t > \frac{T}{\varepsilon}$ болғанда $(1.5.1) - (1.5.3)$ шеттік есебінің шешімінің жағдайының еш мәні жоқ, сондықтан бұл жүйені $\left[0; \frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығында қарастырамыз. $(1.5.1) - (1.5.3)$ шеттік есебінің шешімінің анықтамасынан $t = \frac{T}{\varepsilon}$ мезетіндегі импульс әсерінің еш мәні болмайтыны шығады. Сонымен $t = t_p(x)$ гипербетінің орнына $t = \tau(x)$ гипербетін қарастырамыз, мұндағы $\tau(x)$ төмендегі түрде берілген:

$$\tau(x) = \begin{cases} t_p(x), x \in U_a \colon t_p(x) < \dfrac{T}{\varepsilon} \text{ болса,} \\ \dfrac{T}{\varepsilon}, x \in U_a \colon t_p(x) \geq \dfrac{T}{\varepsilon} \text{ болса.} \end{cases}$$

Қайтадан $\tau(x) \coloneqq t_p(x)$ тағайындап, кез-келген $i = \overline{1, p}$ және $x \in U_a$ үшін $t_i(x) \leq \frac{T}{\varepsilon}$ орындалатынын аламыз.

U_a жиынында $y_1, \dots, y_p$ нүктелерін қарастырамыз. Енді $y = (y_1, \dots, y_p)$ векторы $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|y_i\|^2$ нормасымен R^{pd} кеңістігінен алынған. Егер $y_1, \dots, y_p \in U_a$ болса, онда y векторы R^{pd} кеңістігінде центрі координат басында радиусы pa болатын $B_{pa}(0)$ шарына тиісті болады.

Таңдалған $y_1, \dots, y_p \in U_a$ үшін $(1.5.6) - (1.5.7)$ шеттік есебін қарастырамыз. 1.4.1-теоремаға сәйкес бұл есептің $x^*(t, y) \in U_a$, $t \in \left[0; \frac{T}{\varepsilon}\right]$ жалғыз шешімі бар. 1.4.1-теоремадан және 1.4.1-ескертуден $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ үшін $x^*(t, y)$ шешімі $y(\varepsilon t)$ шамасының $\frac{\mu}{2}$ маңайына тиісті болатындай $\tilde{\varepsilon} < \nu$ саны табылатыны және осыдан $\rho\left(x^*\left(\frac{T}{2}, y\right), N_i(\varepsilon)\right) > \frac{\mu}{2}$ орындалатындығы шығады.

$x^*(t, y)$ шешімін пайдаланып, біз $s = s(y) \colon B_{pa}(0) \to B_{pa}(0)$ бейнелеуін

$$s_i = x^*(t_i(y_i), y), i = \overline{1, p}, s = (s_1, \dots, s_p) \qquad (1.5.10)$$

түрде тұрғызамыз.

Дәлелдеуді аяқтау үшін бізге тұрғызылған бейнелеудің қозғалмайтын нүктесі бар болатынын көрсету қажет. Брауэр теоремасы бойынша бейнелеудің үзіліссіз болатынын көрсету жеткілікті. $y \in B_{ap}(0)$ бекітейік және y нүктесіне мейлінше жақын $z \in B_{ap}(0)$ нүктесін қарастырайық. $t_i(x)$ үзіліссіздігі $t_i(y_i)$ және $t_i(z_i)$ нүктелерінің мейлінше жақын екеніне кепілдік береді.

$t_i(y_i)$ және $t_i(z_i)$ үшін $(1.5.6) - (1.5.7)$ шеттік есептің шешімі

$$x^*(t,y) = x^*(y) + \varepsilon \int_0^t X\big(s, x^*(s,y)\big)\, ds + \varepsilon \sum_{0<t_i(y_i)<t} I_i\big(x^*\big(t_i(y_i)\big), y\big),$$

$$x^*(t,z) = x^*(z) + \varepsilon \int_0^t X\big(s, x^*(s,z)\big)\, ds + \varepsilon \sum_{t_i(z_i)} I_i\big(x^*\big(t_i(z_i)\big), z\big),$$

түрінде болады, мұндағы $x^*(y)$ және $x^*(z)$ сәйкесінше бұл шешімдердің бастапқы мәндері. Бұл 1.4.1-теорема бойынша $x^*(y) = x_0 + \bar{x}(y)$ және $x^*(z) = x_0 + \bar{x}(z)$ түрінде екендігі шығады ((1.4.4) қараңыз). $\bar{x}(y)$ және $\bar{x}(z)$ функциялары біртіндеп жуықтау әдісімен $(1.4.10)$ сәйкес тұрғызылған

$$X_n(y) = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M\left(\bar{x}_{n-1}^{(y)}, \varepsilon\right), \;\; X_n(z) = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M\left(\bar{x}_{n-1}^{(z)}, \varepsilon\right),$$

рекурентті тізбектер арқылы табылады, мұндағы $\bar{x}_0(y) = \bar{x}_0(z) = 0$ және $M(\bar{x}, \varepsilon) = R_1(\bar{x}, \varepsilon) + \big(R_2(\bar{x}) + R_3(\bar{x})\big)\bar{x}$.

Енді $\bar{x}_n(y)$ функциялары барлық n үшін үзіліссіз екенін көрсетеміз. $n = 1$ болған жағдайда $R_1(\bar{x}, \varepsilon)$ және $M(\bar{x}, \varepsilon)$ функцияларының анықтамасынан

$$|\bar{x}_1(y) - \bar{x}_1(z)| \le C_1 N_1(r) \left| x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0, y, \varepsilon\right) - x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0, z, \varepsilon\right) \right|, \quad (1.5.11)$$

аламыз, мұндағы $C_1 = \left\| \frac{\partial F_0}{\partial x_0} \right\|^{-1}$.

Бұдан теореманың A шартына сәйкес $t = \frac{T}{\varepsilon}$ нүктесі әрқашан $(1.2.5)$ формуладағы аралыққа тиісті болатыны шықпайды. Осылайшы 1.2.1-лемма бойынша $(1.5.11)$ оң жағы $z \to y$ болғанда нөлге ұмтылады.

Егер $n = 2$ болса, онда біз

$$\bar{x}_2(y) = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\bar{x}_1(y), \varepsilon) \;\text{ және }\; \bar{x}_2(z) = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\bar{x}_1(z), \varepsilon)$$

аламыз.

Әрі қарай, 1.2.1-лемма бойынша және $(1.1.5)$ жүйенің шешімінің бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелділігінен

$$|R_1(\bar{x}_1(y),\varepsilon)-R_1(\bar{x}_1(z),\varepsilon)|=\left|F\left(x_0+\bar{x}_1(y),x\left(\frac{T}{\varepsilon},x_0+\bar{x}_1(y),y,\varepsilon\right)\right)-\right.$$

$$-F\left(x_0+\bar{x}_1(y),y\left(\frac{T}{\varepsilon},x_0+\bar{x}_1(y)\right)\right)-F\left(x_0+\bar{x}_1(z),x\left(\frac{T}{\varepsilon},x_0+\bar{x}_1(z),z,\varepsilon\right)\right)+$$

$$\left.+F\left(x_0+\bar{x}_1(z),y\left(\frac{T}{\varepsilon},x_0+\bar{x}_1(z)\right)\right)\right|\le$$

$$\le N(r)\left(|\bar{x}_1(y)-\bar{x}_1(z)|+\left|x\left(\frac{T}{\varepsilon},x_0+\bar{x}_1(y),y,\varepsilon\right)-x\left(\frac{T}{\varepsilon},x_0+\bar{x}_1(z),z,\varepsilon\right)\right|+\right.$$

$$\left.+|\bar{x}_1(y)-\bar{x}_1(z)|+\left|y\big(T,x_0+\bar{x}_1(y)\big)-y\big(T,x_0+\bar{x}_1(z)\big)\right|\right)\to 0,\qquad z\to y$$

аламыз.
$R_2\big(\bar{x}(y)\big)$ және $R_3\big(\bar{x}(y)\big)$ функцияларының үзіліссіздігі орталанған есептің шешімінің үзіліссіздігінен және бастапқы берілгендер бойынша үзіліссіз дифференциалдануынан шығады.

Осылайша, кез-келген n үшін

$$|\bar{x}_n(y)-\bar{x}_n(z)|\to 0, z\to y \tag{1.5.12}$$

аламыз.

(1.4.11)–(1.4.14) бағалаулары $\bar{x}(y)$, $|\bar{x}|\le r$ бойынша бірқалыпты жинақты болғандықтан, онда $\bar{x}_n(y)$ тізбегі де $\big(y_1,y_2,\dots,y_p\big), y_i\in U_a$ жиынында $(1.5.6)-(1.5.7)$ шеттік есебінің $x^*(y)$ бастапқы мәніне бірқалыпты жинақталады. Осыдан $(1.5.12)$ ескере отырып $\big(y_1,y_2,\dots,y_p\big), y_i\in U_a$ бойынша $x^*(y)$ үзіліссіздігін аламыз.

Енді $x^*(t_i(y_i),y)-x^*(t_i(z_i),z)$ айырымын бағалаймыз. Жалпылық мағынасын жоғалтпай, біз нақты i үшін $t_i(y_i)\le t_i(z_i)$ теңсіздігі орындалсын дейміз. Бұдан

$$|x^*(t_i(y_i),y)-x^*(t_i(z_i),z)|\le$$

$$\le|x^*(t_i(y_i),y)-x^*(t_i(y_i),z)|+|x^*(t_i(y_i),z)-x^*(t_i(z_i),z)|$$

аламыз. 1.2.1-лемма бойынша бірінші қосылғыш $z\to y$ болғанда нөлге ұмтылады. Екінші мүшенің нөлге жинақтылығы $(1.2.7)$ ұқсас алынады.

Осылайша, кез-келген $\varepsilon<\varepsilon_0$ саны үшін $(1.5.10)$ бейнелеуі үзіліссіз және сәйкесінше $y^*=\big(y_1^*,\dots,y_p^*\big)$ қозғалмайтын нүктесі бар болады. Сондықтан

$x^*(t, y^*)$ функциясы $(1.5.1) - (1.5.3)$ шеттік есебінің шешімі болатыны айқын. $(1.5.5)$ шектік қатынасы 1.4.1-теоремадағы $(1.4.3)$ ұқсас түрде орнатылады. 1.5.1-теорема дәлелденді.

Енді 1.5.1-теореманың иллюстрациясы үшін бірнеше мысалдар келтіреміз.

1.5.1-мысал. R^d кеңістігінде

$$\dot{x} = \varepsilon x + \varepsilon f(t, x), t \neq t(x), \tag{1.5.13}$$

$$\Delta x|_{\ t=t(x)} = \varepsilon I(x), \tag{1.5.14}$$

$$x(0) = x(T) \tag{1.5.15}$$

шеттік есебін қарастырамыз.

Мұнда $t(x) = (\alpha, x) + b$ және есептің шешімі $t(x) = (\alpha, x) + b, \alpha \in R^d, b \in R^1$ гипербетіне жеткен кезде импульс әсеріне ұшырайды. Айталық, $f(t, x)$ функциясы x бойынша липшицтік функция және M тұрақтысымен шенелген болсын. Бұл мысалда $F(t, x) = x - y$ болады. $U_a = \{x \in R^d : |x| \leq a\}$ облысында $f(t, x)$ және $I(x)$ функциялары үшін тегістіліктің қажетті шарттары орындалсын. Сонымен қатар, $f(t, x)$ функциясы t бойынша 2π периодты және нөлге тең орташасы бар болсын:

$$\int_0^{2\pi} f(t, x) dt = 0. \tag{1.5.16}$$

[55, 3.2-лемма] бойынша мейлінше аз $\varepsilon > 0$ үшін, егер $\big(\alpha, I(x)\big) \leq 0$ болса, онда U_a облысында әрбір шешім $t(x) = (\alpha, x) + b$ жазықтығымен бірден артық емес рет қиылысады. Шынында, (1.5.16) шарты

$$t(x) \geq t\big(x + I(x)\big) \tag{1.5.17}$$

теңсіздігінің орындалуына кепілдік береді.

$t(x)$ функциясы $|\alpha|$ тұрақтысымен Липшиц шартын қанағаттандыратыны түсінікті. $\max\limits_{|x| \leq a} \leq \varepsilon(a + M)$ болғандықтан, сонда мейлінше аз $\varepsilon > 0$ үшін

$$\varepsilon(a + M)|\alpha| < 1 \tag{1.5.18}$$

шарты орындалады.

$(1.5.17)$ және $(1.5.18)$ шарттары 1.2.2-лемма бойынша $(1.5.13) - (1.5.15)$ шеттік есебінің кез-келген шешімі импульс әсерлі $t = (\alpha, x) + b$ жазықтығымен бірден артық емес рет қиылысуын қамтамасыз етеді.

$(1.5.16)$ бойынша және 1.5.1-теореманың 1.2 және 1.4 импульс шарттарын қанағаттандыратыны түсінікті. $X_0(x) = x$ және $I_0(x) = 0$ аламыз. Сонымен қатар, мейлінше аз ε параметрі үшін $t = \frac{T}{\varepsilon}$ жазықтығы $t = (\alpha, x) + b$ жазықтығымен U_a облысында қиылыспайтыны анық. Осыдан А шарты орынды.

Бізге 1.3 шартының орындалуын тексеру қажет.

$$\dot{y} = \varepsilon y, y(0) = y(T),$$

орталанған есебінің тривиалды $y = 0$ шешімі бар. Сондай-ақ, $F_0(x_0) = F\big(x_0, y(T, x_0)\big) = x_0 + e^T x_0$ және $det \frac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0} = 1 + e^T \neq 0$ аламыз. Осылайша, 1.5.1-теореманың $(1.1.7)$ шарты да орындалады.

Соңында, біз $\varepsilon < \varepsilon_0$ болғанда $(1.5.13) - (1.5.15)$ шеттік есебінің $x(t, \varepsilon)$ шешімі бар және

$$\sup_{t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]} |x(t, \varepsilon)| \to 0\,, \varepsilon \to 0$$

орындалатын $\varepsilon > 0$ саны табылады деп қорытындылаймыз.

Енді қарастырылатын мысалдар $(1.1.7)$ шарттың маңыздылығын айқындайды.

1.5.2-мысал. Бекітілген импульс мезетінде

$$\dot{x} = \varepsilon x \cos t, t \neq \pi, \tag{1.5.19}$$

$$\Delta\, x|_{\,t=\pi} = \varepsilon, \tag{1.5.20}$$

$$x(0) = x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \tag{1.5.21}$$

шеттік есебін қарастырамыз.

Орталанған шеттік есебі

$$\dot{y} = 0, y(0) = y(T) = 0$$

түрінде болады.

$(1.5.19) - (1.5.21)$ шеттік есебі $(1.1.7)$ шартынан басқа 1.5.1-теореманың барлық шарттарын қанағаттандыратыны түсінікті, өйткені бұл жағдайда $F_0(x_0) = x_0 - x_0 \equiv 0$.

$(1.5.19) - (1.5.21)$ шеттік есебінің шешімі бар болады, сонда тек қана сонда, қашан $x_0 = x(0)$ бастапқы мәні

$$x_0 = (x_0 + \varepsilon) e^{\varepsilon \sin \frac{T}{\varepsilon}}$$

шартын қанағаттандырса. Егер $\frac{T}{\varepsilon} = k\pi, k \in N$ болса, онда бұл шарт орындалмайды. Осыдан, кейбір мейлінше аз ε саны үшін $(1.5.19) - (1.5.21)$ шеттік есебінің шешімі бар болады.

1.5.3-мысал. Егер $(1.5.19) - (1.5.21)$ шеттік есебінің орнына

$$\dot{x} = \varepsilon x + \varepsilon x \mathrm{cos} t, t \neq \pi, \tag{1.5.22}$$

$$\Delta x|_{\, t=\pi} = \varepsilon, \tag{1.5.23}$$

$$x(0) = x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \tag{1.5.24}$$

есебін қарастырсақ, онда біз басқаша жағдайды аламыз.

$$\dot{y} = \varepsilon y, y(0) = y(T),$$

орталанған есебінің тривиалды $y = 0$ шешімі бар. Бұл жағдайда $T > 0$ үшін $F_0(x_0) = x_0 - x_0 e^T$, және $det F_0(x_0) = 1 - e^T \neq 0$ болады. Осыдан $(1.1.7)$ шарты орындалады. 1.5.1-теореманың қалған шарттары да орындалады.

$(1.5.22) - (1.5.24)$ шеттік есебінің шешімі бар болады, сонда тек қана сонда, қашан x_0

$$x_0\left(e^{\varepsilon \mathrm{sin}\frac{T}{\varepsilon}+T} - 1\right) = -\varepsilon e^{\varepsilon \mathrm{sin}\frac{T}{\varepsilon}+T-\varepsilon\pi}, \tag{1.5.25}$$

шартын қанағаттандырса және мейлінше аз $\varepsilon > 0$ саны үшін әрқашан орындалады, өйткені $\varepsilon \mathrm{sin}\frac{T}{\varepsilon} + T$ >0. $(1.5.22) - (1.5.24)$ есебінің шешімі

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{\varepsilon t}, t \in [0, \pi] \\ (x_0 e^{\varepsilon\pi} + \varepsilon) e^{\varepsilon \mathrm{sin}\frac{T}{\varepsilon} + \varepsilon(t-\pi)}, t > \pi \end{cases}$$

түрінде анықталған, мұндағы x_0 саны формуладан анықталған.

1.6. Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеудің ось бойындағы екі жақты шенелген шешімдері

Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті жүйелердің периодты және периодты дерлік шешімдері көп зерттелді. Бұл есептер импульсті жүйелердің барлық осьтегі екі жақты, шенелген шешімдерінің бар болуымен тығыз байланысты. Бекітілмеген мезеттегі импульсті жүйелер үшін бұл күрделі есеп екенін атап айтуға болады. Жәй дифференциалдық теңдеулерден айырмашылығы импульсті жүйелер үшін шешімнің ось бойында сол жақты жалғасымдылығы туралы теореманың болмауымен байланысты. Шындығында, импульс әсерінің мезеттеріндегі шешімнің сол жақты жалғасымдылығы импульс әсері үшін $x(t_i)$ қатысты сызықты емес $x(t_i+0)=x(t_i)+I_i(x(t_i))$ теңдеуінің глобальды бірмәнді шешілімдігін қажет етеді. Өлшемі 1-ден асатын кеңістік жағдайында кері бейнелеулердің болуы туралы теоремалар тек локальді сипатқа ие, бұл оларды шешімді солға қарай жалғастыру үшін қолдануға мүмкіндік бермейтіні белгілі.

Кіші параметрмен бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі

$$\dot{x}=\varepsilon X(t,x),\ t\neq t_i(x), \tag{1.6.1}$$

$$\Delta x|_{t=t_i(x)}=\varepsilon I_i(x) \tag{1.6.2}$$

$$x(0)=x_0 \tag{1.6.3}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылады, мұндағы $\varepsilon>0$ – кіші параметр, $t_i(x)<t_{i+1}(x)$ $(i=1,2,\dots)$ – импульс әсерлі мезеттер, X және I_i функциялары d өлшемді вектор функциялар.

$U_a=\{x\in R^d: |x|\leq a\}$ болсын. Айталық, келесі шарттар орындалсын:

1. $X(t,x)$ және $I_i(x)$ функциялары $Q=\{t\geq 0, x\in U_a\}$ жиынында үзіліссіз, $M>0$ тұрақтысымен шенелген және x бойынша $L>0$ тұрақтысымен Липшиц шартын қанағаттандырсын;

2. $t\geq 0, x\in U_a$ үшін t,x бойынша бірқалыпты

$$X_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}X(s,x)ds$$

$$I_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t<t_i(x)<T}I_i(x);$$

ақырлы шектері бар болсын;

3. Орталанған жүйенің

$$\dot{y}=\varepsilon[X_0(y)+I_0(y)] \tag{1.6.4}$$

$y=y(t)$, $y(0)=x(0)$ шешімі $t\geq 0$ үшін анықталған және қайсыбір ρ маңайымен U_a жиыныда жатады және бірқалыпты асимптотикалық орнықты болсын;

4. Импульс әсерлі $\{t_i(x)\}$ мезеттері $i\in N$ бойынша U_a жиынында бірқалыпты үзіліссіз функциялар болсын, ал $t=t_i(x)$ беті бөлектеу шартын қанағаттандырсын, яғни

$$\min_{x\in U_a}t_{i+1}(x)<\max_{x\in U_a}t_i(x), (i=1,2,\dots).$$

Айталық, барлық $t>0$ и $x\in U_a$ үшін

$$i(t,x) \le C \cdot t$$

орындалатын $C > 0$ тұрақтысы табылсын, мұндағы $i(t,x)$ шамасы $(0,t)$ аралығындағы импульс саны.

Сонымен қатар, $(1.6.1) - (1.6.3)$ есебінің шешімі әрбір $t = t_i(x)$ бетімен бірден артық емес рет қиылыссын, яғни соғу болмайды. Соғу болмау шарты [6, 25 б, 3.1, 3.2 леммалар] жұмыста қарастырылған.

1.6.1-теорема. *Айталық, 1-4 шарттары орындалсын. Онда кез-келген* $\eta > 0$ *үшін* $t \ge 0$ *болғанда* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *болғанда*

$$|x(t) - y(t)| < \eta \tag{1.6.5}$$

теңсіздігі орындалатын ε_0 *саны табылады, мұндағы* $x(t)$ $(x(0) = y(0) = x_0)$ *функциясы* $(1.6.1) - (1.6.3)$ *дәл жүйенің шешімі.*

Дәлелдеуі. Орталанған жүйенің

$$\frac{dy}{d\tau} = X_0(y) + I_0(y), \tag{1.6.6}$$

$y = y(\tau)$, $x(0) = y(0) = x_0$ шешімі бірқалыпты асимптотикалы орнықты, онда кез-келген $\eta > 0$ үшін (1.6.6) жүйенің кез-келген басқа $y_1(\tau)$ шешімі

$$|y(\tau) - y_1(\tau)| < \frac{\eta}{2}, \tau \ge \tau_0, \tag{1.6.7}$$

теңсіздігін қанағаттандыратын және

$$\lim_{\tau \to \infty} |y(\tau) - y_1(\tau)| = 0 \tag{1.6.8}$$

шектік қатынасы орындалатын $\delta > 0$ саны бар болады, мұнда δ саны τ_0-ден тәуелсіз. Бұл жағдайда $\delta < \eta < \rho$ деп қарастыруға болады.

$U_\delta(\tau_0)$ арқылы $y(\tau_0)$ нүктесінің δ маңайын белгілейік. Бірқалыпты асимптотикалық орнықтылықтың анықтамасы бойынша барлық $U_\delta(\tau_0)$ маңайлары үшін (1.6.8) шектік қатынасы τ_0 бойынша бірқалыпты болады. Енді (1.6.8) шектік қатынасының $x_0 \in U_\delta(\tau_0)$ бойынша бірқалыпты екенін көрсетеміз.

Айталық, олай болмасын делік. Онда

$$|x_n - y(\tau_0)| < \delta, \ \ |y(\tau_n, x_n) - y(\tau_n)| \ge \mu, \ \ \tau_n \to \infty \tag{1.6.9}$$

орындалатын $U_\delta(\tau_0)$ маңайдан жинақталатын x_n нүктелерінің тізбегін және τ_n сандарының тізбегін көрсетуге болатын $\mu > 0$ саны табылады, мұндағы $y(\tau_n, x_n)$ функциясы $y(\tau_0, x_n) = x_n$ шартын қанағаттандыратын (1.6.6) жүйенің шешімі.

Айталық, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^0$ болсын. Сонда $\lim_{\tau\to\infty} |y(\tau, x^0) - y(\tau)| = 0$ орындалады және барлық $\tau \geq T + \tau_0$ үшін

$$|y(\tau, x^0) - y(\tau)| < \frac{\sigma(\mu)}{2} \tag{1.6.10}$$

теңсіздігі орындалатын $T > 0$ санын көрсетуге болады, мұндағы $\sigma(\mu)$ саны (1.6.6) жүйенің $y(\tau, x)$ шешімін $U_{\sigma(\mu)}(0)$ маңайында $y(0)$ нүктесінен бастап барлық $\tau \geq 0$ үшін $y(\tau)$ шешімінің $\frac{\mu}{2}$ маңайында жатуына кепілдік беретін тұрақты.

Бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелділік бойынша

$$|y(\tau, x_n) - y(\tau, x^0)| < \frac{\sigma(\mu)}{2} \tag{1.6.11}$$

теңсіздігі барлық $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + T]$ және $n > N$ үшін орындалатындай $N > 0$ санын көрсетуге болады. Осыдан $n > N$ үшін $\tau_n \geq T + \tau_0$ деп санауға болады. (1.6.10) және (1.6.11) теңсіздіктерінен

$$|y(\tau_0 + T, x_n) - y(\tau_0 + T)| \leq \sigma(\mu)$$

теңсіздігі шығады. Сондықтан $\tau \geq T + \tau_0$ үшін $|y(\tau_n, x_n) - y(\tau_n)| < \frac{\mu}{2}$, ал сәйкесінше $\tau = \tau_n$ үшін $|y(\tau_n, x_n) - y(\tau_n)| < \frac{\mu}{2}$ теңсіздігі орындалады және бұл (1.6.9) теңсіздіктің біреуіне қайшы келеді. Егер $|y(\tau_0) - y_1(\tau_0)| < \delta$ болса, онда $\tau \geq T + \tau_0$ үшін $|y(\tau_0) - y_1(\tau_0)| < \frac{\delta}{2}$ теңсіздігі орындалатын T санын таңдаймыз. Жоғарыда айтылғандар бойынша T санын таңдау τ_0 таңдаудан да, $y_1(\tau_0)$ шешімінің бастапқы берілгенінен де тәуелсіз болады. Импульстік жүйелерді орталау туралы [52, 113 б] Самойленко теоремасына сәйкес көрсетілген δ және T бойынша $\varepsilon < \varepsilon_0$ болғанда (1.6.1) – (1.6.3) дәл жүйенің $x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_0\right)$ шешімі $[0, T]$ аралығында анықталатындай, қайсыбір маңаймен U_a облысында жататын және

$$\left| x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_0\right) - y(\tau_0) \right| < \frac{\delta}{2}, \tau \in [0, T] \tag{1.6.12}$$

теңсіздігі орындалатын ε_0 санын табуға болады.

Осылайша, теоремадағы керек бағалау $[0, T]$ аралығында орындалады және осы кесіндіде дәл жүйенің шешімі бар болады.

Әрі қарай орталанған жүйенің $y_T(\tau, \varepsilon)$, $y_T(T, \varepsilon) = x(\frac{T}{\varepsilon}, x_0)$ шешімін қарастырамыз. (1.6.12) бағалауы бойынша

$$|y_T(\tau, \varepsilon) - y(\tau)| < \frac{\eta}{2},\ \tau \geq\ T, \tag{1.6.13}$$

$$|y_T(2T,\varepsilon) - y(2T)| < \frac{\delta}{2} \qquad (1.6.14)$$

бағалаулары орынды.

Тағы да Самойленко теоремасы мен теореманың 2-шартындағы шектің t бойынша бірқалыптылығын ескерсек, $(1.6.6)$ жүйенің $x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0\right)$ шешімі $[T, 2T]$ аралығында жалғасымды, қайсыбір маңайымен U_a облысында жатады және

$$\left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_0\right) - y_T(\tau,\varepsilon)\right| < \frac{\delta}{2}, \ \tau \in [T, 2T] \text{ және } \varepsilon < \varepsilon_0$$

теңсіздігі орындалады.

$(1.6.13)$ және $(1.6.14)$ теңсіздіктерінен және соңғы теңсіздіктен

$$\left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_0\right) - y(\tau)\right| \le \left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_0\right) - y_T(\tau,\varepsilon)\right| + |y_T(\tau,\varepsilon) - y(\tau)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\eta}{2} < \eta, \quad \tau \in [T, 2T],$$

бағалауын, ал $\tau = 2T$ үшін $\left|x\left(\frac{2T}{\varepsilon}, x_0\right) - y(2T)\right| < \delta$ бағалауын аламыз. Осы процессті жалғастыра отырып, теорема тұжырымының ақиқаттығын аламыз.

$(1.6.1) - (1.6.3)$ импульстік жүйені қарастырамыз және импульс нүктелері барлық осьте анықталсын, яғни $t_i(x)$ импульс нүктелері $i \in Z$, $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ үшін анықталған.

1.6.2-теорема. *Айталық, $X(t,x)$ және $I_i(x)$ функциялары $Q = \{t \in R, x \in U_a\}$ ($U_a = \{x \in R^d: |x| \le a\}$) облысында анықталған және осы облыста*

1. $X(t,x)$ *және* $I_i(x)$ *функциялары айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз,* $M > 0$ *тұрақтысымен шенелген және* x *бойынша* $L > 0$ *тұрақтысымен Липшиц шартын қанағаттандырсын*;

2. *Бірқалыпты* $t \in R$ *және* $x \in U_a$ *бойынша келесі шектер бар болсын*

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} X(s,x)ds$$

$$I_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t<t_i(x)<T} I_i(x);$$

3. *Орталанған* $(1.6.4)$ *жүйенің* U_a *облысында* x_0 *асимптотикалық орнықты тепе-теңдік жағдайы болсын;*

4. *Импульс әсерлі* $\{t_i(x)\}$ *мезеттері* U_a *облысында* $i \in N$ *бойынша бірқалыпты үзіліссіз функциялар болсын, ал* $t = t_i(x)$ *беті*

$$\min_{x\in U_a} t_{i+1}(x) < \max_{x\in U_a} t_i(x), (i = 1, 2, \ldots);$$

бөліну шартын қанағаттандырсын;

5. $t = t_{-1}(x)$ *және* $t = t_1(x)$ *беттері* $t = 0$ *гипержазықтығымен қиылыспасын.*

Онда кел-келген $\eta > 0$ *үшін* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *болғанда* $t \in R$ *үшін дәл жүйенің* $x(t)$ *шешімі бар болатын және*

$$|x(t) - x_0| < \eta \tag{1.6.15}$$

бағалауы орындалатын ε_0 *саны табылады.*

Дәлелдеуі. Кез-келген $\eta > 0$ санын бекітеміз және $(1.6.15)$ шартын қанағаттандыратын дәл жүйенің шешімін тұрғызамыз. x_0 шешімі асимптотикалық орнықты болғандықтан, онда берілген $\eta > 0$ үшін $(1.6.4)$ жүйенің кез-келген $y(\tau)$ шешімі үшін

$$|y(\tau) - x_0| < \frac{\eta}{2},\ \tau \geq \tau_0, \tag{1.6.16}$$

$$|y(\tau) - x_0| < \frac{\delta}{4}, \tau \geq \tau_0 + T, \tag{1.6.17}$$

егер тек $|y(\tau_0) - x_0| < \delta$, мұнда δ және T сандары τ_0 шамасынан тәуелді емес болғанда, бағалаулары орындалатын $\delta > 0$ және $T > 0$ сандарын көрсетуге болады. Бұдан $\delta < \eta$ деп санауға болады.

Айталық, z_0 нүктесі x_0 нүктесінің $\delta -$маңайының кез-келген нүктесі болсын. Дәл жүйенің $\tau = -T$ үшін z_0 нүктесінен шығатын $x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$ шешімін қарастырамыз. Самойленко теоремасы бойынша көрсетілген δ және T үшін $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ болғанда

$$\left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - y(\tau)\right| < \frac{\delta}{4}, \tau \in [-T, 0], \tag{1.6.18}$$

теңсіздігі орындалатын ε_0 санын таңдап алуға болады, мұндағы $y(\tau)$ функциясы $y(-T) = z_0$ шартымен орталанған жүйенің шешімі. $(1.6.7) - (1.6.9)$ бағалауларынан $\left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - x_0\right| < \eta,\ \tau \in [-T, 0]$ және $|x(0) - x_0| < \frac{\delta}{2}$ бағалаулары шығады. Сондықтан $\varepsilon < \varepsilon_0$ болғанда x_0 нүктесінің δ маңайында $\tau = -T$ басталатын дәл жүйенің барлық шешімдері оның $\eta -$ маңайынан шықпай $\tau = 0$ болғанда $\frac{\delta}{2}$ маңайына түседі. Осыған ұқсас талқылаулар жасай отырып, берілген теореманың 2-шарты бойынша $\varepsilon < \varepsilon_0$ болғанда x_0 нүктесінің $\delta -$маңайында $\tau = -nT$ басталатын дәл жүйенің шешімі $\tau \in [-nT, -(n-1)T]$ болғанда оның $\eta -$маңайынан шықпайды, ал $\tau = -(n-1)T$ болғанда кез-келген n натурал саны үшін x_0 нүктесінің $\frac{\delta}{2}$ маңайына түседі.

$S_n(\varepsilon)$ арқылы $\tau = -nT$ болғанда x_0 нүктесінің δ маңайында жататын жүйенің $\tau = 0$ нүктесіндегі шешімдерінің мәндерінің жиынын белгілейміз. Жоғарыда айтылғандар мен жалғыздық туралы теорема бойынша кез-келген натурал n және $\varepsilon < \varepsilon_0$ үшін бұл жиын бос емес, сондай-ақ $S_n(\varepsilon) \subseteq S_{n-1}(\varepsilon)$ кірістіруі ақиқат. [6, 19 б] жұмыстағы 2.5-теорема бойынша шешім $t = 0$ нүктесінде бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелді болатынын атап өтеміз. Сондықтан $S_n(\varepsilon)$ жиындары тұйық, ал сәйкесінше олардың қиылысулары бос емес.

Айталық, $z_0(\varepsilon)$ нүктесі барлық $S_n(\varepsilon)$ үшін ортақ нүкте болсын. Енді $\varepsilon < \varepsilon_0$ болғанда $\tau = 0$ үшін $z_0(\varepsilon)$ нүктесінен шығатын дәл жүйенің шешімін қарастырайық. Ол өзінің тұрғызылуы бойынша $-nT$ нүктелерінде кез-келген натурал n үшін x_0 нүктесінің δ маңайында жатады. Сәйкесінше бұл шешім сол жаққа шектеусіз жалғасады және кез-келген $\tau \leq 0$ үшін $\varepsilon < \varepsilon_0$ болғанда орындалады. Шешімнің оң жаққа жалғасуы және (1.6.15) бағалауының орындалуы 1.6.1-теоремадан шығады. Теорема дәлелденді.

[54, 479 б] жұмыстағы 3-теоремадан 1.6.1-теореманың шарттары бойынша (1.6.4) орталанған жүйенің асимптотикалық орнықты тепе-теңдік жағдайы бар болатыны шығады. Осыдан 1.6.2-теоремадан барлық осьте берілген $(1.6.1) - (1.6.3)$ есебінің импульстік жүйенің ε параметрінің мейлінше аз мәні үшін барлық осьте екі жақты, шенелген шешімі бар болатыны шығады. Осыдан келесі салдар орындалады.

Салдар. *1.6.2-теореманың 1, 2, 4, 5 шарттары және 1.6.1-теореманың 3-шарты орындалғанда барлық осьте берілген* $(1.6.1) - (1.6.3)$ *импульстік жүйенің ε параметрінің мейлінше аз мәні үшін барлық осьте екіжақты, шенелген шешімі бар болады.*

Осылайша, (1.6.4) орташаланған жүйенің біржақты, шенелген, асимптотикалық орнықты шешімі $(1.6.1) - (1.6.3)$ дәл импульсті жүйенің екіжақты шешімін тудырады.

Мысал. Фотосинтездің қараңғы реакцияларының импульстік моделі.
Импульсті жәй дифференциалдық

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon(x^2 - (1+j)xy + j), \ t \neq t_i(x,y) \\ \dot{y} = \varepsilon\left(\frac{1}{7}\mu(7x^2 - y^2 - 6xy)\right) \quad , \\ \Delta x|_{t=t_i(x,y)} = f_i(x,y) \\ \Delta y|_{t=t_i(x,y)} = g_i(x,y), i = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \tag{1.6.19}$$

теңдеулер жүйесін қарастырамыз, мұндағы $\varepsilon, j, \mu -$ оң параметрлер.

Импульстік әсерсіз $t \geq 0$ болғанда (1.6.19) жүйе өсімдіктер фотосинтезінің қараңғы процесстерінің әйгілі математикалық моделі болады. Мұнда $x(t) -$ фруктозаның t мезетіндегі қалыпты концентрациясы, ал $y(t) -$ глюкозаның t мезетіндегі қалыпты концентрациясы. Бұл модельді алғаш рет 1967 жылы Д. С. Чернавский ұсынған [106], және осы модель тірі табиғаттағы тербеліс процесстерін сипаттайтын алғашқылардың бірі болды. Шындығында, берілген модельдің параметрлерінің арасындағы белгілі бір қатынастарда автотербелістер режимі туындайды (яғни орнықты периодты шешімдер бар болады).

Импульс болмаған жағдайда (1.6.19) жүйенің $x_0 = 1, y_0 = 1$ жалғыз стационар шешімі болады. Осы нүктенің маңайында (1.6.19) жүйенің дифференциалдық бөлігінің оң жағы 1.6.2-теореманың шарттарын қанағаттандыратыны айқын.

Айталық, осы маңайда 1.6.2-теореманың импульстік әсерге қатысты 4-ші және 5-ші шарттары орындалсын. Сонымен қатар, айталық әрбір натурал n үшін және n санынан тәуелсіз C тұрақтысы үшін

$$\left| \sum_{-nt_i(x)<n} I_i(x, y) \right| \leq C$$

шарты орындалсын, мұндағы $I_i(x, y) = \begin{pmatrix} f_i\,(x, y) \\ g_i(x, y) \end{pmatrix}$.

Сонда 1.6.2-теореманың 2-шарты орындалады. $I_0(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ болғандықтан орташаланған жүйесі

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon(x^2 - (1 + j)xy + j), \\ \dot{y} &= \varepsilon\left(\tfrac{1}{7}\mu(7x^2 - y^2 - 6xy)\right), \end{aligned} \qquad (1.6.20)$$

түрінде болады.

Осы жүйе үшін 1.6.2-теореманың 3-шартының орындалуын тексереміз. Бұл жүйе үшін негізінен оның параметрлері

$$\mu = \tfrac{7}{8}(1 - j). \qquad (1.6.21)$$

қатынасымен байланысқан жағдайы маңызды екені жақсы мәлім.

Бұл бифуркациялық қатынастар деп аталады, олардың өтуі кезінде автотербеліс режимдері пайда болады. Сондықтан дәл осы жағдайды қарастырамыз.

(1.6.20) жүйесін $x_0 = 1, y_0 = 1$ тепе-теңдік күйі маңайында сызықты түрге келтіріп және оның бірінші жуықтауының матрицасын жазып, оның меншікті мәндері үшін сипаттауыш теңдеуінің

$$\lambda^2 + \lambda\left(\tfrac{8}{7}\mu + j - 1\right) + \tfrac{16}{7}\mu j = 0,$$

түрінде болатынын байқау қиын емес, мұндағы

$$\lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{8}{7}\mu + j - 1\right) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\tfrac{8}{7}\mu + j - 1\right)^2 - 4 \cdot \tfrac{16}{7}\mu j} \qquad (1.6.22)$$

түбірлері.

Биологиялық [42] пайымдаулардан $j < 1$ болатыны шығады. Сондықтан, егер $\mu > \frac{7}{8}(1-j)$ болса, онда $(1.6.20)$ жүйенің $(1,1)$ ерекше нүктесі бірінші жуықтаудың орнықтылығы туралы теорема бойынша осы жүйенің тепе-теңдік күйінің асимптотикалық орнықты нүктесі болып табылады. Сол себепті 1.6.2-теореманың 3-шарты орындалады. Осыдан, мейлінше аз ε параметрі үшін $(1.6.19)$ импульстік жүйенің $(1,1)$ нүктесінің маңайында осьте шектелген шешімі бар болады.

Енді қолданыс үшін ең маңызды $(1.6.21)$ жағдайын зерттейміз. $(1.6.22)$ түбірлері таза жорамал сандар болғандықтан бірінші жуықтау бойынша орнықтылық теоремасы орындалмайды.

Бұл жағдайда орнықтылықты зерттеу үшін орнықтылық индексі (Ляпунов көрсеткіші) [107] теоремасын пайдаланамыз. Осы үшін $(1.6.22)$ түбірлері $\pm i\omega$ түрінде болады, мұндағы $\omega = \sqrt{2j(1-j)}$.
Алдымен бірінші жуықтау жүйесі матрицасынан оның жордан формасына көшу S матрицасын

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

табамыз.
Біздің жағдайымызда S матрицасы

$$S^{-1}\begin{pmatrix} 1-j & -1-j \\ \frac{8}{7}\mu & -\frac{8}{7}\mu \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

матрицалық теңдеуінен табылады.

Енді $(1.6.20)$ жүйеде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

алмастыруын жасап,

$$\begin{cases} \dot{z_1} = \varepsilon\left(z_2\sqrt{2j(1-j)} + z_1 z_2(1+j)\sqrt{2j(1-j)} + {z_1}^2 j(1+j)\right) \\ \dot{z_2} = \varepsilon\left(-\frac{2(1+j)}{\sqrt{2j(1-j)}}z_1 + \frac{1}{2}z_1 z_2 j(1-j) - {z_1}^2\frac{(1-j)\left(\frac{j^2}{2}+j\right)}{\sqrt{2j(1-j)}} + {z_2}^2\frac{2j(1-j)^2}{\sqrt{2j(1-j)}}\right) \end{cases}$$

жүйесін аламыз.

[108] бойынша Ляпунов көрсеткіші біздің жағдайда

$$I=-\omega^2(1-j)\left(\frac{1}{2}j+1\right)-2j(1+j^2)\omega-\frac{\omega^3\left(\frac{1}{2}j+1\right)}{4}+\frac{1}{8}\omega j(1-j)^2<0$$

түрінде болады. Сондықтан әйгілі орнықтылықтың индексі туралы теорема бойынша $(1.6.20)$ жүйенің $(1,1)$ тепе-теңдік күйі бұл жағдайда да асимптотикалық орнықты, сәйкесінше бастапқы $(1.6.19)$ жүйенің мейлінше аз ε параметрі үшін $(1,1)$ нүктесінің маңайында жататын барлық осьте екіжақты, шенелген шешімі бар болады.

2 ИМПУЛЬС ӘСЕРЛІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

2.1. Импульс әсерлі сызықты емес жәй дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті параметрлеу әдісімен шешу

Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есепті шешу бекітілген мезеттегі импульс әсерлі шеттік есептердің әулетіне келтіріліп, орталау әдісі арқылы шешілімдік шарттары бірінші бөлімде алынған болатын. Бірақ, бекітілген мезеттегі импульс әсерлі шеттік есептердің шешімдерін табу мәселесі қарастырылмады. Бекітілген мезеттегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешілімділік шарттарын табу - арнайы зерттеуді қажет ететін мәселелердің бірі деуге болады. Осы есептерді зерттеуге көптеген авторлардың еңбектері арналғанымен, тиімді шешілімділік шарттарын орнату әлі күнге өзекті мәселе болып отыр. Екінші бөлімде мәселенің ұтымды шешімі ретінде сызықты емес бекітілген импульсті шеттік есептерді және бекітілмеген мезеттегі импульсті шеттік есептерді шешу үшін Д.С.Джумабаевтың параметрлеу әдісінің модификациясын [87] пайдалану ұсынылады. Шешілімділік шарттары бастапқы берілімдер терминінде орнатылады. Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешімін табу алгоритмінің сандық жүзеге асырылуы көрсетіледі және нақты мысалмен расталады.

Бекітілген мезеттегі импульс әсерлі жәй дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің шешімін құру және оның бірмәнді шешілімділік мәселелері әртүрлі әдістермен зерттелген [12 − 38]. Импульс әсерлі екі нүктелі сызықты шеттік есептер және импульс әсерлі сызықты емес жәй дифференциалдық теңдеуі үшін периодты шеттік есептерді параметрлеу әдісімен шешу [94, 95] еңбектерінде зерттелген.

Бұл бөлімшеде бекітілген мезеттегі импульс әсерлі сызықты емес дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есебі параметрлеу әдісінің модификациясы көмегімен зерттеледі.

Сызықты емес жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін импульс әсерлі

$$\dot{x} = f(t,x), t \in (0,T)\backslash\{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \tag{2.1.1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, x \in R^n, d \in R^n \tag{2.1.2}$$

$$x(t_i + 0) - x(t_i - 0) = s_i, s_i \in R^n, i = \overline{1,k} \tag{2.1.3}$$

есебін қарастырамыз, мұндағы $f: [0,T] \times R^n \to R^n$ мүмкін $t = t_i,\ i = \overline{1,k}$ нүктелерінде үзілісті вектор-функция; B және C $(n \times n)$ тұрақты матрицалар; $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} = T,\ \|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Белгілеу енгізейік: $I_k = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$.

Айталық, $PC([0,T]\backslash I_k, R^n)$ кеңістігі $\|x\|_1 = \max_{i=\overline{0,k}} \sup_{t\in[t_i,t_{i+1})} \|x(t)\|$ нормалы бөлік-үзіліссіз вектор-функциялар кеңістігі болсын.

2.1.1 - анықтама. $(2.1.1) - (2.1.3)$ импульс әсерлі есептің шешімі деп

- $(2.1.1)$ теңдеуін (уақыт бойынша $t = 0, t = T$ нүктелерінде $x_+^*(0), x_-^*(T)$ біржақты туындылары қанағаттандырады);
- $(2.1.2)$ шеттік шартын;
- I_k нүктелерінде $(2.1.3)$ импульс әсер шартын

қанағаттандыратын $(0,T)\backslash I_k$ аралығында бөлік-үзіліссіз дифференциалданатын $x^*(t) \in PC([0,T]\backslash I_k, R^n)$ функциясын атаймыз.

$[0, T]$ кесіндісін

$$\big[0,T) = \cup_{r=1}^{k+1}[t_{r-1},t_r).$$

түріндегі бөлік интервалдарға бөлеміз.

$C\big([0,T], I_k, R^{(k+1)n}\big)$ арқылы $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|x_r(t)\|$ нормалы барлық $i = \overline{1,k+1}$ үшін $\lim_{t\to t_r-0} x_r(t)$ ақырлы шектері бар $x_r\colon [t_{r-1},t_r) \to R^n$ элементімен $[t_{r-1},t_r)$ аралығында үзіліссіз $x[t] = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), x_{k+1}(t)\big)$ функциялар жүйесінің кеңістігін белгілейік.

Әрбір r – інші интервалдардағы $x(t)$ функциясының тарылуын $x_r(t)$: $x_r(t) = x(t), t \in [t_{r-1},t_r), r = \overline{1,k+1}$ арқылы белгілейміз және бұл

$$\dot{x_r} = f(t,x_r), t \in [t_{r-1},t_r), r = \overline{1,k+1} \qquad (2.1.4)$$

$$Bx_1(0) + C\lim_{t\to T-0} x_{k+1}(t) = d, \qquad (2.1.5)$$

$$x_{i+1}(t_i+0) - \lim_{t\to t_i-0} x_i(t) = s_i, i = \overline{1,k}. \qquad (2.1.6)$$

көпнүктелі есебін қағаттандырады.

Д.С. Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісінің модификациясын келтірейік.

Әрбір r – інші интервалдың ортасында белгісіз функцияның мәні ретінде $\xi_r = x_r\left(\frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right), r = \overline{1,k+1}$ параметрін енгіземіз және $x_r(t) = y_r(t) + \xi_r$ алмастыруын жасаймыз.

$(2.1.4) - (2.1.6)$ есебін оған эквивалентті ξ_r параметрлі

$$\dot{y_r} = f(t, y_r + \xi_r), t \in [t_{r-1},t_r), \qquad (2.1.7)$$

$$y_r\left(\frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right) = 0, r = \overline{1,k+1} \qquad (2.1.8)$$

$$By_1(0) + B\xi_1 + C\lim_{t\to T-0} y_{k+1}(t) + C\xi_{k+1} = d, \qquad (2.1.9)$$

$$y_{i+1}(t_i+0) + \xi_{i+1} - \lim_{t\to t_i-0} y_i(t) - \xi_i = s_i, i = \overline{1,k} \quad (2.1.10)$$

есебіне көшіреміз.

$[t_r,t_{r-1})$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын және (2.1.7) жүйесін, (2.1.8) шартын және $\xi_r = \xi_r^*$, $r = \overline{1,k+1}$ параметрімен бірге (2.1.9), (2.1.10) шарттарын қанағаттандыратын $y_r^*(t), r = \overline{1,k+1}$ функциялары үшін $(y^*[t],\xi^*)$ жұбы, мұндағы $y^*[t] = \big(y_1^*(t), y_2^*(t), \dots, y_{k+1}^*(t)\big) \in C\big([0,T], I_k, R^{(k+1)n}\big)$, $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_{k+1}^*) \in R^{(k+1)n}$, (2.1.7) – (2.1.10) есебінің шешімі деп аталады.

(2.1.1) – (2.1.3) және (2.1.7) – (2.1.10) есептерінің эквиваленттілігін келесі мағынада түсінеміз.

Айталық, $x^*(t)$ функциясы (2.1.1) – (2.1.3) импульс әсерлі есебінің шешімі болсын, онда $(y^*[t],\xi^*)$ жұбы, мұндағы
$y^*[t] = \left(x^*(t) - x^*\left(\frac{t_1+t_0}{2}\right), x^*(t) - x^*\left(\frac{t_2+t_1}{2}\right), \dots, x^*(t) - x^*\left(\frac{t_k+t_{k-1}}{2}\right), x^*(t) - x^*\left(\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right)\right)$ және $\xi^* = \left(x^*\left(\frac{t_1+t_0}{2}\right), x^*\left(\frac{t_2+t_1}{2}\right), \dots, x^*\left(\frac{t_k+t_{k-1}}{2}\right), x^*\left(\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right)\right)$, (2.1.7) – (2.1.10) параметрлі есебінің шешімі болады.

Керісінше, егер $\tilde{y}[t] = \big(\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \dots, \tilde{y}_{k+1}(t)\big) \in C\big([0,T], I_k, R^{(k+1)n}\big)$ және $\tilde{\xi} = \big(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_{k+1}\big) \in R^{(k+1)n}$ элементтерімен $\big(\tilde{y}[t], \tilde{\xi}\big)$ жұбы (2.1.7) – (2.1.10) параметрлі есептің шешімі болса, онда $\tilde{x}(t) = \tilde{y}_r + \tilde{\xi}_r, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,k+1}$, және $\tilde{x}(T) = \lim_{t\to T-0} \tilde{y}_{k+1}(t) + \tilde{\xi}_{k+1}$ арқылы анықталған $\tilde{x}(t)$ функциясы берілген (2.1.1) – (2.1.3) есебінің шешімі болады.

(2.1.7) – (2.1.10) параметрлі есебінің (2.1.4) – (2.1.6) есебінен айырмашылығы оның $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,k+1}$ бөлік интервалдарда ізделінді функция мәні үшін (2.1.8) шарттың болуында.

Ізделінді функция үшін [80, 51 б] бастапқы шарт орнына $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,k+1}$ бөлік интервалдардың орталарында ізделінді функция мәндерімен (2.1.8) шарты пайда болатын (2.1.7) – (2.1.10) параметрлі есебін аламыз.

Айталық, барлық $r = \overline{1,k+1}$ үшін ξ_r белгілі болсын. Сонда (2.1.7), (2.1.8) есебі сызықты емес екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуі

$$y_r(t) = \int_t^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} f(\tau, y_r(\tau) + \xi_r)\, d\tau, t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right), r = \overline{1,k+1}, (2.1.11)$$

$$y_r(t) = \int_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} f(\tau, y_r(\tau) + \xi_r)\, d\tau, t \in \left[\frac{t_r+t_{r-1}}{2}, t_{r-1}\right), r = \overline{1,k+1}. (2.1.12)$$

түрінде болатын есепке эквивалентті болады.

Белгісіз $y_r(t)$ функциясының мәндерін табу үшін $t = t_r, r = \overline{1, k+1}$ нүктелерінің орналасуына қатысты сәйкесінше $(2.1.11)$ немесе $(2.1.12)$ берілулерін пайдаланамыз.

$$y_1(0) = \int_0^{\frac{t_1}{2}} f(\tau, y_1(\tau) + \xi_1)\, d\tau, \qquad (2.1.13)$$

$$\lim_{t \to T-0} y_{k+1}(t) = \int_{\frac{t_{k+1}+t_k}{2}}^{t} f(\tau, y_{k+1}(\tau) + \xi_{k+1})\, d\tau, \qquad (2.1.14)$$

$$y_{i+1}(t_i + 0) = \int_{t_i}^{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} f(\tau, y_{i+1}(\tau) + \xi_{i+1})\, d\tau, \qquad (2.1.15)$$

$$\lim_{t \to t_i - 0} y_i(t) = \int_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}}^{t_i} f(\tau, y_i(\tau) + \xi_i)\, d\tau, \qquad (2.1.16)$$

$$i = \overline{1, k}.$$

$(2.1.13) - (2.1.16)$ теңдіктерін және сәйкесінше $y_1(0)$, $\lim\limits_{t \to T-0} y_{k+1}(t)$, $y_{i+1}(t_i + 0)$, $\lim\limits_{t \to t_i - 0} y_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, мәндерін $(2.1.9)$ және $(2.1.10)$ қатынастарына қойып,

$$B\xi_1 + B \int_0^{\frac{t_1}{2}} f(\tau, y_1(\tau) + \xi_1)\, d\tau + C\xi_{k+1} +$$

$$+ C \int_{\frac{t_{k+1}+t_k}{2}}^{T} f(\tau, y_{k+1}(\tau) + \xi_{k+1})\, d\tau - d = 0, \qquad (2.1.17)$$

$$\int_{t_i}^{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} f(\tau, y_{i+1}(\tau) + \xi_{i+1})\, d\tau + \xi_{i+1} - \int_{\frac{t_i+t_{i-1}}{2}}^{t_i} f(\tau, y_i(\tau) + \xi_i)\, d\tau - \xi_i - s_i = 0,$$

$$i = \overline{1, k} \quad (2.1.18)$$

теңдіктерін аламыз.

$y_r(t)$ $\left(i = \overline{1, k+1}\right)$ функциялары үшін (2.1.17), (2.1.18) жүйесі $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+1})$ параметрлеріне қатысты

$$Q(\xi, y) = 0, \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+1}) \in R^{(k+1)n} \quad (2.1.19)$$

теңдеулер жүйесін құрайды.

***E* шарты.** *I_k таңдауы үшін $Q(\xi, 0) = 0$ сызықты емес теңдеулер жүйесінің $\xi^{(0)} = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_{k+1}^{(0)}\right) \in R^{(k+1)n}$ шешімі бар болсын.*

Айталық, *E* шарты орындалсын.

$$\dot{y}_r = f\left(t, y_r + \xi_r^{(0)}\right), t \in [t_{r-1}, t_r), \quad (2.1.20)$$

$$y_r\left(\frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right) = 0, r = \overline{1, k+1}, \quad (2.1.21)$$

есебінің $y_r^{(0)}(t),\ t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, k+1}$ шешімі бар және $y_r^{(0)}[t] = \left(y_1^{(0)}(t), y_2^{(0)}(t), \dots, y_{k+1}^{(0)}(t)\right)$ функциялар жүйесі $C\left([0, T], I_k, R^{(k+1)n}\right)$ кеңістігіне тиісті болсын.

$\left(y^{(0)}[t], \xi^{(0)}\right)$ жұбын ескере отырып, біз $[0, T]$ аралығында бөлік-үзіліссіз функцияны анықтаймыз: $x^{(0)}(t) = y^{(0)}(t) + \xi_r^{(0)}, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, k+1}$ және $x^{(0)}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} y_{k+1}^{(0)}(t) + \xi_{k+1}^{(0)}$.

Алдымен $\rho_\xi > 0, \rho_y > 0, \rho_x > 0$ сандарын таңдаймыз және

$$S\left(\xi^{(0)}, \rho_\xi\right) = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+1}) \in R^{(k+1)n} : \left\|\xi - \xi^{(0)}\right\| = \right.$$

$$\left. = \max_{r = \overline{1, k+1}} \left\|\xi_r - \xi_r^{(0)}\right\| < \rho_\xi\right\},$$

$$S\left(y^{(0)}[t], \rho_y\right) = \left\{y[t] \in C\left([0, T], I_k, R^{(k+1)n}\right) : \left\|y[\cdot] - y^{(0)}[\cdot]\right\|_2 < \rho_y\right\},$$

$$S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right) = \left\{x(t) \in PC([0, T] \backslash I_k, R^n) : \left\|x - x^{(0)}\right\|_1 < \rho_x\right\},$$

$$G(\rho_x) = \left\{(t, x) : t \in [0, T], x \in S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right)\right\}$$

жиындарын анықтаймыз.

Айталық, E шарты орындалсын. Онда алгоритм бойынша $\left(y^{(m)}[t], \xi^{(m)}\right), m \in N$ тізбектер жұбын құрамыз.

1-қадам.

(1) $Q(\xi, y^{(0)}) = 0$ теңдеулер жүйесінен

$$\xi^{(1)} = \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_{k+1}^{(1)}\right) \in R^{(k+1)n}$$

параметрін табамыз;

(2) $\xi_r = \xi_r^{(1)}, r = \overline{1, k+1}$ үшін $(2.1.7), (2.1.8)$ есебін шеше отырып $y^{(1)}[t] = \left(y_1^{(1)}(t), y_2^{(1)}(t), \dots, y_{k+1}^{(1)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің элементтерін анықтаймыз.

2-қадам.

(1) $Q(\xi, y^{(1)}) = 0$ теңдеулер жүйесінен

$$\xi^{(2)} = \left(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_{k+1}^{(2)}\right) \in R^{(k+1)n}$$

параметрін табамыз;

(2) $\xi_r = \xi_r^{(2)}, r = \overline{1, k+1}$ үшін $(2.1.7), (2.1.8)$ есебін шеше отырып $y^{(2)}[t] = \left(y_1^{(2)}(t), y_1^{(2)}(t), \dots, y_{k+1}^{(2)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің элементтерін анықтаймыз.

Осы процессті жалғастыра отырып m-қадамды аламыз.

***m*-қадам.**

(1) $Q(\xi, y^{(m-1)}) = 0$ теңдеулер жүйесінен

$$\xi^{(m)} = \left(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_{k+1}^{(m)}\right) \in R^{(k+1)n}$$

параметрін табамыз;

(2) $\xi_r = \xi_r^{(m)}, r = \overline{1, k+1}$ үшін $(2.1.7), (2.1.8)$ есебін шеше отырып $y^{(m)}[t] = \left(y_1^{(m)}(t), y_1^{(m)}(t), \dots, y_{k+1}^{(m)}(t)\right), m = 1,2, \dots$ функциялар жүйесінің элементтерін анықтаймыз.

***C* шарты.** *$f(t,x)$ функциясы үзіліссіз және $G(\rho_x)$ облысында $f_x'(t,x)$ бірқалыпты үзіліссіз дербес туындылары бар және барлық $(t,x) \in G(\rho_x)$ үшін*

$$\|f_x'(t,x)\| \le L$$

орындалатын $L > 0$ саны табылсын.

Белгілеулер енгізейік:

$$h = \max_{i=\overline{1,k+1}} \left\{ \sup_{t \in \left[t_{i-1}, \frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)} \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} - t\right), \sup_{t \in \left[\frac{t_i + t_{i-1}}{2}, t_i\right)} \left(t - \frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \right\}.$$

2.1.1-теорема. *Айталық,* I_k, $\rho_\xi > 0$, $\rho_y > 0$, $\rho_x > 0$ *үшін* E *және* C *шарттары орындалсын, және* $\frac{\partial Q(\xi,y)}{\partial \xi}: R^{(k+1)n} \to R^{(k+1)n}$ *Якоби матрицасы барлық* $(y[t],\xi) \in S\big(y^{(0)}[t],\rho_y\big) \times S\big(\xi^{(0)},\rho_\xi\big)$ *үшін қайтымды болсын, және*

i) $\left\| \left(\frac{\partial Q(\xi,y)}{\partial \xi} \right)^{-1} \right\| \le \beta, \beta - const;$

ii) $q = \beta \max\{2, h\|B\| + h\|C\|\} \cdot \max\limits_{i=\overline{1,k+1}} \left\{ e^{L\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}\right)} - 1 - L\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}\right) \right\} < 1;$

iii) $\frac{\beta}{1-q}\left\|Q\big(\xi^{(0)},y^{(0)}\big)\right\| \le \rho_\xi;$

iv) $\frac{\beta}{1-q}\max\limits_{i=\overline{1,k+1}}\left\{ e^{L\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}\right)} - 1 \right\}\left\|Q\big(\xi^{(0)},y^{(0)}\big)\right\| \le \rho_y;$

v) $(1+Lh)\,\rho_\xi + Lh\,\rho_y < \rho_x$

теңсіздіктері орындалсын. Онда алгоритм бойынша анықталған $S\big(y^{(0)}[t],\rho_y\big) \times S\big(\xi^{(0)},\rho_\xi\big)$ *облысына тиісті және* $(y^*[t],\xi^*)$ *жұбына жинақталатын* $\big(y^{(k)}[t],\xi^{(k)}\big), k \in N$ *жұп тізбегі* $(2.1.7)-(2.1.10)$ *есебінің* $S\big(y^{(0)}[t],\rho_y\big) \times S\big(\xi^{(0)},\rho_\xi\big)$ *облысында оқшауланған шешімі болады және*

$$\left\|\xi^* - \xi^{(k)}\right\| \le \frac{q^k}{1-q}\beta\left\|Q\big(\xi^{(0)},y^{(0)}\big)\right\|, \qquad (2.1.22)$$

$$\left\|y_r^*(t) - y_r^{(k)}(t)\right\| \le$$
$$\le \left\|\xi^* - \xi^{(k)}\right\| \max_{i=\overline{1,k+1}}\left\{ e^{L\left(t - \frac{t_i+t_{i-1}}{2}\right)} - 1, e^{L\left(\frac{t_i+t_{i-1}}{2} - t\right)} - 1, \right\} \qquad (2.1.23)$$

бағалаулары орындалады.

Дәлелдеуі. Импульс әсерлі I_k нүктелерін пайдаланып $[0,T]$ аралығын бөлеміз.

$(2.1.1)-(2.1.3)$ есебінен оған эквивалентті $(2.1.7)-(2.1.10)$ параметрлі есебіне көшеміз.

Кез-келген $(y[t],\xi) \in S\big(y^{(0)}[t],\rho_y\big) \times S\big(\xi^{(0)},\rho_\xi\big)$ жұбын аламыз, онда

$$\left\|y_r(t) - y_r^{(0)}(t) - \xi_r - \xi_r^{(0)}\right\| \le \left\|y_r(t) - y_r^{(0)}(t)\right\| + \left\|\xi_r - \xi_r^{(0)}\right\| \le \rho_\xi + \rho_y \le$$
$$\le \rho_x, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,k+1}\,. \qquad (2.1.24)$$

Барлық $r=\overline{1,k+1}$ үшін C шартын пайдаланып

$$\left\|\xi_r+\int\limits_t^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} f(\tau,y_r(\tau)+\xi_r)\,d\tau-\xi_r^{(0)}-y_r^{(0)}(t)\right\|\le$$

$$\le\left\|\xi_r-\xi_r^{(0)}\right\|+\left\|\int\limits_t^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} f(\tau,y_r(\tau)+\xi_r)\,d\tau-\int\limits_t^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} f\left(\tau,y_r^{(0)}(\tau)+\xi_r^{(0)}\right)d\tau\right\|\le$$

$$\le\left[1+L\left(\frac{t_r+t_{r-1}}{2}-t\right)\right]\left\|\xi_r-\xi_r^{(0)}\right\|+\int\limits_t^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} L\left\|y_r(\tau)-y_r^{(0)}(\tau)\right\|d\tau\le$$

$$\le\left[1+L\left(\frac{t_r+t_{r-1}}{2}-t\right)\right]\rho_\xi+L\left(\frac{t_r+t_{r-1}}{2}-t\right)\rho_y\le(1+Lh)\rho_\xi+Lh\rho_y\le\rho_x,$$

$$t\in\left[t_{r-1},\frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right),r=\overline{1,k+1}\,, \qquad (2.1.25)$$

$$\left\|\xi_r+\int\limits_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} f(\tau,y_r(\tau)+\xi_r)\,d\tau-\xi_r^{(0)}-y_r^{(0)}(t)\right\|\le$$

$$\le\left\|\xi_r-\xi_r^{(0)}\right\|+\left\|\int\limits_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} f(\tau,y_r(\tau)+\xi_r)\,d\tau-\int\limits_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} f\left(\tau,y_r^{(0)}(\tau)+\xi_r^{(0)}\right)d\tau\right\|\le$$

$$\le\left[1+L\left(t-\frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right)\right]\left\|\xi_r-\xi_r^{(0)}\right\|+\int\limits_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} L\left\|y_r(\tau)-y_r^{(0)}(\tau)\right\|d\tau$$

$$\le\left[1+L\left(t-\frac{t_r+t_{r-1}}{2}-t\right)\right]\rho_\xi+L\left(t-\frac{t_r+t_{r-1}}{2}-t\right)\rho_y\le(1+Lh)\rho_\xi+Lh\rho_y$$

$$\le\rho_x,t\in\left[\frac{t_r+t_{r-1}}{2},t_r\right),r=\overline{1,k+1}\,, \qquad (2.1.26)$$

теңсіздіктерін аламыз.

(2.1.25), (2.1.26) және 2.1.1-теореманың (v) теңсіздігін ескерсек $(t, y_r(t)+\xi_r)$, $\left(t, \int_t^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} f(\tau, y_r(\tau)+\xi_r)\,d\tau+\xi_r\right)$ және $\left(t, \int_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} f(\tau, y_r(\tau)+\xi_r)\,d\tau+\xi_r\right)$ жұптарының $G_f(\rho_x)$ облысында жататынын аламыз, мұндағы $(y[t],\xi)\in S\left(y^{(0)}[t],\rho_y\right)\times S\left(\xi^{(0)},\rho_\xi\right)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,k+1}$.

$(2.1.7)-(2.1.10)$ есебінің шешімі ұсынылған алгоитм бойынша табылады. Бастапқы жуықтау ретінде E шартынан $\left(y^{(0)}[t],\xi^{(0)}\right)$ жұбын алып, параметр бойынша келесі жуықтауды

$$Q\left(\xi, y^{(0)}\right)=0, \xi\in R^{(k+1)n} \tag{2.1.27}$$

теңдеуінен табамыз.

Теорема шарты бойынша $Q\left(\xi, y^{(0)}\right)$ операторы $S\left(\xi^{(0)},\rho_\xi\right)$ облысында [85, 41-бет] 1-теореманың барлық болжамдарын қанағаттандырады.

Ендігі кезекте

$$\varepsilon_0\beta\le\frac{1}{2},\qquad \frac{\beta}{1-q}\left\|Q\left(\xi^{(0)},y^{(0)}\right)\right\|\le\rho_\xi$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $\varepsilon_0>0$ санын таңдаймыз.

Сонда $S\left(\xi^{(0)},\rho_\xi\right)$ облысында $\frac{\partial Q(\xi,y^{(0)})}{\partial\xi}$ Якоби матрицасының бірқалыпты үзіліссіздігін пайдаланып, кез-келген $\xi,\tilde{\xi}\in S\left(\xi^{(0)},\rho_\xi\right)$ үшін

$$\left\|\xi-\tilde{\xi}\right\|<\delta_0$$

теңсіздігін қанағаттандыратын және

$$\left\|\frac{\partial Q\left(\xi,y^{(0)}\right)}{\partial\xi}-\frac{\partial Q\left(\tilde{\xi},y^{(0)}\right)}{\partial\xi}\right\|<\varepsilon_0$$

теңсіздігі ақиқат болатын $\delta_0\in\left(0,\frac{1}{2}\rho_\xi\right)$ санын табамыз.

$\alpha\ge\alpha_0=\max\left\{1,\frac{\beta}{\delta_0}\left\|Q\left(\xi^{(0)},y^{(0)}\right)\right\|\right\}$ санын таңдап алып,

$$\xi^{(1,0)}=\xi^{(0)}, \xi^{(1,s+1)}=\xi^{(1,s)}-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial Q\left(\xi^{(1,s)},y^{(0)}\right)}{\partial\xi}\right)^{-1}Q\left(\xi^{(1,s)},y^{(0)}\right),$$
$$s=0,1,2,\ldots \tag{2.1.28}$$

итерациялық процесін тұрғызамыз.

[85, 41 б] жұмыстағы 1-теорема бойынша, (2.1.28) итерациялық процесі ξ санына жинақталады және $Q\left(\xi, y^{(0)}\right)=0$ теңдеуінің оқшауланған шешімі болады және

$$\left\|\xi^{(1)}-\xi^{(0)}\right\| \leq \beta\left\|Q\left(\xi^{(0)}, y^{(0)}\right)\right\| \leq \rho_{\xi} \tag{2.1.29}$$

бағалауы орынды.

Ұйғарымдарымыз бойынша (2.1.7), (2.1.8) Коши есебінің $[t_{r-1}, t_r)$ аралығында $\xi_r=\xi_r^{(1)}$ бірге $y_r^{(1)}(t)$ жалғыз шешімі бар және

$$\left\|y_r^{(1)}(t)-y_r^{(0)}(t)\right\| \leq \left\|\int_t^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} L\left(\left\|\xi_r^{(1)}-\xi_r^{(0)}\right\|+\left\|y_r^{(1)}(\tau)-y_r^{(0)}(\tau)\right\|\right) d\tau\right\|,$$

$$t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right), r=\overline{1, k+1}, \tag{2.1.30}$$

$$\left\|y_r^{(1)}(t)-y_r^{(0)}(t)\right\| \leq \left\|\int_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} L\left(\left\|\xi_r^{(1)}-\xi_r^{(0)}\right\|+\left\|y_r^{(1)}(\tau)-y_r^{(0)}(\tau)\right\|\right) d\tau\right\|,$$

$$t \in \left[\frac{t_r+t_{r-1}}{2}, t_r\right), r=\overline{1, k+1}, \tag{2.1.31}$$

теңсіздіктерін қанағаттандырады.

Гронуолл-Беллман теңсіздігін пайдаланып,

$$\left\|y_r^{(1)}(t)-y_r^{(0)}(t)\right\| \leq \left(e^{L\left(\frac{t_r+t_{r-1}}{2}-t\right)}-1\right)\left\|\xi_r^{(1)}-\xi_r^{(0)}\right\|,$$

$$t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right), r=\overline{1, k+1}, \tag{2.1.32}$$

$$\left\|y_r^{(1)}(t)-y_r^{(0)}(t)\right\| \leq \left(e^{L\left(t-\frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right)}-1\right)\left\|\xi_r^{(1)}-\xi_r^{(0)}\right\|,$$

$$t \in \left[\frac{t_r+t_{r-1}}{2}, t_r\right), r=\overline{1, k+1} \tag{2.1.33}$$

бағалауларын аламыз.

$(2.1.25), (2.1.26)$ теңсіздіктерінен $y^{(1)}[t]=\left(y_1^{(1)}(t), y_2^{(1)}(t), \ldots, y_{k+1}^{(1)}(t)\right) \in S\left(y^{(0)}[t], \rho_y\right)$ аламыз.

$Q(\xi, y)$ операторының құрылымын және $Q\left(\xi^{(1)}, y^{(0)}\right) = 0$ теңдігін пайдаланып,

$$\beta\left\|Q\left(\xi^{(1)}, y^{(1)}\right)\right\| = \beta\left\|Q\left(\xi^{(1)}, y^{(1)}\right) - Q\left(\xi^{(1)}, y^{(0)}\right)\right\| \leq \beta \max\{2, h\|B\| + h\|C\|\} \cdot$$

$$\cdot \max\left(\int_{t}^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} L\left\|y_r^{(1)}(\tau) - y_r^{(0)}(\tau)\right\| d\tau, \int_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} L\left\|y_r^{(1)}(\tau) - y_r^{(0)}(\tau)\right\| d\tau \right)$$

бағалауын аламыз.

$\left\|y_r^{(1)}(\tau) - y_r^{(0)}(\tau)\right\|$ орнына $(2.1.30)$, $(2.1.31)$ өрнектерінің оң жақтарын алмастырып және интегралдарды есептеп,

$$\beta\left\|Q\left(\xi^{(1)}, y^{(1)}\right)\right\| \leq q\left\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\right\| \qquad (2.1.34)$$

бағалауды аламыз.

Біз $\rho_1 = \beta\left\|Q\left(\xi^{(1)}, y^{(1)}\right)\right\|$ аламыз.

Егер $\xi \in S\left(\xi^{(1)}, \rho_1\right)$ болса, онда теореманың (ii), (iii) шарттары және $(2.1.29)$, $(2.1.34)$ бойынша біз

$$\left\|\xi - \xi^{(0)}\right\| \leq \left\|\xi - \xi^{(1)}\right\| + \left\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\right\| < \beta\left\|Q\left(\xi^{(1)}, y^{(1)}\right)\right\| + \left\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\right\| \leq$$

$$\leq (q+1)\left\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\right\| < \frac{\beta}{1-q}\left\|Q\left(\xi^{(0)}, y^{(0)}\right)\right\| < \rho_\xi,$$

бағалауын аламыз, яғни $S\left(\xi^{(1)}, \rho_1\right) \subset S\left(\xi^{(0)}, \rho_\xi\right)$.

$Q\left(\xi, y^{(1)}\right)$ операторы $S\left(\xi^{(1)}, \rho_1\right)$ облысында [85, 41 б] жұмыстағы 1-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан

$$\xi^{(2,0)} = \xi^{(1)}, \xi^{(2,s+1)} = \xi^{(2,s)} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial Q\left(\xi^{(2,s)}, y^{(1)}\right)}{\partial \xi}\right)^{-1} Q\left(\xi^{(2,s)}, y^{(1)}\right),$$

$$s = 0,1,2, \ldots \, . \qquad (2.1.35)$$

итерациялық процесі $\xi^{(2)} \in S\left(\xi^{(1)}, \rho_1\right)$ санына жинақталады және

$$Q\left(\xi, y^{(1)}\right) = 0 \text{ және } \left\|\xi^{(2)} - \xi^{(1)}\right\| \leq \beta\left\|Q\left(\xi^{(1)}, y^{(1)}\right)\right\| \qquad (2.1.36)$$

теңдеуінің оқшауланған шешімі болады.

Осыдан және $(2.1.34)$ теңсіздігінен

$$\|\xi^{(2)} - \xi^{(1)}\| \le q\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\| \qquad (2.1.37)$$

орындалатыны шығады.

$(y^{(m)}[t], \xi^{(m)}) \in S(y^{(0)}[t], \rho_y) \times S(\xi^{(0)}[t], \rho_\xi)$ жұбы анықталған делік және

$$\|\xi^{(m-1)} - \xi^{(m-2)}\| \le q\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\|, \qquad (2.1.38)$$

$$\beta\|Q(\xi^{(m-1)}, y^{(m-1)})\| \le q\|\xi^{(m-1)} - \xi^{(m-2)}\| \qquad (2.1.39)$$

бағалаулар орындалсын.

$\xi^{(m)}$ параметрі бойынша m-ші жуықтауды $Q(\xi, y^{(m-1)}) = 0$ теңдеуінен табуға болады.

(2.1.38), (2.1.39) және $Q(\xi^{(m-1)}, y^{(m-2)}) = 0$ теңдігін пайдаланып, (2.1.34) ұқсас түрде

$$\beta\|Q(\xi^{(m-1)}, y^{(m-1)})\| \le q^{m-1}\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\| \qquad (2.1.40)$$

теңсіздігін табамыз.

Енді $\rho_{m-1} = \beta\|Q(\xi^{(m-1)}, y^{(m-1)})\|$ аламыз және $S(\xi^{(m-1)}, \rho_{m-1}) \subset S(\xi^{(0)}, \rho_\xi)$ болатынын көрсетеміз.

Шынында, $(2.1.38) - (2.1.40)$ теңсіздіктері және теореманың (iii) шарты бойынша

$$\|\xi - \xi^{(0)}\| \le \|\xi - \xi^{(m-1)}\| + \|\xi^{(m-1)} - \xi^{(m-2)}\| + \dots + \|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\| <$$

$$< \rho_{m-1} + q^{m-2}\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\| + \dots + \|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\| \le$$

$$< (q^{m-1} + \dots + q + 1)\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\| < \frac{\beta}{1-q}\|Q(\xi^{(0)}, y^{(0)})\| < \rho_\xi$$

бағалауын аламыз.

$S(\xi^{(m-1)}, \rho_{m-1})$ облысында $Q(\xi, y^{(m-1)})$ матрицасы [85, 41 б] жұмыстағы 1-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады, онда $\xi^{(m)} \in S(\xi^{(m-1)}, \rho_{m-1})$ бар болады және $Q(\xi, y^{(m-1)}) = 0$ теңдеуінің шешімі болады және

$$\|\xi^{(m)} - \xi^{(m-1)}\| \le \beta\|Q(\xi^{(m-1)}, y^{(m-1)})\| \qquad (2.1.41)$$

бағалауы орынды.

$\xi_r = \xi_r^{(m)}$ үшін (2.1.7), (2.1.8) Коши есебін шешіп $y_r^{(m)}(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, k+1}$ функцияларын табамыз.

Егер $\rho_m = \beta \| Q(\xi^{(m)}, y^{(m)}) \| = 0$ болса, онда $Q(\xi^{(m)}, y^{(m)}) = 0$. Осыдан $y_r^{(m)}(t)$ функциясы $[t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, k+1}$ аралығында $\xi_r = \xi_r^{(m)}$ параметрімен бірге (2.1.7), (2.1.8) Коши есебінің шешімі болатынын ескеріп,

$$By_1^{(m)}(0) + B\xi_1^{(m)} + C \lim_{t \to T-0} y_{k+1}^{(m)}(t) + C\xi_{k+1}^{(m)} = d,$$

$$y_{i+1}^{(m)}(t_i + 0) + \xi_{i+1}^{(m)} - \lim_{t \to t_i - 0} y_i^{(m)}(t) - \xi_i^{(m)} = s_i, i = \overline{1, k},$$

теңдіктерін аламыз, яғни $(y^{(m)}[t], \xi^{(m)})$ жұбы $(2.1.7) - (2.1.10)$ есептің шешімі.

(2.1.40), (2.1.41) және Гронуолл-Беллман теңсіздігін пайдаланып,

$$\| \xi^{(m)} - \xi^{(m-1)} \| \leq q \| \xi^{(m-1)} - \xi^{(m-2)} \|, \tag{2.1.42}$$

$$\left\| y_r^{(m)}(t) - y_r^{(m-1)}(t) \right\| \leq \left(e^{L\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} - t\right)} - 1 \right) \left\| \xi_r^{(m)} - \xi_r^{(m-1)} \right\|,$$

$$t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r + t_{r-1}}{2} \right), r = \overline{1, k+1}, \tag{2.1.43}$$

$$\left\| y_r^{(m)}(t) - y_r^{(m-1)}(t) \right\| \leq \left(e^{L\left(t - \frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)} - 1 \right) \left\| \xi_r^{(m)} - \xi_r^{(m-1)} \right\|,$$

$$t \in \left[\frac{t_r + t_{r-1}}{2}, t_r \right), r = \overline{1, k+1} \tag{2.1.44}$$

бағалауларын орнатамыз.

$(2.1.42) - (2.1.44)$ теңсіздіктерінен және $q < 1$ болса, онда $(y^{(m)}[t], \xi^{(m)})$ тізбектер жұбы $m \to \infty$ болғанда $(y^*[t], \xi^*)$ жұбына жинақталады және ол $(2.1.7) - (2.1.10)$ есебінің шешімі болады. Сонымен қатар, 2.1.1-теореманың iii) және iv) теңсіздіктері бойынша $(y^{(m)}[t], \xi^{(m)}), m \in N$ және $(y^*[t], \xi^*)$ жұптары $S(y^{(0)}[t], \rho_y) \times S(\xi^{(0)}, \rho_\xi)$ облысына тиісті болады.

$l \to \infty$ болғанда шекке көшіп,

$$\| \xi^{(m+l)} - \xi^{(m)} \| \leq \frac{q^m}{1-q} \beta \| Q(\xi^{(0)}, y^{(0)}) \|,$$

$$\left\| y_r^{(m+l)}(t) - y_r^{(m)}(t) \right\| \leq \left(e^{L\left(\frac{t_r + t_{r-1}}{2} - t\right)} - 1 \right) \left\| \xi_r^{(m+l)} - \xi_r^{(m)} \right\|,$$

$$t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right), r = \overline{1, k+1}$$

$$\left\| y_r^{(m+l)}(t) - y_r^{(m)}(t) \right\| \le \left(e^{L\left(t - \frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right)} - 1 \right) \left\| \xi_r^{(m+l)} - \xi_r^{(m)} \right\|,$$

$$t \in \left[\frac{t_r + t_{r-1}}{2}, t_r\right), r = \overline{1, k+1}$$

(2.1.20), (2.1.21) бағалауларын аламыз.

Енді шешімнің оқшаулығын көрсетейік. Айталық, $\left(\tilde{y}[t], \tilde{\xi}\right)$ жұбы $(2.1.7) - (2.1.10)$ есебінің $S\left(y^{(0)}[t], \rho_y\right) \times S\left(\xi^{(0)}, \rho_\xi\right)$ облысына тиісті шешімі болсын.

Онда

$$\left\| \tilde{\xi} - \xi^{(0)} \right\| + \tilde{\delta}_1 < \rho_\xi,$$

$$\left(e^{L\left(\frac{t_r + t_{r-1}}{2} - t\right)} - 1 \right) \left\| \tilde{\xi} - \xi^{(0)} \right\| + \tilde{\delta}_2 < \rho_y, t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right), r = \overline{1, k+1},$$

$$\left(e^{L\left(t - \frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right)} - 1 \right) \left\| \tilde{\xi} - \xi^{(0)} \right\| + \tilde{\delta}_2 < \rho_y, t \in \left[\frac{t_r + t_{r-1}}{2}, t_r\right), r = \overline{1, k+1}$$

теңсіздіктері орындалатын $\tilde{\delta}_1 > 0$, $\tilde{\delta}_2 > 0$ сандары табылады. $\xi = \tilde{\xi}$, $\xi_r = \xi_r^{(0)}$ болғанда сәйкесінше $\tilde{y}_r(t)$, $y_r^{(0)}(t)$ функциялары (2.1.7), (2.1.8) Коши есебінің шешімдері екенін ескере отырып, Гронуолл – Беллман теңсіздігін пайдаланып

$$\left\| \tilde{y}_r(t) - y_r^{(0)}(t) \right\| \le \left(e^{L\left(\frac{t_r + t_{r-1}}{2} - t\right)} - 1 \right) \left\| \tilde{\xi} - \xi^{(0)} \right\|, t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right),$$

$$r = \overline{1, k+1},$$

$$\left\| \tilde{y}_r(t) - y_r^{(0)}(t) \right\| \le \left(e^{L\left(t - \frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right)} - 1 \right) \left\| \tilde{\xi} - \xi^{(0)} \right\|, t \in \left[\frac{t_r + t_{r-1}}{2}, t_r\right),$$

$$r = \overline{1, k+1}$$

бағалауларын аламыз.

Енді, егер $\xi \in S\left(\tilde{\xi}, \tilde{\delta}_1\right)$, $y[t] \in S_I\left(\tilde{y}[t], \tilde{\delta}_2\right)$ болса, онда

$$\left\| \xi - \xi^{(0)} \right\| \le \left\| \xi - \tilde{\xi} \right\| + \left\| \tilde{\xi} - \xi^{(0)} \right\| < \tilde{\delta}_1 + \left\| \tilde{\xi} - \xi^{(0)} \right\| < \rho_\xi,$$

$$\left\| y_r(t) - y_r^{(0)}(t) \right\| \le \left\| y_r(t) - \tilde{y}_r(t) \right\| + \left\| \tilde{y}_r(t) - y_r^{(0)}(t) \right\| <$$

$$< \tilde{\delta}_2 + \left\| \tilde{y}_r(t) - y_r^{(0)}(t) \right\| < \rho_y, t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r + t_{r-1}}{2} \right), r = \overline{1, k+1},$$

$$\left\| y_r(t) - y_r^{(0)}(t) \right\| \le \| y_r(t) - \tilde{y}_r(t) \| + \left\| \tilde{y}_r(t) - y_r^{(0)}(t) \right\| <$$

$$< \tilde{\delta}_2 + \left\| \tilde{y}_r(t) - y_r^{(0)}(t) \right\| < \rho_y, t \in \left[\frac{t_r + t_{r-1}}{2}, t_r \right), r = \overline{1, k+1},$$

$\xi \in S(\xi^{(0)}, \rho_\xi)$, $y[t] \in S_I(y^{(0)}[t], \rho_y)$ аламыз, яғни $S(\tilde{\xi}, \tilde{\delta}_1) \subset S(\xi^{(0)}, \rho_\xi)$, $S(\tilde{y}[t], \tilde{\delta}_2) \subset S(y^{(0)}[t], \rho_y)$.

$$\varepsilon \cdot \beta < 1, q < 1 - \varepsilon \cdot \beta \tag{2.1.45}$$

теңсіздіктері орындалатын $\varepsilon > 0$ санын аламыз.

$G_f(\rho_x)$ облысында $f_x'(t, x)$ туындысының бірқалыпты үзіліссіздігінен және $\frac{\partial Q(\xi, y^{(0)})}{\partial \xi}$ Якоби матрицасының құрылымынан оның $S(\tilde{\xi}, \tilde{\delta}_1) \times S(\tilde{y}[t], \tilde{\delta}_2)$ облысында бірқалыпты үзіліссіздігі шығады. Сондықтан барлық $(\xi, y) \in S(\tilde{\xi}, \delta) \times S(\tilde{y}[t], \delta)$ үшін

$$\left\| \frac{\partial Q(\xi, y)}{\partial \xi} - \frac{\partial Q(\tilde{\xi}, \tilde{y})}{\partial \xi} \right\| < \varepsilon$$

орындалатын $\delta \in (0, \min\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\}]$ саны табылады. Егер $(\tilde{\xi}, \tilde{y}[t])$ жұбы (2.1.7) – (2.1.10) есебінің шешімі болса, онда $Q(\tilde{\xi}, \tilde{y}) = 0$.

Айталық, $(\hat{\xi}, \hat{y}[t]) \in S(\tilde{\xi}, \delta) \times S(\tilde{y}[t], \delta)$ (2.1.7) – (2.1.10) есебінің басқа шешімі болсын. $Q(\tilde{\xi}, \tilde{y}) = 0$ және $Q(\hat{\xi}, \hat{y}) = 0$ болғандықтан

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi} - \left(\frac{\partial Q(\tilde{\xi}, \tilde{y})}{\partial \xi} \right)^{-1} Q(\tilde{\xi}, \tilde{y}), \hat{\xi} = \hat{\xi} - \left(\frac{\partial Q(\hat{\xi}, \hat{y})}{\partial \xi} \right)^{-1} Q(\hat{\xi}, \hat{y})$$

теңдіктерінен

$$\tilde{\xi} - \hat{\xi} = -\left(\frac{\partial Q(\tilde{\xi}, \tilde{y})}{\partial \xi} \right)^{-1} \int_0^1 \frac{\partial Q(\hat{\xi} + \theta(\tilde{\xi} - \hat{\xi}), \tilde{y})}{\partial \xi} - \frac{\partial Q(\tilde{\xi}, \tilde{y})}{\partial \xi} d\theta \cdot (\tilde{\xi} - \hat{\xi}) -$$

$$-\left(\frac{\partial Q(\tilde{\xi}, \tilde{y})}{\partial \xi} \right)^{-1} \left(Q(\hat{\xi}, \tilde{y}) - Q(\hat{\xi}, \hat{y}) \right),$$

аламыз, осыдан

$$\left\|\tilde{\xi}-\hat{\xi}\right\| \le \frac{\beta}{1-q}\left\|Q\left(\tilde{\xi},\tilde{y}\right)-Q\left(\hat{\xi},\hat{y}\right)\right\| \le \frac{\beta}{1-q}\max\{2,h\|B\|+h\|C\|\}\cdot$$

$$\cdot\max\left(\int_{t}^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} L\|\tilde{y}_r(\tau)-\hat{y}_r(\tau)\|\,d\tau, \int_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} L\|\tilde{y}_r(\tau)-\hat{y}_r(\tau)\|\,d\tau\right) \quad (2.1.46)$$

шығады.

$$\|\tilde{y}_r(\tau)-\hat{y}_r(\tau)\| \le$$

$$\|\tilde{y}_r(t)-\hat{y}_r(t)\| \le \left\|\int_{t}^{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}} L\left(\left\|\tilde{\xi}_r-\hat{\xi}_r\right\|+\|\tilde{y}_r(\tau)-\hat{y}_r(\tau)\|\right)d\tau\right\|,$$

$$t\in\left[t_{r-1},\frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right), r=\overline{1,k+1},$$

$$\|\tilde{y}_r(t)-\hat{y}_r(t)\| \le \left\|\int_{\frac{t_r+t_{r-1}}{2}}^{t} L\left(\left\|\tilde{\xi}_r-\hat{\xi}_r\right\|+\|\tilde{y}_r(\tau)-\hat{y}_r(\tau)\|\right)d\tau\right\|,$$

$$t\in\left[\frac{t_r+t_{r-1}}{2},t_r\right), r=\overline{1,k+1},$$

бағалауларынан Гронуолл-Беллман леммасы бойынша

$$\|\tilde{y}_r(t)-\hat{y}_r(t)\| \le \left(e^{L\left(\frac{t_r+t_{r-1}}{2}-t\right)}-1\right)\left\|\tilde{\xi}_r-\hat{\xi}_r\right\|,$$

$$t\in\left[t_{r-1},\frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right), r=\overline{1,k+1},$$

$$\|\tilde{y}_r(t)-\hat{y}_r(t)\| \le \left(e^{L\left(t-\frac{t_r+t_{r-1}}{2}\right)}-1\right)\left\|\tilde{\xi}_r-\hat{\xi}_r\right\|,$$

$$t\in\left[\frac{t_r+t_{r-1}}{2},t_r\right), r=\overline{1,k+1} \quad (2.1.48)$$

бағалауларын аламыз. Осы шыққан бағалауларды (2.1.46) бағалауына қойып

$$\|\tilde{\xi} - \hat{\xi}\| \leq \frac{q}{1-\varepsilon\beta}\|\tilde{\xi} - \hat{\xi}\| \quad (2.1.48)$$

бағалауын орнатамыз.

Осылайша, (2.1.45), (2.1.47), (2.1.48) теңсіздіктерін ескерсек $\tilde{\xi}_r = \hat{\xi}_r$, $\tilde{y}_r(t) = \hat{y}_r(t)$, $t \in \left[t_{r-1}, \frac{t_r + t_{r-1}}{2}\right)$, $r = \overline{1, k+1}$, $\tilde{y}_r(t) = \hat{y}_r(t)$, $t \in \left[\frac{t_r + t_{r-1}}{2}, t_r\right)$, $r = \overline{1, k+1}$ екендігі шығады. 2.1.1-теорема дәлелденді.

$(2.1.1) - (2.1.3)$ және $(2.1.7) - (2.1.10)$ есептері эквивалентті болғандықтан келесі тұжырым орынды.

2.1.2-теорема. *Айталық, 2.1.1-теореманың шарттары орындалсын. Онда* $(2.1.1) - (2.1.3)$ *есебінің* $S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right)$ *облысында оқшауланған шешімі бар болады.*

2.2. Жәй дифференциалдық теңдеуі үшін екінүктелі шеттік есепті шешудің параметрлеу әдісі алгоритмінің бір модификациясы

Бұл бөлімшеде алдағы бөлімшеде қарастырылатын бекітілмеген мезеттегі импульс әсерлі шеттік есептің шешілімдік шарттарын алу үшін қажетті көмекші нәтижені, яғни екінүктелі сызықты шеттік есебін шешу алгоритмінің бір модификациясы ұсынылады.

Екінүктелі сызықты шеттік есебін қарастырамыз:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), t \in (t_1, t_2), x \in R^n, \quad (2.2.1)$$

$$Bx(t_1) + Cx(t_2) = d, d \in R^n \quad (2.2.2)$$

мұндағы $A(t), f(t) -$ $[t_1, t_2]$ аралығында үзіліссіз, B және $C -$ берілген $n \times n$ матрицалар, $d -$ берілген $n -$ вектор, $\|x\| = \max\limits_{r=1,2}|x_i|$, $\|A(t)\| = \max\limits_{r=1,2}\sum_j^n\left|a_{i,j}(t)\right| \leq \alpha$, $\alpha = const$.

$C([t_1, t_2], R^n)$ арқылы $\|x\|_0 = \max\limits_{t\in[t_1,t_2]}\|x(t)\|$ нормалы үзіліссіз $x\colon [t_1, t_2] \to R^n$ функциялар кеңістігін белгілейік.

2.2.1 – анықтама. $(2.2.1), (2.2.2)$ *есебінің шешімі деп* (t_1, t_2) *аралығында үзіліссіз дифференциалданатын және* $(2.2.1)$ *теңдеуін*, $(2.2.2)$ *шеттік шартын қанағаттандыратын* $x^*(t) \in C([t_1, t_2], R^n)$ *функциясын атаймыз.*

Есептің қойылымы. $(2.2.1), (2.2.2)$ есебін шешу алгоритмін құру және оның жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттарын орнату қажет.

Айталық, $t_0 \in (t_1, t_2)$ болсын.

$\Delta_r = [t_r, t_0) = \begin{cases}[t_r, t_0), t_r < t_0,\\(t_0, t_r], t_r > t_0,\end{cases}$ $r = 1,2$, және Δ_r аралығында функция индикаторы болатын $I_r[t_r, t_0) = \begin{cases}1, t \in \Delta_r,\\0, t \notin \Delta_r,\end{cases}$ $r = 1,2$ белгілеулерін енгіземіз.

$C([t_1,t_2],t_0,R^{2n})$ арқылы $\|x[\cdot]\|_1 = \max_{r=1,2} \sup_{t\in\Delta_r} \|x_r(t)\| < \infty$ нормалы Банах кеңістігіндегі $x[t] = (x_1(t), x_2(t))$ функциялар жүйесін белгілейміз, мұндағы $x_r: \Delta_r \to R^n, (r = 1,2)$ үзіліссіз және $\lim_{t\to t_0-0} x_1(t) < \infty$, $\lim_{t\to t_0+0} x_2(t) < \infty$.

$\lambda_1 = x(t_1), \lambda_2 = x(t_2)$ параметрлерін енгіземіз және $u_r(t) = x(t)\cdot I_{\Delta_r}(t) - \lambda_r, t \in \Delta_r, r = 1,2$ алмастыруын жасап,

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(\lambda_r + u_r) + f(t), t \in \Delta_r, r = 1,2, \qquad (2.2.3)$$

$$u_r(t_r) = 0, r = 1,2, \qquad (2.2.4)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_2 = d, \qquad (2.2.5)$$

$$\lambda_1 + \lim_{t\to t_0-0} u_1(t) = \lambda_2 + \lim_{t\to t_0+0} u_2(t) \qquad (2.2.6)$$

параметрлі көпнүктелі шеттік есебін аламыз.

(2.2.3) – (2.2.6) есебінің шешімі элементтері $\lambda^* = (\lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*) \in R^{2n}, u^*[t] = \left(u_1{}^*(t), u_2{}^*(t)\right) \in C([t_1,t_2],t_0,R^{2n})$ болатын $(\lambda^*, u^*[t])$ жұбы болады, мұндағы $u_r{}^*(t)$ функциясы $\lambda_r = \lambda_r{}^*, r = 1,2$ болғанда (2.2.3), (2.2.4) Коши есебінің шешімі және $\lim_{t\to t_0-0} u_1(t)$, $\lim_{t\to t_0+0} u_2(t)$ үшін (2.2.5), (2.2.6) теңдіктері орындалады.

Бекітілген λ_r параметрі үшін (2.2.3), (2.2.4) Коши есебі

$$u_r(t) = \int_{t_r}^{t} A(\tau_1)(\lambda_r + u_r(\tau_1))d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} f(\tau_1)d\tau_1, t \in \Delta_r, r = 1, 2. \qquad (2.2.7)$$

түріндегі екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне эквивалентті.

(2.2.7) теңдікте $u_r(t)$ орнына сәйкесінше теңдіктің оң жағын қойып және осы процессті υ рет ($\upsilon \in \mathbb{N}$) қайталап, $u_r(t)$ үшін

$$u_r(t) = \left(\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\int_{t_r}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon \ldots d\tau_1\right)\cdot\lambda_1 + \left(\int_{t_r}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\int_{t_r}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1})\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} f(\tau_\upsilon)\,d\tau_\upsilon\ldots d\tau_1\right) +$$

$$+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1}) \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon) u_r(\tau_\upsilon)\, d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1} \dots d\tau_1\,, t \in [t_1, t_2], r = 1{,}2$$

өрнегін аламыз.

$$D_{\upsilon,r}(t) = \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon) d\tau_\upsilon \dots d\tau_1,$$

$$F_{\upsilon,r}(t) = \int_{t_r}^{t} f(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1}) \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} f(\tau_\upsilon)\, d\tau_\upsilon \dots d\tau_1,$$

$$G_{\upsilon,r}(u_r, t) = \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1}) \int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon) u_r(\tau_\upsilon)\, d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1} \dots d\tau_1,$$

$$t \in [t_1, t_2], r = 1{,}2, \quad (2.2.8)$$

белгілеулерін енгізіп, (2.2.8) теңдігін

$$u_r(t) = D_{\upsilon,r}(t) \cdot \lambda_1 + F_{\upsilon,r}(t) + G_{\upsilon,r}(u_r, t), t \in (t_0, t_r], r = 1{,}2, (2.2.9)$$

түрінде жазамыз.

Енді

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u_1(t) = D_{\upsilon,1}(t_0) \cdot \lambda_1 + F_{\upsilon,1}(t_0) + G_{\upsilon,1}(u_1, t_0),$$

$$\lim_{t \to t_0 + 0} u_2(t) = D_{\upsilon,2}(t_0) \cdot \lambda_2 + F_{\upsilon,2}(t_0) + G_{\upsilon,2}(u_2, t_0),$$

шектерінің мәндерін (2.2.6) теңдігіне қойып, λ параметрі мен t_0 мәндеріне қатысты

$$Q_v(t_0) \cdot \lambda = F_v(t_0) + G_v(u, t_0), \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^{2n}, \qquad (2.2.10)$$

$$P_v(t_0, \lambda_1, u_1) = 0, \qquad t_0 \in R, \qquad (2.2.11)$$

теңдеулерін аламыз, мұндағы

$$Q_v(t_0) = \begin{pmatrix} B & C \\ I + D_{v,1}(t_0) & -I - D_{v,2}(t_0) \end{pmatrix},$$

$$F_v(t_0) = \begin{pmatrix} d \\ F_{v,2}(t_0) - F_{v,1}(t_0) \end{pmatrix}, G_v(u, t_0) = \begin{pmatrix} O_{n\times 1} \\ G_{v,2}(u_1, t_0) - G_{v,1}(u_2, t_0) \end{pmatrix},$$

$$P_v(t_0, \lambda_1, u_1) = t_0 + \beta \cdot \left(\left(I + D_{v,1}(t_0) \right) \cdot \lambda_1 + F_{v,1}(t_0) + G_{v,1}(u_1, t_0) \right).$$

(2.2.10) теңдеуінің бірмәнді шешілуі үшін $Q_v(t_0)$ матрицасының қайтымды болсын. Осы мақсатпен блокты матрицаның қайтымды болуы үшін Фробениус формуласын [109, 62 б] пайдаланамыз. Алдымен

$$H_v^{-1}(t_0) = -\left(I + D_{v,2}(t_0) \right) - \left(I + D_{v,1}(t_0) \right) \cdot B^{-1} \cdot C$$

матрицасын анықтаймыз. Онда $Q_v(t_0)$ матрицасына кері матрица

$$\left(Q_v(t_0) \right)^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} B^{-1} \cdot \left(I + C \cdot H_v^{-1}(t_0) \cdot \left(I + D_{v,1}(t_0) \right) \cdot B^{-1} \right) & -B^{-1} \cdot C \cdot H_v^{-1}(t_0) \\ -H_v^{-1}(t_0) \cdot \left(I + D_{v,1}(t_0) \right) \cdot B^{-1} & -H_v^{-1}(t_0) \end{pmatrix},$$

түрінде болады.

Элементтері $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^{2n}, u[t] = \left(u_1(t), u_2(t) \right) \in C([t_1, t_2], t_0, R^{2n})$ болатын $(\lambda, u[t])$ жұптар тізбегін құрамыз.

0 - қадам.

(a) $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)} \right) \in R^{2n}$ параметрін $Q_v(t_0)\lambda = F_v(t_0)$ теңдеулер жүйесінен табамыз;

(b) $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t) \right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t) \left(\lambda_r^{(0)} + u_r \right) + f(t), u_r(t_r) = 0, t \in \Delta_r, r = 1,2, \qquad (2.2.12)$$

Коши есебін шешу арқылы табамыз;

(c)

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(0)} + u_1^{(0)}(t), t \in [t_1, t_0) \text{ болса} \\ \lambda_1^{(0)} + \lim\limits_{t \to t_0 - 0} u_1^{(0)}(t) \text{ немесе } \quad \lambda_2^{(0)} + \lim\limits_{t \to t_0 + 0} u_2^{(0)}(t),\ t = 0 \text{ болса,} \\ \lambda_2^{(0)} + u_2^{(0)}(t),\ t \in (t_0, t_2] \text{ болса} \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

1 - қадам.

(a) $\lambda^{(1)} = \left(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}\right) \in R^{2n}$ параметрін $Q_\nu(t_0)\lambda = F_\nu(t_0) + G_\nu\left(v^{(0)}, t_0\right)$ теңдеулер жүйесінен табамыз;

(b) $u^{(1)}[t] = \left(u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\left(\lambda_r^{(1)} + u_r\right) + f(t), u_r(t_r) = 0, t \in \Delta_r, r = 1,2, \qquad (2.2.13)$$

Коши есебін шешу арқылы табамыз;

(c)

$$x^{(1)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(1)} + u_1^{(1)}(t), t \in [t_1, t_0) \text{ болса} \\ \lambda_1^{(1)} + \lim\limits_{t \to t_0 - 0} u_1^{(1)}(t) \text{ немесе } \quad \lambda_2^{(1)} + \lim\limits_{t \to t_0 + 0} u_2^{(1)}(t),\ t = 0 \text{ болса,} \\ \lambda_2^{(1)} + u_2^{(1)}(t),\ t \in (t_0, t_2] \text{ болса} \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

Осы процессті жалғастырып, $\left\{\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ жұптар тізбегін және $\left\{x^{(k)}(t)\right\}_{k=0}^{\infty}$ функциялар тізбегін аламыз.

Ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының, сонымен қатар (2.2.3) – (2.2.6) есебінің жалғыз шешімінің болуының да жеткілікті шарттарын тұжырымдаймыз.

2.2.1 - теорема. *Айталық, қайсыбір* $t_0 \in (t_1, t_2), \nu \in N$ *үшін* B, $H_\nu(t_0)$: $R^n \to R^n$ *матрицалары қайтымды және*

$$\|Q_\nu(t_0)^{-1}\| \le \gamma_\nu(t_0), \qquad (2.2.14)$$

$$q_\nu(t_0) < 1, \qquad (2.2.15)$$

теңсіздіктері орындалсын, мұндағы

$$q_\nu(t_0) = \gamma_\nu(t_0) \cdot 2 \max_{r=1,2}\left(e^{\alpha \cdot |t_0 - t_r|} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha|t_0 - t_r|)^j}{j!}\right).$$

Онда ұсынылған алгоритм жинақталады, яғни $\left\{\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ *жұптар тізбегі* $k \to \infty$ *болғанда* $(2.2.3) - (2.2.6)$ *есебінің* $(\lambda^{*}, u^{*}[t])$ *жалғыз шешіміне жинақталады және*

$$\left\|\lambda^{*} - \lambda^{(k)}\right\| \leq \frac{q_v^k(t_0)}{1 - q_v(t_0)} \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|, \qquad (2.2.16)$$

$$\left\|u^{*}[\cdot] - u^{(k)}[\cdot]\right\|_1 \leq \left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|} - 1\right) \left\|\lambda^{(*)} - \lambda^{(k)}\right\|, k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.2.17)$$

бағалаулары орынды.

Дәлелдеуі. Ұсынылған алгоритмге сай анықталған жұптар тізбегі жинақты болатынын көрсетеміз. Ұйғарым бойынша $Q_v(t_0)$ матрицасы қайтымды болғандықтан жалғыз $\lambda^{(0)}$ параметрі табылады. $\left\|\lambda^{(0)}\right\|$ бағалауын табамыз:

$$\left\|\lambda^{(0)}\right\| = \|Q_v(t_0)^{-1} \cdot F_v(t_0)\| \leq \gamma_v(t_0) \cdot max\left\{\|d\|, \left\|F_{v,2}(t_0) - F_{v,1}(t_0)\right\|\right\} \leq$$

$$\leq \gamma_v(t_0) \cdot max\left\{\|d\|, 2\max_{r=1,2}\{F_v(t_0)\}\right\} \leq$$

$$\leq \gamma_v(t_0) \cdot max\left\{\|d\|, 2\max_{r=1,2}\sup_{t\in\Delta_r}\{f(t)\} \cdot \max_{r=1,2}\left\{\sum_{j=0}^{v-1}\frac{(\alpha|t_0 - t_r|)^j}{j!}\right\}\right\} \leq$$

$$\leq \gamma_v(t_0) \cdot max\left\{\|d\|, 2\max_{r=1,2}\sup_{t\in\Delta_r}\|f(t)\|\right\} \cdot max\left\{1, \max_{r=1,2}\left\{\sum_{j=0}^{v-1}\frac{(\alpha|t_0 - t_r|)^j}{j!}\right\}\right\}.$$

Ұйғарым бойынша $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ болғанда (2.2.3), (2.2.4) Коши есебінің $u_r^{(0)}(t)$ жалғыз шешімі бар болады және

$$\left\|u_r^{(0)}(t)\right\| = \left\|\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\left(\lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(\tau_1)\right)d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} f(\tau_1)\,d\tau_1\right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_r}^{t} \alpha\left(\left\|\lambda_r^{(0)}\right\| + \left\|u_r^{(0)}(\tau_1)\right\|\right)d\tau_1 + |t - t_r| \cdot \sup_{t\in\Delta_r}\|f(t)\| \leq$$

$$\leq \int_{t_r}^{t} \alpha\left(\left\|\lambda_r^{(0)}\right\| + \left\|u_r^{(0)}(\tau_1)\right\|\right)d\tau_1 + |t_0 - t_r| \cdot \sup_{t\in\Delta_r}\|f(t)\|, t \in \Delta_r, r = 1,2,$$

Гронуолл-Беллман теңсіздігі бойынша

$$\left\|u_r^{(0)}(t)\right\| = \left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|}-1\right)\cdot\left\|\lambda_r^{(0)}\right\| + |t_0-t_1|\cdot\sup_{t\in\Delta_r}\|f(t)\|\cdot e^{\alpha\cdot|t-t_r|},$$
$$t\in\Delta_r, r=1,2,$$

аламыз.
Алгоритм бойынша $\lambda^{(1)}$ параметрін анықтаймыз және $\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|$ бағалаймыз:

$$\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\| = \left\|Q_v(t_0)^{-1}\cdot\left(F_v(t_0)+G_v\left(u^{(0)},t_0\right)\right)-\left(Q_v(t_0)\right)^{-1}\cdot F_v(t_0)\right\| =$$

$$= \left\|\left(Q_v(t_0)\right)^{-1}\cdot G_v\left(u^{(0)},t_0\right)\right\| \le \gamma_v(t_0)\cdot\left\|G_{v,2}\left(u_2^{(0)},t_0\right)-G_{v,1}\left(u_1^{(0)},t_0\right)\right\| \le$$

$$\le 2\cdot\gamma_v(t_0)\cdot\max_{r=1,2}\left\|G_{v,r}\left(u_r^{(0)},t_0\right)\right\| \le$$

$$\le 2\cdot\gamma_v(t_0)\cdot\max_{r=1,2}\left\{\frac{(\alpha|t_0-t_r|)^v}{v!},\sup_{t\in\Delta_r}\left\|u_r^{(0)}(t)\right\|\right\}.$$

$[t_1,t_2]$ аралығында үзіліссіз $A(t)$ матрицасы және $f(t)$ вектор – функциясы, сондай – ақ $\lambda^{(1)}\in R^{2n}, u^{(0)}[t]$ көмегімен $(2.2.13)$ формуласы бойынша $u^{(1)}[t] = \left(u_1^{(1)}(t),u_2^{(1)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін анықтаймыз және $\left\|u_1^{(1)}(t)-u_2^{(0)}(t)\right\|$ бағалаймыз:

$$\left\|u_1^{(1)}(t)-u_2^{(0)}(t)\right\| = \left\|\int_{t_r}^{t}A(\tau_1)\left(\lambda_r^{(1)}+u_r^{(1)}(\tau_1)-\lambda_r^{(0)}-u_r^{(0)}(\tau_1)\right)d\tau_1\right\| \le$$

$$\le \int_{t_r}^{t}\alpha\left(\left\|\lambda_r^{(1)}-\lambda_r^{(0)}\right\|+\left\|u_r^{(1)}(\tau_1)-u_r^{(0)}(\tau_1)\right\|\right)d\tau_1, t\in\Delta_r, r=1,2.$$

Гронуолл-Беллман леммасын пайдаланып

$$\left\|u_r^{(1)}(t)-u_r^{(0)}(t)\right\| \le \left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|}-1\right)\cdot\left\|\lambda_r^{(1)}-\lambda_r^{(0)}\right\|, t\in\Delta_r, r=1,2 \quad (2.2.18)$$

аламыз.
Алгоритм бойынша $\lambda^{(2)}$ параметрін анықтаймыз және $\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\|$ бағалаймыз:

$$\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\| =$$

$$= \left\| Q_v(t_0)^{-1} \cdot \left(F_v(t_0) + G_v\left(u^{(1)}, t_0\right) \right) - \left(Q_v(t_0) \right)^{-1} \cdot F_v(t_0) + G_v\left(u^{(0)}, t_0\right) \right\| =$$

$$= \left\| Q_v(t_0)^{-1} \cdot \left(G_v\left(u^{(1)}, t_0\right) \right) - G_v\left(u^{(0)}, t_0\right) \right\| \le$$

$$\le \gamma_v(t_0) \cdot \left\| G_{v,2}\left(u_2^{(1)}, t_0\right) - G_{v,1}\left(u_1^{(1)}, t_0\right) - G_{v,2}\left(u_2^{(0)}, t_0\right) + G_{v,1}\left(u_1^{(0)}, t_0\right) \right\| \le$$

$$\le \gamma_v(t_0) \cdot 2 \max_{r=1,2} \left\| G_{v,r}\left(u_r^{(1)} - u_r^{(0)}, t_0\right) \right\| =$$

$$= \gamma_v(t_0) \cdot 2 \cdot \max_{r=1,2} \left\| \int_{t_r}^{t_0} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A(\tau_{v-1}) \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} A(\tau_2) \left(u_r^{(1)}(\tau_v) \right.\right.$$

$$\left.\left. - u_r^{(0)}(\tau_v) \right) d\tau_v d\tau_{v-1} \dots d\tau_1 \right\| \le$$

$$\le \gamma_v(t_0) \cdot 2 \cdot \max_{r=1,2} \int_{t_r}^{t_0} \alpha \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} \alpha \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} \alpha \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1 \right) d\tau_v d\tau_{v-1} \dots d\tau_1 \cdot$$

$$\cdot \left\| \lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)} \right\| = \gamma_v(t_0) \cdot 2 \cdot \max_{r=1,2} \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - \sum_{j=0}^{v} \frac{(\alpha |t_0 - t_r|)^j}{j!} \right) \cdot \left\| \lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)} \right\| \le$$

$$\le 2 \cdot \gamma_v(t_0) \cdot \max_{r=1,2} \left(e^{\alpha \cdot |t_0 - t_r|} - \sum_{j=0}^{v} \frac{(\alpha |t_0 - t_r|)^j}{j!} \right) \cdot \left\| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right\|.$$

Осыдан (2.2.18) теңсіздігі бойынша

$$\left\| \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} \right\| \le \gamma_v(t_0) \left\| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right\|,$$

бағалауын аламыз.

$$\left\| u_r^{(2)}(t) - u_r^{(1)}(t) \right\| = \left\| \int_{t_r}^{t} A(\tau_1) \left(\lambda_r^{(2)} + u_r^{(2)}(\tau_1) - \lambda_r^{(1)} - u_r^{(1)}(\tau_1) \right) d\tau_1 \right\| \le$$

$$\int_{t_r}^{t} \alpha \left(\left\| \lambda_r^{(2)} - \lambda_r^{(1)} \right\| + \left\| u_r^{(2)}(\tau_1) - u_r^{(1)}(\tau_1) \right\| \right) d\tau_1, t \in \Delta_r, r = 1,2$$

болғандықтан, Гронуолл – Беллман теңсіздігін пайдаланып

$$\left\| u_r^{(2)}(t) - u_r^{(1)}(t) \right\| \le \left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|} - 1 \right) \cdot \left\| \lambda_r^{(2)} - \lambda_r^{(1)} \right\|, t \in \Delta_r, r = 1,2$$

бағалауын орнатамыз.
Итерациялық процессті жалғастырып, $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right), k = 0,1, \ldots$, жұптар тізбегін табамыз және

$$\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| =$$

$$= \left\| Q_v(t_0)^{-1} \cdot \left(F_v(t_0) + G_v\left(u^{(k)}, t_0\right)\right) - \left(Q_v(t_0)\right)^{-1} \cdot F_v(t_0) + G_v\left(u^{(k-1)}, t_0\right) \right\| =$$

$$= \left\| Q_v(t_0)^{-1} \cdot \left(G_v\left(u^{(k)}, t_0\right)\right) - G_v\left(u^{(k-1)}, t_0\right) \right\| \le$$

$$\le \gamma_v(t_0) \cdot \left\| G_{v,2}\left(u_2^{(k)}, t_0\right) - G_{v,1}\left(u_1^{(k)}, t_0\right) - G_{v,2}\left(u_2^{(k-1)}, t_0\right) + G_{v,1}\left(u_1^{(k-1)}, t_0\right) \right\|$$

$$\le \gamma_v(t_0) \cdot 2 \max_{r=1,2} \left\| G_{v,r}\left(u_r^{(k)} - u_r^{(k-10)}, t_0\right) \right\| =$$

$$= \gamma_v(t_0) \cdot 2 \max_{r=1,2} \left\| \int_{t_r}^{t_0} A(\tau_1) \ldots \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A(\tau_{v-1}) \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} A(\tau_2) \left(u_r^{(k)}(\tau_v) - u_r^{(k-1)}(\tau_v)\right) d\tau_v d\tau_{v-1} \ldots d\tau_1 \right\| \le$$

$$\le \gamma_v(t_0) \cdot 2 \max_{r=1,2} \int_{t_r}^{t_0} \alpha \ldots \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} \alpha \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} \alpha \left(e^{\alpha\cdot|t_v - t_r|} - 1\right) d\tau_v d\tau_{v-1} \ldots d\tau_1 \cdot$$

$$\cdot \left\| \lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)} \right\| = \gamma_v(t_0) \cdot 2 \max_{r=1,2} \left(e^{\alpha\cdot|t_0 - t_r|} - \sum_{j=0}^{v} \frac{(\alpha|t_0 - t_r|)^j}{j!} \right) \left\| \lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)} \right\|$$

$$\le \gamma_v(t_0) \cdot 2 \max_{r=1,2} \left(e^{\alpha\cdot|t_0 - t_r|} - \sum_{j=0}^{v} \frac{(\alpha|t_0 - t_r|)^j}{j!} \right) \left\| \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} \right\|,$$

бағалауын аламыз.
Осыдан

$$\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq q_v(t_0)\left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\| \qquad (2.2.19)$$

теңсіздігі шығады.

$$\left\|u_r^{(k+1)}(t) - u_r^{(k)}(t)\right\| =$$

$$= \left\|\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\left(\lambda_r^{(k+1)} + u_r^{(k+1)}(\tau_1) - \lambda_r^{(k)} - u_r^{(k)}(\tau_1)\right) d\tau_1\right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_r}^{t} \alpha\left(\left\|\lambda_r^{(k+1)} - \lambda_r^{(k)}\right\| + \left\|u_r^{(k+1)}(\tau_1) - u_r^{(k)}(\tau_1)\right\|\right) d\tau_1, t \in \Delta_r, r = 1,2,$$

болғандықтан, Гронуол-Беллман теңсіздігін пайдаланып

$$\left\|u_r^{(k+1)}(t) - u_r^{(k)}(t)\right\| \leq \left(e^{\alpha\cdot|t_0 - t_r|} - 1\right) \cdot \left\|\lambda_r^{(k+1)} - \lambda_r^{(k)}\right\|, t \in \Delta_r, r = 1,2,$$

бағалауын аламыз. Осыдан

$$\left\|u^{(k+1)}[t] - u^{(k)}[t]\right\| \leq \left(e^{\alpha\cdot|t_0 - t_r|} - 1\right) \cdot \left\|\lambda_r^{(k+1)} - \lambda_r^{(k)}\right\|, t \in \Delta_r, r = 1,2,$$

негізгі бағалауды аламыз.

$$\left\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq \left\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k+p-1)} - \lambda^{(k+p-2)}\right\| + \cdots + \left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq$$

$$\leq (q^{p-1} + q^{p-2} + \cdots 1)\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq \frac{1}{1-q}\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq$$

$$\leq \frac{q^k}{1-q}\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|, \qquad (2.2.20)$$

және

$$\left\|u_r^{(k+p)}(t) - u_r^{(k)}(t)\right\| = \left\|\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\left(\lambda_r^{(k+p)} + u_r^{(k+p)}(\tau_1) - \lambda_r^{(k)} - u_r^{(k)}(\tau_1)\right) d\tau_1\right\|$$

$$\leq \int_{t_r}^{t} \alpha \left(\left\| \lambda_r^{(k+p)} - \lambda_r^{(k)} \right\| + \left\| u_r^{(k+p)}(\tau_1) - u_r^{(k)}(\tau_1) \right\| \right) d\tau_1, t \in \Delta_r, r = 1,2,$$

болғандықтан, Гронуолл-Беллман теңсіздігін пайдаланып

$$\left\| u_r^{(k+p)}(t) - u_r^{(k)}(t) \right\| \leq \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1 \right) \cdot \left\| \lambda_r^{(k+p)} - \lambda_r^{(k)} \right\|, t \in \Delta_r, r = 1,2,$$

аламыз. Осыдан

$$\left\| u^{(k+p)}[t] - u^{(k)}[t] \right\| \leq \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1 \right) \cdot \left\| \lambda_r^{(k+p)} - \lambda_r^{(k)} \right\|, t \in \Delta_r, r = 1,2 \quad (2.2.21)$$

бағалауы шығады.

$(2.2.15)$ шартына сәйкес $(2.2.19)$ бағалауынан $k \to \infty$ болғанда $\lambda^{(k)} = \left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)} \right), u^{(k)}[t] = \left(u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t) \right), k = 0,1, \ldots$ элементтерімен $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t] \right)$ жұп тізбегі $(2.2.3) - (2.2.6)$ параметрлі есептің $\left(\lambda^{*}, u^{(k)}[t] \right)$ шешіміне жинақталады. $(2.2.20)$, $(2.2.21)$ бағалауларынан $p \to \infty$ болғанда шекке көшіп, $(2.2.16)$ және $(2.2.17)$ бағалауларын аламыз. Шешімнің жалғыздығының дәлелдеуі [93, 55 б] жұмыстағы 1-теореманың дәлелдеуіне ұқсас түрде жүргізіледі. 2.2.1-теорема дәлелденді.

2.3. Бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті шешудің Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісі

Бұл бөлімшеде уақыттың бекітілмеген мезетінде импульс әсерлі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті шешудің уақыттың қарастырылатын аралығында импульс мезеті бір рет қана болатын жағдайындағы бір нұсқасы ұсынылады.

$[t_1, t_2]$ кесіндісінде уақыттың t^0 бекітілмеген мезетіндегі импульс әсерлі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), t \in (t_1, t_2) \backslash \{t^0\}, x \in R^n \qquad (2.3.1)$$

$$x(t^0 - 0) - x(t^0 + 0) = p, \ p \in R^n, \qquad (2.3.2)$$

$$t^0 + \beta \cdot x(t^0 - 0) = 0, \qquad (2.3.3)$$

$$Bx(t_1) + Cx(t_2) = d, \ d \in R^n, \qquad (2.3.4)$$

екінүктелі шеттік есебі қарастырылады.

Мұндағы $A(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t) \in C([t_1, t_2])$, B, C - берілген $(n \times n)$-өлшемді матрицалар, p, d - берілген n - өлшемді векторлар, β - матрица-жол, $\|x\| = \max_{r=1,2} |x_i| < \infty$, $\|A(t)\| = \max_{r=1,2} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(t)| \le \alpha, \alpha = const$,
$f(t) = f_1(t) \cdot I_{[t_1,t_0)}(t) + f_2(t) \cdot I_{(t_0,t_2]}(t)$,

$I_{[t_r,t_0)}(t) = \begin{cases} 1, t \in [t_r, t_0) \text{ болғанда}, \\ 0, t \notin [t_r, t_0) \text{ болғанда}, \end{cases} \quad r = 1{,}2.$

$PC([t_1, t_2] \backslash \{t^0\}, R^n)$ арқылы $\|x\|_1 = \max\left\{ \sup_{t \in [t_1, t_0)} \|x(t)\|, \sup_{t \in (t_0, t_2]} \|x(t)\| \right\}$ нормалы бөлік-үзіліссіз функциялар кеңістігін белгілейміз.

2.3.1 – анықтама. $(2.3.1) - (2.3.4)$ есебінің шешімі деп
- $(2.3.1)$ дифференциалдық теңдеуін,
- $(2.3.2)$ импульс әсер шартын,
- $(2.3.3)$ шартын,
- $(2.3.4)$ шеттік шартын

қанағаттандыратын $(x^*(t), t^*)$ жұбын атаймыз, мұндағы $x^*(t) \in PC([t_1, t_2] \backslash \{t^0\}, R^n)$ және $t^0 \in (t_1, t_2)$.

Есептің қойылымы. $(2.3.1) - (2.3.4)$ есебін шешу алгоритмін құру және оның жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттарын орнату қажет.

Белгілеулер енгіземіз: $\Delta_r^0 = \begin{cases} [t_r, t^0), \text{егер } t_r < t^0, \\ (t^0, t_r], \text{егер } t_r > t^0, \end{cases}$ $r = 1, 2$. Әрі қарай қайсыбір Δ аралықтың индикаторы болатын $I_\Delta(t) = \begin{cases} 1, \text{егер } t \in \Delta, \\ 0, \text{егер } t \notin \Delta, \end{cases}$ функциясын пайдаланамыз.

$C([t_1, t_2], t^0, R^{2n})$ арқылы $\|x[\cdot]\|_1 = \max_{r=1,2} \sup_{t \in \Delta_r^0} \|x_r(t)\| < \infty$ нормалы $x[t] = (x_1(t), x_2(t))$ функциялар жүйесінің Банах кеңістігін белгілейміз, мұндағы $x_r \colon \Delta_r \to R^n$ $(r = 1, 2)$ үзіліссіз және $\lim_{t \to t_0 - 0} x_1(t) < \infty$, $\lim_{t \to t_0 + 0} x_2(t) < \infty$ шектері табылады.

$\lambda_1 = x(t_1), \lambda_2 = x(t_2)$ параметрлерін енгізіп және $u_r(t) = x(t) - \lambda_r, t \in [t_1, t_2], r = 1, 2$ алмастыруларын жасап, көпнүктелі параметрлі

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(\lambda_r + u_r) + f_r(t), t \in [t_1, t_2], r = 1, 2, \qquad (2.3.5)$$

$$u_r(t) = 0, r = 1, 2, \qquad (2.3.6)$$

$$\lambda_1 + \lim_{t \to t^0 - 0} u_1(t) - \lambda_2 - \lim_{t \to t^0 + 0} u_2(t) - p = 0, \qquad (2.3.7)$$

$$t^0 + \beta \cdot \left(\lambda_1 + \lim_{t \to t^0 - 0} u_1(t)\right) = 0, \qquad (2.3.8)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_2 - d = 0 \qquad (2.3.9)$$

есебін аламыз.

$(2.3.5)-(2.3.9)$ есебінің шешімі деп $(2.3.5)$ теңдеуін және $(2.3.6)-(2.3.9)$ теңдіктерін қанағаттандыратын $\left(t^*,(\lambda^*,u^*[t])\right)$ жиынтығын атаймыз, мұндағы $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*)\in\mathbb{R}^{2n}$, $u^*[t]=\left(u_1^*(t),u_2^*(t)\right)\in C([t_1,t_2]\backslash\{t^*\},\mathbb{R}^{2n})$.

Егер $\left(t^*,(\lambda^*,u^*[t])\right)$ жиынтығы $(2.3.5)-(2.3.9)$ есебінің шешімі болса, онда $(x^*(t),t^*)$ жұбы $(2.3.1)-(2.3.4)$ есебінің шешімі болады, мұндағы

$$x^*(t)=\begin{cases}\lambda_1^*, & t=t_1 \text{ болса},\\ \lambda_1^*+u_1^*(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_{1^*}}, & t=\dot{\Delta}_{1^*} \text{ болса},\\ \lambda_2^*+u_2^*(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_{2^*}}, & t=\dot{\Delta}_{2^*} \text{ болса},\\ \lambda_2^*, & t=t_2 \text{ болса},\end{cases}\qquad \dot{\Delta}_{r^*}=\begin{cases}(t_r,t^*), \text{егер } t_r<t^*,\\ (t^*,t_r), \text{егер } t_r>t^*,\end{cases} r=1,2.$$

Керісінше, егер $(\tilde{x}(t),\tilde{t})$ жұбы $(2.3.1)-(2.3.4)$ есебінің шешімі болса, онда $\left(\tilde{t},\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}[t]\right)\right)$ жиынтығы

$$\tilde{\lambda}=(\tilde{x}(t_1),\tilde{x}(t_2)),\ \ \tilde{u}[t]=\left(\left(\tilde{x}(t)-\tilde{x}(t_1)\right)\cdot I_{\tilde{\Delta}_1}(t),\left(\tilde{x}(t)-\tilde{x}(t_2)\right)\cdot I_{\tilde{\Delta}_2}(t)\right)$$

элементтерімен $(2.3.5)-(2.3.9)$ есебінің шешімі болады, мұндағы

$$\tilde{\Delta}_r=\begin{cases}[t_r,\tilde{t}), \text{егер } t_r<\tilde{t},\\ (\tilde{t},t_r], \text{егер } t_r>\tilde{t},\end{cases} r=1,2.$$

Айталық, λ_r белгілі болсын. Онда $(2.2.5)$, $(2.2.6)$ Коши есебі

$$u_r(t)=\int_{t_r}^{t}A(\tau_1)\left(\lambda_r+u_r(\tau_1)\right)d\tau_1,\ t\in(t_0,t_r],r=\overline{1,2}. \qquad (2.3.10)$$

екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне эквивалентті болады.

$(2.3.10)$ теңдікте $u_r(t)$ орнына сәйкесінше теңдіктің оң жағын қойып және осы процессті υ рет $(\upsilon\in\mathbb{N})$ қайталап, $u_r(t)$ үшін

$$u_r(t)=\left(\int_{t_r}^{t}A(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_r}^{t}A(\tau_1)\int_{t_r}^{\tau_1}A(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\right.$$

$$\left.+\int_{t_r}^{t}A(\tau_1)\ldots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}}A(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon\ldots d\tau_1\right)\cdot\lambda_1+\left(\int_{t_r}^{t}f(\tau_1)d\tau_1+\right.$$

$$\left.+\int_{t_r}^{t}A(\tau_1)\int_{t_r}^{\tau_1}f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\int_{t_r}^{t}A(\tau_1)\ldots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}}A(\tau_{\upsilon-1})\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}}f(\tau_\upsilon)\,d\tau_\upsilon\ldots d\tau_1\right)+$$

$$+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\dots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1})\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon)u_r(\tau_\upsilon)\,d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1}\dots d\tau_1\,, t\in[t_1,t_2], r=1,2$$

өрнегін аламыз.

$$D_{\upsilon,r}(t)=\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\int_{t_r}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+$$

$$+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\dots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon\dots d\tau_1,$$

$$F_{\upsilon,r}(t)=\int_{t_r}^{t} f(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\int_{t_r}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+$$

$$+\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\dots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1})\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} f(\tau_\upsilon)\,d\tau_\upsilon\dots d\tau_1,$$

$$G_{\upsilon,r}(u_r,t)=\int_{t_r}^{t} A(\tau_1)\dots\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-2}} A(\tau_{\upsilon-1})\int_{t_r}^{\tau_{\upsilon-1}} A(\tau_\upsilon)u_r(\tau_\upsilon)\,d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1}\dots d\tau_1,$$

$$t\in[t_1,t_2], r=1,2.$$

белгілеулерін пайдаланып, $u_r(t)$ берілуін

$$u_r(t)=D_{\upsilon,r}(t)\cdot\lambda_r+F_{\upsilon,r}(t)+G_{\upsilon,r}(u_r,t), t\in(t_0,t_r], r=1,2. \quad (2.3.11)$$

түрінде жазамыз. Енді

$$\lim_{t\to t_0-0} u_1(t)=D_{\upsilon,1}(t_0)\cdot\lambda_1+F_{\upsilon,1}(t_0)+G_{\upsilon,1}(u_1,t_0),$$

$$\lim_{t\to t_0+0} u_2(t)=D_{\upsilon,2}(t_0)\cdot\lambda_2+F_{\upsilon,2}(t_0)+G_{\upsilon,2}(u_2,t_0),$$

шектерінің мәндерін (2.3.7) теңдігіне қойып, λ параметрі мен t^0 мәндеріне қатысты

$$Q_\upsilon(t^0)\cdot\lambda=F_\upsilon(t^0)+G_\upsilon(u,t^0), \qquad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in R^{2n}, \qquad (2.3.12)$$

$$P_\upsilon(t^0,\lambda_1,u_1)=0, \qquad t^0\in R, \tag{2.3.13}$$

теңдеулерін аламыз, мұндағы

$$Q_\upsilon(t^0)=\begin{pmatrix} B & C \\ I+D_{\upsilon,1}(t^0) & -I-D_{\upsilon,2}(t^0)\end{pmatrix},$$

$$F_\upsilon(t^0)=\begin{pmatrix} d \\ F_{\upsilon,2}(t^0)-F_{\upsilon,1}(t^0)\end{pmatrix}, G_\upsilon(u,t^0)=\begin{pmatrix} O_{n\times 1} \\ G_{\upsilon,2}(u_2,t^0)-G_{\upsilon,1}(u_1,t^0)\end{pmatrix},$$

$$P_\upsilon(t^0,\lambda_1,u_1)=t^0+\beta\cdot\left(\left(I+D_{\upsilon,1}(t^0)\right)\cdot\lambda_1+F_{\upsilon,1}(t^0)+G_{\upsilon,1}(u_1,t^0)\right).$$

$(2.2.12)$ теңдеуінің бірмәнді шешілуі үшін $Q_\upsilon(t^0)$ матрицасы болсын.

2.3.1 – ескерту. $\left(Q_\upsilon(t^0)\right)^{-1}$ *матрицасы келесі түрде анықталады* $[109, 62$ б$]$:

$$\left(Q_\upsilon(t^0)\right)^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} B^{-1}\cdot\left(I+C\cdot H_\upsilon^{-1}(t^0)\cdot\left(I+D_{\upsilon,1}(t^0)\right)\cdot B^{-1}\right) & -B^{-1}\cdot C\cdot H_\upsilon^{-1}(t^0) \\ -H_\upsilon^{-1}(t^0)\cdot\left(I+D_{\upsilon,1}(t^0)\right)\cdot B^{-1} & -H_\upsilon^{-1}(t^0)\end{pmatrix},$$

мұндағы $H_\upsilon^{-1}(t^0)=-\left(I+D_{\upsilon,2}(t^0)\right)-\left(I+D_{\upsilon,1}(t^0)\right)\cdot B^{-1}\cdot C.$

2.3.1 – шарт.

$i)$ $Q_\upsilon\left(0.5(t_1+t_2)\right)\cdot\mu=F_\upsilon\left(0.5(t_1+t_2)\right)$ *орындалатын жалғыз* $\mu^*=(\mu_1^*,\mu_2^*)\in R^{2n}$ *параметрі табылсын.*

$ii)$ $P_\upsilon(t^0,\mu_1^*,O_{n\times 1})=0$ *орындалатын жалғыз* $\theta\in(t_1,t_2)$ *нүктесі табылсын.*

Айталық, 2.3.1 – шарт орындалсын және таңдалған υ үшін $Q_\upsilon(\theta)\colon R^{2n}\to R^{2n}$ матрицасы қайтымды болсын.

Төмендегі алгоритм бойынша $\left(\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right),t^{(k)}\right)$ тізбектер жиынтығын тұрғызамыз, мұндағы $\lambda^{(k)}=\left(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)}\right), u^{(k)}[t]=\left(u_1^{(k)}(t),u_2^{(k)}(t)\right)$.

0 - қадам.

(0.1) $\lambda^{(0)}=\left(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)}\right)$ параметрін $Q_\upsilon(\theta)\lambda=F_\upsilon\left(t^{(0)}\right)$ теңдеулер жүйесінен табамыз.

(0.2) $u^{(0)}[t]=\left(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)\left(\lambda_r^{(0)}+u_r\right)+f_r(t),\ \ u_r(t_r)=0,\ r=1{,}2. \tag{2.3.14}$$

Коши есебін шешу арқылы анықтаймыз.

(0.3) $t^{(0)}$ нүктесін $P_v\left(t,\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)=0$ теңдеуінен табамыз.

(0.4)

$$x^{(0)}(t)=\begin{cases}\lambda_1^{(0)}, & t=t_1 \text{ болса},\\ \lambda_1^{(0)}+u_1^{(0)}(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_1^{(0)}}(t), & t=\dot{\Delta}_1^{(0)} \text{ болса},\\ \lambda_2^{(0)}+u_2^{(0)}(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_2^{(0)}}(t), & t=\dot{\Delta}_2^{(0)} \text{ болса},\\ \lambda_2^{(0)}, & t=t_2 \text{ болса}\end{cases} \qquad (2.3.15)$$

функциясын анықтаймыз.

1 – қадам .

(1.1) $\lambda^{(1)}=\left(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)}\right)$ параметрін $Q_v(\theta)\lambda=F_v(\theta)+G_v\left(u^{(0)},\theta\right)$ теңдеулер жүйесінен табамыз.

(1.2) $u^{(1)}[t]=\left(u_1^{(1)}(t),u_2^{(1)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)\left(\lambda_r^{(1)}+u_r\right)+f_r(t),\;\; u_r(t_r)=0, t\in[t_1,t_2], r=1,2. \quad (2.3.16)$$

Коши есебін шешу арқылы анықтаймыз.

(1.3) $t^{(1)}$ нүктесін $P_v\left(t,\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)=0$ теңдеуінен табамыз.

(1.4)

$$x^{(1)}(t)=\begin{cases}\lambda_1^{(1)}, & t=t_1 \text{ болса},\\ \lambda_1^{(1)}+u_1^{(1)}(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_1^{(1)}}(t), & t=\dot{\Delta}_1^{(1)} \text{ болса},\\ \lambda_2^{(1)}+u_2^{(1)}(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_2^{(1)}}(t), & t=\dot{\Delta}_2^{(1)} \text{ болса},\\ \lambda_2^{(1)}, & t=t_2 \text{ болса}\end{cases} \qquad (2.3.17)$$

функциясын анықтаймыз.

k - қадам.

(k.1) $\lambda^{(k)}=\left(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)}\right)\in R^{2n}$ параметрін $Q_v(\theta)\lambda=F_v(\theta)+G_v\left(u^{(k-1)},\theta\right)$ теңдеулер жүйесінен табамыз.

(k.2) $u^{(k)}[t]=\left(u_1^{(k)}(t),u_2^{(k)}(t)\right)$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)\left(\lambda_r^{(k)}+u_r\right)+f_r(t),\;\; u_r(t_r)=0, t\in[t_1,t_2], r=1,2. \quad (2.3.18)$$

Коши есебін шешу арқылы анықтаймыз.

(k.3) $t^{(k)}$ нүктесін $P_v\left(t,\lambda_1^{(k-1)},u_1^{(k-1)}\right)=0$ теңдеуінен табамыз.

(k.4)

$$x^{(k)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(k)}, & t = t_1 \text{ болса}, \\ \lambda_1^{(k)} + u_1^{(k)}(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_2^{(k)}}(t), & t = \dot{\Delta}_1^{(0)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(k)} + u_2^{(k)}(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_2^{(k)}}(t), & t = \dot{\Delta}_2^{(0)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(k)}, & t = t_2 \text{ болса} \end{cases} \qquad (2.3.19)$$

функциясын табамыз.

Осылайша $\left\{\left(t^{(k)}, \left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ тізбектер жиынтығы және сонымен қатар $\left\{x^{(k)}(t)\right\}_{k=0}^{\infty}$ функциялар тізбегін аламыз.

2.3.2 – шарт. *Барлық (t, λ_1, u_1) үшін келесі шарттар орындалады:*

(1) $P_v'(t, \lambda_1, u_1)$ туындысы $S(\theta^*, \rho_*) = \{t \in (t_1, t_2): |t - \theta^*| < \rho_*\}$ шарында бірқалыпты үзіліссіз;

(2) кез-келген $t \in S(\theta^*, \rho_*)$ үшін $\left(P_v'(t, \lambda_1, u_1)\right)^{-1}$ табылсын және $\left\|\left(P_v'(t, \lambda_1, u_1)\right)^{-1}\right\| \le \chi, \chi - const;$

(3) $\chi \cdot |P_v(\theta^*, \lambda_1, u_1)| \le \rho_*$.

Ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының, сонымен қатар (2.3.5) – (2.3.9) есебінің жалғыз шешімінің бар болуының да жеткілікті шарттарын тұжырымдаймыз.

2.3.1 – теорема. *Айталық, қайсыбір v (v – натурал сан) үшін 2.3.1-ші және 2.3.2-ші шарттар орындалсын, $Q_v(\theta): R^{2n} \to R^{2n}$ матрицасы қайтымды болсын және*

(a) $\left\|\left(Q_v(\theta)\right)^{-1}\right\| \le \gamma_v\left(t^{(0)}\right)$, (2.3.20)

(b) $q_v(\theta) < 1$, (2.3.21)

(c)

$$2 \cdot \chi \cdot \left\|P_v\left(\theta, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right)\right\| + \frac{2\gamma_v(\theta) \cdot \chi \cdot \|\beta\|}{1 - q_v(\theta)} \sup_{t \in (t_1, t_2)} e^{\alpha \cdot |t - t_r|} \cdot$$

$$\cdot \max\left\{\frac{\left(\alpha(\theta - t_1)\right)^v}{v!}, \frac{\left(\alpha(t_2 - \theta)\right)^v}{v!}\right\} \cdot \max_{r=1,2}\left\{\sup_{t \in [t_r, \theta)}\left(\left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1\right) \cdot \gamma_v(\theta) \cdot M \cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\, max\left\{1, 1 + \sum_{j=0}^{v-1} \frac{\left(\alpha \cdot \left(t^{(0)} - t_1\right)\right)^{j+1}}{j!} + \sum_{j=0}^{v-1} \frac{\left(\alpha \cdot \left(t_2 - t^{(0)}\right)\right)^{j+1}}{j!}\right\}\right)\right\} +$$

$$+|t_r-\theta|\cdot\sup_{t\in[t_r,\theta)}\|f_r(t)\|<\rho,$$

теңсіздіктері орындалсын, мұндағы

$$\gamma_v(\theta)-const,\quad q_v(\theta)=2\cdot\gamma_v(\theta)\cdot\max_{r=1,2}\left(e^{\alpha|\theta-t_r|}-\sum_{j=0}^{v}\frac{(\alpha|\theta-t_r|)^j}{j!}\right).$$

Онда ұсынылған алгоритм жинақталады, яғни $\left\{\left(t^{(k)},\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ *тізбегі* $k\to\infty$ *болғанда* $(2.3.5)-(2.3.9)$ *есебінің* $\left(t^{(*)},\left(\lambda^{(*)},u^{(*)}[t]\right)\right)$ *жалғыз шешіміне жинақталады және*

$$\left\|\lambda^{*}-\lambda^{(k)}\right\|\le\frac{q_v^k(\theta)}{1-q_v(\theta)}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|,k\ge1\qquad(2.3.22)$$

$$\left\|u_r^{*}(t)-u_r^{(k)}(t)\right\|\le\left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|}-1\right)\cdot\left\|\lambda_r^{*}-\lambda_r^{(k)}\right\|,k\ge1,$$

$$t\in[t_1,t_2,],r=1,2\ (2.3.23)$$

$$\left\|t^{*}-t^{(k)}\right\|\le\chi\cdot\|\beta\|\sup_{t\in(t_1,t_2)}e^{\alpha\cdot|t-t_1|}\cdot\left\|\lambda_r^{*}-\lambda_r^{(k)}\right\|,k\ge1\quad(2.3.24)$$

бағалаулары орынды.

Дәлелдеуі. Айталық, теореманың шарттары орындалсын. Алдымен $\left\{\left(t^{(k)},\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ тізбегі жинақты болатынын көрсету қажет. $Q_v\left(t^{(0)}\right)$ матрицасы қайтымды, сондықтан $Q_v(\theta)\cdot\lambda^{(0)}=F_v(\theta)$ теңдеуін қанағаттандыратын жалғыз $\lambda^{(0)}$ параметрі табылады.

$\left\|\lambda^{(0)}\right\|$ бағалаймыз:

$$\left\|\lambda^{(0)}\right\|=\ max\left\{\left\|\lambda_1^{(0)}\right\|,\left\|\lambda_2^{(0)}\right\|\right\}=\|Q_v^{-1}(\theta)\cdot F_v(\theta)\|\le\gamma_v(\theta)\cdot\|F_v(\theta)\|=$$

$$=\gamma_v(\theta)\cdot max\left\{\|d\|,\|p\|+\sup_{t\in[t_1,\theta)}\|f_1(t)\|\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\left(\alpha\cdot(\theta-t_1)\right)^{j+1}}{j!}\right.$$

$$\left.+\sup_{t\in(\theta,t_2]}\|f_2(t)\|\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\left(\alpha\cdot(t_2-\theta)\right)^{j+1}}{j!}\right\}\le$$

$$\leq \gamma_v(\theta) \cdot max\left\{\|d\|, \|p\|, \sup_{t\in[t_1,\theta)} \|f_1(t)\|, \sup_{t\in(\theta,t_2]} \|f_2(t)\|\right\} \cdot$$

$$\cdot\, max\left\{1, 1 + \sum_{j=0}^{v-1} \frac{\big(\alpha \cdot (\theta - t_1)\big)^{j+1}}{j!} + \sum_{j=0}^{v-1} \frac{\big(\alpha \cdot (t_2 - \theta)\big)^{j+1}}{j!}\right\}.$$

Осыдан $\text{M} = \ max\left\{\|d\|, \|p\|, \sup_{t\in[t_1,\theta)} \|f_1(t)\|, \sup_{t\in(\theta,t_2]} \|f_2(t)\|\right\}$ белгілеуі арқылы

$$\left\|\lambda^{(0)}\right\| \leq \ \gamma_v(\theta) \cdot \text{M} \cdot$$

$$\cdot\, max\left\{1, 1 + \sum_{j=0}^{v-1} \frac{\big(\alpha \cdot (\theta - t_1)\big)^{j+1}}{j!} + \sum_{j=0}^{v-1} \frac{\big(\alpha \cdot (t_2 - \theta)\big)^{j+1}}{j!}\right\} \qquad (2.3.25)$$

бағалауын аламыз.

$u^{(0)}(t)$ функциялар жиыны элементтерін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\left(\lambda_r^{(0)} + u_r\right) + f_r(t), \;\; u_r(t_r) = 0, r = 1{,}2, t \in [t_1, t_2]$$

Коши есебінен табамыз.

$\left\|u_r^{(0)}(t)\right\|$ бағалау үшін алдымен $\left(\left\|u_r^{(0)}(t)\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}\right\|\right)$ бағалаймыз:

$$\left\|u_r^{(0)}(t)\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}\right\| =$$

$$= \left\|\int_{t_r}^{t} A(\tau)d\tau \cdot \lambda_r^{(0)} + \int_{t_r}^{t} A(\tau)u_r^{(0)}(\tau)d\tau_1 + \int_{t_r}^{t} f_r(\tau)d\tau\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}\right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_r}^{t} \alpha\left(\left\|u_r^{(0)}(\tau)\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}\right\|\right)d\tau + |t_r - \theta| \sup_{t\in[t_r,\theta)} \|f_r(t)\| + \left\|\lambda_r^{(0)}\right\|, r = 1{,}2.$$

Енді Гронуолл-Беллман леммасын пайдаланып

$$\left\|u_r^{(0)}(t)\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}\right\| \leq$$

$$\leq \left(|t_r - \theta| \sup_{t\in[t_r,\theta)} \|f_r(t)\| + \left\|\lambda_r^{(0)}\right\|\right) \cdot e^{\alpha\cdot|t-t_r|}, t \in [t_1, t_2], r = 1{,}2.$$

Осыдан

$$\left\|u_r^{(0)}(t)\right\| \leq \left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|}-1\right)\left\|\lambda_r^{(0)}\right\| + |t_r-\theta| \sup_{t\in[t_r,\theta)}\|f_r(t)\|\,, t\in[t_1,t_2], r=1,2$$

бағалауы шығады.
Демек, осылайша

$$\left\|u^{(0)}[\cdot]\right\|_2 = \max_{r=1,2}\left\{\sup_{t\in[t_r,\theta)}\left(\left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|}-1\right)\left\|\lambda_r^{(0)}\right\| + |t_r-\theta|\cdot \sup_{t\in[t_r,\theta)}\|f_r(t)\|\right)\right\} \tag{2.3.26}$$

аламыз.
Алгоритм бойынша

$$P_v\left(t,\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right) \equiv t+\beta\cdot\left(\left(I+D_{v,1}(t)\right)\cdot\lambda_1^{(0)} + F_{v,1}(t) + G_{v,1}\left(u_1^{(0)},t\right)\right)=0$$

теңдеуінің шешімін табамыз.
2.3.2-шартқа сәйкес $P_v\left(t,\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)$ операторы [89, 41 б] жұмыстағы 1-теореманың барлық ұйғарымдарын қанағаттандырады.

$$\varepsilon_0\delta \leq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\chi}{1-\varepsilon_0\chi}\left\|P_v\left(\theta,\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)\right\| < \rho$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын $\varepsilon_0>0$ санын алып және $S(\theta,\rho)$ шарында $P_v'\left(t,\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)$ туындысы бірқалыпты үзіліссіз болғандықтан $|t-\tilde{t}|<\delta_0$ болғанда кез-келген $t,\tilde{t}\in S\left(t^{(0)},\rho\right)$ үшін

$$\left\|P_v'\left(t,\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right) - P_v'\left(\tilde{t},\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)\right\| < \varepsilon_0$$

теңсіздігі орындалатын $\delta_0\in(0,0.5p]$ санын табамыз.
$\eta\geq\eta_0=\max\left\{1,\frac{\chi}{\delta_0}P_v\left(\theta,\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)\right\}$ санын таңдап алып,

$$t^{(0,0)}=\theta,$$

$$t^{(0,m+1)} = t^{(0,m)} - \frac{1}{\eta}\cdot\frac{P_v\left(t^{(0,m)},\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)}{P_v'\left(t^{(0,m)},\lambda_1^{(0)},u_1^{(0)}\right)}, m=1,2,\ldots, \tag{2.3.27}$$

итерациялық процесін құрамыз.

$[85, 41 - \text{бет}]$ жұмыстағы 1-теорема бойынша $(2.3.27)$ итерациялық процесі $P_v\left(t, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right) = 0$ теңдеуінің оқшауланған $t^{(0)} \in S(\theta, \rho)$ шешіміне жинақталады және

$$\left|t^{(0)} - \theta\right| \leq \chi \cdot \left\|P_v\left(\theta, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right)\right\|. \qquad (2.3.28)$$

$\rho_0 = \chi \cdot \left\|P_v\left(\theta, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right)\right\|$ аламыз. Егер $t \in S\left(t^{(0)}, \rho_0\right)$ болса, онда (c) теңсіздігі және $(2.3.28)$ бойынша

$$|t - \theta| \leq \left|t - t^{(0)}\right| + \left|t^{(0)} - \theta\right| \leq 2\chi \cdot \left\|P_v\left(\theta, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right)\right\| < \rho,$$

бағалауы орынды, яғни $S\left(t^{(0)}, \rho_0\right) \subset S(\theta, \rho)$.

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(0)}, & t = t_1 \text{ болса}, \\ \lambda_1^{(0)} + u_1^{(0)}(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_1^{(0)}}(t), t = \dot{\Delta}_1^{(0)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(0)} + u_2^{(0)}(t) \cdot I_{\dot{\Delta}_2^{(0)}}(t), t = \dot{\Delta}_2^{(0)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(0)}, & t = t_2 \text{ болса} \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

$Q_v(\theta)\lambda = F_v(\theta) + G_v\left(u^{(0)}, \theta\right)$ теңдеуін шешіп $\lambda^{(1)}$ параметрін табамыз және $\left(\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right)$ бағалаймыз:

$$\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| = \left\|Q_v^{-1}(\theta) \cdot \left(F_v(\theta) + G_v\left(u^{(0)}, \theta\right)\right) - Q_v^{-1}(\theta) \cdot F_v(\theta)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|Q_v^{-1}(\theta) \cdot G_v\left(u^{(0)}, \theta\right)\right\| \leq \gamma_v(\theta) \cdot \left\|u^{(0)}[.]\right\|_2 \cdot \left(\frac{\left(\alpha(\theta - t_1)\right)^v}{v!} + \frac{\left(\alpha(t_2 - \theta)\right)^v}{v!}\right) \leq$$

$$\leq \gamma_v(\theta) \cdot \max\left\{\frac{\left(\alpha(\theta - t_1)\right)^v}{v!}, \frac{\left(\alpha(t_2 - \theta)\right)^v}{v!}\right\} \cdot \left\|u^{(0)}[.]\right\|_2. \qquad (2.3.29)$$

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\left(\lambda_r^{(1)} + u_r\right) + f_r(t), \ \ u_r(t_r) = 0, r = 1,2, t \in [t_1, t_2],$$

Коши есебінен $u^{(1)}(t) = \left(u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t)\right)$ функциялар жиыны элементтерін анықтаймыз. $u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t)$ функциялары барлық $[t_1, t_2]$ кесіндісінде анықталғанын байқаймыз. $\left\| u_r^{(1)}(t) - \ u_r^{(0)}(t)\right\|$ бағалаймыз:

$$\left\| u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t) \right\| = \left\| \int_{t_r}^{t} A(\tau) \left(\lambda_r^{(1)} + u_r^{(1)}(\tau) \right) d\tau + \int_{t_r}^{t} f_r(\tau) d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{t_r}^{t} A(\tau) \left(\lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(\tau) \right) d\tau - \int_{t_r}^{t} f_r(\tau) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_r}^{t} \alpha \left(\left\| \lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)} \right\| + \left\| u_r^{(1)}(\tau) - u_r^{(0)}(\tau) \right\| \right) d\tau \,, t \in [t_1, t_2], r = 1{,}2.$$

Гронуолл-Беллман леммасы бойынша

$$\left\| u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t) \right\| \leq \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1 \right) \left\| \lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)} \right\| , t \in [t_1, t_2], r = 1{,}2. \quad (2.3.30)$$

$P_\nu(t, \lambda_1, u_1)$ операторының құрылымынан және $P_\nu\left(t, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right) = 0$ теңдеуінен

$$\left\| P_\nu\left(t^{(0)}, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right) - P_\nu\left(t^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right) \right\| =$$

$$= \left\| t^{(0)} + \beta \cdot \left(\left(I + D_{\nu,1}\left(t^{(0)}\right) \right) \cdot \lambda_1^{(1)} + F_{\nu,1}\left(t^{(0)}\right) + G_{\nu,1}\left(u_1^{(1)}, t^{(0)}\right) \right) - \right.$$

$$\left. - t^{(0)} - \beta \cdot \left(\left(I + D_{\nu,1}\left(t^{(0)}\right) \right) \cdot \lambda_1^{(0)} + F_{\nu,1}\left(t^{(0)}\right) + G_{\nu,1}\left(u_1^{(0)}, t^{(0)}\right) \right) \right\| \leq$$

$$\leq \|\beta\| \cdot \left\| \left(I + D_{\nu,1}\left(t^{(0)}\right) \right) \cdot \left(\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(0)} \right) + G_{\nu,1}\left(u_1^{(1)}, t^{(0)}\right) - G_{\nu,1}\left(u_1^{(0)}, t^{(0)}\right) \right\| \leq$$

$$\leq \|\beta\| \cdot \left(1 + \int_{t_1}^{t^{(0)}} \alpha d\tau_1 + \int_{t_1}^{t^{(0)}} \alpha \int_{t_1}^{\tau_1} \alpha d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t^{(0)}} \alpha \int_{t_1}^{\tau_1} \alpha \ldots \int_{t_1}^{\tau_{\nu-1}} \alpha d\tau_\nu \ldots d\tau_2 d\tau_1 \right) \left\| \lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(0)} \right\| +$$

$$+ \|\beta\| \cdot \int_{t_1}^{t^{(0)}} \alpha \int_{t_1}^{\tau_1} \alpha \ldots \int_{t_1}^{\tau_{\nu-1}} \alpha \left\| u_1^{(1)}(\tau_\nu) - u_1^{(0)}(\tau_\nu) \right\| d\tau_\nu \ldots d\tau_2 d\tau_1.$$

$\left\| u_1^{(1)}(\tau_\nu) - u_1^{(0)}(\tau_\nu) \right\|$ орнына $r = 1$ үшін (2.3.30) оң жағын қойып, қайталанбалы интегралдарды есептеп,

$$\left\| P_v\left(t^{(0)}, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right) - P_v\left(t^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right)\right\| \le$$

$$\le \|\beta\| \cdot \sum_{j=0}^{v} \frac{\left(\alpha \cdot \left(t^{(0)} - t_1\right)\right)^j}{j!} \left\|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(0)}\right\| +$$

$$+\|\beta\| \left(e^{\alpha \cdot \left(t^{(0)} - t_1\right)} + \sum_{j=0}^{v} \frac{\left(\alpha \cdot \left(t^{(0)} - t_1\right)\right)^j}{j!} \right) \left\|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(0)}\right\| =$$

$$= \|\beta\| e^{\alpha \cdot \left(t^{(0)} - t_1\right)} \left\|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(0)}\right\| \le \|\beta\| \sup_{t \in (t_1, t_2)} e^{\alpha \cdot (t - t_1)} \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| \quad (2.3.31)$$

бағалауларын аламыз.
Осыдан

$$\chi \cdot \left\| P_v\left(t^{(0)}, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right)\right\| \le \chi \|\beta\| \sup_{t \in (t_1, t_2)} e^{\alpha \cdot (t - t_1)} \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|. \quad (2.3.32)$$

$P_v\left(t, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right)$ операторы $S\left(t^{(0)}, \rho_0\right)$ шарында 2.3.2-шартты қанағаттандырады. Сондықтан

$$t^{(1,0)} = \theta,$$

$$t^{(1,m+1)} = t^{(1,m)} - \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P_v\left(t^{(1,m)}, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right)}{P_v'\left(t^{(1,m)}, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right)}, m = 1,2, \dots,$$

итерациялық процесі $S\left(t^{(0)}, \rho_0\right)$ шарында $P_v\left(t, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right) = 0$ теңдеуінің оқшауланған $t^{(1)}$ шешіміне жинақталады және

$$\left|t^{(1)} - t^{(0)}\right| \le \chi \cdot \left\| P_v\left(t^{(0)}, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right)\right\|.$$

Осыдан

$$\left|t^{(1)} - t^{(0)}\right| \le \chi \|\beta\| \sup_{t \in (t_1, t_2)} \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1\right) \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|.$$

$\rho_1 = \chi \cdot \left\| P_v\left(t^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}\right)\right\|$ аламыз. Егер $t \in S\left(t^{(1)}, \rho_1\right)$ болса, онда *(b), (c)* (яғни (2.3.25), (2.3.26), (2.3.29)) теңсіздіктері және (2.3.31), (2.3.32) бойынша

$$\left|t-t^{(0)}\right| \le \left|t-t^{(1)}\right| + \left|t^{(1)}-t^{(0)}\right| \le$$

$$\le (q_\nu(\theta)+1)\chi\|\beta\| \sup_{t\in(t_1,t_2)} e^{\alpha\cdot|t-t_r|}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\| <$$

$$< \frac{\chi\|\beta\|}{1-q_\nu(\theta)} \sup_{t\in(t_1,t_2)} e^{\alpha\cdot|t-t_r|}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\| < \rho,$$

яғни $S\left(t^{(1)},\rho_1\right) \subset S\left(t^{(0)},\rho_0\right)$.

$$x^{(1)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(1)}, & t=t_1 \text{ болса}, \\ \lambda_1^{(1)} + u_1^{(1)}(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_1^{(1)}}(t), & t=\dot{\Delta}_1^{(1)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(1)} + u_2^{(1)}(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_2^{(1)}}(t), & t=\dot{\Delta}_2^{(1)} \text{ болса}, \\ \lambda_2^{(1)}, & t=t_2 \text{ болса} \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

$Q_v(\theta)\lambda = F_v(\theta) + G_v\left(u^{(1)},\theta\right)$ теңдеуін шешіп $\lambda^{(2)}$ параметрін табамыз және $\left(\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right)$ бағалаймыз:

$$\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\| = \left\|Q_v^{-1}(\theta)\cdot\left(F_v(\theta)+G_v\left(u^{(1)},\theta\right)\right) -\right.$$

$$\left. -Q_v^{-1}(\theta)\cdot\left(F_v(\theta)+G_v\left(u^{(0)},\theta\right)\right)\right\| \le$$

$$\le \left\|Q_v^{-1}(\theta)\cdot\left(G_v\left(u^{(1)},\theta\right)-G_v\left(u^{(0)},\theta\right)\right)\right\| \le$$

$$\le \gamma_v(\theta)\cdot\left(\left\|G_{v,1}\left(u_1^{(1)},\theta\right)-G_{v,1}\left(u_1^{(0)},\theta\right)\right\| + \left\|G_{v,2}\left(u_1^{(1)},\theta\right)-G_{v,1}\left(u_2^{(0)},\theta\right)\right\|\right).$$

$\left\|G_{v,r}\left(u_r^{(1)},\theta\right)-G_{v,r}\left(u_r^{(0)},\theta\right)\right\|$ бағалаймыз:

$$\left\|G_{v,r}\left(u_r^{(1)},\theta\right)-G_{v,r}\left(u_r^{(0)},\theta\right)\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_{t_r}^{\theta} A(\tau_1)\ldots\int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A_r(\tau_{v-1})\int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A(\tau_2)\left(u_r^{(1)}(\tau_v)-u_r^{(0)}(\tau_v)\right)d\tau_{v-1}\ldots d\tau_1\right\| \le$$

$$\le \int_{t_r}^{\theta}\alpha\int_{t_r}^{\tau_1}\alpha\ldots\int_{t_r}^{\tau_{v-1}}\alpha\left\|u_r^{(1)}(\tau_v)-u_r^{(0)}(\tau_v)\right\|d\tau_v\ldots d\tau_{v_1} \le$$

$$\leq \int_{t_r}^{t^{(0)}} \alpha \int_{t_r}^{\tau_1} \alpha \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} \alpha \left(e^{\alpha \cdot |\tau_v - t_r|} - 1\right) d\tau_v \dots d\tau_{v_2} d\tau_{v_1} \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| \leq$$

$$\leq \left(e^{\alpha \cdot |\theta - t_r|} - \sum_{j=0}^{v} \frac{(\alpha|\theta - t_r|)^j}{j!}\right) \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|.$$

Осыдан

$$\left\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\right\| \leq q_v(\theta) \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|$$

шығады.

Коши есебінен $u^{(2)}(t) = \left(u_1^{(2)}(t), u_2^{(2)}(t)\right)$ функциялар жиыны элементтерін анықтаймыз. $u_1^{(2)}(t), u_2^{(2)}(t)$ функциялары барлық $[t_1, t_2]$ кесіндісінде анықталғанын байқаймыз. $\left\| u_r^{(2)}(t) - u_r^{(1)}(t) \right\|$ бағалаймыз:

$$\left\| u_r^{(2)}(t) - u_r^{(1)}(t) \right\| = \left\| \int_{t_r}^{t} A(\tau) \left(\lambda_r^{(2)} + u_r^{(2)}(\tau)\right) d\tau + \int_{t_r}^{t} f_r(\tau) d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{t_r}^{t} A(\tau) \left(\lambda_r^{(1)} + u_r^{(1)}(\tau)\right) d\tau - \int_{t_r}^{t} f_r(\tau) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_r}^{t} \alpha \left(\left\|\lambda_r^{(2)} - \lambda_r^{(1)}\right\| + \left\| u_r^{(2)}(\tau) - u_r^{(1)}(\tau) \right\| \right) d\tau, t \in [t_1, t_2], r = 1,2.$$

Гронуолл-Беллман леммасы бойынша

$$\left\| u_r^{(2)}(t) - u_r^{(1)}(t) \right\| \leq \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1\right) \left\|\lambda_r^{(2)} - \lambda_r^{(1)}\right\|, t \in [t_1, t_2], r = 1,2.$$

$P_v\left(t^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right) = 0$ теңдігі $P_v\left(t^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right)$ бағалауға мүмкіндік береді:

$$\left\|P_v\left(t^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right)\right\| = \left\|P_v\left(t^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right) - P_v\left(t^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}\right)\right\| \leq$$

$$\leq \|\beta\| \cdot \left\| \left(I + D_{v,1}(t^{(0)})\right) \cdot \left(\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}\right) + G_{v,1}\left(u_1^{(2)}, t^{(1)}\right) - G_{v,1}\left(u_1^{(1)}, t^{(1)}\right) \right\| \leq$$

$$\leq \|\beta\| \cdot \left(1 + \int_{t_1}^{t^{(0)}} \alpha d\tau_1 + \int_{t_1}^{t^{(0)}} \alpha \int_{t_1}^{\tau_1} \alpha d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \right.$$

$$+\int_{t_1}^{t^{(1)}} \alpha \int_{t_1}^{\tau_1} \alpha \dots \int_{t_1}^{\tau_{\nu-1}} \alpha d\tau_\nu \dots d\tau_2 d\tau_1 \Bigg) \left\| \lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)} \right\| +$$

$$+\|\beta\| \cdot \int_{t_1}^{t^{(1)}} \alpha \int_{t_1}^{\tau_1} \alpha \dots \int_{t_1}^{\tau_{\nu-1}} \alpha \left\| u_1^{(2)}(\tau_\nu) - u_1^{(1)}(\tau_\nu) \right\| d\tau_\nu \dots d\tau_2 d\tau_1 \le$$

$$\le \|\beta\| \cdot e^{\alpha \cdot |t-t_1|} \cdot \left\| \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} \right\| \le \|\beta\| \cdot e^{\alpha \cdot |t-t_1|} \cdot q_\nu(\theta) \cdot \left\| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right\|,$$

Осыдан

$$\chi \cdot \left\| P_v\left(t^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right) \right\| \le \chi \cdot \|\beta\| \sup_{t \in (t_1, t_2)} \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1 \right) \left\| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right\|. \quad (2.3.33)$$

$P_v\left(t, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right)$ операторы $S\left(t^{(0)}, \rho_0\right)$ шарында 2.3.2-шартты, яғни Адамар теоремасының күшейтілген локальді нұсқасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Сәйкесінше

$$t^{(2,0)} = \theta,$$

$$t^{(2,m+1)} = t^{(2,m)} - \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P_v\left(t^{(2,m)}, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right)}{P_v'\left(t^{(2,m)}, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right)}, m = 1,2, \dots,$$

итерациялық процесі $S\left(t^{(1)}, \rho_1\right)$ шарында $P_v\left(t, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right) = 0$ теңдеуінің оқшауланған $t^{(2)}$ шешіміне жинақталады және

$$\left| t^{(2)} - t^{(1)} \right| \le \chi \cdot \left\| P_v\left(t^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right) \right\|.$$

Осыдан (2.3.33) теңсіздік бойынша

$$\left| t^{(2)} - t^{(1)} \right| \le \chi \cdot \|\beta\| \sup_{t \in (t_1, t_2)} \left(e^{\alpha \cdot |t - t_r|} - 1 \right) \left\| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right\|$$

шығады.
Енді $\rho_2 = \chi \cdot \left\| P_v\left(t^{(2)}, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}\right) \right\|$ аламыз. $S\left(t^{(2)}, \rho_2\right) \subset S\left(t^{(1)}, \rho_1\right)$ болатынын көрсету қиын емес.
Осыдан

$$x^{(2)}(t)=\begin{cases}\lambda_1^{(2)}, & t=t_1 \text{ болса,}\\ \lambda_1^{(2)}+u_1^{(2)}(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_1^{(2)}}(t), & t=\dot{\Delta}_1^{(2)} \text{ болса,}\\ \lambda_2^{(2)}+u_2^{(2)}(t)\cdot I_{\dot{\Delta}_2^{(2)}}(t), & t=\dot{\Delta}_2^{(2)} \text{ болса,}\\ \lambda_2^{(2)}, & t=t_2 \text{ болса}\end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

$\left(t^{(k-1)},\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}[t]\right)\right)$ жиынтығы анықталған және

$$\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|\le q_v(\theta)\left\|\lambda^{(k-2)}-\lambda^{(k-3)}\right\|, k\ge 3 \qquad (2.3.34)$$

$$\left\|u_r^{(k-1)}(t)-u_r^{(k-2)}(t)\right\|\le\left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|}-1\right)\cdot\left\|\lambda_r^{(k-1)}-\lambda_r^{(k-2)}\right\|,$$

$$k\ge 3, t\in\Delta_r^{(0)}, r=1,2 \ (2.3.35)$$

$$\left\|t^{(k-1)}-t^{(k-2)}\right\|\le\chi\cdot\|\beta\|\sup_{t\in(t_1,t_2)}e^{\alpha\cdot|t-t_1|}\,q_v^{(k-2)}(\theta)\left\|\lambda_r^{*}-\lambda_r^{(k)}\right\|, k\ge 2 \ (2.3.36)$$

бағалаулары орнатылған деп ұйғарамыз.

$t^0=\theta$ және $u=u^{(k-1)}$ болғанда (2.3.12) теңдеуін шешіп, $\lambda^{(k)}$ параметрін табамыз. (2.3.34) ұқсас түрде

$$\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|\le q_v(\theta)\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\| \qquad (2.3.37)$$

бағалауын орнатамыз.

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)\left(\lambda_r^{(k)}+u_r\right)+f_r(t),\ \ u_r(t_r)=0, r=1,2, t\in[t_1,t_2], \ (2.3.38)$$

Коши есебінен $u_1^{(k)}(t)$, $u_2^{(k)}(t)$ функцияларын $[t_1,t_2]$ кесіндісінде анықтаймыз және

$$\left\|u_r^{(k)}(t)-u_r^{(k-1)}(t)\right\|\le\left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|}-1\right)\left\|\lambda_r^{(k)}-\lambda_r^{(k-1)}\right\|, t\in[t_1,t_2], r=1,2. \qquad (2.3.39)$$

бағалаулар орынды.

$t^{(k)}$ нүктесін

$$P_v\left(t,\lambda_1^{(k)},u_1^{(k)}\right)\equiv t+\beta\cdot\left(\left(I+D_{v,1}(t)\right)\cdot\lambda_1^{(k)}+F_{v,1}(t)+G_{v,1}\left(u_1^{(k)},t\right)\right)=0 \qquad (2.3.40)$$

теңдеуінен табамыз. $(2.3.40)$ теңдеуінің шешімін табу үшін

$$t^{(k,0)}=t^{(k-1)},t^{(k,m+1)}=t^{(k,m)}-\frac{1}{\eta}\cdot\frac{P_v\left(t^{(k,m)},\lambda_1^{(k)},u_1^{(k)}\right)}{P_v'\left(t^{(k,m)},\lambda_1^{(k)},u_1^{(k)}\right)},m=1,2,\ldots,\quad(2.3.41)$$

итерациялық процесін құрамыз.
$(2.3.41)$ итерациялық процесі $t^{(k)}\in S\left(t^{(k-1)},\rho_{k-1}\right)$ нүктесіне жинақталады. $(2.3.36)$ ұқсас түрде

$$\left|t^{(k)}-t^{(k-1)}\right|\leq\chi\cdot\|\beta\|\sup_{t\in(t_1,t_2)}e^{\alpha\cdot(t-t_1)}\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|\quad(2.3.42)$$

бағалауын аламыз.
$(2.3.41)$ теңсіздікті ескеріп

$$\left|t^{(k)}-t^{(k-1)}\right|\leq\chi\cdot\|\beta\|\sup_{t\in(t_1,t_2)}\left(e^{\alpha\cdot(t-t_1)}-1\right)q_v^{(k-1)}(\theta)\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|\quad(2.3.43)$$

бағалауын аламыз.
Сонда

$$\left|t^{(k)}-\theta\right|\leq\frac{\chi\cdot\|\beta\|}{1-q_v(\theta)}\sup_{t\in(t_1,t_2)}\left(e^{\alpha\cdot(t-t_1)}-1\right)\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|+\left|t^{(k)}-\theta\right|<\rho.$$

Егер $\rho_k=\chi\cdot\left\|P_v\left(t^{(k)},\lambda_1^{(k)},u_1^{(k)}\right)\right\|=0$ болса, онда $P_v\left(t^{(k)},\lambda_1^{(k)},u_1^{(k)}\right)=0$. Осыдан, $\lambda^{(k)}$ параметрі $Q_v(\theta)\lambda=F_v(\theta)+G_v(u,\theta)$ теңдеуінің шешімі және $u_r^{(k)}$ функциялары $(2.3.38)$ Коши есебінің шешімі екенін ескеріп,

$$t^{(k)}+\beta\cdot\left(\lambda_1^{(k)}+\lim_{t\to t^{(k)}-0}u_1^{(k)}(t)\right)=0,$$

$$B\lambda_1^{(k)}+C\lambda_2^{(k)}-d=0,$$

$$\lambda_1^{(k)}+\lim_{t\to t^{(k)}-0}u_1^{(k)}(t)-\lambda_2^{(k)}-\lim_{t\to t^{(k)}+0}u_2^{(k)}(t)-p=0,$$

теңдіктерін аламыз, яғни $\left(\left(\begin{pmatrix}\lambda_1^{(k)}\\ \lambda_2^{(k)}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1^{(k)}(t)\cdot I_{\Delta_1^{(k)}}(t)\\ u_2^{(k)}(t)\cdot I_{\Delta_2^{(k)}}(t)\end{pmatrix}\right),t^{(k)}\right)$ жиынтығы $(2.3.5)-(2.3.9)$ есебінің шешімі болады.

$(2.3.37), (2.3.39), (2.3.42)$ және (b) теңсіздіктерінен

$$\left(\left(\begin{pmatrix}\lambda_1^{(k)}\\ \lambda_2^{(k)}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u_1^{(k)}(t)\cdot I_{\Delta_1^{(k)}}(t)\\ u_2^{(k)}(t)\cdot I_{\Delta_2^{(k)}}(t)\end{pmatrix}\right), t^{(k)}\right)$$

тізбегі $k \to \infty$ болғанда $\left(\left(\begin{pmatrix}\lambda_1^*\\ \lambda_2^*\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u_1^*(t)\cdot I_{[t_1,t^*)}(t)\\ u_2^*(t)\cdot I_{(t^*,t_2]}(t)\end{pmatrix}\right), t^*\right)$ жиынтығы $(2.3.5) -$ $(2.3.9)$ есебінің шешіміне жинақталады.

$$\left\|\lambda^{(k+l)} - \lambda^{(k)}\right\| \le \frac{q_\nu^k(\theta)}{1-q_\nu(\theta)}\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|, k \ge 1,$$

$$\left\|u_r^{(k+l)}(t) - u_r^{(k)}(t)\right\| \le \left(e^{\alpha\cdot|t-t_r|} - 1\right)\cdot\left\|\lambda_r^{(k+l)} - \lambda_r^{(k)}\right\|, k \ge 1,$$
$$t \in [t_1, t_2], r = 1,2,$$

$$\left\|t^{(k+l)} - t^{(k)}\right\| \le \chi\cdot\|\beta\|\sup_{t\in(t_1,t_2)} e^{\alpha\cdot(t-t_1)}\left\|\lambda_r^{(k+l)} - \lambda_r^{(k)}\right\|, k \ge 1$$

теңсіздіктерінен $l \to \infty$ болғанда шекке көшіп $(2.3.14) - (2.3.16)$ бағалауларын аламыз.

$(2.3.5) - (2.3.9)$ параметрлі есебінің шешімінің жалғыздығын көрсетеміз. Айталық, $\left(\tilde{t}, \left(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t]\right)\right)$ жиынытығы $(2.3.5) - (2.3.9)$ параметрлі есебінің басқа шешімі болсын. Мұндағы $\tilde{\lambda} = \left(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\right)$, $\tilde{u}[t] = \left(\tilde{u}_1(t)\cdot I_{[t_1,\tilde{t})}(t), \tilde{u}_2(t)\cdot I_{(\tilde{t},t_2]}(t)\right)$, $\tilde{t} \in S(t^*, \rho^*), \rho^* > 0$.

$P_v(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)$ және $P_v\left(\tilde{t}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1\right) = 0$ болғандықтан

$$t^* = t^* - \frac{P_v(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)}{P_v'(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)}, \qquad \tilde{t} = \tilde{t} - \frac{P_v\left(\tilde{t}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1\right)}{P_v'(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)}$$

теңдіктерінен

$$t^* - \tilde{t} = -\frac{1}{P_v'(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)}\int_0^1 P_v'(\tilde{t} + \xi\cdot(t^* - \tilde{t}), \lambda_1^*, u_1^*) - P_v'(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)d\xi(t^* - \tilde{t}) -$$

$$-\frac{1}{P_v'(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)}\left(P_v(\tilde{t}, \lambda_1^*, u_1^*) - P_v\left(\tilde{t}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1\right)\right)$$

шығады.

Енді $\varepsilon\chi < 1$ орындалатын $\varepsilon > 0$ санын таңдаймыз. $S(t^*, \rho^*)$ шарында $P_v'(t, \lambda_1^*, u_1^*)$ бірқалыпты үзіліссіз болғандықтан, $|t' - t''| < \delta$ болғанда кез-келген $t', t'' \in S(t^*, \rho^*)$ үшін

$$\|P_v'(t', \lambda_1^*, u_1^*) - P_v'(t'', \lambda_1^*, u_1^*)\| < \varepsilon$$

орындалатындай $\delta > 0$ санын табамыз. $|t^* - \tilde{t}|$ бағалаймыз:

$$|t^* - \tilde{t}| \leq$$

$$\leq \left\| -\left(P_v'(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)\right)^{-1} \right\| \int\limits_0^1 \|P_v'(\tilde{t} + \xi \cdot (t^* - \tilde{t}), \lambda_1^*, u_1^*) - P_v'(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)\| d\xi |t^* - \tilde{t}|$$

$$+ \left\| -\left(P_v'(t^*, \lambda_1^*, u_1^*)\right)^{-1} \right\| \cdot \left\| P_v(\tilde{t}, \lambda_1^*, u_1^*) - P_v\left(\tilde{t}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1\right) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon\chi |t^* - \tilde{t}| + \chi \left\| P_v(\tilde{t}, \lambda_1^*, u_1^*) - P_v\left(\tilde{t}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1\right) \right\|,$$

осыдан

$$|t^* - \tilde{t}| \leq \frac{\chi}{1 - \varepsilon\chi} \left\| P_v(\tilde{t}, \lambda_1^*, u_1^*) - P_v\left(\tilde{t}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1\right) \right\|$$

аламыз.

$\left\| P_v(\tilde{t}, \lambda_1^*, u_1^*) - P_v\left(\tilde{t}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1\right) \right\|$ бағалаймыз:

$$\left\| P_v(\tilde{t}, \lambda_1^*, u_1^*) - P_v\left(\tilde{t}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1\right) \right\| \leq$$

$$\leq \|\beta\| \cdot \left\| \left(I + D_{v,1}(\tilde{t})\right) \cdot \left(\lambda_1^* - \tilde{\lambda}_1\right) + G_{v,1}(u^*, \tilde{t}) - G_{v,1}(\tilde{u}, \tilde{t}) \right\| \leq$$

$$\leq \|\beta\| \cdot \left(1 + \int_{t_1}^{\tilde{t}} \alpha d\tau_1 + \int_{t_1}^{\tilde{t}} \alpha \int_{t_1}^{\tau_1} \alpha d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{\tilde{t}} \alpha \int_{t_1}^{\tau_1} \alpha \ldots \int_{t_1}^{\tau_{v-1}} \alpha d\tau_v \ldots d\tau_2 d\tau_1 \right) \left\| \lambda_1^* - \tilde{\lambda}_1 \right\| +$$

$$+ \|\beta\| \cdot \int_{t_1}^{\tilde{t}} \alpha \int_{t_1}^{\tau_1} \alpha \ldots \int_{t_1}^{\tau_{v-1}} \alpha \|u^*(\tau_v) - \tilde{u}(\tau_v)\| d\tau_v \ldots d\tau_2 d\tau_1. \quad (2.3.44)$$

$u_1^*(t)$ функциясы

$$\frac{du_1}{dt} = A(t)(\lambda_1^* + u_1) + f_1(t), \ \ u_1(t_1) = 0, t \in [t_1, t_2]$$

Коши есебінің, ал $\tilde{u}_1(t)$ функциясы

$$\frac{du_1}{dt} = A(t)\left(\tilde{\lambda}_1 + u_1\right) + f_1(t), \ \ u_1(t_1) = 0, t \in [t_1, t_2]$$

Коши есебінің шешімдері екенін ескеріп,

$$\|u_1^*(t) - \tilde{u}_1(t)\| \leq \left(e^{\alpha\cdot(t-t_1)} - 1\right)\left\|\lambda_1^* - \tilde{\lambda}_1\right\|, t \in [t_1, t_2] \quad (2.3.45)$$

бағалауларын орнатамыз.
$(2.3.44)$ пайдаланып $(2.3.45)$ теңсіздігінен

$$\left\|P_v(\tilde{t}, \lambda_1^*, u_1^*\ ) - P_v\left(\tilde{t}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1\ \right)\right\| \leq \|\beta\| \sup_{t\in(t_1,t_2)} e^{\alpha\cdot(t-t_1)} \left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\|$$

бағалауын аламыз.
Осыдан

$$|t^* - \tilde{t}| \leq \frac{\chi\|\beta\|}{1 - \varepsilon\chi} \sup_{t\in(t_1,t_2)} e^{\alpha\cdot(t-t_1)} \left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\| \qquad (2.3.46)$$

шығады.
Сонымен қатар,

$$\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\| = \left\|Q_v^{-1}(\theta) \cdot \left(F_v(\theta) + G_v(u^*, \theta)\right) -\right.$$

$$\left. -Q_v^{-1}(\theta) \cdot \left(F_v(\theta) + G_v(\tilde{u}, \theta)\right)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|Q_v^{-1}(\theta) \cdot \left(G_v(u^*, \theta) - G_v(\tilde{u}, \theta)\right)\right\| \leq$$

$$\leq \gamma_v(\theta) \cdot \left(\left\|G_{v,1}(u_1^*, \theta) - G_{v,1}(\tilde{u}_1, \theta)\right\| + \left\|G_{v,2}(u_2^*, \theta) - G_{v,1}(\tilde{u}_2, \theta)\right\|\right) \leq$$

$$\leq 2\gamma_v(\theta) \left\|\int_{t_r}^{\theta} A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A_r(\tau_{v-1}) \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A(\tau_2)\left(u_r^*(\tau_v) - \tilde{u}_r(\tau_v)\right) d\tau_{v-1} \dots d\tau_1\right\|$$

$$\leq 2\gamma_v(\theta) \int_{t_r}^{\theta} \alpha \int_{t_r}^{\tau_1} \alpha \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} \alpha \|u_r^*(\tau_v) - \tilde{u}_r(\tau_v)\| d\tau_v \dots d\tau_{v_1} \leq$$

$$\leq 2\gamma_v(\theta)\int_{t_r}^{\theta}\alpha\int_{t_r}^{\tau_1}\alpha \ldots \int_{t_r}^{\tau_{v-1}}\alpha\left(e^{\alpha\cdot|\tau_v - t_r|}-1\right)d\tau_v \ldots d\tau_{v_2}d\tau_{v_1}\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\| \leq$$

$$\leq 2\gamma_v(\theta)\left(e^{\alpha\cdot|\theta - t_r|} - \sum_{j=0}^{v}\frac{(\alpha|\theta - t_r|)^j}{j!}\right)\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\|.$$

Осыдан

$$\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\| \leq q_v(\theta)\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\| \qquad (2.3.47)$$

$(2.3.45), (2.3.46), (2.3.47)$ теңсіздіктерінен (b) шарты бойынша $\lambda^* = \tilde{\lambda}$, $u^*[t] = \tilde{u}[t]$, $t^* = \tilde{t}$ шығады. Теорема дәлелденді.

Мысал

$[0,1]$ сегментінде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\ t \in (0,1)\backslash\{t_*\}, x \in R^2$$

$$x(t_* + 0) - x(t_* - 0) = p,$$

$$t_* + \beta x(t_* - 0) = 0,$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d$$

есебін қарастырайық, мұндағы

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t+2} & \frac{1}{2} \\ 0 & t \end{pmatrix}, f(t) = f_1(t)\cdot I_{[t_1,t_*)}(t) + f_2(t)\cdot I_{(t_*,t_2]}(t),$$

$$I_{[t_r,t_*)}(t) = \begin{cases} 1, t \in [t_r, t_*) \text{ болғанда,} \\ 0, t \notin [t_r, t_*) \text{ болғанда ,} \end{cases} r = 1,2.$$

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{t+2}\right)cost + \left(1 - \frac{1}{5(t+2)}\right)sint + \frac{t^3}{4} + \frac{3}{2} \\ \frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2} + 3t \end{pmatrix},$$

$$f_2(t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{t+2}\right)cost + \left(1 - \frac{1}{5(t+2)}\right)sint + \frac{t^3}{4} - \frac{t+5}{t+2} \\ \frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2} - 2t \end{pmatrix},$$

$$p = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} \frac{3}{10cos0.3 - 2sin0.3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} cos1 - 0.2sin1 + 0.5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Бұл есептің дәл шешімі

$$\left(x^*(t) = I_{[t_1,t_*)}(t) \begin{pmatrix} 0.2sint - cost \\ -3 - 0.5t^3 \end{pmatrix} + I_{(t_*,t_2]}(t) \begin{pmatrix} 0.2sint - cost + 3 \\ 2 - 0.5t^3 \end{pmatrix}, t_* = 0.3 \right)$$

жұбы болады.

Ұсынылған алгоритм бойынша қойылған есептің жуық шешімін табамыз. Ол үшін $\nu = 3$ аламыз. Есептеу барысында $P_\nu(t_0, \lambda_1, u_1) = 0$ теңдеуінің шешімін табу үшін әр қадамда дихотомия әдісі қолданылды. Теңдеудің шешімі $\varepsilon = 0.000001$ дәлдігімен анықталды.

Төмендегі кестелерде әр қадамдағы есептеу нәтижелері келтірілген.

Кесте 1. 0-ші қадамдағы $\left[0, t_*^{(0)}\right]$ *аралығындағы жуық шешімнің мәндері*

m	t_m	$\lambda_{11}^{(0)} + u_{11}^{(0)}(t_m)$	$\lambda_{12}^{(0)} + u_{12}^{(0)}(t_m)$
1	0.0000000000	-0.9990132524	-2.9982212631
2	0.0500000000	-0.9876979784	-2.9982815383
3	0.1000000000	-0.9739102275	-2.9987123472
4	0.1500000000	-0.9576844269	-2.9998886393
5	0.2000000000	-0.9390612308	-3.0021853294
6	0.2500000000	-0.9180873920	-3.0059772940
7	0.2995922863	-0.8950145067	-3.0115846219

Кесте 2. 0-ші қадамдағы $\left[t_*^{(0)}, 1\right]$ *аралығындағы жуық шешімнің мәндері*

l	t_l	$\lambda_{21}^{(0)} + u_{21}^{(0)}(t_l)$	$\lambda_{22}^{(0)} + u_{22}^{(0)}(t_l)$
1	0.2995922863	2.1082897492	1.9897819483
2	0.3000000000	2.1084796609	1.9897245722
3	0.3500000000	2.1329611038	1.9814834745
4	0.4000000000	2.1597597829	1.9706101225
5	0.4500000000	2.1888006175	1.9567426689
6	0.5000000000	2.2200015585	1.9395186546
7	0.5500000000	2.2532737973	1.9185742681
8	0.6000000000	2.2885220531	1.8935436277
9	0.6500000000	2.3256449500	1.8640581364
10	0.7000000000	2.3645355007	1.8297459738
11	0.7500000000	2.4050817107	1.7902317972
12	0.8000000000	2.4471673239	1.7451367422
13	0.8500000000	2.4906727252	1.6940788246
14	0.9000000000	2.5354760224	1.6366738624
15	0.9500000000	2.5814543280	1.5725370537
16	1.0000000000	2.6284852649	1.5012853631

Кесте 3. 1-ші қадамдағы $\left[0, t_*^{(1)}\right]$ *аралығындағы жуық шешімнің мәндері*

m	t_m	$\lambda_{11}^{(1)} + u_{11}^{(1)}(t_m)$	$\lambda_{12}^{(1)} + u_{12}^{(1)}(t_m)$
1	0.0000000000	-0.9999985308	-2.9999990083
2	0.0500000000	-0.9887528953	-3.0000615070
3	0.1000000000	-0.9750358870	-3.0004990033
4	0.1500000000	-0.9588817914	-3.0016864970
5	0.2000000000	-0.9403309849	-3.0039989882
6	0.2500000000	-0.9194298349	-3.0078114768
7	0.2999994457	-0.8962308528	-3.0134988878

Кесте 4. 1-ші қадамдағы $\left[t_*^{(1)}, 1\right]$ *аралығындағы жуық шешімнің мәндері*

l	t_l	$\lambda_{21}^{(1)} + u_{21}^{(1)}(t_l)$	$\lambda_{22}^{(1)} + u_{22}^{(1)}(t_l)$
1	0.2999994457	2.1037691452	1.9865011116
2	0.3000000000	2.1037694149	1.9865010368
3	0.3500000000	2.1292085436	1.9785634765
4	0.4000000000	2.1568242142	1.9680009099
5	0.4500000000	2.1865474016	1.9544383382
6	0.5000000000	2.2183038131	1.9375007631
7	0.5500000000	2.2520140741	1.9168131859
8	0.6000000000	2.2875939266	1.8920006086
9	0.6500000000	2.3249544394	1.8626880330
10	0.7000000000	2.3640022309	1.8285004614
11	0.7500000000	2.4046397019	1.7890628961
12	0.8000000000	2.4467652802	1.7440003395
13	0.8500000000	2.4902736740	1.6929377943
14	0.9000000000	2.5350561352	1.6355002634
15	0.9500000000	2.5810007312	1.5713127496
16	1.0000000000	2.6279926257	1.5000002571

Кесте 5. 2-ші қадамдағы $\left[0, t_*^{(2)}\right]$ *аралығындағы жуық шешімнің мәндері*

m	t_m	$\lambda_{11}^{(2)} + u_{11}^{(2)}(t_m)$	$\lambda_{12}^{(2)} + u_{12}^{(2)}(t_m)$
1	0.0000000000	-0.9999985349	-2.9999990065
2	0.0500000000	-0.9887528995	-3.0000615053
3	0.1000000000	-0.9750358913	-3.0004990015
4	0.1500000000	-0.9588817957	-3.0016864953
5	0.2000000000	-0.9403309893	-3.0039989864
6	0.2500000000	-0.9194298394	-3.0078114750
7	0.2999994457	-0.8962308573	-3.0134988859

Кесте 6. 2-ші қадамдағы $\left[t_*^{(2)}, 1\right]$ *аралығындағы жуық шешімнің мәндері*

l	t_l	$\lambda_{21}^{(2)} + u_{21}^{(2)}(t_l)$	$\lambda_{22}^{(2)} + u_{22}^{(2)}(t_l)$
1	0.2999994457	2.1037691427	1.9865011141
2	0.3000000000	2.1037694124	1.9865010392
3	0.3500000000	2.1292085411	1.9785634789
4	0.4000000000	2.1568242117	1.9680009124
5	0.4500000000	2.1865473991	1.9544383408
6	0.5000000000	2.2183038106	1.9375007657
7	0.5500000000	2.2520140717	1.9168131886
8	0.6000000000	2.2875939242	1.8920006113
9	0.6500000000	2.3249544371	1.8626880359
10	0.7000000000	2.3640022285	1.8285004644
11	0.7500000000	2.4046396996	1.7890628992
12	0.8000000000	2.4467652779	1.7440003427
13	0.8500000000	2.4902736717	1.6929377976
14	0.9000000000	2.5350561330	1.6355002669
15	0.9500000000	2.5810007291	1.5713127533
16	1.0000000000	2.6279926236	1.5000002610

Белгілеулер енгіземіз:

$$\max_{t_m \in \left[0, t_*^{(s)}\right]} \left| \lambda_{11}^{(s)} + u_{11}^{(s)}(t_m) - x_1^*(t_m) \right| = \varepsilon_{11}^{(s)},$$

$$\max_{t_m \in \left[0, t_*^{(s)}\right]} \left| \lambda_{12}^{(s)} + u_{12}^{(s)}(t_m) - x_2^*(t_m) \right| = \varepsilon_{12}^{(s)},$$

$$\max_{t_l \in \left[t_*^{(s)}, 1\right]} \left| \lambda_{21}^{(s)} + u_{21}^{(s)}(t_l) - x_1^*(t_l) \right| = \varepsilon_{21}^{(s)},$$

$$\max_{t_l \in \left[t_*^{(s)}, 1\right]} \left| \lambda_{22}^{(s)} + u_{22}^{(s)}(t_l) - x_2^*(t_l) \right| = \varepsilon_{22}^{(s)},$$

$$\varepsilon^{(s)} = \max\left\{\varepsilon_{11}^{(s)}, \varepsilon_{12}^{(s)}, \varepsilon_{21}^{(s)}, \varepsilon_{22}^{(s)}\right\}.$$

1-6 кестелерден келесі қорытынды жасай аламыз:

Кесте 7. Бағалаулар.

s	$\varepsilon_{11}^{(s)} \leq$	$\varepsilon_{12}^{(s)} \leq$	$\varepsilon_{21}^{(s)} \leq$	$\varepsilon_{22}^{(s)} \leq$	$\varepsilon^{(s)} \leq$
0	0.0014162549	0.0018604115	0.0047205109	0.0032269817	0.0047205109
1	0.0000018647	0.0000010374	0.0000018627	0.0000010368	0.0000018647
2	0.0000018602	0.0000010392	0.0000018602	0.0000010392	0.0000018602

7-ші кестеден ұсынылған алгоритмнің 2-ші қадамында есептің жуық шешімін $2 \cdot 10^{-6}$-дан аспайтын дәлдікпен табылғанын көреміз.

Әр қадамда табылған бекітілмеген уақыт мезеті үшін төмендегі бағалаулар орындалады:

$t_* - t_*^{(0)} < 0.00041,\ t_* - t_*^{(1)} < 0.000000555, t_* - t_*^{(2)} < 0.000000555,$
демек, t_* нүктесі $1 \cdot 10^{-6}$-дан аспайтын дәлдікпен табылды.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста бекітілген және бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді зерттеу мен шешу әдістері қарастырылған. Импульс әсері бар дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептер диссертациялық жұмыстың негізгі объектісі болып табылады.

Алынған негізгі нәтижелер:

- импульсті жүйенің вариациялау теңдеуінің орталау әдісімен шешілімдік шарты орнатылды;
- бекітілген және бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептің шешімдерінің бар болуын зерттеуге орталау әдісі қолданылды;
- бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеудің ось бойындағы екі жақты шенелген шешімдері орталау әдісі арқылы анықталды;
- бекітілген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептің шешімділік шарттары алынды;
- бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешілімділік шарттары параметрлеу әдісі арқылы анықталды;
- импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есепті шешуге параметрлеу әдісі қолданылды;
- бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есепті шешудің алгоритмдері және олардың сандық жүзеге асырылуы жасалды;
- импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары орнатылды;
- импульс әсерлі дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есеп үшін параметрлерге қатысты сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі құрылды және оның шешімін табу алгоритмі ұсынылды.

Импульс әсерлі дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептер толығымен шығарылды және бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульсті дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепке негізделген орташалау және параметрлеу әдістері қарастырылды.

Жұмыста алынған нәтижелер теориялық мәнге ие және импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешуде, сондай-ақ университеттердің математика факультеттерінде элективті курстар оқу кезінде, гранттық қаржыландыру бойынша ғылыми жобалар дайындау барысында қолдануға болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. - Киев: Изд-во АН УССР, 1937. -364 с.
2. Перестюк Н.А., Асланян А.А. Дифференциальные уравнения с разрывными траекториями, К.: О -во "Знание"УССР, 1989. -16 с.
3. Мышкис А.Д., Самойленко А.М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Математический сб. -1967.-Т.74, вып. 2. -С. 202-208.
4. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. -М.: Мир, 1971. -312 с.
5. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Киев: Наук. думка, 1992. - 280 с.
6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. - 285 с.
7. Перестюк Н. А. Численно-аналитический метод исследования периодических систем с импульсами // -В. кн.: Труды семинара по математической физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969. вып. 3. - С. 243-253.
8. Перестюк Н.А., Шавкопляс В.Н. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Украинский матеметический журнал, 1979. -Т. 31, 5. -С. 517-524.
9. Кенжебаев К.К., Станжицский А.Н. Инвариантность множества импульсных систем и их устойчивость // Нелінійні коливания, 2004. -Т. 7, 1. -С.30- 48.
10. Rachunkova I., Tomecek J. On nonlinear boundary value problem for systems of differential equations with impulses // Acta Univ. Palac. olomuc. fac. rerum natur. Math. 2002. 41. -С. 119-129.
11. Karandzhulov L.I. Linear BVP with impulse effects for ODE // Київского національного університету імені Тараса Шевченко Кібернетика, 2004. 5. - С. 105 27-31.
12. Liz E.and Juan J. Nieto. Positive solutions of linear impulsive differential equations // Communications in applied analysis 2. 1998. 4. -P. 565-571.
13. Hristova S.G., Bainov D.D. Monotone-Iterative Techniques of V. Lakshmikantham for a boundary Value Problem for Systems of Impulsive Differential - Difference Equations // Journal of mathematical analysis and applications, 1996. 1. -P. 1-13.
14. Bajo I., Liz E. Periodic boundary value problem for first order differential equations with impulses at variable times // Journal of mathematical analysis and applications, 1996.-P. 65-73.
15. Dishliev A.B., Bainov D.D. Conditions for the absence of the phenomenon “beating” for systems of impulse differential equations // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica., 1985. -Vol.13, 3. -P. 237-256.

16. Saroop K. Kaul. The Periodic Boundary Value Problem for Impulsive Differential Equations with Variable Times // Nonlinear Times and Digest, -1995. 2, -P. 107-116.
17. Bainov D.D. and Simeonov P.S. Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Applications. - New York: Halsted Press, 1989.
18. Lakshmikantham V., Bainov D., Simenov P. Theory of impulsive Differential Equations. World Scientific Publishers Singapore (1990)
19. Martynyuk A.A., Chernetzkaya L.N. On boundedness of the solution to impulsive system // Прикладная механика, 1997. 7. -Т.33, -С. 88-94.
20. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференциальные уравнения. -1978. -Т. 14, 16. -С. 1034-1045.
21. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. -М.: Наука, 1981.-568 с.
22. Калитин Б.С. О колебаниях маятника с ударным импульсом // Дифференциальные уравнения. -1970. -Т.6, 12. -С. 2174-2181.
23. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Трофимчук С.И. Проблема биения в импульсных системах. - Киев, 1990. -46 с. -(Препр./АН УССР. Ин-т математики; 90, 11).
24. Перестюк Н.А. Инвариантные множества одного класса разрывных математических систем // Украинский математический журнал. -1984. -Т.36, 1. -С. 63-68.
25. Bainov D.D., Milusheva S.D. A projection-iterative method for solving the periodic problem for ordinary differential equations with impulse effect // Kumamato J. Math. -1989. -Vol.2, 2. -P.40-48.
26. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Ахметов М.У. Почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. - Киев, 1983. -50 с (Препринт/ АН УССР. Институт математики; 83, 26).
27. Завалищин С.Т. Импульсное исчисление для операторов, действующих в пространстве распределений // Дифференциальные уравнения.-1972. -Т. 8, 6. -С. 1098-1100.
28. Завалищина С.Т., Сесекин А.Н. Минимизация интегральной оценки кинетической энергии гармонического осцилятора импульсным управлением // Прикл.математика и механика. -1974. -Т.38, вып. 3.-С 441-450.
29. Stamov G.T. Integral manifolds and perturbations of the nonlinear part of systems of autonomous differential equations with impulses at fixed moments // Serdica Math.Journal, Institut of Math. Bulgarian Academy of Sciences. - 1995. 21. -P. 109-122.
30. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Украинский мат. журнал. - 1980. -Т. 34, 1. - С. 66-73.
31. Dong Yu-jun, Zou Er-xin. An application of schauders fixed point theorem to the existence of solutions of impulsively differential equations // Applied Mathematics and Mechanics, -1995. -Vol. 16, 4. -P. 377-381.

32. Bainov D.D., Kostadinov S.I., Zabrienko P.P. Monotonic impulsive differential equations // Indian J. Pure and Appl. Math. -1995. -Vol 26, 4. -P. 315- 320.
33. Bainov D.D., Dishliev A.B. Quasiuniqueness, uniqueness and continuability of the solutions of impulsive functional differential equations // Rendiconti di Matematica,- 1995. Vol.15, Serie VII.7. -P. 391-404.
34. Курбанбаев О.О. Сходимость последовательных приближений для краевых задач с импульсным воздействием // Труды межд.конф. ”Современные проблемы математической физики и информационных технологий – Университет”. - Ташкент, 2005г.18 - 24 апреля. -2005. -Т. 2, -С.94-97.
35. Курбанбаев О.О. Численно-аналитический метод для задачи с двухточечными нелинейными краевыми условиями // Узбекский математический журнал. -1997. 4. -С.45-58.
36. Akhmet M.U. On the general problem of stability for impulsive differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2003, 288 (1), 182–196. doi:10.1016/j.jmaa.2003.08.001
37. Cordova-Lepe F., Del Valle R., Robledo G. Stability analysis of a self-cycling fermentation model with statedependent impulse times // Math. Methods Appl. Sci. 2014, 37 (10), 1460–1475, doi:10.1002/mma.2907
38. Jiao J., Cai S., Chen L. Analysis of a stage-structured predator-prey system with birth pulse and impulsive harvesting at different moments // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2011, 12 (4), 2232–2244. doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.01.005
39. Nie L., Teng Z., Torres A. Dynamic analysis of an SIR epidemic model with state dependent pulse vaccination // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2012, 13 (4), 1612–1629. doi:10.1016/j.nonrwa.2011.11.019
40. Rachunkova I., Tomecek J. Existence principle for higher-order nonlinear differential equations with state-dependent impulses via fixed point theorem // Bound. Value Probl. 2014, 118. doi:10.1186/1687-2770-2014-1
41. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Периодические решения слабонелинейных систем импульсного воздействия // Дифференц. уравнения 1978, 14 (16), 1034–1045.
42. Dvornyk A.V., Tkachenko V.I. Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive actions // Ukrainian Math. J. 2017, 68 (3-4), 1673–1693. doi:10.1007/s11253-017-1320-z
43. Gabor G. The existence of viable trajectories in state-dependent impulsive systems // Nonlinear Anal. 2010, 72 (9-10), 3828–3836. doi:10.1016/j.na.2010.01.019
44. Hakl R., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S. Almost periodic evolution systems with impulse action at statedependent moments // J. Math. Anal. Appl. 2017, 446 (1), 1030–1045. doi:10.1016/j.jmaa.2016.09.024
45. Rachunkova I., Rachunek L., Ronto A., Ronto M. A constructive approach to boundary value problems with statedependent impulses // Appl. Math. Comput. 2016, 274, 726–744. doi:10.1016/j.amc.2015.11.033
46. Rachunkova I., Tomecek J. State-dependent impulses. Boundary value problems on compact interval // In: Dosla Z., Necasova S., Pokorny M. (Eds.) Atlantic

Briefs in Differential Equations. Atlantic Press, Paris, 2015. doi:10.2991/978-94-6239-127-7
47. Ronto A., Rachunkova I., Ronto M., Rachunek L. Investigation of solutions of state-dependent multi-impulsive boundary value problems // Georgian Math. J. 2017, 24 (2), 287–312. doi:10.1515/gmj-2016-0084
48. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A., Trofimchuk S.I. Generalized solutions of impulse systems and the phenomenon of pulsations // Ukrainian Math. J. 1991, 43, 610–615. doi:10.1007/BF01058548
49. Kovalchuk T.V., Mohylova V.V., Stanzhytskyi O.M., Shovkoplyas T.V. Application of the averaging method to the problems of optimal control of the impulse systems // Carpathian Math. Publ. 2020, 12 (2), 504–521. doi:10.15330/cmp.12.2.504-521
50. Kravets V.I., Kovalchuk T.V., Mohylova V.V., Stanzhytskyi O.M. Application of the method of averaging to the problems of optimal control over functional-differential equations // Ukrainian Math. J. 2018, 70 (2) 232–242. doi:10.1007/s11253-018-1497-9
51. Nosenko T.V., Stanzhytskyi O.M. Averaging method in some problems of optimal control // Nonlinear Oscillations 2008, 11 (48), 539–547. doi:10.1007/s11072-009-0049-5
52. Samoilenko A.M. Averaging method in systems with tremors // Math. Phys., 9, 1971. P. 101–117.
53. Самойленко А.М., Петришин Р.И. Метод усреднения в некоторых краевых задачах // Дифференц. уравнения 1989, 25 (6), 956–964.
54. Samoilenko A.M., Stanzhitskii A.N. On the averaging of differential equations on an infinite interval // Differ. Equ. 2006, 42 (4), 505–511. doi:10.1134/S0012266106040070
55. Stanzhitskii A.M. Investigation of invariant sets of to stochastic systems with the use of Lyapunov functions // Ukrainian Math. J. 2001, 53 (2), 323–327. doi:10.1023/A:1010437625118
56. Stanzhytskyi O.M., Krenevych A.P. Investigation of exponential dichotomy of linear Ito stochastic systems with random initial data by using quadratic forms // Ukrainian Math. J. 2006, 58 (4), 619–629. doi:10.1007/s11253-006- 0087-4
57. Stanzhitskii A.N., Dobrodzii T.V. Study of optimal control problems on the half-line by the averaging method // Differ. Equ. 2011, 47 (2), 264–277. doi:10.1134/S0012266111020121
58. Stanzhytskyi O.M., Karakenova S.G., Uteshova R.E. Averaging method and boundary value problems for systems of Fredholm integro-differential equations // Nonlinear Dyn. Syst. Theory 2021, 21 (1), 100–113.
59. Stanzhytskyi O., Mogylova V., Lavrova O. Optimal control for systems of differential equations on the infinite interval of time scale // In: Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z. (Eds.) Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. Springer, Cham, 2021.

60. Stanzhytskyi O.M., Mynbayeva S.T., Marchuk N.A. Averaging in boundary-value problems for systems of differential and integrodifferential equations // Ukrainian Math. J. 2020, 72 (2), 277–301. doi:10.1007/s11253-020-01781-2
61. Akhmet M.U. Principles of Discontinuous Dynamical Systems. – New York: Springer, 2010.
62. Akhmet M. and Yilmaz E. Neural Networks with Discontinuous // Impact Activations. New York: Springer, 2014.
63. Akhmet M.U. Nonlinear hybrid continuous/discrete time models. Amsterdam-Paris: Atlantis, 2011.
64. Akhmetov M.U., Perestyuk N.A., Tleubergenova M.A. Control over linear pulse systems // Ukrainian Mathematical Journal. 1995. 47(3), p. 360–368. DOI: 10.1007/BF01056297.
65. Akhmet M.U., Tleubergenova M.A., Yilmaz O. Asymptotic behavior of linear impulsive integro-differential equations // Computers and Mathematics with Applications. 2008. 56(4), p. 1071–1081. DOI: 10.1016/j.camwa.2007.08.050.
66. Akhmet M., Tleubergenova M., Fen M.O., Nugayeva Z. Unpredictable solutions of linear impulsive systems // Mathematics. 2020. 8(10), p. 1–16, 1798. DOI: 10.3390/math8101798.
67. Akhmet M., Tleubergenova M., Nugayeva Z. Unpredictable Solutions of Impulsive Quasi-Linear Systems // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2022. 11(1), p. 73–89. DOI: 10.5890/DNC.2022.03.006.
68. Akhmet M., Aviltay N., Dauylbayev M.K., Seilova R. A case of impulsive singularity // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. 2023. 117(1), p.3–14. DOI: 10.26577/JMMCS.2023.v117.i1.01.
69. Akhmet M.U., Kashkynbayev A. Nonautonomous transcritical and pitchfork bifurcations in impulsive systems // Miskolc Mathematical Notes. 2013, 14(3), p. 737–748. DOI: 10.18514/mmn.2013.826.
70. Akhmet M.U., Kashkynbayev A. Non-autonomous bifurcation in impulsive systems // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2013. P. 1–23. DOI: 10.14232/ejqtde.2013.1.74.
71. Akhmet M., Kashkynbayev A. Bifurcation in Autonomous and Nonautonomous Differential Equations with Discontinuities // Springer Singapore. Higher Education Press. 2017. 166 p.
72. Akhmet M., Kashkynbayev A. Nonautonomous Bifurcations in Nonlinear Impulsive Systems // Differential Equations and Dynamical Systems. 2020. 28(1), p. 177–190. DOI: 10.1007/s12591-016-0309-7.
73. Gokul P., Mohanrasu S.S., Kashkynbayev A., Rakkiyappan R. Finite-Time Synchronization of Fractional-Order Nonlinear Systems with State-Dependent Delayed Impulse Control // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2024. 34(3), 2450034. DOI: 10.1142/S0218127424500342.
74. Kowsalya P., Mohanrasu S.S., Kashkynbayev A., Gokul P., Rakkiyappan R. Fixed-time synchronization of Inertial Cohen-Grossberg Neural Networks with state dependent delayed impulse control and its application to multi-image encryption // Chaos, Solitons and Fractals. 2024. 181(4), 114693. DOI: 8.1016/j.chaos.2024.114693.

75. Dauylbayev M.K., Atakhan N. The initial jumps of solutions and integral terms in singular bvp of linear higher order integro-differential equations // Miskolc Mathematical Notes. 2015, 16(2), p. 747–761. DOI: 10.18514/MMN.2015.1437.
76. Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016. 5(2), p. 145–152. DOI: 10.5890/DNC.2016.06.004.
77. Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. Boundary-Value Problems with Initial Jumps for Singularly Perturbed Integrodifferential Equations // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2017. 222(3), p. 214–225. DOI: 10.1007/s10958-017-3294-7.
78. Dauylbayev M.K., Uaissov A.B. Asymptotic Behavior of the Solutions of Boundary-Value Problems for Singularly Perturbed Integrodifferential Equations // Ukrainian Mathematical Journal. 2020. 71(11), p. 1677–1691. DOI: 10.1007/s11253-020-01741-w.
79. Dauylbayev M.K., Uaissov B. Integral boundary-value problem with initial jumps for a singularly perturbed system of integrodifferential equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2020. 141(12), 110328. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110328.
80. Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1 (1989): 34–46. https://doi.org/10.1016/0041- 5553(89)90038-4
81. Dzhumabaev D.S. On the solvability of nonlinear closed operator equations // Amer. Math. Soc. Transl. – 1989. – Ser. 2, №142. – P. 91-94.
82. Dzhumabaev D.S. On the convergence of a modification of the Newton-Kantorovich method for closed operator equations // Amer. Math. Soc. Transl. – 1989. – Ser. 2, №142. – P. 95-99.
83. Джумабаев Д.С. Скорость сходимости итерационных процессов для неограниченных операторных уравнений // Известия академия наук Каз ССР. – 1988. – №5. – С. 24-28.
84. Джумабаев Д.С. Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применение // Математический журнал. – 2001. – Т. 1, №1. – С. 30-40.
85. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Comput. Math. Math. Phys. 47 (2007): 37-61.
86. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Criteria for the existence of an isolated solution of a nonlinear boundary value problem // Ukrainian Math. J. 70 (2018): 410-421. https://doi.org/10.1007/s11253-018-1507-y
87. Dzhumabaev D.S., Nazarova K.Z., Uteshova R.E. A modification of the parameterization method for a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation // Lobachevskii J. Math. 41 (2020): 1791–1800. https://doi.org/ 10.1134/S1995080220090103
88. Temesheva S.M., Dzhumabaev D.S., Kabdrakhova S.S. On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem // Lobachevskii J. of Math. 42 (2021): 606-612. https://doi.org/ 10.1134/S1995080221030173

89. Джумабаев Д.С., Мынбаева С.Т. Об одном алгоритме нахождения численного решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Известия МКТУ имени Х.А. Яссави. Серия математика, физика, инфооматика. – 2018. – Т. 2, №1(4). – С. 44-46.
90. Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations // Electronic Journal of Differential Equations 72 (2018): 1-8.
91. Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Comp. and Applied Math. 37 (2018): 4966–4976. https://doi.org/10.1007/s40314-018-0611-9
92. Assanova A.T. and Tleulessova A.B. Nonlocal problem for a system of partial differential equations of higher order with pulsed actions // Ukrainian Math. J. 71(2020): 1821-1842. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01750-9
93. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, №1. – С. 50-66.
94. Джумабаев Д.С., Тлеулесова А.Б. О разрешимости периодической краевой задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2006г. 1.-С. 3-7.
95. Тлеулесова А.Б. Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием // Математический журнал. - Алматы, 2004. -Т.4. , 4. - С. 93-102.
96. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 752 с.
97. Ortega J.M., Rheintboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. – Philadephia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. – 599 p.
98. Kelley C.T. Solving nonlinear equations with Newton's method. – Philadelphia: SIAM Publ., 2003. – 119 p.
99. Deuflhard P. Newton Methods for Nonlinear Problems. – Berlin: Heidelberg, 2011. – 437 p.
100. Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations // Mat. Zametki. – 1987. – Vol. 41, №5. – P. 356-361.
101. Митропольский Ю.А., Байнов Д.Д., Милушева С.Д. Применение метода усреднения для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений // Мат. физика. – 1979. – Вып. 25. – С. 3-22.
102. Samoilenko A.M. and Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1995.
103. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука., 1976. – 152 с.
104. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 249 с.

105. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
106. Murray, J.D. Mathematical biology. – New York: Springer-Verlag, 2001. – P. 551.
107. Bruno, A.D. Local methods in nonlinear differential equations. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. – P. 348.
108. Bogolyubov, N.N., & Mitropolskiy, Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon and Breach, London, 1961.
109. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М., 1966, 576 с.
110. Stanzhytskyi O.M., Uteshova R.E., Mukash M., Mogylova V.V. Application of the method of averaging to boundary value problems for differential equations with non-fixed moments of impulse // Carpathian Mathematical Publications. 14 (2022): 304-326. https://doi.org/10.15330/cmp.14.2.304-326
111. Stanzhytskyi O.N., Assanova A.T. and Mukash M.A. Averaging method and two-sided bounded solutions on the axis of systems with impulsive effects at non-fixed times // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. 104 (2021): 142-150. https://doi.org/10.31489/2021M4/142-150
112. Assanova A.T., Mukash M.A., Stanzhytskyi O.M. A problem with impulse actions for nonlinear ODEs // International Journal of Mathematics and Physics, 14, №1 (2023):23-31. https://doi.org/10.26577/ijmph.2023.v14.i1.03
113. Темешева С.М., Мұқаш М.Ә. Бекітілмеген мезетте импульстік әсері бар есеп туралы // Абай атындағы ҚазҰПУ-нің ХАБАРШЫСЫ, «Физика-математика ғылымдары» сериясы, №3(83), (2023):25-33, 10.51889/2959-5894.2023.83.3.003
114. Stanzhytskyi O., Uteshova R., Mukash M. Application of the Averaging Method to Solving Boundary Value Problems for Systems with Impulse Action at Non-Fixed Moments of Time // International Workshop QUALITDE – 2020, p. 194-197, December 19 – 21, 2020, Tbilisi, Georgia
115. Stanzhytskyi O., Uteshova R., Mukash M. The averaging metod for boundary value problems for differential equations with non-fixed impulsive moments. Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications – MADEA 9, p. , Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21-25, 2021
116. Станжицкий А. Н., Мұқаш М. Ә.. Метод параметризации решение краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени // «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері» IX Халықаралық ғылыми конференция. Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті. Ақтөбе, Қазақстан, 24-28 мамыр 2022 ж.
117. Mukash M. Averaging in boundary value problems for differential equations with impulse action at non-fixed times // Annual International April Mathematical Conference – 2024, p. 138.