Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова

УДК 517.946 На правах рукописи

ИСЕНОВА АККЕНЖЕ АЛТМЫШЕВНА

Построение решений систем типа Уиттекера вблизи особых кривых

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание степени доктора философии (PhD)

Отечественный консультант
д.ф.-м.н., профессор Тасмамбетов Ж.Н.

Зарубежный консультант
д.ф.-м.н., академик Раджабов Н.
(Таджикистан, Душанбе)

Республика Казахстан
Актобе, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

${}_1F_1[a;b;x]$	– функция Куммера;
$\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)$	– вырожденный ряд Гумберта двух переменных;
$M_{k,m}(x)$, $W_{k,m}(x)$	– функции Уиттекера двух переменных;
$J(\gamma;x_1,x_2)$	– вырожденная гипергеометрическая функция типа Бесселя двух переменных;
$p=1+k$	– ранг;
$m=-1-\chi$	– антиранг;
$L_{n,n}^{(0,0)}(x_1,x_2)$	– простой полином Лагерра двух переменных;
$L_{n,n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(x_1,x_2,x_3)$	– обобщенный полином Лагерра трех переменных;
$G(\alpha;\gamma;x)$	– гипергеометрическая функция Гаусса;
$\Phi_D\left(\begin{matrix}\alpha,(\beta_k)\\ \gamma\end{matrix}\middle\|(z_{k+1})\right)$	– гипергеометрическая функция Художникова;
$F_D\left(\begin{matrix}\alpha,\ (\beta_n)\\ \gamma\end{matrix}\middle\|(z_n)\right)$	– гипергеометрическая функция Лауричелла;
$F_1(\alpha,\beta,\gamma;x,y)$	– гипергеометрическая функция Аппеля двух переменных;
$(\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+n-1)$	– символ Похгаммера, означающий произведение n чисел;
$(0,0,\ldots,0)$, $(\infty,\infty,\ldots,\infty)$	– особенности;
$\Gamma(\alpha_n+1)$	– Гамма-функция Эйлера

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. Диссертационное исследование посвящено изучению построения решений родственных вырожденных гипергеометрических систем вблизи особых кривых и установлению ряда новых систем типа Бесселя, Уиттекера, Лагерра, а также взаимосвязи их решений между собой.

При исследовании вырожденных гипергеометрических систем, важную роль играет система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned} &P^{(0)}(x,y)\cdot Z_{xx}+P^{(1)}(x,y)\cdot Z_{y}+P^{(2)}(x,y)\cdot Z=0\\ &Q^{(0)}(x,y)\cdot Z_{yy}+Q^{(1)}(x,y)\cdot Z_{x}+Q^{(2)}(x,y)\cdot Z=0\end{aligned}\right\}, \qquad (0.1)$$

где коэффициенты $P^{(i)}(x,y)$ и $Q^{(i)}(x,y)$ $i=\overline{0,2}$ аналитические функции или многочлены двух переменных.

(0.1) связана с вырожденной системой типа Горна

$$x_j\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}+(\gamma_j-x_j)\frac{\partial F}{\partial x_j}-\sum_{k\neq j}x_k\frac{\partial F}{\partial x_k}-\lambda F=0\,,\ j=\overline{1,n}\,, \qquad (0.2)$$

а также с вырожденной системой

$$x_j\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2}-x_j\frac{\partial U}{\partial x_j}-\sum_{r\neq j}x_r\frac{\partial U}{\partial x_r}+\left[\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{r\neq j}x_r+rx_j+\frac{1}{4}-\mu_j^2\right]U=0\,,\ j=\overline{1,n} \qquad (0.3)$$

полученной из (0.2) с помощью преобразования вида

$$F(x_1,...,x_n)=\exp Q(x_1,...,x_n)U(x_1,...,x_n)\,, \qquad (0.4)$$

$$Q(x_1,...,x_n)=\frac{\alpha_{p0...0}}{p}x_1^p+...+\frac{\alpha_{0...0p}}{p}x_n^p+...+\alpha_{10...0}x_1+...+\alpha_{0...01}x_n\ , \qquad (0.5)$$

где $F=F(x_1,x_2,...,x_n)$ общая неизвестная для всех n уравнений системы (0.2).

Неопределенные коэффициенты $\alpha_{p,0,...,0},\alpha_{0,0,...,p},...,\alpha_{1,0,...,0},\alpha_{0,0,...,1}$ многочлена (0.5) и коэффициенты обобщенного степенного ряда $U(x_1,x_2,...,x_n)$ определяются методом Фробениуса-Латышевой. Изучаемые родственные системы Бесселя, Лагерра и Уиттекера получаются из систем (0.1)-(0.3) с помощью предельного перехода и преобразования (0.4).

Актуальность исследования. Аналитическая теория дифференциальных уравнений берет свое начало с исследований О. Коши, Л. Фукса, Г. Фробениуса, К. Гаусса, Я. Горна и др. Фундаментальные исследования по аналитической теории дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами разработаны Л. Фуксом. А. Пуанкаре развивая идеи работ Л. Фукса и Л. Томе исследовал проблему асимптотического разложения функций. Значительный интерес представляет развитие метода Фробениуса-Латышевой на аналитические системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, а также исследование поведения решения рассматриваемых уравнений в окрестности особых кривых.

Актуальность исследования обусловлена, с одной стороны, необходимостью углубленного изучения вырожденных гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, находящих широкое применение в теории специальных функций многих переменных, а также в прикладных задачах математической физики и многомерных вырожденных уравнений. С другой стороны – необходимостью установления различных родственных систем типа Бесселя, Лагерра, Уиттекера и изучением поведения их решений вблизи особых кривых.

Виды основных вырожденных систем мало изучены, такие как системы типа Бесселя и родственные с ней системы. Не установлены также существование систем, решениями которых являются ортогональные многочлены двух переменных и какими из 20-ти вырожденных систем они связаны. Отсутствует общий метод исследования. Для исследования таких систем, системы состоящей из двух уравнений применяется обобщенный Ж.Н.Тасмамбетовым метод Фробениуса-Латышевой. Требуется обобщить этот метод на случай системы состоящей из n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, и разработать теорию построения нормальных, нормально-регулярных и конечных решений вблизи особых кривых.

Продолжая исследования Я. Горна, Э.Т. Уиттекера и М.П. Гумберта Ж.Н.Тасмамбетов установил, что в указанных выше случаях основной связывающей системой является система типа Горна (Ψ_2), и при этом большую роль играет раскрытие свойств системы типа Уиттекера (0.1). Так как, одним из частных решений системы (0.1) является функция Гумберта, поставленным целям отвечает всестороннее изучение свойств вырожденной функции Гумберта $\left(\Psi_2^{(2)}\right)$ и ее обобщение на случай n переменных $\left(\Psi_2^{(n)}\right)$.

Современное состояние темы. В случае функции одной переменной Люси Дж.Слейтер отмечает, что «Вырожденными гипергеометрическими функциями называются четыре функции: функции Куммера ${}_1F_1(\alpha;\beta;x)$, связанные с ним второе решение $U(\alpha,\beta;x)$ и две функции Уиттекера $M_{k,m}(x)$ и $W_{k,m}(x)$» [1]. Большинство используемых в математической физике функций, включая функции Вебера и Бесселя [2-6] представляют собой частные случаи этих функций. Все они являются регулярными частными решениями некоторых дифференциальных уравнений второго порядка. Эти уравнения имеют особенности: регулярную в точке $x=0$ и иррегулярную в точке $x=\infty$. Уравнение Куммера и уравнение Уиттекера обладают такие особенности, [7-12].

Классификация особенностей на регулярные и иррегулярные позволяет исследовать поведение решений вблизи этих особых точек. В данной работе мы пользуемся классификацией данной К.Я. Латышевой с помощью понятия ранга введенного А. Пуанкаре и антиранга введенного Л. Томе.

Хорошо изучена связь между уравнениями Куммера и Уиттекера, а также родственными уравнениями, полученными из них с помощью различных преобразований. Обладая общими свойствами с вышеназванными уравнениями, родственные уравнения находят широкое применение в различных задачах науки и техники. Поэтому, в литературах посвященной теории обыкновенных дифференциальных уравнений приводятся перечень родственных уравнений с известными приложениями уравнений Куммера, Бесселя, Уиттекера, Лагерра, Якоби и др.[13-20].

В случае гипергеометрических функций двух переменных, круг рассматриваемых свойств расширяется. Исследование усложняется тем, что если в обыкновенном случае имеет место только одно вырожденное гипергеометрическое уравнение, то в случае двух переменных появляются 20 вырожденных гипергеометрических функций. Все они получаются в основном из четырех гипергеометрических функций Аппеля $F_1 - F_4$ с помощью предельных переходов [21, с.114-120]. Я. Горн установил, что они являются частными решениями 20 систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Из них, как и в обыкновенном случае, системы связанные между собой некоторыми общими свойствами назовем родственными. Например, к общему свойству относится преобразование (0.4), где $Q(x_1,...,x_n)$ многочлен от n переменных (0.5) с помощью, которого можно выводить одну систему из другой, а также установление связи между их решениями в виде вырожденных гипергеометрических функций двух переменных. Четыре гипергеометрические функции $F_1 - F_4$ П. Аппеля двух переменных М. Лауричелла обобщил и ввел на рассмотрение F_A, F_B, F_C, F_D [22] четыре гипергеометрические функции n переменных. Далее, были изучены различные их свойства и вырожденные гипергеометрические функции n переменных, полученные путем предельного перехода [23-44].

Наиболее простыми родственными системами являются системы Горна и Уиттекера. Они хорошо изучены, установлены возможности построения различных их решений, связанные с вырожденными гипергеометрическими функциями двух переменных. Однако эти исследования не достигли такого уровня как в обыкновенном случае. Особенно малоизвестно о родственных системах с системой типа Уиттекера (0.1).

Для изучения системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в работах [45-52] был предложен модифицированный метод Фробениуса-Латышевой, использующий понятия ранга и антиранга.

Различные интегральные представления гипергеометрических функций были введены и исследованы в связи с их важными приложениями в различных областях. Некоторые свойства гипергеометрических функций широко используются при изучении вырожденных уравнений [53-56]. А также, в работах [57-59] была указана связь гипергеометрических систем с переопределенными системами, изученными в работах таджикской математической школы.

Следует отметить, что значительный интерес представляет разработка метода Фробениуса-Латышевой для систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые приводят к различным прикладным задачам электродинамики, радиоэлектроники, математической физики, в статистике, проективной дифференциальной геометрии, в различных областях теоретической физики [60-62]. В теории тепло и массопереноса в электрических контактах для моделирования теплообмена в телах с переменным поперечным сечением, когда функции входных данных являются аналитическими, то решение рассматриваемой задачи можно представить в виде рядов по специальным функциям, многочленов Лагерра и вырожденной гипергеометрической функции [63].

Целью диссертационной работы является углубленное изучение вырожденных гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, установление ряда новых систем типа Бесселя, Лагерра, Уиттекера и родственные с системами Горна, разработка эффективных алгоритмов построения их решений вблизи регулярных и иррегулярных особых кривых. Исследование возможности существования нормально-регулярных решений вырожденных гипергеометрических систем полученных из систем Лауричелла с помощью предельных переходов.

Задачи исследования:

а) установление общей исходной родственной системы, на основе анализа характерных особенностей всех 20-ти известных вырожденных систем из списка Горна состоящих из двух уравнений второго порядка;

б) установление систем типа Бесселя родственные с системами Горна, а также Уиттекера и обобщение их общих свойств на вырожденные гипергеометрические системы, состоящие из n уравнений второго порядка;

в) разработать эффективные алгоритмы построения нормальных, нормально-регулярных и конечных решений родственных систем;

г) установить системы типа Лагерра родственные с системами Горна и исследование связи между регулярными и нормально-регулярными решениями;

д) исследовать существование необходимых условий нормально-регулярных решений вырожденных гипергеометрических систем полученных из системы Лауричелла (F_D);

е) получить новые функции в виде нормально-регулярных решений многих переменных как решение вырожденных гипергеометрических систем, устанавливая связь с функциями Горна, Гумберта, Бесселя, Лагерра и Художникова.

Объектом исследования являются задачи установления вырожденных гипергеометрических родственных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Предметом исследования являются вопросы построения решений вырожденных родственных систем, разработка эффективных алгоритмов построения нормальных, нормально-регулярных и конечных решений, обоснование выполнения обобщенных теорем Куммера для вырожденных систем, полученных из системы Лауричелла путем предельного перехода.

Научная новизна. Научная новизна заключается в распространении обобщенного метода Фробениуса-Латышевой для исследования вырожденных гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

С целью обоснования и развития, а также использования предлагаемого обобщенного метода к решению конкретных задач, связанных с построением родственных систем, получены результаты, определяющие научную новизну:

а) установлены новые свойства системы типа Уиттекера, найдена ее связь с другими родственными системами;

б) обосновано выполнение теорем Куммера для системы типа Горна и их приложений к построению решений других родственных систем и связь с функциями Гумберта;

в) предложен алгоритм построения нормально-регулярных решений родственных систем типа Уиттекера и Горна;

г) построены регулярные и нормально-регулярные решения установленного ряда систем типа Бесселя, родственных с системами Горна и Уиттекера;

д) распространен обобщенный метод Фробениуса-Латышевой и получены новые свойства многомерных конечных решений установленных систем типа Лагерра;

е) установлены необходимые условия существования нормально-регулярных и конечных решений вырожденных гипергеометрических систем полученных из системы Лауричелла (F_D);

ж) получены новые функции для систем вырожденных гипергеометрических родственных систем в виде нормально-регулярных решений многих переменных и установлено их связь с функциями Горна, Гумберта, Бесселя, Лагерра и Художникова $\Phi_{D,n}^{k,l}\left(0 \le k, l \le n, n-1 \le k \le n\right)$.

Положения, выносимые на защиту:

– обобщение теоремы Куммера на системы типа Горна и ее приложения к построению решения других родственных систем;

– особенности применения обобщенного метода Фробениуса-Латышевой к построению решения родственных систем вблизи различных особых кривых;

– алгоритмы построения нормально-регулярных решений систем типа Бесселя с учетом регулярных и иррегулярных особенностей;

– необходимые условия существования нормальных и нормально-регулярных решений родственных систем;

– алгоритм построения конечных решений родственных систем Лагерра и построения новых решений;

– построение решений систем типа Бесселя, полученных путем преобразования из родственных систем типа Уиттекера и Горна; особенности установления новых родственных систем;

– установление связи между функциями $\Phi_{D,n}^{k,l}\left(0 \le k,l \le n, n-1 \le k \le n\right)$ Художникова и нормально-регулярными решениями многих переменных вырожденной системы типа Лауричелла $\left(F_D\right)$ путем предельного перехода и особенности применения обобщенного метода Фробениуса-Латышевой.

Достоверность и обоснованность. В диссертационной работе широко применяются методы и результаты аналитической теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений в частных производных, теории специальных функций. Основным методом исследования и решения задач в диссертации является обобщенный метод Фробениуса-Латышевой. Научные результаты сформулированы в виде теорем и лемм. Важность исследования результатов работы, их достоверность и обоснованность полученных результатов, показано в публикациях рекомендованных журналов и изданиях.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты диссертационной работы носят, в основном, теоретический характер и могут быть использованы в развитии аналитической теории вырожденных обобщенных гипергеометрических систем. Научная значимость работы заключается в установлении вырожденных родственных систем и разработке эффективных алгоритмов построения их решений вблизи различных особых кривых в виде обобщенных вырожденных гипергеометрических функций многих переменных. Поэтому, диссертационная работа имеет важное практическое место в теории обобщенных вырожденных гипергеометрических функций многих переменных и находит широкое применение в задачах математической физики, теории многомерных вырожденных уравнений, теории антенн и др.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Свойства обобщенных гипергеометрических функций многих переменных находят значительное применение в теории многомерных вырожденных уравнений. Данными задачами занимаются представители узбекской математической школы М. Салахатдинова, также А. Хасанов, Т.К. Юлдашев, М.Т. Ергашев и др. [64-75].

Российский математик В.И. Художников занимается построением решения $\left(\Phi_D\right)$ вырожденных гипергеометрических систем, полученных с помощью предельного перехода [76] . В.И. Художниковым построено решение этой системы в виде новой $\Phi_{D,n}^{k,l}$ функции. В нашей диссертационной работе показано равенство этой функции с построенными нами нормально-регулярными решениями, представляющие новые обобщенные вырожденные гипергеометрические функции. Такие функции применяются в задачах математической физики, аэродинамики и при моделировании вероятностных процессов [77].

Личный вклад автора заключается в том, что все результаты, приведенные в диссертации, получены автором. Участие научных консультантов заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

– VIII международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актобе, 1 ноября, 2018;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященная 80-летнему юбилею академика НАН РК С.Н. Харина. Алматы, 3-5 апреля, 2019;

– Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», приуроченная к 70-летию д.ф.-м.н., профессора М.И. Рамазанова. Караганда, 12-13 июня, 2019;

– Международная конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019), посвященная 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal». Нур-Султан, 16-19 октября, 2019;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки РК, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. Алматы, 5-8 апреля, 2020;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш. Кальменова. Алматы, 5-8 апреля, 2021;

– IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актобе, 24-28 мая, 2022;

– Международная конференция «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (CITech-2022), посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.К. Надирова и 80-летнему юбилею академика М. О. Отелбаева. Алматы, 12-15 октября, 2022;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки РК. Алматы, 4-8 апреля, 2023;

– Научный семинар кафедры математики АРУ им.К. Жубанова «Проблемы прикладной математики и информатики» (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Сартабанов Ж.А.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 работ, в том числе 2 публикации в рейтинговых научных журналах индексируемых в базе Scopus [78-79], 3 публикации [80-82] в научных изданиях, входящих в перечень, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК для публикации основных результатов научной деятельности, 11 публикаций в материалах международных научных конференций [83-93].

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников из 93 работ.

Нумерация формул, теорем, определений трехзначная: первое число означает номер раздела, второе число номер подраздела, третье номер пункта.

Работа изложена в 125 страницах.

Краткое содержание работ. Введение диссертационной работы содержит оценку современного состояния рассматриваемых задач, обоснование необходимости проведения научно-исследовательской работы. Приводится также актуальность, новизна темы, основные цели и задачи исследования, положения выносимые на защиту.

В первом подразделе 1.1 **первого раздела** работы приводятся сведения о методе построения решений систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вблизи особых кривых.

Регулярность и иррегулярность особенностей системы устанавливаются с помощью понятия ранга и антиранга . В дальнейшем в зависимости от задач эти понятия распространяются на системы, состоящие из n уравнений. Приведены примеры о связи систем Горна и Уиттекера. В качестве исходной системы принята система типа Горна. Она является связывающей системой всех родственных систем.

В подразделе 1.2 введены на рассмотрение системы, состоящие из n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{aligned} x_j^2\left[r_{20}^{(j)}-\alpha_{20}^{(j)}x_j\right]F_{x_jx_j}+x_j\left[r_{10}^{(j)}-\alpha_{10}^{(j)}x_j\right]F_{x_j}+ \\ +\left[r_{01}^{(j)}-\alpha_{01}^{(j)}x_j\right]\sum_{k\neq j}x_kF_{x_k}+\left[r_{00}^{(j)}-\alpha_{00}^{(j)}x_j\right]F=0, \end{aligned} \tag{0.6}$$

где $r_{20}^{(j)}, r_{10}^{(j)}, r_{01}^{(j)}, r_{00}^{(j)}, \alpha_{20}^{(j)}, \alpha_{10}^{(j)}, \alpha_{01}^{(j)}, \alpha_{00}^{(j)}\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ – некоторые постоянные.

Установлены регулярные и иррегулярные особенности заданной системы (0.6) и определены вид соответствующих решений. Особые кривые устанавливаются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных $F_{x_jx_j}$: $x_j^2\left[r_{20}^{(j)}-\alpha_{20}^{(j)}x_j\right]=0 \Rightarrow x_j=0,\ x_j=r_{20}^{(j)}/\alpha_{20}^{(j)}\ \left(j=\overline{1,n}\right)$.

В пункте 1.2.1 основываясь на установленные простые правила классификации особых кривых систем, состоящих из двух уравнений второго порядка [8], сформулировано правило классификации особых кривых на случай системы, состоящей из n уравнений второго порядка.

Правило 0.1. *Если в системе (0.6) коэффициенты* $r_{20}^{(j)}\neq 0$*, то особенность системы (0.6) является особой регулярной и соответствующее её решение имеет вид обобщенного степенного ряда* n *переменных*

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot...\cdot x_n^{\rho_n}\sum_{m_1,m_2...m_n=0}^{\infty}A_{m_1,m_2...m_n}x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\cdot...\cdot x_n^{m_n},\quad \left(A_{0,0,...,0}\neq 0\right), \tag{0.7}$$

где $\rho_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, $A_{m_1,m_2...m_n}(m_1,m_2...m_n=0,1,2,...)$ *– неизвестные коэффициенты ряда.*

Определение 0.1. *Функция, определяемая рядом*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{m_1, m_2 ... m_n = 0}^{\infty} A_{m_1, m_2 ... m_n} x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} ... \cdot x_n^{m_n} \qquad (0.8)$$

называется обобщенной гипергеометрической функцией, если отношения

$$\frac{A_{m_1+1,...,m_n}}{A_{m_1,...,m_n}}, ..., \frac{A_{m_1,...,m_{n+1}}}{A_{m_1,...,m_n}}$$

являются рациональными функциями индексов $m_1,...,m_n$ *[27].*

Далее, строится нормально-регулярные решения вырожденных гипергеометрических систем в виде обобщенных гипергеометрических функций:

$$F(x_1,...,x_n) = \exp Q(x_1,...,x_n) x_1^{\rho_1} \cdot ... \cdot x_n^{\rho_n} \sum_{m_1,...m_n=0}^{\infty} A_{m_1,...m_n} x_1^{m_1} \cdot ... \cdot x_n^{m_n}, \quad (A_{0,...,0} \neq 0), \qquad (0.9)$$

где $\rho_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, $A_{m_1,m_2...m_n}(m_1, m_2 ... m_n = 0,1,2,...)$ *– неизвестные постоянные.*

Степень многочлена n переменных

$$Q(x_1,...,x_n) = \frac{\alpha_{p0...0}}{p} x_1^p + ... + \frac{\alpha_{0...0p}}{p} x_n^p + ... + \alpha_{10...0} x_1 + ... + \alpha_{0...01} x_n, \qquad (0.10)$$

где $\alpha_{p0...0},...,\alpha_{0...01}$ неизвестные коэффициенты, определяются понятием ранга.

Преимущество применение понятия ранга и антиранга заключается в том, что по виду заданной системы можно установить регулярность и иррегулярность особых кривых, и вид предполагаемого решения. Далее, применяя метод Фробениуса-Латышевой, построено нормально-регулярное решение в зависимости от регулярности и иррегулярности особых кривых.

Исследуемые в диссертации решения всех родственных систем типа Горна, Уиттекера, Бесселя и Лагерра относятся, в основном, к нормально-регулярному виду (0.9).

В пункте 1.2.2 раскрываются особенности применения метода Фробениуса-Латышевой к построению нормально-регулярных решений системы (0.6). Определены такие основные понятия, как система характеристических функций Фробениуса, система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,...,0)$, а также сформулированы теоремы о существовании нормально-регулярного решения системы (0.9).

Особо важным случаем изучаемой системы (0.6) является система типа Горна состоящая из n уравнений. Этот случай рассматривается в подразделе 1.3, где изучены особенности построения решения системы типа Горна состоящих из n уравнений вида

$$x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + [\gamma_j - x_j]\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{(k\neq j)} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \lambda F = 0, \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (0.11)$$

Здесь $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – общая неизвестная для всех n уравнений системы (0.11).

Случай $n = 2$ рассмотрен в подразделе 1.1, где установлено связь между системами типа Горна и Уиттекера. Решениями приведенных родственных систем является функция Гумберта Ψ_2. Таким свойством обладает и функция Гумберта $\Psi_2^{(n)}$.

Вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта $\Psi_2^{(n)}(n = 2,3,...)$ n переменных x_j, $\left(j = \overline{1,n}\right)$ определяется с помощью ряда

$$\Psi_2^{(n)}(\lambda; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{m_1, m_2 ..., m_n = 0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{m_1+m_2+...+m_n}}{(\gamma_1)_{m_1} \cdot (\gamma_2)_{m_2} \cdot ... \cdot (\gamma_n)_{m_n}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \frac{x_2^{m_2}}{m_2!} ... \frac{x_1^{m_n}}{m_n!}. \qquad (0.12)$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно при $|x_1| < \varepsilon, |x_2| < \varepsilon, ..., |x_n| < \varepsilon$.

Имеет место следующее свойство о частном решений системы Горна вблизи особенности $(0,0,...0)$.

Теорема 0.1. *Функция Гумберта (0.25) вблизи особенности* $(0,0,...0)$ *является частным решением системы типа Горна (0.6).*

Для доказательства этой обобщенной теоремы применяется метод Фробениуса-Латышевой.

Следующей теоремой устанавливается свойство относительно количества решений системы (0.6).

Теорема 0.2. *Система (0.6) вблизи особенности* $(0,0,...0)$ *имеет* 2^n *регулярных решений в виде обобщенных степенных рядов* n *переменных*

$$F(x_1, ..., x_n) = x_1^{\rho_1} ... x_n^{\rho_n} \sum_{m_1, ..., m_n = 0}^{\infty} A_{m_1, ..., m_n} \cdot x_1^{m_1} ... x_n^{m_n}, A_{0,...0} \neq 0, \qquad (0.13)$$

которые выражаются через функцию Гумберта $\Psi_2^{(n)}$, *где* $\rho_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, $A_{m_1,...,m_n} (m_n = 0,1,2,...)$ – *неизвестные коэффициенты.*

Для определения количество решений, сначала требуется определить количество корней системы определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,...0)$:

$$f_{0,...,0}^{(j)}(\rho_1, ..., \rho_n) \equiv \rho_j(\rho_j - 1) + \gamma_j \rho_j = 0, \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (0.14)$$

Если корни простые, то из (0.14) можно определить 2^n корней, то есть, показателей ряда в виде $(\rho_1^t, \rho_2^t, ..., \rho_n^t)\left(t = \overline{1,n}\right)$. Этим показателям соответствуют

2^n регулярных решений в виде обобщенных степенных рядов n переменных (0.13). С учетом показателей ряда они представляются в виде:

$$
\begin{aligned}
&1\{\Psi_2(\lambda,\gamma_1,...,\gamma_n;x_1,...,x_n),\\
&n\begin{cases} x_1^{1-\gamma_1}\Psi_2(\lambda+1-\gamma_1,2-\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;x_1,...,x_n),\\ \text{...} \end{cases}\\
&1\{x_1^{1-\gamma_1}...x_n^{1-\gamma_n}\cdot\Psi_2(\lambda+n-\gamma_1-...-\gamma_n;2-\gamma_1,...,2-\gamma_n;x_1,...,x_n).
\end{aligned}
\qquad (0.15)
$$

В этом подразделе также обобщены две теоремы об общем решений системы типа Горна и нормально-регулярном решений, когда системы характеристических уравнений

$$b_{n0...0}^{(j)}=0,\ b_{0n0...0}^{(j)}=0,\ldots,\ b_{00...0n}^{(j)}=0,\ldots,\ b_{00...0}^{(j)}=0,\ j=\overline{1,n} \qquad (0.16)$$

и определяющих уравнений

$$f_{0,...,0}^{(j)}(\rho_1,...,\rho_n)\equiv r_{20}^{(j)}\rho_j(\rho_j-1)+r_{10}^{(j)}\rho_j=0,\ \left(j=\overline{1,n}\right) \qquad (0.17)$$

имеют простые корни.

Подраздел 1.3 посвящен изучению возможности построения нормально-регулярных решений общей системы Уиттекера. Решения системы выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию Гумберта $\Psi_2^{(n)}$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 0.3. *Система*

$$x_j^2\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2}-x_j\sum_{r\neq j}x_r\frac{\partial U}{\partial x_r}+\left[-\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{(r\neq j)}x_r+kx_j+\frac{1}{4}-\mu_j^2\right]U=0,\ \left(j=\overline{1,n}\right), \qquad (0.18)$$

полученная из системы типа Горна (0.6) с помощью преобразования

$$F(x_1,...,x_n)=\exp\left(\frac{x_1}{2}+...+\frac{x_n}{2}\right)\cdot x_1^{-\frac{\gamma_1}{2}}...x_n^{-\frac{\gamma_n}{2}}U(x_1,...,x_n) \qquad (0.19)$$

является системой типа Уиттекера [2, с.135] и имеет нормально-регулярное решение вида

$$W_{\lambda,\mu_1,...,\mu_n}(x_1,...x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(-2\omega_1\mu_1)...\Gamma(-2\omega_n\mu_n)}{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}-\omega_1\mu_1-...-\omega_n\mu_n-k\right)}\cdot M_{k,\omega_1\mu_1...\omega_n\mu_n}, \qquad (0.20)$$

где справедливо представление

$$M_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1,\ldots x_n)=x_1^{\mu_1+\frac{1}{2}}\ldots x_n^{\mu_n+\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{x_1+\ldots+x_n}{2}\right)\times$$
$$\times\Psi_2\left(\mu_1+\ldots+\mu_n-k+\frac{n}{2},2\mu_1+1,\ldots,2\mu_n+1,x_1,\ldots x_n\right). \quad (0.21)$$

В качестве примера применения рассмотрены частные случаи $n=2, n=3$.

В пункте 1.3.1 рассматриваются возможности решения системы типа Уиттекера, состоящих из трех уравнений.

В пункте 1.3.2 приведены предварительные сведения о нормально-регулярном решении системы типа Уиттекера, а также построение решений вблизи регулярных и иррегулярных особенностей.

Пункт 1.3.3 посвящен построению логарифмических решений системы типа Уиттекера состоящих из трех уравнений.

Представление нормально-регулярного решения сформулировано в виде определения.

Определение 0.2. *Решение представляющее следующим рядом*

$$U(x_1,x_2,x_3)=\exp Q(x_1,x_2,x_3)x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\quad (A_{0,0,0}\neq 0), \quad (0.22)$$

называется нормально-регулярным решением, где $\rho_j\ (j=1,2,3)$, $A_{m_1,m_2,m_3}(m_1,m_2,m_3=0,1,2,\ldots)$ *– неизвестные постоянные;* $Q(x_1,x_2,x_3)$*–многочлен трех переменных*

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{\alpha_{p00}}{p}x_1^p+\frac{\alpha_{0p0}}{p}x_2^p+\frac{\alpha_{00p}}{p}x_3^p+\ldots+\alpha_{100}x_1+\alpha_{010}x_2+\alpha_{001}x_3 \quad (0.23)$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{p00},\alpha_{0p0},\ldots,\alpha_{001}$.

Доказана теорема о существовании нормально-регулярных решений системы типа Уиттекера.

Теорема 0.4. *Для того чтобы система типа Уиттекера, состоящая из трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*

$$x_j^2U_{x_jx_j}-x_j\sum_{r\neq j}x_rU_{x_r}+\left[-\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{(r\neq j)}x_r+kx_j+\frac{1}{4}-\mu_j^2\right]U=0,\ (j=1,2,3) \quad (0.24)$$

имела решения вида (0.22), необходимо выполнение условий:

1) $f^{(1,0,0)}(\alpha_{100},\alpha_{010},\alpha_{001})=\alpha_{100}^2-\dfrac{1}{4}=0$,

$f^{(0,1,0)}(\alpha_{100},\alpha_{010},\alpha_{001})=\alpha_{010}^2-\dfrac{1}{4}=0$,

$$f^{(0,0,1)}(\alpha_{100}, \alpha_{010}, \alpha_{001}) = \alpha_{001}^2 - \frac{1}{4} = 0\,; \qquad (0.25)$$

из которых определяются неизвестные постоянные многочлена (0.23).
2) необходимо, чтобы система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,0)$*:*

$$f_{000}^{(j)}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \equiv \rho_j(\rho_j - 1) + \frac{1}{4} - \mu^2 = 0, \,(j = 1,2,3) \qquad (0.26)$$

имела хотя бы одно решение вида $\left(\rho_1^{(l)}, \rho_2^{(l)}, \rho_3^{(l)}\right)$ $(l = 1,2)$.

Подраздел 2.1 **второго раздела** диссертационной работы посвящен изучению одной специальной системы состоящей из трех уравнений, связанной с вырожденными гипергеометрическими функциями и многочленами Лагерра многих переменных.

В пункте 2.1.1 раскрываются особенности применения метода Фробениуса-Латышевой к специальной системе, состоящей из трех уравнений

$$\begin{aligned} &x_1^2 p^{(0)} F_{x_1 x_1} + x_1 p^{(1)} F_{x_1} + x_2 p^{(2)} F_{x_2} + x_3 p^{(3)} F_{x_3} + p^{(4)} F = 0, \\ &x_1^2 q^{(0)} F_{x_1 x_1} + x_1 q^{(1)} F_{x_1} + x_2 q^{(2)} F_{x_2} + x_3 q^{(3)} F_{x_3} + q^{(4)} F = 0, \\ &x_1^2 g^{(0)} F_{x_1 x_1} + x_1 g^{(1)} F_{x_1} + x_2 g^{(2)} F_{x_2} + x_3 g^{(3)} F_{x_3} + g^{(4)} F = 0 \end{aligned} \qquad (0.27)$$

с коэффициентами вида

$$p^{(i)} = a_{000}^{(i)} + a_{100}^{(i)} x_1\,,\; q^{(i)} = b_{000}^{(i)} + b_{010}^{(i)} x_2\,,\; g^{(i)} = c_{000}^{(i)} + c_{001}^{(i)} x_3\,,\; i = \overline{0,4}$$

и построения решения в виде обобщенных регулярных степенных рядов трех переменных

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\rho_1} \cdot x_2^{\rho_2} \cdot x_3^{\rho_3} \cdot \sum_{m_1, m_2, m_3 = 0}^{\infty} C_{m_1, m_2, m_3} \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot x_3^{m_3}, \left(C_{0,0,0} \neq 0\right), \qquad (0.28)$$

где $F = F(x_1, x_2, x_3)$ – общая неизвестная, $\rho_j\ (j = 1,2,3), C_{m_1,m_2,m_3}\ (m_1, m_2, m_3 = 0,1,2,...)$ – неизвестные постоянные.

Решение системы с иррегулярной особенностью представляется в виде

$$F(x_1, x_2, x_3) = \exp Q(x_1, x_2, x_3) \cdot x_1^{\rho_1} \cdot x_2^{\rho_2} \cdot x_3^{\rho_3} \cdot \sum_{m_1, m_2, m_3 = 0}^{\infty} C_{m_1, m_2, m_3} \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot x_3^{m_3}, \left(C_{0,0,0} \neq 0\right), \qquad (0.29)$$

где $\rho_j\ (j = 1,2,3), C_{m_1,m_2,m_3}\ (m_1, m_2, m_3 = 0,1,2,...)$ – неизвестные постоянные; $Q(x_1, x_2, x_3)$ – полином трёх переменных x_1, x_2 и x_3.

Степень этого полинома определяется с помощью ранга $p = 1 + k$:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{\alpha_{p00}}{p}x_1^p+\frac{\alpha_{0p0}}{p}x_2^p+\frac{\alpha_{00p}}{p}x_3^p+\alpha_{000}x_1+\alpha_{010}x_2+\alpha_{001}x_3, \qquad (0.30)$$

где $\alpha_{p00},\alpha_{0p0},\alpha_{00p},\alpha_{p-1,00},...\alpha_{001}$ – неизвестные коэффициенты.

Величина ранга, p определяемая по наибольшим степеням коэффициентов системы равенством

$$p=1+k\,,\ k=\max\frac{\tau_s-\tau_0}{s},\ s=\overline{1,4} \qquad (0.31)$$

называется порядком ряда (0.29) и может быть целым и дробным (положительным и отрицательным).

В подразделе 2.2 определены системы характеристических функций Фробениуса

$$\begin{aligned}
L_1\left[x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\right]&\equiv x_1^{\rho_1-1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\left[f_{000}^{(1)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)+f_{111}^{(1)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)x_1\right],\\
L_2\left[x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\right]&\equiv x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2-1}x_3^{\rho_3}\left[f_{000}^{(2)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)+f_{111}^{(2)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)x_2\right],\\
L_3\left[x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\right]&\equiv x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3-1}\left[f_{000}^{(3)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)+f_{111}^{(3)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)x_3\right],
\end{aligned} \qquad (0.32)$$

где

$$\begin{aligned}
f_{000}^{(1)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=a_{000}^{(0)}\cdot\rho_1(\rho_1-1)+a_{000}^{(1)}\rho_1+a_{000}^{(2)}\rho_2+a_{000}^{(3)}\rho_3+a_{000}^{(4)},\\
f_{000}^{(2)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=b_{000}^{(0)}\cdot\rho_2(\rho_2-1)+b_{000}^{(1)}\rho_1+b_{000}^{(2)}\rho_2+b_{000}^{(3)}\rho_3+b_{000}^{(4)},\\
f_{000}^{(3)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=c_{000}^{(0)}\cdot\rho_3(\rho_3-1)+c_{000}^{(1)}\rho_1+c_{000}^{(2)}\rho_2+c_{000}^{(3)}\rho_3+c_{000}^{(4)},\\
f_{111}^{(1)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=a_{100}^{(0)}\cdot\rho_1(\rho_1-1)+a_{100}^{(1)}\rho_1+a_{100}^{(2)}\rho_2+a_{100}^{(3)}\rho_3+a_{100}^{(4)},\\
f_{111}^{(2)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=b_{010}^{(0)}\cdot\rho_2(\rho_2-1)+b_{010}^{(1)}\rho_1+b_{010}^{(2)}\rho_2+b_{010}^{(3)}\rho_3+b_{010}^{(4)},\\
f_{000}^{(3)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=c_{001}^{(0)}\cdot\rho_3(\rho_3-1)+c_{001}^{(1)}\rho_1+c_{001}^{(2)}\rho_2+c_{001}^{(3)}\rho_3+c_{001}^{(4)}
\end{aligned}$$

полученные путем подстановки в (0.26) вместо $F=x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot x_3^{\rho_3}$.

Используя вышеприведенные понятия в подразделе 2.2 раскрыты особенности применения метода Фробениуса-Латышевой к системам типа Лагерра состоящих из двух и трех уравнений. В данном случае, изучение многочлена Лагерра двух переменных связывается с вырожденными гипергеометрическими системами.

В пункте 2.2.2 установлена связь систем типа Лагерра с допустимыми уравнениями в частных производных второго порядка. Условия допустимости и классификация допустимых уравнений приведены в работах [35-37].

Изучены связь основной системы Лагерра с десятой нормальной формой допустимого уравнения. Она записывается в виде:

$$x_1Z_{x_1x_1}+x_2Z_{x_2x_2}+(Bx_1+d_{00})Z_{x_1}+(Bx_2+g_{00})Z_{x_2}=nBZ\,, \qquad (0.33)$$

где, $B,n,g_{00},d_{00}-const$.

Пункт 2.2.3 посвящается представлению многочленов Лагерра от трех переменных как решения специальной системы Горна (0.11) с параметрами $\gamma_1 = \alpha_1 + 1, \gamma_2 = \alpha_2 + 1, \gamma_3 = \alpha_3 + 1$:

$$x_j F_{x_j x_j} + \left(\alpha_j + 1 - x_j\right) F_{x_j} - \sum_{(k \neq j)} x_k F_{x_k} - \lambda F = 0, \ \left(j = \overline{1,3}\right), \tag{0.34}$$

где α_j $(j = 1,2,3)$ и λ – некоторые постоянные, $F(x_1, x_2, x_3)$ – общая неизвестная.

Особенности применения метода Фробениуса-Латышевой к построению таких систем были приведены в подразделе 2.1.1. Система (0.34) имеет восемь линейно-независимых частных решений. Из них, интересен решение F_1, которое при $\lambda = -n$ определяет полином Лагерра трёх переменных.

Подраздел 2.3 настоящего раздела посвящен построению вырожденной гиперегометрической функции сводящейся к функциям Бесселя двух переменных, а также исследованию некоторых свойств.

Справедлив следующий предельный переход

$${}_0F_1(;\gamma;x) = 1 + \frac{1}{\gamma}x + \frac{1}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots = \lim_{\alpha\to\infty}\left[1 + \frac{\alpha}{1!\gamma}\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{\alpha^2} + \ldots\right] = J(\gamma;x). \tag{0.35}$$

Сформулированы теоремы, обобщающие предельный переход (0.35) на случай вырожденной гипергеометрической функции двух переменных.

Теорема 0.5. *Вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта $\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)$ двух переменных с помощью предельного перехода приводится к виду*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2) = J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2) = J(\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2), \tag{0.36}$$

где $J(\gamma_j;x_j),(j=1,2)$ функции, сводящиеся к функциям Бесселя.

Теорема 0.6. *Функция Бесселя двух переменных первого рода представляется в виде*

$$J_{\gamma_1,\gamma_2}(x_1,x_2) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!\Gamma(\gamma_1+m_1+1)\Gamma(\gamma_2+m_2+1)}\cdot\left(\frac{x_1}{2}\right)^{2m_1+\gamma_1}\cdot\left(\frac{x_2}{2}\right)^{2m_2+\gamma_2}. \tag{0.37}$$

В подразделе 2.4 были установлены и изучены свойства систем с решениями в виде вырожденных гипергеометрических функций сводящейся к функциям Бесселя двух переменных. Далее установлена другая система типа Бесселя, также связанная с системой Горна и Уиттекера. Найдены нормально-регулярные решения родственных систем типа Уиттекера и Бесселя.

В подразделе 2.5 второго раздела показан вывод системы типа Лагерра родственные с системами Горна и Уиттекера, а также с помощью метода Фробениуса-Латышевой построены её нормально-регулярные решения.

Как были отмечены в предыдущих разделах 1 и 2, все известные специальные функции являются частными случаями нормально-регулярных решений. Это понятие распространено на случай функций многих переменных.

Раздел 3 состоит из двух подразделов.

В подразделе 3.1 рассмотрены возможности построения решения вырожденных гипергеометрических систем в виде ортогональных многочленов многих переменных Лагерра. Исследуется связь этих многочленов с частными решениями частных случаев вырожденной гипергеометрической системы Горна состоящей из трех уравнений

$$x_j F_{x_j x_j} + (\gamma_j - x_j) F_{x_j} - \sum_{(k \neq j)} x_k F_k - \lambda F = 0, \; j = \overline{1,3} \tag{0.38}$$

где γ_j и λ – const; $F(x_1, x_2, x_3)$ – искомая функция.

Частное решение системы (0.38) введем в виде определения.

Определение 0.3. *Функцией Гумберта $\Psi_2^{(3)}$ называется вырожденная гипергеометрическая функция трёх переменных x_j, $(j = \overline{1,3})$ определяемое с помощью ряда*

$$\Psi_2^{(3)} = \sum_{m_1, m_2, m_3 = 0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{m_1 + m_2 + m_3}}{(\gamma_1)_{m_1} \cdot (\gamma_2)_{m_2}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \frac{x_2^{m_2}}{m_2!} \cdot \frac{x_3^{m_3}}{m_3!}, \tag{0.39}$$

и являющиеся частным решением системы Горна (0.38).

Пункт 3.1.1 посвящен представлению функций Гумберта $\Psi_2^{(2)}$ в виде нормально-регулярного решения системы Горна:

$$\begin{aligned} x_1 Z_{x_1 x_1} + (\gamma_1 - x_1) Z_{x_1} - x_2 Z_{x_2} - \alpha Z = 0, \\ x_2 Z_{x_2 x_2} + (\gamma_2 - x_2) Z_{x_2} - x_1 Z_{x_1} - \alpha Z = 0. \end{aligned} \tag{0.40}$$

Определение 0.4. *Функцией Гумберта $\Psi_2^{(2)}$ называется вырожденная гипергеометрическая функция двух переменных x_j, $(j = 1,2)$ определяемое с помощью ряда*

$$\Psi_2^{(2)} = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{m_1 + m_2}}{(\gamma_1)_{m_1} \cdot (\gamma_2)_{m_2}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \frac{x_2^{m_2}}{m_2!}, \tag{0.41}$$

и являющиеся частным решением системы Горна (0.40).

Определение 0.5. *Решение вида*

$$W(x_1, x_2) = \exp(\alpha_{1,0} \cdot x_1 + \alpha_{0,1} \cdot x_2) \cdot x_1^{\rho_1} \cdot x_2^{\rho_2} \cdot \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} A_{m_1, m_2} \cdot x_1^{\rho_1} \cdot x_2^{\rho_2}, A_{0,0} \neq 0 \tag{0.42}$$

называется нормально-регулярным решением двух переменных системы (0.40), где $\rho = 1,2, A_{m_1,m_2}(m_1, m_2 = 0,1,2,...)$, $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ *– неизвестные постоянные.*

Функция Гумберта (0.41) является частным случаем нормально-регулярного решения, получающиеся при $\alpha_{1,0} = 0$, $\alpha_{0,1} = 0$. Она представляет регулярное решение вблизи особенности (0,0). Следующая теорема устанавливает нормально-регулярные решения системы Горна (0.40).

Теорема 0.7. *Пусть вспомогательная система*

$$\begin{gathered}
x_1 \cdot U_{x_1,x_1} + (2\alpha_{1,0} \cdot x_1 + \gamma - x_1) \cdot U_{x_1} - x_2 \cdot U_{x_2} + \\
+[(\alpha_{1,0}^2 - \alpha_{1,0}) \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot \alpha_{1,0} - \alpha_{0,1} \cdot x_2 - \lambda] \cdot U = 0, \\
x_2 \cdot U_{x_2,x_2} + (2\alpha_{0,1} \cdot x_2 + \gamma_2 - x_2) \cdot U_{x_2} - x_1 \cdot U_{x_1} + \\
+[(\alpha_{0,1}^2 - \alpha_{0,1}) \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot \alpha_{0,1} - \alpha_{1,0} \cdot x_1 - \lambda] \cdot U = 0
\end{gathered} \tag{0.43}$$

получена из системы Горна (0.40) с помощью преобразования

$$W(x_1, x_2) = \exp(\alpha_{1,0} \cdot x_1 + \alpha_{0,1} \cdot x_2) \cdot U(x_1, x_2). \tag{0.44}$$

Тогда при выполнении двух необходимых условий

$$\alpha_{1,0}^2 - \alpha_{1,0} = 0, \alpha_{0,1}^2 - \alpha_{0,1} = 0, \tag{0.45}$$

$$f_{0,0}^{(j)}(\rho_1, \rho_2) = \rho_j \cdot (\rho_j - 1 + \gamma_j) = 0 \tag{0.46}$$

система (0.43) имеет два решения в виде нормально-регулярных рядов:

$$\begin{gathered}
W_3(x_1, x_2) = \exp(x_2) \cdot \{1 + \frac{\lambda}{\gamma_1} \cdot x_1 - \frac{\gamma_2 - \lambda}{\gamma_2} \cdot x_2 + \\
+ \frac{\lambda(\lambda + 1 - \gamma_2)}{\gamma_1 \cdot \gamma_2} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{\lambda \cdot (\lambda + 1)}{\gamma_1 \cdot (\gamma_1 + 1)} \cdot \frac{x_1^2}{2!} + \frac{(\gamma_2 - \lambda) \cdot (\gamma_2 + 1 - \lambda)}{\gamma_2 \cdot (\gamma_2 + 1)} \cdot \frac{x_2^2}{2!} + ...\},
\end{gathered} \tag{0.47}$$

$$\begin{gathered}
W_4(x_1, x_2) = \exp(x_1) \cdot \{1 - \frac{\gamma_1 - \lambda}{\gamma_1} \cdot x_1 + \frac{\lambda}{\gamma_2} \cdot x_2 + \\
+ \frac{\lambda(\lambda + 1 - \gamma_1)}{\gamma_1 \cdot \gamma_2} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{(\gamma_1 - \lambda) \cdot (\gamma_1 + 1 - \lambda)}{\gamma_1 \cdot (\gamma_1 + 1)} \cdot \frac{x_1^2}{2!} + \frac{\lambda \cdot (\lambda + 1)}{\gamma_2 \cdot (\gamma_2 + 1)} \cdot \frac{x_2^2}{2!} + ...\},
\end{gathered} \tag{0.48}$$

где $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ *- неизвестные постоянные.*

В 3.1.2 приведено представление функций Гумберта в виде нормално-регулярного решения системы Горна.

В пункте 3.1.3 раскрыта связь многочленов Лагерра с нормально-регулярными решениями (0.47), (0.48).

В пункте 3.1.4 показано применение полученных результатов, где рассматривается задача, связанная с решением параболического уравнения с двумя линиями вырождения и требуется построить нормально-регулярного решения уравнения

$$LU \equiv U_t - U_{xx} - U_{yy} - \frac{2\alpha}{x}\cdot U_x - \frac{2\beta}{y}\cdot U_y = 0,\ \alpha,\beta = const \tag{0.49}$$

в области $\Omega = \{(x,y,z): x>0, y>0, z>0\}$.

После применения преобразований, задача приводится к построению решения системы

$$\begin{gathered}\xi\cdot W_{\xi\xi} + \left(\frac{1+2\alpha}{2} - \xi\right)\cdot W_\xi - \eta\cdot W_\eta - \frac{1}{2}\cdot W = 0,\\ \eta\cdot W_{\eta\eta} + \left(\frac{1+2\beta}{2} - \eta\right)\cdot W_\eta - \xi\cdot W_\xi - \frac{1}{2}\cdot W = 0,\end{gathered} \tag{0.50}$$

где введены обозначения $\xi = -\frac{x_1^2}{8t}, \eta = -\frac{x_2^2}{8t}$. С учетом введенных обозначений частное решение системы (0.50) получено в виде

$$W_1 = C_1\cdot\Psi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1+2\alpha}{2},\frac{1+2\beta}{2};\xi,\eta\right) = C_1\cdot\Psi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1+2\alpha}{2},\frac{1+2\beta}{2};-\frac{x^2}{8t},\frac{y^2}{8t}\right). \tag{0.51}$$

Кроме решения (0.51), система (0.50) имеет две нормально-регулярных решений вида:

$$\begin{gathered}W_5(\xi,\eta) = \exp(\xi)\cdot\left\{1 - \frac{2\alpha}{1+2\alpha}\cdot\xi + \frac{1}{1+2\beta}\cdot\eta - \frac{2(\alpha-1)}{(1+2\alpha)(1+2\beta)}\cdot\xi\eta + \right.\\ \left. + \frac{4\alpha(\alpha+1)}{(1+2\alpha)(3+2\alpha)}\cdot\frac{\xi^2}{2!} + \frac{1\cdot 3}{(1+2\beta)(3+2\beta)}\cdot\frac{\eta^2}{2!} + \ldots\right\},\\ W_6(\xi,\eta) = \exp(\eta)\cdot\left\{1 + \frac{1}{1+2\alpha}\cdot\xi - \frac{2\beta}{1+2\beta}\cdot\eta - \frac{2(\beta-1)}{(1+2\alpha)(1+2\beta)}\cdot\xi\eta + \right.\\ \left. + \frac{1\cdot 3}{(1+2\alpha)(3+2\alpha)}\cdot\frac{\xi^2}{2!} + \frac{4\beta(\beta+1)}{(1+2\beta)(3+2\beta)}\cdot\frac{\eta^2}{2!} + \ldots\right\}.\end{gathered}$$

В следующем пункте 3.1.4 установлена связь между многочленом Лагерра трех переменных и нормально-регулярными решениями системы

$$x_j W_{x_j x_j} + (\alpha_j + 1 - x_j)W_{x_1} - \sum_{k\neq j} x_k W_{x_k} - \lambda W = 0, \quad (j = \overline{1,3}), \tag{0.52}$$

а также приведены свойства решения системы (0.52) в виде теорем.

В пункте 3.1.5 обобщается, вышеприведенные результаты на случай системы типа Лагерра n переменных.

Подраздел 3.2 **третьего раздела** посвящен к исследованию возможности построения нормально-регулярных решений вырожденных систем, полученных из систем Лауричелла (F_D), найти необходимые условия существования нормально-регулярных решений, выявить свойства связанных с функциями Горна двух и более переменных, установить связь рассматриваемых рядов с вновь введенными функциями В.И.Художникова $\Phi_D\left(\begin{matrix}\alpha,(\beta_k)\\ \gamma\end{matrix}\Big|(z_{k+1})\right)$ [76].

В пункте 3.2.1 построены нормально-регулярные решения вырожденных систем, полученных из систем Лауричелла (F_D):

$$(1-z_i)\sum_{j=1}^{n} z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-(\alpha+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\beta_i\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha\frac{\partial w}{\partial z_i}-\beta_j w=0, \tag{0.53}$$

решением, которой является функция Лауричелла

$$F_D\left(\begin{matrix}\alpha,(\beta_n)\\ \gamma\end{matrix}\Big|(z_n)\right)=\sum_{i_1,\dots,i_n}\frac{(\alpha)_{\sum i_n}\prod(\beta_n)i_n}{(\gamma)_{\sum i_n}}\cdot\prod\frac{(z_n)^{i_n}}{i_n!}.$$

В.И. Художников совершая предельные переходы по параметру β_i в последних $n-k$ уравнениях системы (0.53) представил её в виде следующей вырожденной гипергеометрической системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&(1-z_i)\sum_{j=1}^{n} z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-(\alpha+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\beta_i\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha\beta_i w=0,\ i=\overline{1,k},\\ &\sum_{j=1}^{n} z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha w=0,\ i=\overline{k+1,n}\end{aligned} \tag{0.54}$$

Решением системы (0.54) является введенная функция [76, с.842]:

$$\Phi_D\left(\begin{matrix}\alpha,(\beta_k)\\ \gamma\end{matrix}\Big|(z_{k+1})\right)=\sum_{i_1,\dots,i_{k+1}}\frac{(\alpha)_{\sum i_{k+1}}\prod(\beta_k)i_k}{(\gamma)_{\sum i_{k+1}}}\cdot\prod\frac{(z_{k+1})^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!}.$$

В пункте 3.2.2 изучены нормально-регулярные решения вырожденной системы Горна (Φ_1):

$$\begin{cases}z_1(1-z_1)w_{z_1z_1}+z_2(1-z_1)w_{z_1z_2}+[\gamma-(\alpha+\beta_1+1)z_1]w_{z_1}-\beta_1 z_2 w_{z_2}-\alpha\beta_1 w=0,\\ z_2 w_{z_2z_2}+z_1 w_{z_1z_2}+(\gamma-z_2)w_{z_2}-z_1 w_{z_1}-\alpha w=0\end{cases} \tag{0.55}$$

являющейся частным случаем системы (0.54) полученная из нее при $n=2$.

Теорема 0.8 *Система (0.55) имеет три линейно-независимых частных решения, одним из которых является выражденная гипергеометрическая функция* (Φ_1).

Приводится некоторые свойства системы (0.55), которые необходимые для построения решений.

Все вырожденные уравнения имеют особую точку (иррегулярную) $z_1 = +\infty$ [35]. Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (0.55) имеет иррегулярную особенность $(-\infty, +\infty)$ [26].
Справедливо утверждение.

Теорема 0.9. *Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (0.55), при выполнений двух необходимых условий*

$$f_{1,0}^{(1)}(\alpha_{10}, \alpha_{01}) = \alpha_{10}^2 = 0, \ f_{0,1}^{(2)}(\alpha_{10}, \alpha_{01}) = \alpha_{01}^2 - \alpha_{01} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f_{0,0}^{(1)}(\rho_1, \rho_2) \equiv \rho_1(\rho_1 - 1 + \rho_2 + \gamma) = 0, \\ f_{0,0}^{(2)}(\rho_1, \rho_2) \equiv \rho_2(\rho_2 - 1 + \rho_1 + \gamma) = 0, \end{aligned}\right\}$$

имеет нормально-регулярное решение вида

$$w_4(z_1, z_2) = e^{z_2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m (\gamma - \alpha)_n}{(\gamma)_{m+n}} \frac{z_1^m}{m!} \frac{(-z_2)^n}{n!}. \tag{0.57}$$

Для доказательства теоремы применяется обобщенный метод Фробениуса-Латышевой.

В пункте 3.2.3 исследуется возможности существования нормально-регулярных решений вблизи конечных особенностей системы состоящих из трех уравнений вида

$$\begin{aligned} &(1 - z_i)\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - (\alpha + \beta_i + 1) z_i] \frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha\beta_i w = 0, \ i = \overline{1,k}, \\ &\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - z_i] \frac{\partial w}{\partial z_i} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha w = 0, \ i = \overline{k+1, n} \ \ j = \overline{1,3}. \end{aligned} \tag{0.58}$$

Отметим, что последние два вырожденные уравнения системы (0.58) получены путем предельного перехода из (0.54).

Теорема 0.10. *Вырожденная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (0.58), полученных путем предельного перехода из системы Лауричелла* (F_D), *вблизи регулярной особенности* $(0,0,0)$ *имеет* 2^3 *линейно-независимых частных решений, одним из которых является вырожденная функция от трёх переменных*

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\gamma}/(z_3)\right)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}. \quad (0.59)$$

Для доказательства применяется обобщенный метод Фробениуса-Латышевой.

В пункте 3.2.4 доказаны свойства общей вырожденной системы Лауричелла (F_D) и нормально-регулярными решениями выражающиеся через функцию Художникова.

Обобщение результатов полученных в 3.2.2 позволяет нам сформулировать общую теорему относительно существования нормально-регулярных решений системы (0.54).

Теорема 0.11. *Вырожденная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (0.54) имеет* $n-1$ *нормально-регулярных решений вида*

$$w_1(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_2}\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}...\frac{z_n^{m_n}}{m_n!},$$

……………………………………

$$w_{n-1}(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_n}\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_{n-1}}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{(-z_n)^{m_n}}{m_n!}. \quad (0.60)$$

Таким образом, нормально-регулярные решения наиболее общей вырожденной системы (0.54) представляются в виде (0.60). Для доказательства теоремы 0.11 применяется обобщенный метод Фробениуса-Латышевой.

Из исследованных задач и полученных результатов следует, что диссертационная работа посвящена к приоритетному направлению теории дифференциальных уравнений в частных производных и специальным функциям.

1 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ТИПА УИТТЕКЕРА ВБЛИЗИ ОСОБЫХ КРИВЫХ

1.1 О методе построения решений систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вблизи особых кривых

В настоящей главе приводятся краткие сведения об особых кривых системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} P_0(x,y)\cdot Z_{xx} + P_1(x,y)\cdot Z_y + P_2(x,y)\cdot Z = 0, \\ Q_0(x,y)\cdot Z_{yy} + Q_1(x,y)\cdot Z_x + Q_2(x,y)\cdot Z = 0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

и построение их решений вблизи установленных особых кривых, где коэффициенты $P_i = P_i(x,y)$ и $Q_i = Q_i(x,y)$, $(i = 1, 2)$ – аналитические функции или многочлены двух переменных. Такие системы называются системами типа Уиттекера. В начале рассматриваются системы, состоящие из двух уравнений.

Некоторые сведения об особенностях более общих систем приводятся в работах П. Аппеля и Э. Айнса. Так, Э. Айнс установил, что особые кривые системы вида

$$\begin{cases} p_0\cdot Z_{xx} + p_1\cdot g_4\cdot Z_{xy} + p_2\cdot Z_x + g_5\cdot Z_y + p_3\cdot Z = 0, \\ g_0\cdot Z_{yy} + g_1\cdot p_4\cdot Z_{xy} + p_5\cdot Z_x + g_2\cdot Z_y + g_3\cdot Z = 0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

определяются коэффициентами при вторых частных производных, где коэффициенты $p_j = p_j(x)$ и $g_j = g_j(y)$ $(j = \overline{0,5})$ – многочлены от x и y:

$$\begin{aligned} p_j(x) &= \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu^{(j)}\cdot x^\mu, \qquad && (a_0^{(j)} \neq 0), \\ g_j(y) &= \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu^{(j)}\cdot y^\nu, \qquad && (b_0^{(j)} \neq 0; \quad j = \overline{0,5}). \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Кроме того, требуется выполнение условий совместности и условия интегрируемости

$$1 - \frac{p_1\cdot g_4}{p_0}\cdot\frac{g_1\cdot p_4}{g_0} \neq 0. \tag{1.1.4}$$

Это условие для системы (1.1.1) всегда выполняется. При выполнении условия совместности и условия (1.1.4) система Айнса (1.1.2)-(1.1.3) имеет четыре линейно-независимых частных решения $Z_k(x,y)$ $(k=\overline{1,4})$. Эти решения симметричны по независимым переменным *x* и *y*, а общее решение системы представляется в виде

$$Z(x,y)=C_1\cdot Z_1(x,y)+C_2\cdot Z_2(x,y)+C_3\cdot Z_3(x,y)+C_4\cdot Z_4(x,y), \tag{1.1.5}$$

то есть общее решение системы Айнса зависит от четырёх произвольных постоянных.

В системе Айнса (1.1.2) с коэффициентами (1.1.3) особые кривые определяются приравниванием к нулю коэффициентов из первого уравнения $p_0(x)\equiv 0$ и $p_1(x)\cdot g_4(y)\equiv 0$, а из второго уравнения $g_0(y)\equiv 0$ и $p_4(x)\cdot g(y)_1\equiv 0$.

Каждое из них является многочленом от одной переменной. Поэтому, в общем случае можно установить их корни, являющиеся особенностями первого и второго уравнения системы (1.1.2). Из них определяются особенности системы (1.1.2). Этот случай является наиболее изученным. Я. Горном составлены 34 системы, решениями которых являются гипергеометрические функции двух переменных. Таким путем найдены их особые кривые. Однако построение решений вблизи установленных особых кривых остается нерешенной проблемой, поскольку не удается построить всю фундаментальную систему решений каждого из них. Только для системы Аппеля (F_1) установлены 120 частных решений. Отсюда возникает необходимость установления всевозможных особых кривых и изучение возможности построения решений вблизи этих особенностей, а также умение классифицировать регулярные и иррегулярные особенности изучаемых систем.

Материалы этого раздела опубликованы в [78], [83], [85], [89], [93].

Приступим к классификации особых кривых систем типа Уиттекера, состоящей из двух уравнений.

Рассмотрим простую систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Уиттекера

$$\begin{cases} x^2\cdot\left(a_{00}^{(0)}+a_{10}^{(0)}\cdot x\right)\cdot Z_{xx}+y\cdot\left(a_{00}^{(1)}+a_{10}^{(1)}\cdot x\right)\cdot Z_y+\left(a_{00}^{(2)}+a_{10}^{(2)}\cdot x\right)\cdot Z=0,\\ y^2\cdot\left(b_{00}^{(0)}+b_{01}^{(0)}\cdot y\right)\cdot Z_{yy}+x\cdot\left(b_{00}^{(1)}+b_{01}^{(1)}\cdot y\right)\cdot Z_x+\left(b_{00}^{(2)}+b_{01}^{(2)}\cdot y\right)\cdot Z=0\end{cases} \tag{1.1.6}$$

с постоянными коэффициентами $a_{00}^{(i)}$, $a_{10}^{(i)}$, $b_{00}^{(i)}$ и $b_{01}^{(i)}$, $\left(i=\overline{0,2}\right)$.

В этом случае, первое уравнение системы (1.1.6) имеет особенности $x=0$, $x=-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)}$, $x=\infty$, а второе уравнение – $y=0$, $y=-b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)}$, $y=\infty$. Пары (0; 0), $\left(0;-b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)}\right)$, $\left(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)};0\right)$, $\left(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)};-b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)}\right)$, $(0;\infty)$, $(\infty;0)$, $\left(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)};\infty\right)$, $\left(\infty;-b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)}\right)$, $(\infty;\infty)$ составляют особенности системы (1.1.6). Для такой системы установлен простой признак классификации особенностей [25].

Правило 1.1.1. *Если* $a_{00}^{(0)}\neq 0$ *и* $b_{00}^{(0)}\neq 0$, *то особенность* $(0{,}0)$ *для системы (1.1.6) является регулярной и система (1.6) имеет регулярное решение вида*

$$Z(x,y)=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{m,n}\cdot x^{m}\cdot y^{n}\qquad(A_{00}\neq 0)\tag{1.1.7}$$

Если $a_{00}^{(0)}=0$ и $b_{00}^{(0)}=0$, то особенность $(0,0)$ является иррегулярной, а система (1.1.6) имеет нормально-регулярное решение вида

$$Z(x,y)=e^{Q(x,y)}\cdot x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{m,n}\cdot x^{m}\cdot y^{n}\qquad(A_{00}\neq 0),\tag{1.1.8}$$

где ρ, σ, $A_{m,n}$ $(m,n=0,1,2,...)$ – неизвестные постоянные; $Q(x,y)$ – многочлен двух переменных:

$$Q(x,y)=\frac{\alpha_{p0}}{p}\cdot x^{p}+\frac{\alpha_{0p}}{p}\cdot y^{p}+...+\alpha_{11}\cdot x\cdot y+\alpha_{10}\cdot x+\alpha_{01}\cdot y\tag{1.1.9}$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{p0},\alpha_{0p},...,\alpha_{11},\alpha_{10}$ и α_{01}.

Правило 1.1.2. *Если* $a_{10}^{(0)}\neq 0$ *и* $b_{01}^{(0)}\neq 0$*, то особенность* $(\infty;\infty)$ *для системы (1.1.6) является регулярной, и она имеет регулярное решение вида*

$$Z(x,y)=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{m,n}\cdot x^{-m}\cdot y^{-n}\qquad(A_{00}\neq 0).\tag{1.1.10}$$

Если $a_{10}^{(0)}=0$ и $b_{01}^{(0)}=0$, то изучаемая система имеет иррегулярную особенность (∞,∞), а её решение представляется в виде нормального ряда

$$Z(x,y)=e^{Q(x,y)}\cdot x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}B_{m,n}\cdot x^{-m}\cdot y^{-n}\qquad(B_{00}\neq 0),\tag{1.1.11}$$

где ρ, σ, $A_{m,n}$ $(m,n=0,1,2,...)$ – неизвестные постоянные; $Q(x,y)$ – многочлен в решениях (1.1.8) и (1.1.10) одинаковый. Степень его равна рангу системы.

Остальные особенности с помощью преобразования можно привести к этим двум случаям, поэтому их отдельно рассматривать не будем. Все системы Горна имеют особенности вышеприведенного вида, то есть рассуждения этого пункта справедливы и для наиболее общих случаев таких систем, в частности для систем вида Айнса.

Определим систему характеристических функций Фробениуса

$$\begin{aligned}L_1[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}]&\equiv x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\left\{f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)+f_{10}^{(1)}(\rho,\sigma)x\right\},\\ L_2[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}]&\equiv x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\left\{f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)+f_{01}^{(2)}(\rho,\sigma)y\right\}.\end{aligned}\tag{1.1.12}$$

Из системы (1.1.12) следует, что система определяющих уравнений относительно особенности $(0{,}0)$ имеет вид: $f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)=0$, $f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)=0$.

Из (1.1.12) получим систему

$$
\begin{aligned}
&L_1[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}]\equiv x^{\rho+1}\cdot y^{\sigma}\cdot\left\{f_{10}^{(1)}(\rho,\sigma)+\frac{f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)}{x}\right\}=x^{\rho+1}\cdot y^{\sigma}\cdot\left\{\varphi_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)+\frac{\varphi_{10}^{(1)}(\rho,\sigma)}{x}\right\},\\
&L_2[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}]\equiv x^{\rho}\cdot y^{\sigma+}\cdot\left\{f_{01}^{(1)}(\rho,\sigma)+\frac{f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)}{y}\right\}=x^{\rho}\cdot y^{\sigma+}\cdot\left\{\varphi_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)+\frac{\varphi_{01}^{(1)}(\rho,\sigma)}{y}\right\}.
\end{aligned}
\tag{1.1.13}
$$

Отсюда заметим, что система определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞) имеет вид

$$
\begin{cases}
f_{10}^{(1)}(\rho,\sigma)=\varphi_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)=a_{10}^{(0)}\cdot\rho\cdot(\rho-1)+a_{10}^{(1)}\cdot\sigma+a_{10}^{(2)}=0,\\
f_{01}^{(1)}(\rho,\sigma)=\varphi_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)=b_{01}^{(0)}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1)+b_{01}^{(1)}\cdot\rho+b_{01}^{(2)}=0.
\end{cases}
\tag{1.1.14}
$$

В этом случае одновременно можно построить решения (1.1.7) и (1.1.10), если особенности регулярные. В противном случае существуют решения вида (1.1.8) и (1.1.11). Однако, построение нормально-регулярного решения (1.1.10) и нормального решения (1.1.11) требует дополнительных исследований.

Пример 1.1.1 Система вида

$$
\begin{cases}
x^2\cdot Z_{xx}-3\cdot y\cdot Z_y+4\cdot Z=0,\\
y^2\cdot Z_{yy}-3\cdot x\cdot Z_x+4\cdot Z=0
\end{cases}
\tag{1.1.15}
$$

называется *системой типа Эйлера*. Найдем решения системы (1.1.15). Система характеристических функций имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&L_1[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}]\equiv x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\{\rho\cdot(\rho-1)-3\cdot\sigma+4\}=0,\\
&L_2[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}]\equiv x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\{\sigma\cdot(\sigma-1)-3\cdot\rho+4\}=0.
\end{aligned}
$$

Для системы (1.1.15) системы определяющих уравнений относительно особенностей $(0{,}0)$ и (∞,∞) совпадают:

$$
\begin{cases}
\varphi_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)\equiv f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)\equiv\rho\cdot(\rho-1)-3\sigma+4=0,\\
\varphi_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)\equiv f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)\equiv\sigma\cdot(\sigma-1)-3\rho+4=0.
\end{cases}
$$

Эта система имеет двукратный корень $(\rho_{1,2}=2;\sigma_{1,2}=2)$ и комплексный сопряженный корень $(\rho_{3,4}=-1\pm3\cdot i;\ \sigma_{3,4}=-1\pm3\cdot i)$. Запишем решения, соответствующие действительным корням: $Z_1(x,y)=x^2\cdot y^2$, $Z_2(x,y)=x^2\cdot y^2\cdot\ln x\cdot\ln y$. Проверка показывает, что решение $Z_2(x,y)$

удовлетворяет системе только при положительных значениях $x = y \; (x > 0, y > 0)$. Первое решение особенностей не имеет.
Система дифференциальных уравнений (1.1.6) имеет ещё ряд частных случаев.

Пример 1.1.2. Пусть коэффициенты системы (1.1.6) – многочлены вида

$$\begin{cases} p_i(x,y) = a_{00}^{(i)} + a_{10}^{(i)} \cdot x + a_{01}^{(i)} \cdot y, \\ g_i(x,y) = b_{00}^{(i)} + b_{10}^{(i)} \cdot x + b_{01}^{(i)} \cdot y, \qquad (i = 0,1,2). \end{cases} \tag{1.1.16}$$

Тогда, особыми кривыми системы (1.1.6) с коэффициентами вида (1.1.16) являются, как и в предыдущем случае прямые или пересечение прямых $(x = 0; y = 0)$, $\left(x = 0; y = -b_{00}^{(0)} / b_{01}^{(0)}\right)$, $\left(x = -a_{00}^{(0)} / a_{10}^{(0)}; y = 0\right)$, $(x = 0; y = \infty)$, $(x = \infty; y = 0)$, $(x = \infty; y = \infty)$, а также решения системы

$$\begin{cases} a_{10}^{(0)} \cdot x + a_{01}^{(0)} \cdot y + a_{00}^{(0)} = 0, \\ b_{10}^{(0)} \cdot x + b_{01}^{(0)} \cdot y + b_{00}^{(0)} = 0. \end{cases}$$

Эти особые кривые определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных Z_{xx} и Z_{yy}:

$$\begin{cases} x^2 \cdot \left(a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)} \cdot x + a_{01}^{(0)} \cdot y\right) = 0, \\ y^2 \cdot \left(b_{00}^{(0)} + b_{10}^{(0)} \cdot x + b_{01}^{(0)} \cdot y\right) = 0. \end{cases}$$

Система характеристических уравнений запишется в виде

$$L_j[x^\rho \cdot y^\sigma] \equiv x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \left\{ f_{00}^{(j)}(\rho,\sigma) + f_{10}^{(j)}(\rho,\sigma) \cdot x + f_{01}^{(j)}(\rho,\sigma) \cdot y \right\} \qquad (j = 1,2).$$

Отсюда удается определить только систему определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$, поэтому изучаемая система имеет решение вида (1.1.7).

Пример 1.1.3. Допустим, что коэффициенты системы (1.1.6) многочлены

$$\begin{aligned} p_i(x,y) &= a_{00}^{(i)} + a_{10}^{(i)} \cdot x + a_{01}^{(i)} \cdot y + a_{11}^{(i)} \cdot xy, \\ g_i(x,y) &= b_{00}^{(i)} + b_{10}^{(i)} \cdot x + b_{01}^{(i)} \cdot y + b_{11}^{(i)} \cdot xy \qquad (i = 0,1,2). \end{aligned}$$

Особые кривые определяются из системы

$$\begin{cases} x^2 \cdot \left(a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)} \cdot x + a_{01}^{(0)} \cdot y + a_{11}^{(0)} \cdot xy\right) = 0, \\ y^2 \cdot \left(b_{00}^{(0)} + b_{10}^{(0)} \cdot x + b_{01}^{(0)} \cdot y + b_{11}^{(0)} \cdot xy\right) = 0, \end{cases} \tag{1.1.17}$$

полученной приравниванием нулю коэффициентов при Z_{xx} и Z_{yy} системы (1.1.6) с коэффициентами вида (1.1.17). Тогда, особые кривые определяются из следующих систем:

а) $\begin{cases} x^2 = 0, \\ y^2 = 0 \end{cases}$ особенность $(x = 0;\ y = 0)$;

б) совместно решается система

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ b_{00}^{(0)} + b_{10}^{(0)} \cdot x + b_{01}^{(0)} \cdot y + b_{11}^{(0)} \cdot xy = 0 \end{cases} \qquad \text{особенность} \quad (x = 0;\ y = -b_{00}^{(0)} / b_{01}^{(0)});$$

в) особенность определяется из системы

$$\begin{cases} a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)} \cdot x + a_{01}^{(0)} \cdot y + a_{11}^{(0)} \cdot xy = 0, \\ y^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{особенность} \quad (x = -a_{00}^{(0)} / a_{10}^{(0)};\ y = 0);$$

г) совместно решается система

$$\begin{cases} a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)} \cdot x + a_{01}^{(0)} \cdot y + a_{11}^{(0)} \cdot xy = 0, \\ b_{00}^{(0)} + b_{10}^{(0)} \cdot x + b_{01}^{(0)} \cdot y + b_{11}^{(0)} \cdot xy = 0 \end{cases}$$

особенности определяются путем исключения независимых переменных из первого и второго уравнения этой системы поочередно. Далее, особенности определяем как решения квадратных уравнений.

Система характеристических функций

$$L_j[x^\rho \cdot y^\sigma] \equiv x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \left\{ f_{00}^{(j)}(\rho,\sigma) + f_{10}^{(j)}(\rho,\sigma) \cdot x + f_{01}^{(j)}(\rho,\sigma) \cdot y + f_{11}^{(j)}(\rho,\sigma) \cdot xy \right\} \quad (j = 1, 2)$$

допускает обе системы определяющих уравнений. Поэтому, одновременно существуют решения вида (1.1.8) и (1.1.10) при выполнении необходимых условий. Кроме этого правые части системы определяющих уравнений не должны равняться постоянным. В противном случае заданная система не имеет решения вблизи вышеприведенных особенностей.

Среди систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, состоящих из двух уравнений, особо выделяется система вида:

$$\left. \begin{aligned} P^{(0)}(x,y) \cdot Z_{xx} + P^{(1)}(x,y) \cdot Z_y + P^{(2)}(x,y) \cdot Z = 0, \\ Q^{(0)}(x,y) \cdot Z_{yy} + Q^{(1)}(x,y) \cdot Z_x + Q^{(2)}(x,y) \cdot Z = 0 \end{aligned} \right\}, \tag{1.1.18}$$

где коэффициенты $P^{(i)}(x,y)$ и $Q^{(i)}(x,y)$ $(i = 0,1,2)$ - многочлены двух переменных

$$P^{(i)}(x,y)=\sum_{k,l=0}^{m,n} a_{k,l}^{(i)}\cdot x^k\cdot y^l,$$
$$Q^{(i)}(x,y)=\sum_{k,l=0}^{m,n} b_{k,l}^{(i)}\cdot x^k\cdot y^l,\quad (i=0,1,2). \tag{1.1.19}$$

Важный частный случай этой системы

$$\begin{aligned} &x^2\cdot Z_{xx}-xy\cdot Z_y+\left(-\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{2}+kx+\frac{1}{4}-\mu^2\right)Z=0,\\ &y^2\cdot Z_{yy}-xy\cdot Z_x+\left(-\frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2}+ky+\frac{1}{4}-\nu^2\right)Z=0, \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

где $k,\mu,\nu-$некоторые постоянные, был изучен Э.Т. Уиттекером [21, с.132], поэтому система вида (1.1.20) называется *системой типа Уиттекера*. Для построения решения вблизи особых кривых был применен метод Фробениуса-Латышевой. Система Уиттекера (1.1.20) была получена из системы Горна

$$\begin{aligned} &x\cdot Z_{xx}+(\gamma-x)\cdot Z_x-y\cdot Z_y-\lambda Z=0,\\ &x\cdot Z_{yy}+(\gamma'-y)\cdot Z_y-x\cdot Z_x-\lambda Z=0 \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

с помощью преобразования

$$Z(x,y)=\exp\left(-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)W(x,y).$$

Частным решением системы Горна (1.1.21) является вырожденная гипергеометрическая функция М.П. Гумберта, которая определяется с помощью ряда двух переменных:

$$\Psi_2(\alpha,\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}}{(\gamma)_m\cdot(\gamma')_n}\cdot\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!}. \tag{1.1.22}$$

Ряд (1.1.22) сходится абсолютно и равномерно в области $|x|<\infty,|y|<\infty$.

Регулярность и иррегулярность особенностей системы устанавливаются с помощью понятия ранга и антиранга. В дальнейшем в зависимости от формы задания систем все вышеприведенные понятия следуют распространить на системы, состоящие из n уравнений. Приведенные примеры показывают, что системы Горна и Уиттекера тесно связаны. В качестве исходной системы примем системы типа Горна. Она является связывающей системой всех родственных систем.

1.2 Об особых кривых общей вырожденной гипергеометрической системы

Введем на рассмотрение систему, состоящую из n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$
\begin{aligned}
& x_j^2\left[r_{20}^{(j)}-\alpha_{20}^{(j)}x_j\right]F_{x_jx_j}+x_j\left[r_{10}^{(j)}-\alpha_{10}^{(j)}x_j\right]F_{x_j}+ \\
& +\left[r_{01}^{(j)}-\alpha_{01}^{(j)}x_j\right]\sum_{k\neq j}x_kF_{x_k}+\left[r_{00}^{(j)}-\alpha_{00}^{(j)}x_j\right]F=0
\end{aligned}
\tag{1.2.1}
$$

где $r_{20}^{(j)},r_{10}^{(j)},r_{01}^{(j)},r_{00}^{(j)},\alpha_{20}^{(j)},\alpha_{10}^{(j)},\alpha_{01}^{(j)},\alpha_{00}^{(j)}\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ – некоторые постоянные.

Следует установить регулярные и иррегулярные особенности заданной системы (1.2.1) и определить вид соответствующих решений. Особые кривые устанавливаются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных $F_{x_jx_j}$:

$$x_j^2\left[r_{20}^{(j)}-\alpha_{20}^{(j)}x_j\right]=0\Rightarrow x_j=0,\ x_j=r_{20}^{(j)}/\alpha_{20}^{(j)}\ \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Отсюда, не сложно убедиться, что конечными особенностями являются: $\underbrace{(0,0,...,0)}_{n},\underbrace{\left(0,0,...,0,r_{20}^{(1)}/\alpha_{20}^{(1)}\right)}_{n},...,\underbrace{\left(r_{20}^{(1)},r_{20}^{(2)},...,r_{20}^{(n)}\right)}_{n}$. К ним добавляются еще особенности на бесконечности: $(\infty,\infty,...,\infty),(\infty,\infty,...,\infty,0),...$ В обыкновенном случае, обычно из них выделяют две особенности $\underbrace{(0,0,...,0)}_{n}$ и $(\infty,\infty,....,\infty)$. Поэтому, мы также, ограничимся построением регулярных и иррегулярных решений вблизи этих особенностей.

1.2.1 Простые правила классификации особенностей и установление вида решения вблизи особых кривых

В аналитической теории изучаемых систем большую роль играет установление регулярных и иррегулярных особых кривых. В дальнейшем, основываясь на установленных простых правилах классификации особых кривых систем состоящих из двух уравнений второго порядка, сформулируем правило классификации особых кривых, на случай системы состоящей из n уравнений второго порядка.

Правило 1.2.1. *Если в системе (1.2.1) коэффициенты* $r_{20}^{(j)}\neq 0$, *то особенность системы (1.2.1) является особой регулярной и соответствующее ей решение имеет вид обобщенного степенного ряда* n *переменных*

$$F\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot...\cdot x_n^{\rho_n}\sum_{m_1,m_2...m_n=0}^{\infty}A_{m_1,m_2...m_n}x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\cdot...\cdot x_n^{m_n},\quad \left(A_{0,0,...,0}\neq 0\right) \tag{1.2.2}$$

с неизвестными показателями ряда $\rho_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ *и* $A_{m_1,m_2...m_n}\left(m_1,m_2...m_n=0,1,2,...\right)$ *с неизвестными коэффициентами ряда.*

Определение 1.2.1. *Функция, определяемая рядом*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{m_1, m_2 ... m_n = 0}^{\infty} A_{m_1, m_2 ... m_n} x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot ... \cdot x_n^{m_n}$$

называется обобщенной гипергеометрической функцией, если отношения

$$\frac{A_{m_1+1,...,m_n}}{A_{m_1,...,m_n}}, ..., \frac{A_{m_1,...,m_{n+1}}}{A_{m_1,...,m_n}}$$

являются рациональными функциями индексов $m_1, ..., m_n$ *[27].*

Правило 1.2.2. *Если в (1.2.1) коэффициенты* $r_{20}^{(j)} = 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$, *то особенность системы* $(0,0,...,0)$ *является особой иррегулярной. Решение системы (1.2.1) с иррегулярной особенностью представляется в виде*

$$F(x_1, ..., x_n) = \exp Q(x_1, ..., x_n) x_1^{\rho_1} \cdot ... \cdot x_n^{\rho_n} \sum_{m_1, .. m_n = 0}^{\infty} A_{m_1, ... m_n} x_1^{m_1} \cdot ... \cdot x_n^{m_n}, \quad (A_{0,...,0} \neq 0), \quad (1.2.3)$$

где $\rho_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, $A_{m_1, m_2 ... m_n} (m_1, m_2 ... m_n = 0,1,2,...)$ *– неизвестные постоянные.*

Степень многочлена n переменных

$$Q(x_1, ..., x_n) = \frac{\alpha_{p0...0}}{p} x_1^p + ... + \frac{\alpha_{0...0p}}{p} x_n^p + ... + \alpha_{10...0} x_1 + ... + \alpha_{0...01} x_n, \quad (1.2.4)$$

где $\alpha_{p0...0}, ..., \alpha_{0...01}$ неизвестные коэффициенты, определяются с помощью ранга.

Определение 1.2.2. *Величина ранга* p *определяется по наибольшим степеням коэффициентов системы равенством*

$$p = 1 + k, \ k = \max \frac{\tau_s - \tau_0}{s}, \left(s = \overline{1,n}\right) \quad (1.2.5)$$

называется порядком ряда (1.2.3) и может быть целым и дробным (положительным или отрицательным) числом, где τ_0, τ_s *– наибольшие степени независимых переменных в коэффициентах заданной системы* [9].

К.Я. Латышева для классификации особых точек, наряду с понятием ранга, использовала понятие антиранга m [9].

Определение 1.2.3. *Антирангом* m, *определяемая по наименьшим степеням коэффициентов системы называется число*

$$m = -1 - \chi, \ \chi = \min \frac{\pi_j - \pi_0}{j}, \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (1.2.6)$$

где π_0, π_s *– наименьшие степени независимых переменных в коэффициентах заданной системы* [9].

Обычно, понятие антиранга m связывает с особенностью $(0,0,...0)$, а понятие ранга с особенностью $(\infty,\infty,...,\infty)$.

Правило 1.2.3. *Если в системе (1.2.1) коэффициенты* $\alpha_{20}^{(j)}=0$, *то особенность* $(\infty,\infty,...,\infty)$ *является особой иррегулярной. В том случае, когда* $\alpha_{20}^{(j)}\neq 0$, *особенность является особой регулярной. Тогда система (1.2.1) будет иметь регулярную особенность вблизи* $(\infty,\infty,...,\infty)$ *с соответствующим решением:*

$$F(x_1,...,x_n)=x_1^{\rho_1}\cdot...\cdot x_n^{\rho_n}\sum_{m_1,...m_n=0}^{\infty}B_{m_1,...m_n}x_1^{-m_1}\cdot...\cdot x_n^{-m_n},\quad (B_{0,...,0}\neq 0), \tag{1.2.7}$$

где $\rho_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, $B_{m_1,...m_n}(m_1,...m_n=0,1,2,...)$ – *неизвестные постоянные.*

Решение системы (1.2.1) вблизи иррегулярной особенности $(\infty,\infty,...,\infty)$ представляется в виде

$$F(x_1,...,x_n)=\exp Q(x_1,...,x_n)x_1^{\rho_1}\cdot...\cdot x_n^{\rho_n}\sum_{m_1,...m_n=0}^{\infty}B_{m_1,...m_n}x_1^{-m_1}\cdot...\cdot x_n^{-m_n},\quad (B_{0,...,0}\neq 0), \tag{1.2.8}$$

где $\rho_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, $B_{m_1,...m_n}(m_1,...m_n=0,1,2,...)$ неизвестные постоянные; $Q(x_1,...,x_n)$ многочлен от n переменных вида (1.2.4) и является общими для решений (1.2.3) и (1.2.8). Функция, $F(x_1,...,x_n)$ определяемая рядом (1.2.8) называется нормальным рядом Томе n переменных. (1.2.8) является формальным решением системы вида (1.2.1).

Преимущество применения понятия ранга и антиранга заключается в том, что по виду заданной системы можно установить регулярность и иррегулярность особых кривых, и вид предполагаемого решения. Далее, применяя метод Фробениуса-Латышевой, построим конкретное решение в зависимости от регулярности и иррегулярности особых кривых.

Действительно, если антиранг $m\leq 0$, то особенность $(0,...0)$ регулярная и вблизи нее можно построить регулярное решение вида (1.2.2).

Когда ранг $p\leq 0$, существует регулярное решение вида (1.2.7).

Если одновременно $p\leq 0$ и $m\leq 0$, то особенности $(0,0,...0)$ и $(\infty,\infty,...,\infty)$ регулярные, поэтому, многочлен $Q(x_1,...,x_n)$ в (1.2.3) и (1.2.8) будут тождественно равными нулю и одновременно существуют решения вида (1.2.2) и (1.2.7).

Если ранг $p>0$ и антиранг $m\leq 0$, то есть когда особенность $(\infty,\infty,...,\infty)$ - иррегулярная, а $(0,0,...0)$- регулярная, существует решение вида (1.2.3). Для таких решений К.Я. Латышева ввела термин нормально-регулярного решения [9]. Отсюда убеждаемся, что преобразование вида

$$F(x_1,...,x_n)=\exp Q(x_1,...,x_n)\cdot U(x_1,...,x_n) \tag{1.2.9}$$

применяется при построении нормально-регулярных решений, где $Q(x_1,...,x_n)$ – многочлен степени p с неопределенными коэффициентами $\alpha_{p0...0}, \alpha_{0p...0} ..., \alpha_{00...01}$; $U(x_1,...,x_n)$ ряд вида (1.2.2). Нормально-регулярные решения для нас интересны тем, что решения всех родственных вырожденных систем типа Горна, Уиттекера, Бесселя и Лагерра относятся к этому виду.

К их общим свойствам относятся:

1. Для всех вышеназванных родственных вырожденных систем особая кривая $(0,0,...0)$ – регулярная, а $(\infty,\infty,...,\infty)$ – иррегулярная.

2. Система, полученная из исходной системы (1.2.1) с помощью преобразования (1.2.9) называется вспомогательной. Из вспомогательной системы определяются неизвестные коэффициенты $\alpha_{p0...0}, \alpha_{0p...0} ..., \alpha_{00...01}$ многочлена $Q(x_1,...,x_n)$ (1.2.4).

3. Степень многочлена $Q(x_1,...,x_n)$ определяется понятием ранга p.

1.2.2 Применение метода Фробениуса-Латышевой к построению нормально-регулярных решений

В данной работе основным методом построения решений изучаемой системы является метод Фробениуса-Латышевой [76], который позволяет произвести классификацию регулярных и иррегулярных особых кривых, построить решения вблизи этих особенностей, как было указано в предыдущем пункте 1.2.1. Получение родственных вырожденных систем типа Горна, Уиттекера, Бесселя и Лагерра с помощью преобразования (1.2.9).

Для применения метода Фробениуса-Латышевой предлагается алгоритм: вначале определение особых кривых, установление условий совместности и интегрируемости, составление системы характеристических функций Фробениуса. В общем случае, установление условий совместности сложное. Обычно, при изучении конкретных систем вида (1.2.1) условия совместности обеспечивается методом построения предложенной Кампе де Ферье [20]. Для (1.2.1) всегда выполняется условие интегрируемости.

Определение 1.2.4. *Системой характеристических функций Фробениуса называется система, полученная путем подстановки в (1.2.1) вместо функции* $F = x_1^{\rho_1} \cdot x_2^{\rho_2} ... \cdot x_n^{\rho_n}$.

Отсюда определяют для построения нормально-регулярного решения (1.2.1) систему определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,...0)$.

Определение 1.2.5. *Системой определяющих уравнений относительно особенности* $(0,0,...0)$ *называется система*

$$f_{0,...,0}^{(j)}(\rho_1,...,\rho_n) = r_{20}^{(j)}\rho_j(\rho_j - 1) + r_{10}^{(j)}\rho_j + r_{01}^{(j)}\sum_{(k\neq j)}\rho_k + r_{0,0}^{(j)} = 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{1.2.10}$$

из которой определяются показатели ряда (1.2.2) и (1.2.3) в виде $\left(\rho_1^{(j)}, \rho_2^{(j)},...,\rho_n^{(j)}\right), \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Количество показателей $\left(\rho_1^{(j)},\rho_2^{(j)},...,\rho_n^{(j)}\right)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$ позволяет определить количество линейно-независимых частных решений системы (1.2.1) вблизи вышеприведенных в пункте 1.2.1 особенностей.

Если в системе (1.2.1) постоянные $r_{01}^{(j)}=0$ и $r_{00}^{(j)}=0$, то получим систему гипергеометрического типа

$$x_j\left[r_{20}^{(j)}-\alpha_{20}^{(j)}x_j\right]F_{x_jx_j}+x_j\left[r_{10}^{(j)}-\alpha_{10}^{(j)}x_j\right]F_{x_j}-\alpha_{01}^{(j)}\sum_{(k\neq j)}x_kF_{x_k}-\alpha_{0,0}^{(j)}x_jF=0. \qquad (1.2.11)$$

Тогда система определяющих уравнений (1.2.10) относительно особенности $(0,0,...0)$ записывается в виде

$$f_{0,...,0}^{(j)}(\rho_1,...,\rho_n)=r_{20}^{(j)}\rho_j\left(\rho_j-1\right)+r_{10}^{(j)}\rho_j=0,\quad \left(j=\overline{1,n}\right). \qquad (1.2.12)$$

Система типа Горна относится именно к системе гипергеометрического типа.

Переходим к построению нормально-регулярного решения системы гипергеометрического типа. Как и в случае функций двух переменных [51] правую часть нормально-регулярного решения (1.2.9) будем рассматривать как произведение двух сомножителей:

а) $\exp Q(x_1,x_2,...,x_n)$ - определяющий множитель с неопределенными коэффициентами $\alpha_{n,0,...,0},\alpha_{0,n,...,0},...,\alpha_{0,0,...,n}$ многочлена (1.2.4).

б) $x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}....x_n^{\rho_n}\sum\limits_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}A_{m_1,m_2,...,m_n}\cdot x_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n},\ \left(A_{0,0,...,0}\neq 0\right)$ (1.2.13)

обобщенный степенной ряд n переменных, представляющий решение вблизи особенности $(0,0,...0)$, где $\rho_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, $A_{m_1,...,m_n}$ – неизвестные постоянные.

В случае а) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2.1. *Для того чтобы вспомогательная система имела хотя бы одно решение вида (1.2.3), необходимо выполнение равенства*

$$b_{n00...0}^{(j)}=0,b_{0n0...0}^{(j)}=0,...,b_{0...0n}^{(j)}=0,...,b_{0...0}^{(j)}=0,\left(j=\overline{1,n}\right). \qquad (1.2.14)$$

Равенства (1.2.14) полученные из вспомогательной системы приравниванием к нулю коэффициентов при наивысших степенях независимых переменных $x_1,x_2,...,x_n$, из которых определяются неизвестные коэффициенты $\alpha_{n0,...,0},\alpha_{0n,...,0},...,\alpha_{00,...,n}$ многочлена (1.2.4). Это первое необходимое условие существования *нормально-регулярного* решения.

Если система (1.2.14) имеет кратные корни, то существуют так называемые поднормальные решения, то есть решения по дробным степеням независимых переменных.

Теорема 1.2.2 *Для того чтобы система типа Горна с иррегулярной особенностью (1.2.11) имела нормально-регулярное решение вида (1.2.8) необходимо, чтобы* $\left(\rho_1^t, \rho_2^t, ..., \rho_n^t\right)$, $t = \overline{1, n}$ *была корнем системы определяющих уравнений относительно особенности* $(0,0,...0)$ *вида (1.2.12), полученных из вспомогательной системы путем подстановки вместо неизвестной* $F(x_1, ..., x_n) = x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2} ....x_n^{\rho_n}$.

Как видно отсюда, второе необходимое условие связано с определением неизвестных постоянных $\rho_j\left(j = \overline{1, n}\right), A_{m_1,...,m_n}$ обобщенного степенного ряда n переменных (1.2.3), то есть ряда (1.2.13). Этот ряд представляет решение вспомогательной системы вблизи особенности $(0,0,...0)$. Коэффициент $A_{m_1,...,m_n}$ этого ряда) определяются из последовательностей рекуррентных систем.
Конкретное применение приведенных двух теорем 1.2.1 и 1.2.2 будут показаны в подразделе 1.3.

1.3 Особенности построения решения систем типа Горна, состоящих из n уравнений

Рассматриваются особенности построения решения системы типа Горна состоящих из n уравнений вида

$$x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + \left[\gamma_j - x_j\right]\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{(k \neq j)} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \lambda F = 0, \left(j = \overline{1, n}\right), \tag{1.3.1}$$

где $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$- общая неизвестная функция для всех n уравнений системы (1.3.1).

Требуется установить родственные системы с системой типа Горна (1.3.1) и раскрыть свойства решений таких систем. Далее, показать особенности применения метода Фробениуса-Латышевой к построению решения различных родственных систем.

Выделим основные свойства функций Гумберта $\Psi_2^{(n)}$, используя установленные ими связь между системами типа Горна и Уиттекера с решениями вида $\Psi_2^{(n)}$ [21].

Определение 1.3.1. *Ряд вида*

$$\Psi_2^{(n)}(\lambda; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{m_1, m_2 ..., m_n = 0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{m_1 + m_2 + ... + m_n}}{(\gamma_1)_{m_1} \cdot (\gamma_2)_{m_2} \cdot ... \cdot (\gamma_n)_{m_n}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \frac{x_2^{m_2}}{m_2!} ... \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \tag{1.3.2}$$

называется вырожденной гипергеометрической функцией Гумберта $\Psi_2^{(n)}$ $(n = 2,3,...)$ n *переменных* $x_j\left(j = \overline{1, n}\right)$.

Ряд сходится абсолютно и равномерно при $|x_1| < \varepsilon, |x_2| < \varepsilon, ..., |x_n| < \varepsilon$.

Свойство частных решений системы (1.3.1) вблизи особенности $(0,0,...0)$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1.3.1. *Функция Гумберта (1.3.2) является частным решением системы типа Горна (1.3.1) вблизи особенности* $(0,0,...0)$.

Свойство относительно количества решений системы (1.3.1) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1.3.2. *Система (1.3.1) вблизи особенности* $(0,0,...0)$ *имеет* 2^n *регулярных решений в виде обобщенных степенных рядов* n *переменных*

$$F(x_1,...,x_n)=x_1^{\rho_1}...x_n^{\rho_n}\sum_{m_1,...,m_n=0}^{\infty}A_{m_1,...,m_n}\cdot x_1^{m_1}...x_n^{m_n}, C_{0,...0}\neq 0, \qquad (1.3.3)$$

где $\rho_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, $A_{m_1,...,m_n}(m_n=0,1,2,...)$ *– неизвестные коэффициенты, которые выражаются через функцию Гумберта* $\Psi_2^{(n)}$.

Для определения количество решений, сначала требуется определить количество корней системы определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,...0)$:

$$f_{0,...,0}^{(j)}(\rho_1,...,\rho_n)\equiv\rho_j(\rho_j-1)+\gamma_j\rho_j=0, \left(j=\overline{1,n}\right). \qquad (1.3.4)$$

Если корни простые, то отсюда можно определить 2^n корней, то есть, показателей ряда в виде $(\rho_1^t,\rho_2^t,...,\rho_n^t)\left(t=\overline{1,n}\right)$. Этим показателям соответствуют 2^n регулярных решений в виде обобщенных степенных рядов n переменных (1.3.3). С учетом показателей ряда они представляются в виде [29]:

$$\begin{array}{l} 1\{\Psi_2(\lambda,\gamma_1,...,\gamma_n;x_1,...,x_n),\\ n\begin{cases} x_1^{1-\gamma_1}\Psi_2(\lambda+1-\gamma_1,2-\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;x_1,...,x_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}\\ 1\{x_1^{1-\gamma_1}...x_n^{1-\gamma_n}\cdot\Psi_2(\lambda+n-\gamma_1-...-\gamma_n;2-\gamma_1,...,2-\gamma_n;x_1,...,x_n). \end{array} \qquad (1.3.5)$$

В частном случае $n=2$, соответствующая система Горна (1.1.21) состоящая из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка имеет $2^2(n=2)$ линейно-независимых частных решений, согласно общей теории таких систем, когда система совместна и выполняется условие интегрируемости [24]. В этом случае, система определяющих уравнений (1.3.4) записывается в виде

$$f_{0,0}^{(j)}(\rho_1,\rho_2)\equiv\rho_j(\rho_j-1)+\gamma_j\rho_j=0, (j=1,2) \qquad (1.3.6)$$

и имеет четыре пары показателей $(\rho_1^t,\rho_2^t)\left(t=\overline{1,4}\right)$, поэтому справедливо утверждение.

Теорема 1.3.3. *Система Горна (1.1.21) вблизи особенности* $(0,0)$ *имеет четыре линейно-независимых частных решений и общее решение представляется в виде следующей суммы:*

$$
\begin{gathered}
Z(x_1,x_2)=A\cdot Z(x_1,x_2)+B\cdot Z(x_1,x_2)+C\cdot Z(x_1,x_2)+D\cdot Z(x_1,x_2)=\\
=A\cdot\Psi_2(\lambda;\gamma,\gamma';x_1,x_2)+B\cdot x_1^{1-\gamma}\Psi_2(\lambda+1-\gamma;2-\gamma,\gamma';x_1,x_2)+\\
+C\cdot x_2^{1-\gamma'}\Psi_2(\lambda+1-\gamma';\gamma,2-\gamma';x_1,x_2)+\\
+D\cdot x_1^{1-\gamma}x_2^{1-\gamma'}\Psi_2(\lambda+2-\gamma-\gamma';2-\gamma,2-\gamma';x_1,x_2),
\end{gathered}
$$

где все частные решения $Z_t(x_1,x_2)\left(t=\overline{1,4}\right)$ выражаются через функций Гумберта Ψ_2.

Аналогичную теорему можно сформулировать и для общего случая.

Теорема 1.3.4. *Система типа Горна (1.3.1), состоящая из* n *дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка имеет* 2^n *линейно-независимых частных решений вблизи особенности* $(0,0,...0)$ *и ее общее решение представляется в виде суммы*

$$
F(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{l=0}^{2^n}C_i\cdot F_l(x_1,x_2,...,x_n),
$$

где $F_i(x_1,...,x_n)$ *– частные решения системы (1.2.1);* $C_i\left(i=1,2,...,2^n\right)$ *– произвольные постоянные.*

На основании теоремы 1.3.2 вспомогательная система имеет 2^n линейно-независимых частных решений (1.3.5), поскольку система определяющих уравнений (1.3.4) относительно особенности $(0,0,...0)$ имеет 2^n простых корней. Это показывает выполнение второго необходимого условия. Существование нормально-регулярных решений обеспечивается следующим утверждением.

Теорема 1.3.5. *Если системы характеристических уравнений (1.2.14) имеют только простые пары корней, то система типа Горна с иррегулярной особенностью* $(\infty,\infty,...,\infty)$ *при положительном ранге* $p>0$ *и антиранге* $m\le 0$ *допускает* 2^n *нормально-регулярных решений вида (1.2.3).*

Однако, здесь рассуждение ведется для наиболее общего случая, где ранг $p=1+k$ - любое число. На самом деле, ранг системы типа Горна $p=1>0$, поэтому, многочлен (1.2.4) будет многочленом первой степени

$$
Q(x_1,...,x_n)=\alpha_{10...0}x_1+\alpha_{01...0}x_2+...+\alpha_{00...1}x \tag{1.3.7}
$$

с неопределенными коэффициентами $\alpha_{10...0},\alpha_{01...0},...,\alpha_{00...1}$. Они определяются из системы характеристических уравнений (1.2.14). Эти рассуждения приводит нас к основному свойству преобразования (1.2.9).

Все основные родственные с системами типа Горна и Уиттекера системы выводятся из них с помощью частных случаев преобразования (1.2.9). В дальнейшем покажем вывод родственных систем Уиттекера с помощью преобразования вида (1.2.9).

1.3.1 Нормально-регулярные решения общей системы типа Уиттекера

Уравнение Куммера

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0$$

является частным случаем системы Горна (1.1.21). Функции Уиттекера $M_{k,m}(x)$ и $W_{k,m}(x)$ являющимися решениями уравнение Уиттекера

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{x^2}\right)y=0$$

полученное из уравнений Куммера, с помощью преобразования, нашли широкое применение в задачах науки и техники. Это стимулировало изучению функции Уиттекера многих переменных, в основном благодаря трудов М.П.Гумберта [25-26].

Теорема 1.3.6. *Система*

$$x_j^2\frac{\partial^2U}{\partial x_j^2}-x_j\sum_{r\neq j}x_r\frac{\partial U}{\partial x_r}+\left[-\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{(r\neq j)}x_r+kx_j+\frac{1}{4}-\mu_j^2\right]U=0,\left(j=\overline{1,n}\right), \tag{1.3.8}$$

полученная из системы типа Горна (1.3.1) с помощью преобразования

$$F(x_1,...,x_n)=\exp\left(\frac{x_1}{2}+...+\frac{x_n}{2}\right)\cdot x_1^{-\frac{\gamma_1}{2}}...x_n^{-\frac{\gamma_n}{2}}U(x_1,...,x_n) \tag{1.3.9}$$

является системой типа Уиттекера и имеет нормально-регулярное решение вида

$$W_{\lambda,\mu_1,...,\mu_n}(x_1,...x_n)=\sum\frac{\Gamma(-2\omega_1\mu_1)...\Gamma(-2\omega_n\mu_n)}{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}-\omega_1\mu_1-...-\omega_n\mu_n-k\right)}\cdot M_{k,\omega_1\mu_1...\omega_n\mu_n}, \tag{1.3.10}$$

где справедливо представление

$$M_{k,\mu_1,...,\mu_n}(x_1,...x_n)=x_1^{\mu_1+\frac{1}{2}}...x_n^{\mu_n+\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{x_1+...+x_n}{2}\right)\cdot$$
$$\cdot\Psi_2\left(\mu_1+...+\mu_n-k+\frac{n}{2},2\mu_1+1,...,2\mu_n+1,x_1,...x_n\right). \tag{1.3.11}$$

Особенностью преобразования (1.3.9) является неизвестная функция $U(x_1,...,x_n)$ от $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ n переменных. Функция $U(x_1,...,x_n)$ является общей неизвестной функцией для полученной системы (1.3.8). В свою очередь, для построения нормально-регулярных решений системы (1.3.8) следует произвести преобразование:

$$U(x_1,...,x_n)=\exp\left(\alpha_{10...0}x_1+...+\alpha_{0...01}x_n\right)\cdot x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot...\cdot x_n^{\rho_n}\Phi(x_1,...,x_n) \tag{1.3.12}$$

с неизвестными постоянными $\alpha_{10...0},...,\alpha_{0...01}$, $\rho_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ и неизвестной функцией $\Phi(x_1,...,x_n)$. Тем самым, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.3.7. *Система (1.3.8) полученная с помощью преобразования (1.3.9) из системы (1.3.1) имеет тот же ранг, что и исходная система Горна (1.3.1).*

Справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственной проверкой. Поскольку ранг $p=1$, то в определяющем множителе $\exp\left(\alpha_{10...0}x_1+...+\alpha_{0...01}x_n\right)$ многочлен $Q(x_1,...,x_n)$ остается многочленом первой степени с неизвестными коэффициентами $\alpha_{10...0},...,\alpha_{0...01}$.

В качестве примера приведем частный случай системы (1.3.8) полученную при $n=2$ из систем (1.1.21). После преобразования

$$U(x_1,x_2)=\exp\left(\alpha_{10}x_1+.a_{01}x_2\right)\cdot\Phi(x_1,x_2) \tag{1.3.13}$$

она приводится к вспомогательной системе относительно неизвестной функции $\Phi(x_1,x_2)$, которая имеет четыре нормально-регулярных решений.

$$\begin{aligned}
U_1(x_1,x_2)&=\exp\left(-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\cdot\Phi(x_1,x_2)=M_{k,\mu,\nu}(x_1,x_2),\\
U_2(x_1,x_2)&=\exp\left(-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\cdot\Phi(x_1,x_2)=M_{k,\mu,-\nu}(x_1,x_2),\\
U_3(x_1,x_2)&=\exp\left(-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\cdot\Phi(x_1,x_2)=M_{k,-\mu,\nu}(x_1,x_2),\\
U_4(x_1,x_2)&=\exp\left(-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\cdot\Phi(x_1,x_2)=M_{k,-\mu,-\nu}(x_1,x_2),
\end{aligned} \tag{1.3.14}$$

где неизвестные функции $\Phi_i(x_1,x_2),\left(i=\overline{1,4}\right)$ выражаются через функцию Гумберта Ψ_2:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x_1,x_2)&=x_1^{\frac{1}{2}+\mu}x_2^{\frac{1}{2}+\nu}\Psi_2\left(\mu+\nu+1-k,2\mu+1,2\nu+1;x_1,x_2\right),\\
\Phi_2(x_1,x_2)&=x_1^{\frac{1}{2}+\mu}x_2^{\frac{1}{2}-\nu}\Psi_2\left(\mu-\nu+1-k,2\mu+1,2\nu-1;x_1,x_2\right),\\
\Phi_3(x_1,x_2)&=x_1^{\frac{1}{2}-\mu}x_2^{\frac{1}{2}+\nu}\Psi_2\left(-\mu+\nu+1-k,2\mu-1,2\nu+1;x_1,x_2\right),\\
\Phi_4(x_1,x_2)&=x_1^{\frac{1}{2}-\mu}x_2^{\frac{1}{2}-\nu}\Psi_2\left(\mu-\nu-1-k,2\mu-1,2\nu-1;x_1,x_2\right).
\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Здесь сначала проверяется выполнение двух необходимых условий (Теоремы 1.2.1 и 1.2.2). Действительно, при $n=2$ преобразование (1.3.12) представляется в виде (1.3.13) и система характеристических уравнений (1.2.14) имеет вид:

$$f_{10}^{(1)}(\alpha_{10},\alpha_{01})=\alpha_{10}^{2}-\frac{1}{4}=0,\quad f_{01}^{(2)}(\alpha_{10},\alpha_{01})=\alpha_{01}^{2}-\frac{1}{4}=0\,, \tag{1.3.16}$$

а также имеет четыре пары корней:

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_{10}^{(1)},\alpha_{01}^{(1)}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(\alpha_{10}^{(1)},\alpha_{01}^{(2)}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\\&\left(\alpha_{10}^{(2)},\alpha_{01}^{(1)}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(\alpha_{10}^{(2)},\alpha_{01}^{(2)}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

определяющие четыре многочлена первой степени вида (1.2.4): $Q_i(x_1,x_2)=\alpha_{10}^{(i)}x_1+\alpha_{01}^{(i)}x_2,\quad \left(i=\overline{1,4}\right)$.

Аналогично, убеждаемся в выполнении и второго необходимого условия (Теорема 1.2.2).

Система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$ вида (1.2.10):

$$f_{00}^{(1)}(\rho_1,\rho_2)=\rho_j^{(t)}\left(\rho_j^{(t)}-1\right)+\frac{1}{4}-\mu_j^2=0,\quad (j=1,2),(t=1,2) \tag{1.3.18}$$

имеет четыре пары корней:

$$\begin{aligned}&\left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(1)}\right)=\left(\frac{1}{2}+\mu_1,\frac{1}{2}+\mu_2\right),\quad \left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(2)}\right)=\left(\frac{1}{2}+\mu_1,-\frac{1}{2}+\mu_2\right),\\&\left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(1)}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\mu_1,\frac{1}{2}+\mu_2\right),\quad \left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(2)}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\mu_1,-\frac{1}{2}+\mu_2\right).\end{aligned} \tag{1.3.19}$$

Выполнение второго необходимого условия (1.3.18) обеспечивает существования четырех линейно-независимых частных решений (1.3.15). А выполнение двух необходимых условий обеспечивает существование при $n=2, 2^n=2^2$ четырех нормально-регулярных решений (1.3.14).

1.3.2 Построение решений системы типа Уиттекера состоящих из трёх уравнений вблизи регулярных и иррегулярных особенностей

В предыдущем пункте привели особенности применения метода Фробениуса-Латышевой к построению нормально-регулярных решений системы Уиттекера состоящей из двух уравнений. Важно убедиться какие изменения происходит при построении нормально-регулярных решений системы Уиттекера состоящих из трех уравнений.

Определение 1.3.2 *Ряд представимое в виде*

$$U(x_1,x_2,x_3)=\exp Q(x_1,x_2,x_3)x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\quad (A_{0,0,0}\neq 0) \tag{1.3.20}$$

называется нормально-регулярным решением трех переменных. Здесь $\rho_j\,(j=1,2,3)$, $A_{m_1,m_2,m_3}(m_1,m_2,m_3=0,1,2,...)$ – неизвестные постоянные; $Q(x_1,x_2,x_3)$:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{\alpha_{p00}}{p}x_1^p+\frac{\alpha_{0p0}}{p}x_2^p+\frac{\alpha_{00p}}{p}x_3^p+...+\alpha_{100}x_1+\alpha_{010}x_2+\alpha_{001}x_3, \tag{1.3.21}$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{p00},\alpha_{0p0},...,\alpha_{001}$.

Требуется доказать теорему существования нормально-регулярных решений системы типа Уиттекера состоящих из трёх уравнений вблизи регулярных и иррегулярных особенностей.

Теорема 1.3.8. *Для того чтобы система типа Уиттекера, состоящая из трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*

$$x_j^2U_{x_jx_j}-x_j\sum_{r\neq j}x_rU_{x_r}+\left[-\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{(r\neq j)}x_r+kx_j+\frac{1}{4}-\mu_j^2\right]U=0,\,(j=1,2,3) \tag{1.3.22}$$

имела решения вида (1.3.20), необходимо выполнение условий:

$$\begin{gathered}1)\ f^{(1,0,0)}(\alpha_{100},\alpha_{010},\alpha_{001})=\alpha_{100}^2-\frac{1}{4}=0,\\ f^{(0,1,0)}(\alpha_{100},\alpha_{010},\alpha_{001})=\alpha_{010}^2-\frac{1}{4}=0,\\ f^{(0,0,1)}(\alpha_{100},\alpha_{010},\alpha_{001})=\alpha_{001}^2-\frac{1}{4}=0\end{gathered} \tag{1.3.23}$$

из которых определяются неизвестные постоянные многочлена (1.3.21);
2) необходимо, чтобы система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,0)$*:*

$$f_{000}^{(j)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\equiv\rho_j(\rho_j-1)+\frac{1}{4}-\mu^2=0,\,(j=1,2,3) \tag{1.3.24}$$

имела хотя бы одно решение вида $(\rho_1^{(l)},\rho_2^{(l)},\rho_3^{(l)})$ $(l=1,2)$.

Если все корни (1.3.23) и (1.3.24) простые, то система Уиттекера (1.3.22) имеет 2^3 решений вида (1.3.2).

Доказательство. После установления основных особых кривых, следует исследовать их регулярность и иррегулярность. В общем случае регулярность и иррегулярность особенностей систем (1.2.1) и (1.3.8) устанавливаются с помощью понятия ранга (1.2.5) и понятия антиранга (1.2.6) как в случае системы, состоящей из двух уравнений.

Если $x_j = 0, (j = 1,2,3)$ особые регулярные, то антиранг $m_j \le 0 \ (j = 1,2,3)$, а когда особые кривые $x_j = 0$ – иррегулярные, число $m_j > 0 \ (j = 1,2,3)$ для всех трех уравнений системы (1.3.22).

Таким же образом, с помощью (1.2.5) определяем, что ранг $p = 1$. Это показывает, что особенность (∞, ∞, ∞) иррегулярная. Понятие ранга также определяет степень многочлена $Q(x_1, x_2, x_3)$ в (1.3.21). Поскольку, ранг системы $p = 1$, то многочлен (1.2.5) представляется в виде

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \alpha_{100}x_1 + \alpha_{010}x_2 + \alpha_{001}x_3 \tag{1.3.25}$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{100}, \alpha_{010}, \alpha_{001}$.

Теперь переходим к определению неизвестных коэффициентов многочлена (1.3.25). Они определяются из вспомогательной системы

$$\begin{cases} x_1^2\Phi_{x_1x_1} + 2\alpha_{100}x_1^2\Phi_{x_1} - x_1x_2\Phi_{x_2} + \left[\left(\alpha_{100}^2 - \frac{1}{4}\right)x_1^2 - \left(\alpha_{010} + \frac{1}{2}\right)x_1x_2 + kx_1 + \frac{1}{4} - \mu_1^2\right]\Phi = 0, \\ x_2^2\Phi_{x_2x_2} + 2\alpha_{010}x_2^2\Phi_{x_2} - x_2x_3\Phi_{x_3} + \left[\left(\alpha_{010}^2 - \frac{1}{4}\right)x_2^2 - \left(\alpha_{001} + \frac{1}{2}\right)x_2x_3 + kx_2 + \frac{1}{4} - \mu_2^2\right]\Phi = 0, \\ x_3^2\Phi_{x_3x_3} + 2\alpha_{001}x_3^2\Phi_{x_3} - x_3x_1\Phi_{x_1} + \left[\left(\alpha_{001}^2 - \frac{1}{4}\right)x_3^2 - \left(\alpha_{100} + \frac{1}{2}\right)x_3x_1 + kx_3 + \frac{1}{4} - \mu_3^2\right]\Phi = 0, \end{cases} \tag{1.3.26}$$

полученной из системы Уиттекера (1.3.22) с помощью преобразования

$$U(x_1, x_2, x_3) = \exp(\alpha_{100}x_1 + \alpha_{010}x_2 + \alpha_{001}x_3)\Phi(x_1, x_2, x_3). \tag{1.3.27}$$

В преобразованной вспомогательной системе (1.3.26) коэффициенты при наибольших степенях независимых переменных приравниваем к нулю, определяем значения неизвестных $\alpha_{100}^{(j)}, \alpha_{010}^{(j)}, \alpha_{001}^{(j)} \ (j = 1,2)$. В данном случае, при наибольших степенях x_1^2, x_2^2 и x_3^2, из трех уравнений системы (1.3.26) находятся три равенства $\alpha_{100}^2 - \frac{1}{4} = 0, \alpha_{010}^2 - \frac{1}{4} = 0, \ \alpha_{001}^2 - \frac{1}{4} = 0$ как в (1.3.23).

Отсюда определим значения $\alpha_{100}^{(j)}, \alpha_{010}^{(j)}, \alpha_{001}^{(j)} \ (j = 1,2)$ и из них составляем следующие тройки:

$$\left(\alpha_{100}^{(1)}, \alpha_{010}^{(1)}, \alpha_{001}^{(1)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ \left(\alpha_{100}^{(1)}, \alpha_{010}^{(1)}, \alpha_{001}^{(2)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \ \left(\alpha_{100}^{(1)}, \alpha_{010}^{(2)}, \alpha_{001}^{(1)}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\alpha_{100}^{(2)}, \alpha_{010}^{(1)}, \alpha_{001}^{(1)}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ \left(\alpha_{100}^{(1)}, \alpha_{010}^{(2)}, \alpha_{001}^{(2)}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \ \left(\alpha_{100}^{(2)}, \alpha_{010}^{(1)}, \alpha_{001}^{(2)}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\alpha_{100}^{(2)},\alpha_{010}^{(2)},\alpha_{001}^{(1)}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(\alpha_{100}^{(2)},\alpha_{010}^{2},\alpha_{001}^{(2)}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right). \qquad (1.3.28)$$

Полученные восемь троек (1.3.28) определяют восемь многочленов

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\alpha_{100}^{(j)}x_1+\alpha_{010}^{(j)}x_2+\alpha_{001}^{(j)}x_3,\ \left(i=\overline{1,8};\ j=1,2\right). \qquad (1.3.29)$$

Подставляя значения неизвестных из (1.3.28) во вспомогательную систему (1.3.26) из нее получим восемь систем указанного вида. Однако, из них только у одной системы можно определить восемь линейно-независимых частных решений

$$\begin{cases} x_1^2\Phi_{x_1x_1}-x_1^2\Phi_{x_1}-x_1x_2\Phi_{x_2}+\left[kx_1+\frac{1}{4}-\mu_1^2\right]\Phi=0,\\ x_2^2\Phi_{x_2x_2}-x_2^2\Phi_{x_2}-x_2x_3\Phi_{x_3}+\left[kx_2+\frac{1}{4}-\mu_2^2\right]\Phi=0,\\ x_3^2\Phi_{x_3x_3}-x_3^2\Phi_{x_3}-x_3x_1\Phi_{x_1}+\left[kx_3+\frac{1}{4}-\mu_3^2\right]\Phi=0. \end{cases} \qquad (1.3.30)$$

С определением неизвестных постоянных $\left(\alpha_{100}^{(j)},\alpha_{010}^{(j)},\alpha_{001}^{(j)}\right)$ завершается первый этап построения нормально-регулярного решения вида (1.3.20). Мы определили выполнение первого необходимого условия.

Лемма 1.3.1. *Для того чтобы система (1.3.22) имела хотя бы одно решение вида (1.3.20), необходимо выполнение равенств (1.3.23), из которых определяются неизвестные постоянные коэффициенты* $(\alpha_{100},\alpha_{010},\alpha_{001})$ *многочлена (1.3.25).*

Переходим к построению решения системы (1.3.30). Она как вырожденная гипергеометрическая система имеет регулярную особенность в начале координат $(0,0,0)$ и иррегулярную особенность ранга $p=1$ на бесконечности (∞,∞,∞).

Для построения решения системы (1.3.30) применим метод Фробениуса-Латышевой. С этой целью составляем систему характеристических функций, из которой определим систему определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,0)$:

$$f_{0,0,0}^{(l)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\equiv\rho_l(\rho_l-1)+\frac{1}{4}-\mu_l^2=0,\ (l=1,2,3). \qquad (1.3.31)$$

Она имеет восемь троек корней: $\left(\rho_l^{(j)},\rho_l^{(j)},\rho_l^{(j)}\right)\left(l=1,2,3;\ j=1\ или\ 2\right)$

$$\left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(1)}\right)=\left(\frac{1}{2}+\mu_1,\frac{1}{2}+\mu_2,\frac{1}{2}+\mu_3\right),\ \left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(2)}\right)=\left(\frac{1}{2}+\mu_1,\frac{1}{2}+\mu_2,\frac{1}{2}-\mu_3\right),$$

$$\left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(2)},\rho_3^{(1)}\right)=\left(\frac{1}{2}+\mu_1,\frac{1}{2}-\mu_2,\frac{1}{2}+\mu_3\right),\ \left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(1)}\right)=\left(\frac{1}{2}-\mu_1,\frac{1}{2}+\mu_2,\frac{1}{2}+\mu_3\right),$$
$$\left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(2)},\rho_3^{(2)}\right)=\left(\frac{1}{2}+\mu_1,\frac{1}{2}-\mu_2,\frac{1}{2}-\mu_3\right),\ \left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(2)}\right)=\left(\frac{1}{2}-\mu_1,\frac{1}{2}+\mu_2,\frac{1}{2}-\mu_3\right),$$
$$\left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(2)},\rho_3^{(1)}\right)=\left(\frac{1}{2}-\mu_1,\frac{1}{2}-\mu_2,\frac{1}{2}+\mu_3\right),\ \left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(2)},\rho_3^{(2)}\right)=\left(\frac{1}{2}-\mu_1,\frac{1}{2}-\mu_2,\frac{1}{2}-\mu_3\right). \quad (1.3.32)$$

Решения $\Phi_k(x_1,x_2,x_3)$,$\left(k=\overline{1,8}\right)$ системы (1.3.30), соответствующие показателям $\left(\rho_l^{(j)},\rho_l^{(j)},\rho_l^{(j)}\right)(l=1,2,3;\ j=1\,или\ 2)$ выражаются через функции $\Psi_2^{(3)}(x_1,x_2,x_3)$ и представляются в виде

$$\begin{aligned}
\Phi_2(x_1,x_2,x_3)&=x_1^{\frac{1}{2}+\mu_1}x_2^{\frac{1}{2}+\mu_2}x_3^{\frac{1}{2}-\mu_3}\cdot\Psi_2^{(3)}(\mu_1+\mu_2-\mu_3+1-k,2\mu_1+1,2\mu_2+1,2\mu_3-1;x_1,x_2,x_3),\\
\Phi_3(x_1,x_2,x_3)&=x_1^{\frac{1}{2}+\mu_1}x_2^{\frac{1}{2}-\mu_2}x_3^{\frac{1}{2}+\mu_3}\cdot\Psi_2^{(3)}(\mu_1-\mu_2+\mu_3+1-k,2\mu_1+1,2\mu_2-1,2\mu_3+1;x_1,x_2,x_3),\\
\Phi_4(x_1,x_2,x_3)&=x_1^{\frac{1}{2}-\mu_1}x_2^{\frac{1}{2}+\mu_2}x_3^{\frac{1}{2}+\mu_3}\cdot\Psi_2^{(3)}(-\mu_1+\mu_2+\mu_3+1-k,2\mu_1-1,2\mu_2+1,2\mu_3+1;x_1,x_2,x_3),\\
\Phi_5(x_1,x_2,x_3)&=x_1^{\frac{1}{2}+\mu_1}x_2^{\frac{1}{2}-\mu_2}x_3^{\frac{1}{2}-\mu_3}\cdot\Psi_2^{(3)}(\mu_1-\mu_2-\mu_3+1-k,2\mu_1+1,2\mu_2-1,2\mu_3-1;x_1,x_2,x_3),\\
\Phi_6(x_1,x_2,x_3)&=x_1^{\frac{1}{2}-\mu_1}x_2^{\frac{1}{2}+\mu_2}x_3^{\frac{1}{2}-\mu_3}\cdot\Psi_2^{(3)}(-\mu_1+\mu_2-\mu_3+1-k,2\mu_1-1,2\mu_2+1,2\mu_3-1;x_1,x_2,x_3),\\
\Phi_7(x_1,x_2,x_3)&=x_1^{\frac{1}{2}-\mu_1}x_2^{\frac{1}{2}-\mu_2}x_3^{\frac{1}{2}+\mu_3}\cdot\Psi_2^{(3)}(-\mu_1-\mu_2+\mu_3+1-k,2\mu_1-1,2\mu_2-1,2\mu_3+1;x_1,x_2,x_3),\\
\Phi_8(x_1,x_2,x_3)&=x_1^{\frac{1}{2}-\mu_1}x_2^{\frac{1}{2}-\mu_2}x_3^{\frac{1}{2}-\mu_3}\times\\
&\times\Psi_2^{(3)}(-\mu_1-\mu_2-\mu_3+1-k,2\mu_1-1,2\mu_2-1,2\mu_3-1;x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}\quad (1.3.33)$$

Отсюда замечаем, что имеет место и второе необходимое условие. Сформулируем ее в виде следующей леммы.

Лемма 1.3.2. *Для того чтобы система (1.3.22) имела хотя бы одно решение вида*

$$F(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot x_3^{\rho_3}\cdot\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}C_{m_1,m_2,m_3}\cdot x_1^{-m_1}\cdot x_2^{-m_2}\cdot x_3^{-m_3},\ \left(C_{0,0,0}\neq 0\right) \quad (1.3.34)$$

необходимо, чтобы система определяющих уравнений (1.3.31) относительно особенности $(0,0,0)$*, имела хотя бы одно решение вида* $\left(\rho_l^{(j)},\rho_l^{(j)},\rho_l^{(j)}\right)(l=1,2,3;\ j=1\,или\ 2)$*, где* $\rho_j\ (j=1,2,3), C_{m_1,m_2,m_3}\ (m_1,m_2,m_3=0,1,2,...)$ *– неизвестные постоянные*

При выполнении двух необходимых условий для нахождения частных решений системы (1.3.22), используется преобразование (1.3.27). Все они будут нормально-регулярными и выражаются через функции Гумберта трех переменных $\Psi_2^{(3)}$:

$$U_k(x_1,x_2,x_3)=\exp\left(-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{2}\right)\Phi_k(x_1,x_2,x_3). \quad (1.3.35)$$

Тогда теорему 1.3.8 с учетом вышеприведенных изменений можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1.3.9. *Пусть выполняются условия (1.3.24), (1.3.28) и лемм 1.3.1, 1.3.2. Если системы (1.3.28) и (1.3.31) имеют только простые тройки корней* $\left(\rho_1^{(j)}, \rho_2^{(j)}, \rho_3^{(j)}\right)(j=1\,\text{или}\,2)$, *то система типа Уиттекера с иррегулярной особенностью* (∞,∞,∞) *при положительном ранге* $p>0$ *и антиранге* $m\le 0$ *имеет* 2^3 *нормально-регулярных частных решений (1.3.35).*

Доказательство. На основании теоремы 1.3.5, в общем случае существует 2^n нормально-регулярных решений вида (1.3.10). На предыдущем примере убедились, что для этого требуется выполнение двух необходимых условий. (Теоремы 1.2.1 и 1.2.2). На самом деле, в этом случае, система характеристических уравнений, полученная с помощью преобразования (1.3.9) имеет вид

$$f_{10\dots0}^{(1)}\left(\alpha_{10\dots0},\dots,\alpha_{0\dots01}\right)=\alpha_{10\dots0}^2-\frac{1}{4}=0,\dots,\ f_{0\dots01}^{(1)}\left(\alpha_{10\dots0},\dots,\alpha_{0\dots01}\right)=\alpha_{0\dots01}^2-\frac{1}{4}=0\,.$$

Она имеет 2^n корней вида (1.3.17), определяющие 2^n многочлен первой степени вида:

$$Q_i\left(x_1,\dots,x_n\right)=\alpha_{10\dots0}^{(i)}x_1+\dots+\alpha_{0\dots01}^{(i)}x_n,\ i=2^2,\dots,2^n\,.$$

Таким образом, убеждаемся в выполнении второго необходимого условия. Действительно, система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,\dots0)$ представляется в виде $f_{0,\dots,0}^{(1)}\left(\rho_1,\dots,\rho_n\right)=\rho_j\left(\rho_j-1\right)+\frac{1}{4}-\mu_j^2=0,\quad \left(j=\overline{1,n}\right)$. Что и требовалось доказать.

Выполнение второго необходимого условия показывает, что система Уиттекера (1.3.8) также имеет 2^n регулярных линейно-независимых частных решений вида (1.3.3) как *родственная ей система типа Горна* (1.3.1). Далее, одновременное выполнение двух необходимых условий показывает существование 2^n нормально-регулярных решений вида (1.3.10).

1.3.3 Существование логарифмических решений систем типа Уиттекера, состоящих из трех дифференциальных уравнений

Общий метод нахождения рекуррентных соотношений для логарифмических решений системы состоящих из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка приведен в работе Ж.Н.Тасмамбетова [46]. Аналогичным образом поставим задачу установить вид логарифмических решений состоящих из трёх уравнений систем типа Уиттекера (1.3.22). Существования логарифмических решений систем вида (1.1.1), особенно 34 систем Горна, а также систем типа Уиттекера состоящих из трёх уравнений решениями которых являются специальные функции, остается малоисследованными. В нашей работе [93] была изучена существование логарифмических решений систем типа Уиттекера состоящих из трёх уравнений.

Допустим, что тройка корней $(\rho_j,\sigma_j,\delta_j)$ $(j=\overline{1,8})$ системы определяющих уравнений (1.3.31) равны или отличаются на целые числа, то есть $\rho_1 \ge \rho_2 \ge \ldots \ge \rho_8$, $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_8$, $\delta_1 \ge \delta_2 \ge \ldots \ge \delta_8$.

Рассмотрим два случая расположения корней

1) $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_8$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_8$, $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_8$
то есть тройки $(\rho_1,\sigma_1,\delta_1)=(\rho_2,\sigma_2,\delta_2)=\ldots=(\rho_8,\sigma_8,\delta_8)$; (1.3.36)

2)
$$\rho_1-\rho_2=m_{1,1},\rho_2-\rho_3=m_{1,2},\ldots,\rho_7-\rho_8=m_{1,7};$$
$$\sigma_1-\sigma_2=n_{1,1},\sigma_2-\sigma_3=n_{1,2},\ldots,\sigma_7-\sigma_8=n_{1,7};$$
$$\delta_1-\delta_2=t_{1,1},\delta_2-\delta_3=t_{1,2},\ldots,\delta_7-\delta_8=t_{1,7};$$
$$\left(m_{1,1}<m_{1,2}<\ldots<m_{1,7};n_{1,1}<n_{1,2}<\ldots<n_{1,7};t_{1,1}<t_{1,2}<\ldots<t_{1,7}\right). \qquad (1.3.37)$$

Это означает справедливость строгих неравенств между тройками корней:

$$(\rho_1,\sigma_1,\delta_1)>(\rho_2,\sigma_2,\delta_2)>\ldots>(\rho_8,\sigma_8,\delta_8).$$

В предыдущем пункте мы убедились, что изучаемая система Уиттекера (1.3.22), состоящая из трёх уравнений имеет регулярную особенность $(0,0,0)$ и иррегулярную особенность на бесконечности (∞,∞,∞). Известно, что когда особенность регулярная, степень определяющего множителя $\exp Q(x_1,x_2,x_3)$, многочлен $Q(x_1,x_2,x_3)=0$. Поэтому, нормально-регулярное решение (1.3.20) изучаемой системы (1.3.22) представляется в виде обобщенного степенного ряда трёх переменных

$$U(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\rho}x_2^{\sigma}x_3^{\delta}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ \left(A_{0,0,0}\ne 0\right), \qquad (1.3.28)$$

где $\rho,\sigma,\delta,A_{m_1,m_2,m_3}(m_1,m_2,m_3=0,1,2\ldots)$ неизвестные постоянные.

Для построения решения вида (1.3.38) воспользуемся методом Фробениуса-Латышевой изложенной в предыдущем пункте. Таким путем можно определить восемь линейно-независимых частных решений. Покажем, что когда система определяющих уравнений (1.3.31) имеет кратные тройки корней, то система типа Уиттекера имеет логарифмические решения.

С целью обобщения методики построения логарифмических решений, на случай трёх переменных образуем ряд

$$U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A_{m_1,m_2,m_3}x_1^{\rho+m_1}x_2^{\sigma+m_2}x_3^{\delta+m_3},\ (A_{0,0,0}\neq 0),\tag{1.3.39}$$

где постоянные ρ,σ,δ и коэффициенты A_{m_1,m_2,m_3} должны быть определены таким образом, чтобы $U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)$ было решением изучаемой системы.

Применение метода Фробениуса-Латышевой позволяет получить первое решение соответствующее тройке корней $(\rho_1,\sigma_1,\delta_1)$:

$$U(x_1,\rho_j;x_2,\sigma;x_3,\delta)=x_1^{\rho_1}x_2^{\sigma_1}x_3^{\delta_1}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ (A_{0,0,0}\neq 0).\tag{1.3.40}$$

В первом случае (1.3.36) все решения вида (1.3.39) будут тождественно равны. Вместо восьми (2^3) линейно-независимых частных решений получим всего одно решение.

Далее, находим решение, соответствующее тройке корней $(\rho_2,\sigma_2,\delta_2)$. С этой целью, найдем частную производную по ρ от $U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\rho}U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)&=\ln x\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A^{(\rho,\sigma,\delta)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{\rho+m_1}x_2^{\sigma+m_2}x_3^{\delta+m_3}+\\&+\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{\partial A^{(\rho,\sigma,\delta)}_{m_1,m_2,m_3}}{\partial\rho}x_1^{\rho+m_1}x_2^{\sigma+m_2}x_3^{\delta+m_3}.\end{aligned}\tag{1.3.41}$$

Коэффициенты $\dfrac{\partial A^{(\rho,\sigma,\delta)}_{m_1,m_2,m_3}}{\partial\rho}$ определяются из рекуррентных соотношений, который полученный путем подстановки решение (1.3.39) в исходную систему, при этом учитывая случаи (1.3.36) и (1.3.37). Тогда из частной производной (1.3.41) получим второе частное решение в следующем виде:

$$U(x_1,x_2,x_3)=U(x_1,x_2,x_3)\ln x+x_1^{\rho_2}x_2^{\sigma_2}x_3^{\delta_2}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A'_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ (A'_{0,0,0}\neq 0).\tag{1.3.42}$$

Таким же образом, установим вид решения, соответствующие другим тройкам $(\rho_l,\sigma_l,\delta_l)(l=3,4,...,8)$. Как и в (1.3.41) определим частные производные

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\sigma}[U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)],\ \frac{\partial}{\partial\delta}[U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)],\ \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\sigma}[U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)],\\&\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\delta}[U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)],\ \frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\delta}[U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)],\ \frac{\partial^3}{\partial\rho\partial\sigma\partial\delta}[U(x_1,\rho;x_2,\sigma;x_3,\delta)].\end{aligned}\tag{1.3.43}$$

Итак, мы привели краткое изложение метода, построения логарифмических решений систем типа Уиттекера состоящих из трёх уравнений. Конкретным примером является система типа Уиттекера (1.3.22). Здесь мы приведем две теоремы на основе вышеприведенных рассуждений.

Действительно, система определяющих уравнений системы (1.3.22) относительно особенности $(0,0,0)$ имеет вид (1.3.31) и она имеет восемь троек корней (1.3.32). Тогда справедливо утверждение.

Теорема 1.3.10. *Пусть в системе (1.3.22)* $\frac{1}{4}-\mu_j^2=0$ *и система определяющих уравнений имеет восемь троек корней:* $(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$, *и* $(0,0,0)$. *Тогда система Уиттекера имеет* 2^3 *линейно-независимых частных решений соответствующие этим корням:*

$$1.\ U_1(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ (A_{0,0,0}\neq 0), \tag{1.3.44}$$

$$2.\ U_2(x_1,x_2,x_3)=C_2U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_1+f_2,$$

$$3.\ U_3(x_1,x_2,x_3)=C_3U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_2+f_3,$$

$$4.\ U_4(x_1,x_2,x_3)=C_4U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_3+f_4,$$

$$5.\ U_5(x_1,x_2,x_3)=C_5U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_1\ln x_2+f_2\ln x_1+f_3\ln x_2+f_5,$$

$$6.\ U_6(x_1,x_2,x_3)=C_6U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_1\ln x_3+f_2\ln x_1+f_4\ln x_3+f_6,$$

$$7.\ U_7(x_1,x_2,x_3)=C_7U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_2\ln x_3+f_3\ln x_2+f_4\ln x_3+f_7, \tag{1.3.45}$$

$$8.\ \begin{aligned}&U_8(x_1,x_2,x_3)=C_8U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_1\ln x_2\ln x_3+f_2\ln x_1\ln x_2+f_3\ln x_2\ln x_3+\\&+f_4\ln x_3\ln x_1+f_5\ln x_1+f_6\ln x_2+f_7\ln x_3+f_8,\end{aligned}$$

где $C_k\ (k=2,3,...,8)$ *произвольные постоянные;* $f_t\ (t=\overline{2,8})$ *ряды вида:*

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\rho_1^{(l)}}x_2^{\rho_2^{(l)}}x_3^{\rho_3^{(l)}}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}B^{(t)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ (B_{0,0,0}\neq 0), \tag{1.3.46}$$

с показателями $(\rho_1^{(l)},\rho_2^{(l)},\rho_3^{(l)}),\ (l=1,2)$ *из вышеприведенных корней.*

Теорема устанавливает, что когда корни отличаются на целые числа, система имеет логарифмические решения.

Если $\frac{1}{4}-\mu_j^2=0\ (j=1,2,3)$, то система определяющих уравнений (1.3.31) относительно особенностей $(0,0,0)$ представляется в виде: $f_{0,0,0}^{(j)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\equiv\rho_j(\rho_j-1)=0$ и из них составляется восемь (2^3) троек приведенный в условии теоремы 1.3.10. Из них тройке $(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(1)})=(1,1,1)$ соответствует решение $U_1(x_1,x_2,x_3)$ в виде обобщенного степенного ряда трёх переменных (1.3.44).

Для построения второго решения соответствующего показателю $(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(1)})=(0,1,1)$ найдем частную производную по ρ вида (1.3.41) и получим логарифмическое решение (1.3.42) в виде (1.3.44). Таким же образом, определяя частные производные, приведенные в (1.3.43), находим и другие частные решения из ряда (1.3.44).

В зависимости от кратности тройки корней система может иметь также логарифмические решения. Часто нужно будет учитывать оба случая расположение тройки корней.

Теорема 1.3.11. *Пусть в системе (1.3.22)* $\frac{1}{4}-\mu_j^2=0\ \left(j=\overline{1,3}\right)$ *и система определяющих уравнений относительно особенностей* $(0,0,0)$ *(1.3.31) имеет тройки корней удовлетворяющих условиям:*

$$\begin{aligned}&\left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(1)}\right)=\left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(2)}\right)=\left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(2)},\rho_3^{(1)}\right)=\left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(2)},\rho_3^{(2)}\right),\\&\left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(2)},\rho_3^{(2)}\right)=\left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(1)}\right)=\left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(2)}\right)=\left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(2)},\rho_3^{(1)}\right);\end{aligned}\qquad(1.3.47)$$

$$\begin{aligned}&\rho_1^{(1)}-\rho_1^{(2)}=m_{1,1},\ \rho_2^{(1)}-\rho_2^{(2)}=n_{1,1},\ \rho_3^{(1)}-\rho_3^{(2)}=t_{1,1};\\&\left(\rho_1^{(1)},\rho_2^{(1)},\rho_3^{(1)}\right)>\left(\rho_1^{(2)},\rho_2^{(2)},\rho_3^{(2)}\right).\end{aligned}\qquad(1.3.48)$$

Тогда система типа Уиттекера (1.3.22) имеет 2^3 *линейно-независимых частных решений:*

$$\begin{aligned}
&1.\ U_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\rho_1^{(1)}}x_2^{\rho_2^{(1)}}x_1^{\rho_3^{(1)}}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A^{(1)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ \left(A^{(1)}_{0,0,0}\neq0\right),\\
&2.\ U_2(x_1,x_2,x_3)=C_2U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_1+x_1^{\rho_1^{(1)}}x_2^{\rho_2^{(1)}}x_1^{\rho_3^{(2)}}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}B^{(1)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ \left(B^{(1)}_{0,0,0}\neq0\right),\\
&3.\ U_3(x_1,x_2,x_3)=C_3U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_2+x_1^{\rho_1^{(1)}}x_2^{\rho_2^{(2)}}x_1^{\rho_3^{(1)}}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}B^{(2)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ \left(B^{(2)}_{0,0,0}\neq0\right),\\
&4.\ U_4(x_1,x_2,x_3)=C_4U_1(x_1,x_2,x_3)\ln x_3+x_1^{\rho_1^{(1)}}x_2^{\rho_2^{(2)}}x_1^{\rho_3^{(2)}}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}B^{(3)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ \left(B^{(3)}_{0,0,0}\neq0\right),\\
&5.\ U_5(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\rho_1^{(2)}}x_2^{\rho_2^{(2)}}x_1^{\rho_3^{(2)}}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A^{(5)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ \left(A^{(5)}_{0,0,0}\neq0\right),\qquad(1.3.49)\\
&6.\ U_6(x_1,x_2,x_3)=C_5U_5(x_1,x_2,x_3)\ln x_1+x_1^{\rho_1^{(2)}}x_2^{\rho_2^{(1)}}x_1^{\rho_3^{(2)}}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}B^{(4)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ \left(B^{(4)}_{0,0,0}\neq0\right),\\
&7.\ U_7(x_1,x_2,x_3)=C_6U_5(x_1,x_2,x_3)\ln x_2+x_1^{\rho_1^{(2)}}x_2^{\rho_2^{(2)}}x_1^{\rho_3^{(2)}}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}B^{(5)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ \left(B^{(5)}_{0,0,0}\neq0\right),\\
&8.\ U_8(x_1,x_2,x_3)=C_7U_5(x_1,x_2,x_3)\ln x_3+x_1^{\rho_1^{(2)}}x_2^{\rho_2^{(2)}}x_1^{\rho_3^{(1)}}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}B^{(6)}_{m_1,m_2,m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},\ \left(B^{(6)}_{0,0,0}\neq0\right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что система типа Уиттекера при выполнении условии (1.3.47) и (1.3.48) имеет два решения $U_1(x_1,x_2,x_3)$ и $U_5(x_1,x_2,x_3)$ в виде обобщенных степенных рядов трёх переменных (1.3.49), а остальные решения – логарифмические. Не трудно заметить, что существуют различные комбинации условий (1.3.47) и (1.3.48). В зависимости от этого, существуют различные количества решений в виде обобщенных степенных рядов и логарифмических решений.

В дальнейшем, примененная методика используется при построении решений родственных с системой Уиттекера систем типа Бесселя и Лагерра.

2 МНОГОЧЛЕНЫ ЛАГЕРРА И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ КАК РЕШЕНИЯ РОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С СИСТЕМОЙ ТИПА ГОРНА

2.1 О построении решения системы типа Горна в виде многочленов Лагерра многих переменных

Все ряды двух и трёх переменных являются решениями некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. П. Аппель определил в 1880г. четыре ряда, $F_1 - F_4$ каждый из которых аналогичен ряду Гаусса $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$. Л. Горн установил, что существуют 34 существенно различных сходящихся ряда порядка два и определил систем дифференциальных уравнений в частных производных которым они удовлетворяют. Все они являются частными случаями системы вида

$$\left.\begin{aligned} P^{(0)}Z_{xx} + P^{(1)}Z_{xy} + P^{(2)}Z_{yy} + P^{(3)}Z_x + P^{(4)}Z_y + P^{(5)}Z = 0, \\ Q^{(0)}Z_{yy} + Q^{(1)}Z_{xy} + Q^{(2)}Z_{xx} + Q^{(3)}Z_x + Q^{(4)}Z_y + Q^{(5)}Z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.1)$$

где коэффициенты $P^{(i)} = P^{(i)}(x,y)$ и $Q^{(i)} = Q^{(i)}(x,y)\left(i = \overline{1,5}\right)$ – аналитические функции или многочлены двух переменных, $Z = Z(x,y)$ – общая неизвестная. Частный случай системы вида (2.1.1) американский математик Е. Вильчинский использовал для обоснования проективно-дифференциальной геометрии. Он установил условия совместности и интегрируемости системы (2.1.1) и ее частного случая. Доказал, что при выполнении этих условий система (2.1.1) имеет до четырех линейно-независимых частных решений и общее решение системы зависит от четырех произвольных постоянных.

В. Штернберг показал возможности асимптотического представления этих решений вблизи особенности (∞,∞). Здесь он впервые дает определение асимптотического представления в двумерной области. Однако, отсутствовал общий метод исследования систем двух переменных. Ж.Н. Тасмамбетовым для изучения систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка был применен метод Фробениуса-Латышевой, где основным аппаратом исследования являются понятия ранга $p = 1 + k$ (k –подранг), введенное А. Пуанкаре при изучении линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, и антиранга $m = -1 - \chi$ (χ–антиподранг), введенное Л. Томе. Обобщенные Ж.Н. Тасмамбетовым [46, с.41] эти понятия способствовал проведению классификации регулярных и иррегулярных особых кривых, установлению вида решения и эффективных алгоритмов построения нормально-регулярных, нормальных и конечных решений вблизи указанных особенностей. Исследованный В. Штернбергом случай соответствует рангу $p = 1$ ($k = 0$), то есть он впервые сделал попытку применение понятия ранга для изучения систем вида (2.1.1).

Усилиями известных математиков, таких как П. Аппель, Ж. Кампе де Ферье, Я. Горн, Э. Айнс, А. Эрдейи, М.П. Гумберт, Л. Борнгессера и др. большое развитие получила теория гипергеометрических рядов двух переменных. На основании изучения Горна, Гумберта и Борнгессера были установлены, что из 34 рядов 20 являются вырожденными гипергеометрическими рядами, а 14 полными.

Дальнейшее свое развитие ждет аналитическая теория систем, состоящее из трех уравнений. Я. Горн изучил гипергеометрические ряды от трех переменных, ряды от n переменных исследовал Лауричелла. Данные о них, до 1926 года приводится в монографии. В монографии [1] приводится список 205 гипергеометрических рядов трех переменных. С возрастанием количества переменных появляются дополнительные трудности, связанные с установлением соответствующих систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка которым они удовлетворяют, с классификацией особых кривых, и построением решений вблизи этих особых кривых, относительно связи между этими рядами и ортогональными многочленами многих переменных и другие. Следует отметить, что ряд конкретных систем связанных с гипергеометрическими функциями многих переменных приводятся в монографиях [1], [21]. Однако, до сих пор, отсутствует общий метод исследования.

В данном разделе изучена одна специальная система, состоящая из трёх уравнений, связанной с вырожденными гипергеометрическими функциями и многочленами Лагерра многих переменных. Изучение раздела состоит из нескольких этапов. В начале раскрываются особенности применения метода Фробениуса-Латышевой к построению решения в виде обобщенных степенных рядов трёх переменных. Приводится классификация регулярных и иррегулярных особенностей таких систем, а также устанавливаются соответствующие этим особенностям виды решения. Далее, показано применение метода Фробениуса-Латышевой к построению решения системы Горна состоящей из трёх уравнений в виде функций Гумберта $\Psi_2^{(3)}$ от трех переменных. Раскрыты ряд свойств полиномов Лагерра двух и трех переменных и их связь с вырожденными гипергеометрическими функциями Гумберта многих переменных.

Кроме этого, изучены возможности построение вырожденной гипергеометрической функции сводящейся к функциям Бесселя двух переменных. Установлены и изучены системы с решениями в виде функции Бесселя двух переменных, используя вырожденную систему Горна. Установлены также связь функций Бесселя с функцией Гумберта и с другими функциями со списка Горна. По аналогии обыкновенному случаю исследованы их дифференциальные свойства, теоремы сложения и умножения, исходя их свойств функции Гумберта.

Материалы этого раздела были опубликованы в работах [79-81], [86], [88].

2.1.1 Применение метода Фробениуса-Латышевой

Ставится задача изучения особенности применения метода Фробениуса-Латышевой к специальной системе, состоящей из трёх уравнений

$$
\begin{aligned}
&x_1^2 p^{(0)}F_{x_1x_1} + x_1 p^{(1)}F_{x_1} + x_2 p^{(2)}F_{x_2} + x_3 p^{(3)}F_{x_3} + p^{(4)}F = 0,\\
&x_1^2 q^{(0)}F_{x_1x_1} + x_1 q^{(1)}F_{x_1} + x_2 q^{(2)}F_{x_2} + x_3 q^{(3)}F_{x_3} + q^{(4)}F = 0,\\
&x_1^2 g^{(0)}F_{x_1x_1} + x_1 g^{(1)}F_{x_1} + x_2 g^{(2)}F_{x_2} + x_3 g^{(3)}F_{x_3} + g^{(4)}F = 0
\end{aligned}
\tag{2.1.2}
$$

с коэффициентами вида

$$
p^{(i)} = a_{000}^{(i)} + a_{100}^{(i)}x_1,\ q^{(i)} = b_{000}^{(i)} + b_{010}^{(i)}x_2,\ g^{(i)} = c_{000}^{(i)} + c_{001}^{(i)}x_3,\ i = \overline{0,4}, \tag{2.1.3}
$$

где $F = F(x_1, x_2, x_3) -$ общая неизвестная.

Применение метода начнём с установления особых кривых системы (2.1.2).

Особые кривые устанавливаются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных $F_{x_1x_1}, F_{x_2x_2}$ и $F_{x_3x_3}$:

$$
\begin{aligned}
&x_1\left(a_{000}^{(0)} + a_{100}^{(0)}x_1\right) = 0,\ x_1 = 0,\ x_1 = -a_{000}^{(0)} / a_{100}^{(0)},\\
&x_2\left(b_{000}^{(0)} + b_{010}^{(0)}x_2\right) = 0,\ x_2 = 0,\ x_2 = -b_{000}^{(0)} / b_{010}^{(0)},\\
&x_3\left(c_{000}^{(0)} + c_{001}^{(0)}x_3\right) = 0,\ x_3 = 0,\ x_3 = -c_{000}^{(0)} / c_{001}^{(0)}.
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

Из них составляем конечные тройки особенностей системы (1): $(0,0,0)$, $\left(0,-b_{000}^{(0)}/b_{010}^{(0)},0\right)$, $\left(0,-b_{000}^{(0)}/b_{010}^{(0)},-c_{000}^{(0)}/c_{001}^{(0)}\right)$, $\left(-a_{000}^{(0)}/a_{100}^{(0)},0,0\right)$, $\left(-a_{000}^{(0)}/a_{100}^{(0)},0,-c_{000}^{(0)}/c_{001}^{(0)}\right)$, $\left(-a_{000}^{(0)}/a_{100}^{(0)},-b_{000}^{(0)}/b_{010}^{(0)},0\right)$, $\left(0,0,-c_{000}^{(0)}/c_{001}^{(0)}\right)$, $\left(-a_{000}^{(0)}/a_{100}^{(0)},-b_{000}^{(0)}/b_{010}^{(0)},-c_{000}^{(0)}/c_{001}^{(0)}\right)$.

К ним добавим особые кривые на бесконечности $(x_1 = \infty, x_2 = \infty, x_3 = \infty)$. Тогда количество особенностей системы увеличится до 24-х. Гумбертом установлено, что вблизи особенности $(0,0,0)$ для системы Горна существуют 2^3 линейно-независимых частных решений. Тогда система (2.1.1) должна иметь до $24*2^3$=192 решений. Количество решений определяются в зависимости от формы задания коэффициентов. Однако в силу различных причин не всегда удается их построить. Поэтому, как и в обыкновенном случае, ограничимся построением решения вблизи особенностей $(0,0,0)$ и (∞,∞,∞).

Теперь переходим к установлению регулярных и иррегулярных особенностей и соответствующих им видов решения.

Правило 2.1.1. *Если в (2.1.1) коэффициенты* $a_{000}^{(0)} = 0, b_{000}^{(0)} = 0, c_{000}^{(0)} = 0$, *то особенность системы* $(0,0,0)$ *является особой иррегулярной. Когда они отличны от нуля, особенность* $(0,0,0)$ *системы (2.1.1) является особой регулярной. Соответствующее им решение имеет вид*

$$F\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot x_3^{\rho_3}\cdot\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}C_{m_1,m_2,m_3}\cdot x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\cdot x_3^{m_3},\left(C_{0,0,0}\neq 0\right), \qquad (2.1.5)$$

где $\rho_j\ \left(j=1,2,3\right), C_{m_1,m_2,m_3}\left(m_1,m_2,m_3=0,1,2,...\right)$ *– неизвестные постоянные.*

Решение системы с иррегулярной особенностью представляется в виде

$$F\left(x_1,x_2,x_3\right)=\exp Q\left(x_1,x_2,x_3\right)\cdot x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot x_3^{\rho_3}\cdot\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}C_{m_1,m_2,m_3}\cdot x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\cdot x_3^{m_3},\left(C_{0,0,0}\neq 0\right), \qquad (2.1.6)$$

где $\rho_j\ \left(j=1,2,3\right), C_{m_1,m_2,m_3}\left(m_1,m_2,m_3=0,1,2,...\right)$ – неизвестные постоянные; $Q\left(x_1,x_2,x_3\right)$ – полином трёх переменных x_1,x_2 и x_3.

Степень этого полинома определяется понятием ранга $p=1+k$:

$$Q\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{\alpha_{p00}}{p}x_1^p+\frac{\alpha_{0p0}}{p}x_2^p+\frac{\alpha_{00p}}{p}x_3^p+\alpha_{000}x_1+\alpha_{010}x_2+\alpha_{001}x_3, \qquad (2.1.7)$$

где $\alpha_{p00},\alpha_{0p0},\alpha_{00p},\alpha_{p-1,00},...\alpha_{001}$ – неизвестные коэффициенты.

Определение 2.1.1. *Величина ранга* p, *определяемая по наибольшим степеням коэффициентов системы равенством*

$$p=1+k,\quad k=\max\frac{\tau_s-\tau_0}{s},\quad s=1,2,3,4 \qquad (2.1.8)$$

называется порядком ряда (2.1.6) и может быть целым и дробным (положительным и отрицательным).

Решение вида (2.1.6) называется нормально-регулярным. Это понятие было введено К.Я. Латышевой. Она установила, что нормально-регулярное решение существует только тогда, когда ранг $p>0$ и антиранг $m\le 0$, то есть когда особенность $\left(\infty,\infty,\infty\right)$ – иррегулярная, а особенность $\left(0,0,0\right)$– регулярная. Если одновременно $p\le 0$ и $m\le 0$, то особенности $\left(0,0,0\right)$и $\left(\infty,\infty,\infty\right)$ регулярные и вблизи них можно построить регулярные решения. В дальнейшем, изучаемые нами системы относятся к одному из этих случаев.

Правило 2.1.2. *Если в системе (2.1.2) коэффициенты* $a_{100}^{(0)}=0,b_{010}^{(0)}=0,c_{001}^{(0)}=0$ *то особенность* $\left(\infty,\infty,\infty\right)$*системы является особой иррегулярной.*

Если они отличны от нуля, особенность $\left(\infty,\infty,\infty\right)$ *является особой регулярной. Тогда получим систему с регулярной особенностью вблизи* $\left(\infty,\infty,\infty\right)$ *с соответствующим решением*

$$F\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot x_3^{\rho_3}\cdot\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}C_{m_1,m_2,m_3}\cdot x_1^{-m_1}\cdot x_2^{-m_2}\cdot x_3^{-m_3}\ \left(C_{0,0,0}\neq 0\right), \qquad (2.1.9)$$

где $\rho_j\ (j=1,2,3), C_{m_1,m_2,m_3}\ (m_1,m_2,m_3=0,1,2,...)$ *– неизвестные постоянные.*

Решение системы вблизи иррегулярной особенности (∞,∞,∞) представляется в виде

$$F(x_1,x_2,x_3)=\exp Q(x_1,x_2,x_3)\cdot x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot x_3^{\rho_3}\cdot\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}C_{m_1,m_2,m_3}\cdot x_1^{-m_1}\cdot x_2^{-m_2}\cdot x_3^{-m_3},\ (C_{0,0,0}\neq 0),\quad (2.1.10)$$

где $\rho_j\ (j=1,2,3), C_{m_1,m_2,m_3}\ (m_1,m_2,m_3=0,1,2,...)$ – неизвестные постоянные.

Полином (2.1.7) является общим для решений (2.1.6) и (2.1.10). Выражение (2.1.10) в этом случае является формальным решением в виде нормального ряда Томе трёх переменных.

Если в рядах (2.1.6) и (2.1.10) $Q(x_1,x_2,x_3)\equiv 0$, то эти ряды превращаются в обобщенные степенные ряды видов (2.1.5) и (2.1.9), сходящиеся вблизи соответствующих особенностей $(0,0,0)$ и (∞,∞,∞). Это соответствует случаю, когда $p\le 0, m\le 0$.

2.2 Нормально-регулярные решения родственных систем типа Уиттекера и Лагерра

Определение 2.2.1. *Ряд вида (2.1.5) называется обобщенным степенным рядом трёх переменных с неизвестными показателями ряда* $\rho_j>0\ \ (j=1,2,3)$ *и* $C_{m_1,m_2,m_3}\ (m_1,m_2,m_3=0,1,2,...)$*- неизвестными коэффициентами ряда.*

Для их определения применяется метод Фробениуса-Латышевой. С этой целью, составляем систему характеристических функций Фробениуса.

Определение 2.2.2. *Системой характеристических функций Фробениуса называется система*

$$\begin{aligned}
L_1\left[x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\right]&\equiv x_1^{\rho_1-1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\left[f_{000}^{(1)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)+f_{111}^{(1)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)x_1\right],\\
L_2\left[x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\right]&\equiv x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2-1}x_3^{\rho_3}\left[f_{000}^{(2)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)+f_{111}^{(2)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)x_2\right],\\
L_3\left[x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\right]&\equiv x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3-1}\left[f_{000}^{(3)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)+f_{111}^{(3)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)x_3\right],
\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

где

$$\begin{aligned}
f_{000}^{(1)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=a_{000}^{(0)}\cdot\rho_1(\rho_1-1)+a_{000}^{(1)}\rho_1+a_{000}^{(2)}\rho_2+a_{000}^{(3)}\rho_3+a_{000}^{(4)},\\
f_{000}^{(2)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=b_{000}^{(0)}\cdot\rho_2(\rho_2-1)+b_{000}^{(1)}\rho_1+b_{000}^{(2)}\rho_2+b_{000}^{(3)}\rho_3+b_{000}^{(4)},\\
f_{000}^{(3)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=c_{000}^{(0)}\cdot\rho_3(\rho_3-1)+c_{000}^{(1)}\rho_1+c_{000}^{(2)}\rho_2+c_{000}^{(3)}\rho_3+c_{000}^{(4)},\\
f_{111}^{(1)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=a_{100}^{(0)}\cdot\rho_1(\rho_1-1)+a_{100}^{(1)}\rho_1+a_{100}^{(2)}\rho_2+a_{100}^{(3)}\rho_3+a_{100}^{(4)},\\
f_{111}^{(2)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=b_{010}^{(0)}\cdot\rho_2(\rho_2-1)+b_{010}^{(1)}\rho_1+b_{010}^{(2)}\rho_2+b_{010}^{(3)}\rho_3+b_{010}^{(4)},\\
f_{000}^{(3)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)&=c_{001}^{(0)}\cdot\rho_3(\rho_3-1)+c_{001}^{(1)}\rho_1+c_{001}^{(2)}\rho_2+c_{001}^{(3)}\rho_3+c_{001}^{(4)}
\end{aligned}$$

система получена путем подстановки (2.1.5) в (2.1.2).

Отсюда относительно особенностей $(0,0,0)$ и (∞,∞,∞) определим систему определяющих уравнений.

Определение 2.2.3. *Система*

$$f_{0,0,0}^{(j)}\left(\rho_1,\rho_2,\rho_3\right)=0,\left(j=1,2,3\right), \tag{2.2.2}$$

называется системой определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,0)$.

Показатели ряда (2.1.5) определяются из (2.2.2) в виде троек $\left(\rho_1^t,\rho_2^t,\rho_3^t\right),(t=1,2)$.

Определение 2.2.4. *Система*

$$f_{1,1,1}^{(j)}\left(\rho_1,\rho_2,\rho_3\right)=0,\left(j=1,2,3\right), \tag{2.2.3}$$

называется системой определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞,∞).

Показатели ряда (2.1.9) из (2.2.3) определяются в виде троек $\left(\rho_1^t,\rho_2^t,\rho_3^t\right),(t=1,2)$.

Количество таких троек показателей позволяют определить количество линейно-независимых решений исходной системы (2.1.2) вблизи указанных особенностей. Тем самым, сформулируем следующие необходимые условия.

Теорема 2.2.1. *Для существования регулярного решения (2.1.5) системы (2.1.2) с коэффициентами (2.1.3) необходимо, чтобы тройка* $\left(\rho_1,\rho_2,\rho_3\right)$ *была корнем системы определяющих уравнений относительно особенности* $(0,0,0)$ *вида (2.2.2).*

Теорема 2.2.2. *Для существования регулярного решения (2.1.9) системы (2.1.2) с коэффициентами (2.1.3) необходимо, чтобы тройка показателей* $\left(\rho_1,\rho_2,\rho_3\right)$ *относительно особенности* (∞,∞,∞) *была корнем системы определяющих уравнений вида (2.2.3).*

Неизвестные коэффициенты рядов (2.1.5) и (2.1.9) $C_{m_1,m_2,m_3}\left(m_1,m_2,m_3=0,1,2,...\right)$ определяются из систем рекуррентных последовательностей

$$\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty} C_{\mu_1-m_1,\mu_2-m_2,\mu_3-m_3}\cdot F_{m_1,m_2,m_3}^{(k)}\left(\rho_1+\mu_1-m_1,\rho_2+\mu_2-m_2,\rho_3+\mu_3-m_3\right)=0$$
$$\mu_1,\mu_2,\mu_3=0,1,2,...;k=1,2,3\ , \tag{2.2.4}$$

полученной путем подстановки ряда (2.1.5) в систему (2.1.2) с коэффициентами вида (2.1.3).

2.2.1 Представление многочленов Лагерра от двух переменных

При исследовании многочленов Лагерра двух переменных следует рассматривать их связь и 20-тью вырожденными гипергеометрическими системами, соответственно, и 20-тью вырожденными гипергеометрическими рядами двух переменных, удовлетворяющие им [21, с.226-230]. В ряде работ [49-51] в качестве связывающей системы была подобрана система Горна (Ψ_2)и изучена связь между вырожденной гипергеометрической функцией Гумберта $\Psi_2^{(2)}(\lambda,\gamma,\gamma';x_1,x_2)$ и многочленом Лагерра двух переменных $L_{n,m}^{\alpha,\beta}\ \ x,y$.

Определение 2.2.5. *Функция* $\Psi_2^{(2)}(\lambda,\gamma,\gamma';x_1,x_2)$ *называется вырожденной гипергеометрической функцией Гумберта двух переменных* x_i $(i=1{,}2)$ *определяемая с помощью ряда*

$$\Psi_2^{(2)}=\Psi_2[\lambda,\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2]=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{m_1+m_2}}{(\gamma_1)_{m_1}\cdot(\gamma_2)_{m_2}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}\qquad(2.2.5)$$

и являющееся частным решением системы Горна (Ψ_2)*:*

$$\begin{aligned}&x_1\cdot Z_{x_1x_1}+(\gamma_1-x_1)\cdot Z_{x_1}-x_2\cdot Z_{x_2}-\lambda Z=0,\\&x_{2\cdot}\cdot Z_{x_2x_2}+(\gamma_2-x_2)\cdot Z_{x_2}-x_1\cdot Z_{x_1}-\lambda Z=0,\end{aligned}\qquad(2.2.6)$$

где $\gamma_i\,(i=1,2)$ *– некоторые постоянные,* $Z=Z(x,y)$*– общая неизвестная.*

Система (2.2.6) интересна тем, что из неё с помощью некоторого преобразования можно получить систему Уиттекера, решением которой является функция Уиттекера двух переменных [26, стр.132].

При $\gamma_1=\alpha_1+1,\gamma_2=\alpha_2+1,\ \alpha_1>-1,\alpha_2>-1$ система (2.2.6) имеет вид:

$$\begin{aligned}&x_1\cdot Z_{x_1x_1}+(\alpha_1+1-x_1)\cdot Z_{x_1}-x_2\cdot Z_{x_2}-\lambda Z=0,\\&x_{2\cdot}\cdot Z_{x_2x_2}+(\alpha_2+1-x_2)\cdot Z_{x_2}-x_1\cdot Z_{x_1}-\lambda Z=0.\end{aligned}\qquad(2.2.7)$$

Решением системы (2.2.7) является полином:

$$L_{n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=\Psi_2[-n,\alpha_1+1,\alpha_2+1;x_1,x_2]=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-n)_{m_1+m_2}}{(\alpha_1+1)_{m_1}\cdot(\alpha_2+1)_{m_2}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}.\qquad(2.2.8)$$

(2.2.8) устанавливает связь функций Гумберта $\Psi_2^{(2)}=\Psi_2$ и полинома Лагерра двух переменных.

Действительно, тогда вырожденный ряд двух переменных (2.2.5) при $\lambda=-n$ обращается в ортогональный полином двух переменных Лагерра (2.2.7). Система (2.2.7) называется *основной системой Лагерра*, а (2.2.8) *обобщенным полиномом Лагерра* двух переменных.

Как и в обыкновенном случае [5] справедливо представление вида

$$L_{n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=C_{n,n}\cdot\Psi_2\left[-n,\alpha_1+1,\alpha_2+1;x_1,x_2\right]=C_{n,n}\left[1-\frac{n}{1!(\alpha_1+1)}\cdot x_1-\frac{n}{1!(\alpha_2+1)}\cdot x_2+\right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{1!(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot x_1x_2+\frac{n(n-1)}{2!(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)}\cdot x_1^2+\frac{n(n-1)}{2!(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}\cdot x_2^2+\ldots+$$
$$\left.+(-1)^n\cdot\frac{n(n-1)\ldots2\cdot1}{n!(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)\ldots(\alpha_2+n)}\cdot x_2^n\right].\qquad(2.2.9)$$

Принимая произвольную постоянную так

$$C_{n,n}=(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+n)\cdot(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_2+n)=\frac{\Gamma(\alpha_1+n+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_2+n+1)}{\Gamma(\alpha_2+1)},$$

получим, в частности, несколько начальных обобщенных полиномов Лагерра двух переменных

$$L_{0,0}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=1,$$
$$L_{0,0}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=-x_1(\alpha_2+1)-x_2(\alpha_1+1)+(\alpha_1+1)(\alpha_2+1),$$
$$L_{1,1}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=2(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)x_1^2+2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)x_2^2+2(\alpha_1+2)(\alpha_2+2)x_1\cdot x_2-$$
$$-2(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)x_1-2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)x_2+(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2).\qquad(2.2.10)$$

Если $\alpha_1=0,\alpha_2=0$, тогда из (2.2.10) получим простые полиномы Лагерра двух переменных

$$L_{0,0}(x_1,x_2)=1,$$
$$L_{1,1}(x_1,x_2)=-x_1-x_2+1,$$
$$L_{1,1}(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_2^2+8x_1x_2-8x_1-8x_2+4.$$

Теорема 2.2.6. *Пусть в системе Горна (2.2.6) параметры* $\gamma_1=\alpha_1+1,\gamma_2=\alpha_2+1(\alpha_1>-1,\alpha_2>-1,\alpha_1\neq0,\alpha_2\neq0)$. *Тогда система (2.2.7) имеет четыре линейно-независимых частных решений, выражающиеся через функции Гумберта* $\Psi_2^{(2)}(\lambda,\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)$, *и решение*

$$Z(x_1,x_2)=\Psi_2^{(2)}(\lambda,\alpha_1+1,\alpha_2+1;x_1,x_2)\qquad(2.2.11)$$

при $\lambda=-n$ *(*$n>0$*- целое число) определяет полином Лагерра двух переменных вида (2.2.8).*

Следствие 2.2.1. *Пусть в основной системе Лагерра (2.2.7) параметры* $\alpha_1=0$ *и* $\alpha_2=0$. *Тогда система*

$$\left.\begin{aligned} x_1 Z_{x_1x_1} + (1-x_1)Z_{x_1} - x_2 Z_{x_2} - \lambda Z = 0, \\ x_2 Z_{x_2x_2} + (1-x_2)Z_{x_2} - x_1 Z_{x_1} - \lambda Z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.2.12}$$

имеет четыре линейно-независимых частных решений, выражающиеся через функцию Гумберта $\Psi_2^{(2)}$, *и решение*

$$Z_1(x_1, x_2) = \Psi_2^{(2)}(\lambda, 1, 1; x_1, x_2)$$

при $\lambda = -n$ ($n > 0$ *– целое число) определяет полином Лагерра двух переменных вида*

$$L_{n,n}^{(0,0)}(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{n} \frac{(-n)_{m_1+m_2}}{(1)_{m_1}(1)_{m_2}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \frac{x_2^{m_2}}{m_2!}. \tag{2.2.13}$$

2.2.2 Связь систем типа Лагерра с допустимыми уравнениями в частных производных второго порядка

При обобщении классических ортогональных многочленов на случай двух и более переменных возникли необходимость рассмотрение так называемых биортогональных систем многочленов. Частные случаи таких систем были рассмотрены Ш. Эрмитом (1865) и П. Аппелем (1881). Они являются решениями систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка состоящих из двух и более уравнений [33].

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка называется *допустимым*, если его собственными функциями являются ортогональные многочлены двух переменных. Условия допустимости и классификация допустимых уравнений приведены в работах Г. Кролл и И. Шеффер [35]-[36], Г.К. Энгелис [37]. Т. Корвиндер [39] рассмотрел новые системы ортогональных многочленов, установил новые свойства ортоональных многочленов и связь таких многочленов с дифференциальными уравнениями. В монографии П.К. Суетина приводится более 20-ти нормальных форм допустимых уравнений.

Изучим связь основной системы Лагерра (2.2.7) с десятой нормальной формой допустимого уравнения. Она записывается в виде [46]:

$$x_1 Z_{x_1x_1} + x_2 Z_{x_2x_2} + (Bx_1 + d_{00})Z_{x_1} + (Bx_2 + g_{00})Z_{x_2} = nBZ, \tag{2.2.14}$$

где, $B, n, g_{00}, d_{00}, q_{00} - const$.

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$x_1 Z_{x_1x_1} + x_2 Z_{x_2x_2} + (\alpha_1 + 1 - 2x_1)Z_{x_1} + (2x_2 + \alpha_2 + 1)Z_{x_2} = 2nZ \tag{2.2.15}$$

полученное путем сложения двух уравнений системы (2.2.7) относится к десятой нормальной форме допустимого уравнения (2.2.15) имеет решение в виде обобщенного полинома Лагерра двух переменных (2.2.9).

Если примем $B=-2, d_{00}=\alpha_1+1, g_{00}=\alpha_2+1$, тогда уравнение (2.2.15) представится в виде (2.2.14). Это уравнение называется уравнением Лагерра-Лагерра. Аналогично можно убедиться, что уравнение

$$x_1 Z_{x_1 x_1}+x_2 Z_{x_2 x_2}+(1-2x_1)Z_{x_1}+(1-2x_2)Z_{x_2}=2nZ \tag{2.2.16}$$

также относится к десятой нормальной форме при $B=-2$, $d_{00}=1, g_{00}=1$ с решением в виде простого полинома Лагерра (2.2.13).

В монографии [46] приводится классификация допустимых уравнений через соответствующие характеристические уравнения. Уравнение (2.2.14) имеет

$$L(x,y)=ac-b^2=x_1 x_2=0, \tag{2.2.17}$$

где a,b,c- коэффициенты основного допустимого уравнения, определяет пересекающиеся прямые. Уравнения (2.2.15) и (2.2.16) также имеют характеристику вида (2.2.17). Нетрудно убедиться, что соответствующие характеристики систем Лагерра, также определяют пересекающиеся прямые, что подтверждает правильность наших рассуждений.

Известно, что функция Гумберта $\Psi_2^{(2)}(\lambda,\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)$ получена [21, с.124] из функций Аппеля F_2 с помощью предельного перехода

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_2\left(\lambda,\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\gamma,\gamma';\varepsilon x,\varepsilon y\right)=\Psi_2\left(\lambda,\gamma,\gamma';x,y\right).$$

Beniwal и Saran [44] также установили связь обобщенного полинома Лагерра двух переменных с функций Аппеля F_2:

$$L_{m,n}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(x_1,x_2\right)=\frac{(\beta)_m\cdot(\gamma)_n}{m!\cdot n!}\cdot F_2\left[\alpha,-m,-n;\beta,\gamma;x_1,x_2\right].$$

Такие предельные переходы можно использовать для установления связи между обобщенным полиномом Лагерра двух переменных и с известными функциями двух переменных.

2.2.3 Представление многочленов Лагерра от трех переменных

Постановка задачи. Пусть задана система Горна с параметрами: $\gamma_1=\alpha_1+1, \gamma_2=\alpha_2+1, \gamma_3=\alpha_3+1$:

$$x_j \cdot F_{x_j x_j} + \left(\alpha_j + 1 - x_j\right) F_{x_j} - \sum_{(k \neq j)} x_k \cdot F_k - \lambda \cdot F = 0, \left(j = 1,2,3\right), \qquad (2.2.18)$$

где α_j $\left(j = 1,2,3\right)$ и λ – некоторые постоянные, $F\left(x_1, x_2, x_3\right)$– общая неизвестная.

Методом Фробениуса-Латышевой требуется построить решения системы (2.2.18) в виде многочленов Лагерра трёх переменных.

Опираясь на правило 2.2.1, заключаем, что система (2.2.18) имеет регулярную особенность $\left(0,0,0\right)$ и иррегулярную особенность $\left(\infty,\infty,\infty\right)$, поскольку система (2.2.18) из системы (2.1.2) получается при $a_{000}^{(0)} \neq 0, b_{000}^{(0)} \neq 0, c_{000}^{(0)} \neq 0$ и $a_{100}^{(0)} = 0, b_{010}^{(0)} = c_{001}^{(0)} = 0$. Вблизи регулярной особенности $\left(0,0,0\right)$ решение ищем в виде обобщенного степенного ряда трёх переменных (2.1.5), где показатели ρ_1, ρ_2, ρ_3 определяются из системы определяющих уравнений относительно особенности $\left(0,0,0\right)$вида (2.2.2), которая для системы (2.2.18) представляется в виде

$$f_{0,0,0}^{(j)}\left(\rho_1, \rho_2, \rho_3\right) = \rho_j\left(\rho_j - 1\right) + \left(1 + \alpha_j\right) \cdot \rho_j = 0\left(j = 1,2,3\right), \qquad (2.2.19)$$

и определяет восемь троек корней

$$\begin{aligned} &\left(\rho_1^t, \rho_2^t, \rho_3^t\right)\left(t = 1,2\right) : \left(0,0,0\right), \left(-\alpha_1, 0, 0\right), \left(0, -\alpha_2, 0\right), \left(0, 0, -\alpha_3\right), \\ &\left(-\alpha_1, -\alpha_2, 0\right), \left(-\alpha_1, 0, -\alpha_3\right), \left(0, -\alpha_2, -\alpha_3\right), \left(-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3\right). \end{aligned} \qquad (2.2.20)$$

Этим показателям соответствует восемь линейно-независимых частных решений. Все они выражаются через функции Гумберта $\Psi_2^{(3)}$ трех переменных:

$$\begin{aligned}
&F_1 = \Psi_2^{(3)}\left(\lambda, 1+\alpha_1, 1+\alpha_2, 1+\alpha_3; x_1, x_2, x_3\right), \\
&F_2 = x_1^{-\alpha_1} \cdot \Psi_2^{(3)}\left(\lambda - \alpha_1, 1-\alpha_1, 1+\alpha_2, 1+\alpha_3; x_1, x_2, x_3\right), \\
&F_3 = x_2^{-\alpha_2} \cdot \Psi_2^{(3)}\left(\lambda - \alpha_2, 1+\alpha_1, 1-\alpha_2, 1+\alpha_3; x_1, x_2, x_3\right), \\
&F_4 = x_3^{-\alpha_3} \cdot \Psi_2^{(3)}\left(\lambda - \alpha_3, 1+\alpha_1, 1+\alpha_2, 1-\alpha_3; x_1, x_2, x_3\right), \\
&F_5 = x_1^{-\alpha_1} \cdot x_2^{-\alpha_2} \cdot \Psi_2^{(3)}\left(\lambda - \alpha_1 - \alpha_2, 1-\alpha_1, 1-\alpha_2, 1+\alpha_3; x_1, x_2, x_3\right), \\
&F_6 = x_1^{-\alpha_1} \cdot x_3^{-\alpha_3} \cdot \Psi_2^{(3)}\left(\lambda - \alpha_1 - \alpha_3, 1-\alpha_1, 1+\alpha_2, 1-\alpha_3; x_1, x_2, x_3\right), \\
&F_7 = x_2^{-\alpha_2} \cdot x_3^{-\alpha_3} \cdot \Psi_2^{(3)}\left(\lambda - \alpha_2 - \alpha_3, 1+\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3; x_1, x_2, x_3\right), \\
&F_8 = x_1^{-\alpha_1} \cdot x_2^{-\alpha_2} \cdot x_3^{-\alpha_3} \cdot \Psi_2^{(3)}\left(\lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, 1-\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3; x_1, x_2, x_3\right).
\end{aligned} \qquad (2.2.21)$$

Из них, нас больше интересует решение F_1, которое при $\lambda = -n$ определяет полином Лагерра трёх переменных. Действительно, тогда решение представляется в виде

$$F_1 = \Psi_2^{(3)}\left(-n, 1+\alpha_1, 1+\alpha_2, 1+\alpha_3; x_1, x_2, x_3\right) =$$
$$= \sum_{m_1, m_2, m_3 = 0}^{n} \frac{(-n)_{m_1+m_2+m_3}}{(1+\alpha_1)_{m_1} \cdot (1+\alpha_2)_{m_2} \cdot (1+\alpha_3)_{m_3}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \frac{x_2^{m_2}}{m_2!} \cdot \frac{x_3^{m_3}}{m_3!}. \qquad (2.2.22)$$

Из (2.2.22) вырожденный ряд трёх переменных Гумберта обращается в ортогональный полином трёх переменных Лагерра:

$$L_{n,n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(x_1, x_2, x_3) = C_{n,n,n} \cdot \Psi_2^{(3)}(-n, \alpha_1+1, \alpha_2+1, \alpha_3+1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= C_{n,n,n}\left[1 - \frac{n}{(\alpha_1+1)} \cdot \frac{x_1}{1!} - \frac{n}{(\alpha_2+1)} \cdot \frac{x_2}{1!} - \frac{n}{(\alpha_3+1)} \cdot \frac{x_3}{1!} + \right.$$
$$+ \frac{n(n-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)} \cdot \frac{x_1}{1!}\frac{x_2}{1!} + \frac{n(n-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_3+2)} \cdot \frac{x_1}{1!}\frac{x_3}{1!} + \frac{n(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_3+2)} \cdot \frac{x_2}{1!}\frac{x_3}{1!} + \ldots +$$
$$.+..+ \frac{(-1)^n n(n-1)\ldots\cdot 2\cdot 1}{(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+n)} \cdot \frac{x_1^n}{n!} + \ldots + \frac{(-1)^n n(n-1)\ldots\cdot 2\cdot 1}{(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_2+n)} \cdot \frac{x_2^n}{n!} +$$
$$+ \ldots + \frac{(-1)^n n(n-1)\ldots\cdot 2\cdot 1}{(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+n)} \cdot \frac{x_1^n}{n!}. \qquad (2.2.23)$$

Произвольную постоянную $C_{n,n,n}$ представляя в виде

$$C_{n,n,n} = (\alpha_1+1)\ldots\cdot(\alpha_1+n)\cdot(\alpha_2+1)\ldots\cdot(\alpha_2+n)\cdot(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_3+n) =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha_1+n+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_2+n+1)}{\Gamma(\alpha_2+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_3+n+1)}{\Gamma(\alpha_3+1)}$$

получим из (2.2.23) несколько первых членов ряда в виде

$$L_{0,0,0}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(x_1, x_2, x_3) = 1,$$
$$L_{1,1,1}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(x_1, x_2, x_3) = -x_1(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) - x_2(\alpha_1+1)(\alpha_3+1) -$$
$$- x_3(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) + (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1),$$
$$L_{2,2,2}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_2+1)(\alpha_2+2)(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)x_1^2 + \qquad (2.2.24)$$
$$+ (\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)x_2^2 + (\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)x_3^2 +$$
$$+ 2(\alpha_1+2)(\alpha_2+2)(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)x_1x_2 + 2(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)(\alpha_3+2)x_1x_3 +$$
$$+ 2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+2)(\alpha_3+2)x_2x_3 - 2(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)x_1 -$$
$$- 2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+2)(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)x_2 - 2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)(\alpha_3+2)x_3 +$$
$$+ (\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)(\alpha_3+1)(\alpha_3+2).$$

Если $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$, тогда из (2.2.24) получим:

$$L_{0,0,0}(x_1,x_2,x_3)=1,$$
$$L_{1,1,1}(x_1,x_2,x_3)=-x_1-x_2-x_3+1,$$
$$L_{2,2,2}(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+16x_1x_2+16x_1x_3+16x_2x_3$$
$$-16x_1-16x_2-16x_3+8,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.2.25}$$

По аналогии обыкновенному случаю, $L_{n,n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(x_1,x_2,x_3)$ $\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0,\alpha_3\neq 0$ называют *обобщенным полиномом Лагерра трех переменных*, а $L_{n,n,n}(x_1,x_2,x_3)$- *простым полиномом Лагерра трех переменных.* В (2.2.24) и (2.2.25) приведены по несколько первых полиномов Лагерра трех переменных. Систему (2.2.18) состоящей их трех уравнений *называют системой типа Лагерра*.

Система определяющих уравнений (2.2.2) относительно особенности $(0,0,0)$ исходной системы (2.2.18) имеет восемь троек корней (2.2.20), которым соответствуют восемь линейно-независимых частных решений (2.2.21), выражающиеся через функции Гумберта $\Psi_2^{(3)}$ трех переменных. Из них решение

$$F_1(x_1,x_2,x_3)=\Psi_2^{(3)}(\lambda,1+\alpha_1,1+\alpha_2,1+\alpha_3;x_1,x_2,x_3)$$

при $\lambda=-n$ ($n>0$- целое число) определяет полином Лагерра трех переменных. Что и требовалось доказать.

Теорема 2.2.7. *Пусть в системе (2.2.18) параметры* $\gamma_1=\alpha_1+1,\gamma_2=\alpha_2+1,\gamma_3=\alpha_3+1,$ $(\alpha_1>-1,\alpha_2>-1,\alpha_3>-1,\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0,\alpha_3\neq 0)$. *Тогда система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (2.2.18) имеет восемь линейно-независимых частных решений (2.2.21), выражающиеся через функции Гумберта* $\Psi_2^{(3)}$ *трех переменных и решение*

$$F_1(x_1,x_2,x_3)=\Psi_2^{(3)}(\lambda,1+\alpha_1,1+\alpha_2,1+\alpha_3;x_1,x_2,x_3)$$

при $\lambda=-n$ ($n>0$ *– целое число) определяет обобщенный полином Лагерра трех переменных*

$$L_{n,n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{n}\frac{(-n)_{m_1+m_2+m_3}}{(1+\alpha_1)_{m_1}(1+\alpha_2)_{m_2}(1+\alpha_3)_{m_3}}\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}\frac{x_1^{m_3}}{m_3!}. \tag{2.2.26}$$

Следствие 2.2.2. *Если в системе (2.2.18) параметры* $\alpha_j=0$ $(j=1,2,3)$, *то система*

$$x_jF_{x_jx_j}+(1-x_j)F_{x_1}-\sum_{k\neq j}x_kF_{x_k}-\lambda F=0 \tag{2.2.27}$$

имеет восемь линейно-независимых частных решений, выражающиеся через функции Гумберта $\Psi_2^{(3)}$ *трех переменных, из которых решение*

$$F_1(x_1,x_2,x_3)=\Psi_2^{(3)}(\lambda,1,1,1;x_1,x_2,x_3)$$

при $\lambda=-n\,(n>0$ *– целое число) определяет простой полином Лагерра трех переменных вида*

$$L_{n,n,n}^{(0,0,0)}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{n}\frac{(-n)_{m_1+m_2+m_3}}{(1)_{m_1}(1)_{m_2}(1)_{m_3}}\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}\frac{x_1^{m_3}}{m_3!}. \qquad (2.2.28)$$

Теперь покажем связь основной системы Лагерра (2.2.18) с обобщенной десятой нормальной формой допустимого уравнения, которое записывается в виде

$$x_1F_{x_1x_1}+x_2F_{x_2x_2}+x_3F_{x_3x_3}+(Bx_1+d_{00})F_{x_1}+(Bx_2+g_{00})F_{x_2}+(Bx_3+q_{00})F_{x_3}=nBF\,, \qquad (2.2.29)$$

где $B,n,g_{00},d_{00}-const$.

Отметим, что линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$x_1F_{x_1x_1}+x_2F_{x_2x_2}+x_3F_{x_3x_3}+(\alpha_1+1-3x_1)F_{x_1}+(\alpha_2+1-3x_2)F_{x_2}+(\alpha_3+1-3x_3)F_{x_3}=3nF \quad (2.2.30)$$

полученное путем сложения трех уравнений системы (2.2.18) относится к десятой нормальной форме допустимого уравнения (2.2.29) с решением в виде обобщенного многочлена Лагерра трех переменных (2.2.26).

Действительно, если примем $B=-3$, $d_{00}=\alpha_1+1$ $g_{00}=\alpha_2+1$, $q_{00}=\alpha_3+1$ тогда уравнение представится в виде (2.2.29). Аналогично можно убедиться, что уравнение

$$x_1F_{x_1x_1}+x_2F_{x_2x_2}+x_3F_{x_3x_3}+(\alpha_1+1-3x_1)F_{x_1}+(\alpha_2+1-3x_2)F_{x_2}+(\alpha_3+1-3x_3)F_{x_3}=3nF$$

также относится к обобщенной десятой нормальной форме при $B=-3, d_{00}=1, g_{00}=1, q_{00}=1$ с решением в виде простого полинома Лагерра трех переменных (2.2.28).

Теперь возникает вопрос о существовании нормального решения вблизи иррегулярной особенности.

Теорема 2.2.8. *Система определяющих уравнений относительно особенностей* (∞,∞,∞)*:*

$$f_{111}^{(j)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)=-\left(\rho_j^{(1)}+\rho_j^{(2)}+\rho_j^{(3)}+\lambda\right)=0\,,\ (j=1,2,3) \qquad (2.2.31)$$

системы типа Лагерра (2.2.18) сводится к одному лишь первому уравнению и определяет бесчисленное множество корней. Тогда из неопределенности показателей $\rho_j \; (j=1,2,3)$ не существует решение вида (2.1.9).

Доказательство. Из формулировки теоремы следует, что не существует нормальное решение в виде нормального ряда Томе трех переменных (2.1.10) вблизи особенности (∞,∞,∞).

Как и у системы Горна, ранг системы типа Лагерра (2.2.18) $p=1$, поэтому порядок ряда (2.1.6) также равен единице, а в определяющем множителе $\exp Q(x_1,x_2,x_3)$ многочлен $Q(x_1,x_2,x_3)=\delta_1 x_1+\delta_2 x_2+\delta_3 x_3$ – первой степени, где неопределенные параметры $\delta_j \quad (j=1,2,3)$ определяются из системы характеристических уравнений

$$b_{j,0,0}^{(j)}(\delta_1,\delta_2,\delta_3)=\delta_j^2-\delta_j=\delta_j(\delta_j-1)=0, (j=1,2,3) \qquad (2.2.32)$$

из которых выявляются восемь троек, определяющие восемь полиномов первой степени.

Далее рассуждая, как и в работе [46], сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2.2.9. *Если системы характеристических уравнений (2.2.32) и определяющих уравнений вида (2.2.19) имеют только простые тройки корней, то система, полученная из (2.2.18) с помощью преобразования*

$$Z=\exp(\delta_1 x_1+\delta_2 x_2+\delta_3 x_3)\cdot u(x_1,x_2,x_3)$$

при положительном ранге $p>0$ и антиранге $m\le 0$ допускает восемь нормально-регулярных решений вида

$$F_9(x_1,x_2,x_3)=\exp(x_1+x_2+x_3)\left\{1-\frac{\lambda-(\alpha_1+1)}{\alpha_1+1}x_1+\frac{\lambda-(\alpha_2+1)}{\alpha_2+1}x_2+\frac{\lambda-(\alpha_3+1)}{\alpha_3+1}\cdot x_3+\dots\right\}.$$

Это решение совпадает с первым решением (2.2.21), то есть $F_1=F_9$. Это показывает, что соотношение Куммера [1, с.5] выполняется и в случае рядов трех переменных. Будут также справедливы равенства $F_2=F_{10},\dots,F_8=F_{18}$.

Исходя из полученных результатов, сделаем некоторые выводы и утверждения.

Изучаемые системы должны быть совместными. Система (2.2.7) состоящая из двух уравнений относится к системе типа Вильчинского, который установил для таких систем четыре условия совместности [1]. С возрастанием количества уравнений в системах, установление условия совместности усложняется. Для системы Горна, состоящей из трех уравнений справедливо утверждение.

Система типа Лагерра (2.2.18) совместна, поскольку полином Лагерра трех переменных (2.2.22) удовлетворяет всем трем уравнениям системы.

Изучены возможности построения решений специальной обобщенной системы Горна и ее частных случаев состоящих из трех уравнений в виде обобщенных степенных рядов трех переменных. Определенный интерес представляет построение их в виде вырожденных гипергеометрических рядов.

Решения рассмотренных в работе систем Горна состоящих из двух (2.2.7) и трех (2.2.18) уравнений представляются через вырожденные гипергеометрические функций Гумберта $\Psi_2^{(2)}(\lambda,\gamma,\gamma';x_1,x_2)$ и $\Psi_2^{(3)}(\lambda,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;x_1,x_2,x_3)$. Установлены, что основные системы Лагерра, получаются из систем (2.2.7) и (2.2.18), а ортогональные многочлены Лагерра из функций Гумберта (2.2.10) и (2.2.26) при $\lambda=-n$, n – целое число.

Применение метода Фробениуса-Латышевой позволило раскрыть различные свойства изучаемой системы и ее решения. Проведена классификация регулярных и иррегулярных особенностей, установлены соответствующие этим особенностям виды решения.

Раскрыта также связь основной системы Лагерра с десятой нормальной формой допустимого уравнения Лагерра-Лагерра. Это показывает, что каждой нормальной форме допустимых уравнений приведенной в монографии [46], соответствует система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Однако, такая связь остается не изученной.

Следует отметить, что 34 частных случаев системы вида (2.1.1) определяет 34 гипергеометрических функций двух переменных, относящиеся к обобщенным гипергеометрическим функциям. Из них 14 полных и 20 вырожденных гипергеометрических рядов. Вырожденные гипергеометрические *ряды* в основном выведены из четырех полных рядов Аппеля F_1-F_4 с помощью предельных переходов. Например, справедливы предельные переходы, где функция Аппеля F_2 и Лауричелли $F_c^{(3)}$ трех переменных определяют функции Гумберта $\Psi_2^{(2)}$ и $\Psi_2^{(3)}$, являющимися решениями систем Горна (2.2.7) и (2.2.18). Представляется также важным изучение связи таких систем с системами Уиттекера, Бесселя и другими родственными системами, состоящими из трех уравнений.

2.3 Построение вырожденной гипергеометрической функции сводящейся к функциям Бесселя двух переменных

Приложения бесселевых функций одной переменной очень разнообразны. Широко используются при решении задач акустики, радиофизики, гидродинамики, задач атомной и ядерной физики. В теории упругости решения в бесселевых функциях охватывают все пространственные задачи, решаемые в сферических и цилиндрических координатах, различные задачи о колебаниях пластинок. Имеется также многочисленные публикации, где изучаются большое число различных задач, относящихся ко всем важнейшим разделам математической физики. Однако такого развития не получила разработка теории функций Бесселя многих переменных. Хотя имеются работы, где изучены свойства функций Бесселя многих переменных, их связь с различными специальными функциями и ортогональными многочленами многих переменных по аналогии с функцией Бесселя одной переменной. Она является частным случаем вырожденной гипергеометрической функции Куммера [1, с.1].

Известно, что частное решение $G(\alpha,\gamma;x)$ уравнения Куммера является вырожденной функцией Гаусса [20, с.21]:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F\left(\alpha,\frac{1}{\varepsilon};\gamma;\varepsilon x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m}\cdot\frac{x^m}{m!}=G(\alpha;\gamma;x) \tag{2.3.1}$$

полученной путем предельного перехода.

Этим же подходом, можно получить функцию

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};\gamma;\varepsilon^2 x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_m}\cdot\frac{x^m}{m!}=J(\gamma;x). \tag{2.3.2}$$

$J(\gamma;x)$ – называется функцией сводящейся к функции Бесселя, поскольку справедливы

$$J_k(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1)}\cdot J\left(k+1,-\frac{x^2}{2}\right) \tag{2.3.3}$$

$$x^2\frac{d^2J_k}{dx^2}+x\frac{dJ_k}{dx}+\left(x^2-k^2\right)J_k=0, \tag{2.3.4}$$

где (2.3.4) является основным уравнением Бесселя.

Все известные гипергеометрические функции двух переменных являются решениями некоторых специальных систем, состоящих из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. В списке Горна 34 такие системы, решениями которых являются, 34 гипергеометрических функции двух переменных. Из 20-вырожденных гипергеометрических функций двух переменных были найдены в [16]-[17]. Отметим, что не исследована связь функций Бесселя двух переменных с этими вырожденными функциями. В работе [81] показано, что наиболее близкой к функциям Бесселя является функция Гумберта $\Psi_2(\lambda,\gamma,\gamma';x_1,x_2)$ [21,с.129].

Вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта $\Psi_2(\lambda,\gamma,\gamma';x_1,x_2)$ двух переменных x_1 и x_2 определяется с помощью ряда

$$\Psi_2(\lambda,\gamma,\gamma';x_1,x_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n}\frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}. \tag{2.3.5}$$

Ряд (2.3.5) сходится абсолютно и равномерно при $|x_1|<\varepsilon, |x_2|<\varepsilon$, и является частным решением системы Горна

$$\left.\begin{aligned}x_1 Z_{x_1x_1} + (\gamma - x_1) Z_{x_1} - x_2 Z_{x_2} - \lambda Z = 0,\\ x_2 Z_{x_2x_2} + (\gamma' - x_2) Z_{x_2} - x_1 Z_{x_1} - \lambda Z = 0,\end{aligned}\right\} \tag{2.3.6}$$

которая при выполнении условий совместности и интегрируемости имеет четыре линейно-независимых частных решения [6].

В монографии Аппеля и Кампе де Ферье [20, с.124-125] приводятся список 23 (I-XXIII) вырожденных гипергеометрических функций двух переменных полученных из четырех функций Аппеля F_1- F_4 путем предельного перехода. Некоторые из них совпадают между собой, несмотря на то, что получены из различных гипергеометрических функций Аппеля F_1- F_4. Пять функций из них: (XIII), (XVI), (XVII), (XVIII) и (XXIII) представлены в виде произведения функции, сводящиеся к функциям Бесселя или функциями Бесселя и Куммера.

Пример 2.3.1 Ряд (XVI)

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} F_2\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};\gamma_1,\gamma_2;\varepsilon^2 x_1,\varepsilon^2 x_2\right)=\\ &=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n}\cdot\frac{x_1^{\ m}}{m!}\cdot\frac{x_2^{\ n}}{n!}=J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

установленный с помощью предельного перехода [21, с.125], где $J(\gamma_j;x_j)(j=1,2)$- функция сводящаяся к функциям Бесселя является частным решением системы

$$\begin{aligned}x_1 Z_{x_1x_1} + \gamma_1 Z_{x_1} - Z = 0,\\ x_2 Z_{x_2x_2} + \gamma_2 Z_{x_2} - Z = 0,\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

полученная путем предельного перехода из системы Горна (F_2):

$$\begin{aligned}&x_1(1-\varepsilon^2 x_1)Z_{x_1x_1} - \varepsilon^2 x_1 x_2 Z_{x_1x_2} + \left[\gamma_1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\varepsilon^2 x_1\right] Z_{x_1} - \varepsilon x_2 Z_{x_2} - Z = 0,\\ &x_2(1-\varepsilon^2 x_2)Z_{x_2x_2} - \varepsilon^2 x_1 x_2 Z_{x_1x_2} + \left[\gamma_2 - \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\varepsilon^2 x_2\right] Z_{x_2} - \varepsilon x_1 Z_{x_1} - Z = 0.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Используя вырожденную систему Горна, приступим к установлению и исследованию системы с решениями в виде функции Бесселя двух переменных, изучению связи функций Бесселя с функцией Гумберта и с другими функциями со списка Горна, а также исследованию некоторых дифференциальных свойств рассматриваемой функций.

Заметим, что функцию Куммера определили как вырожденную функцию Гаусса [20]. С помощью предельного перехода (2.3.2) была определена функция, сводящаяся к функции Бесселя одной переменной [20, с.21]. Для вырожденной гипергеометрической функции имеет место предельный переход

$$ {}_0F_1(;\gamma;x) = 1 + \frac{1}{\gamma}x + \frac{1}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + ... = \lim_{\alpha\to\infty}\left[1 + \frac{\alpha}{1!\gamma}\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{\alpha^2} + ...\right] = J(\gamma;x). \quad (2.3.10) $$

Нас интересует обобщение (2.3.10) на случай вырожденной гипергеометрической функции двух переменных.

Теорема 2.3.1. *Вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта* $\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)$ *двух переменных с помощью предельного перехода приводится к виду*

$$ \lim_{\lambda\to\infty}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2) = J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2) = J(\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2), \quad (2.3.11) $$

где $J(\gamma_j;x_j),(j=1{,}2)$ *функции сводящиеся к функциям Бесселя.*

Доказательство. При предельном переходе вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта сводится к функциям Бесселя. Действительно, при $\lambda\to\infty$ предел вырожденной гипергеометрической функции Гумберта приводится так:

$$ \begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\infty}\Psi_2\left(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;\frac{x_1}{\lambda},\frac{x_2}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\left[1 + \frac{\lambda}{1!\gamma_1}\frac{x_1}{\lambda} + \frac{\lambda}{1!\gamma_2}\frac{x_2}{\lambda} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1!\gamma_1\gamma_2}\frac{x_1}{\lambda}\frac{x_2}{\lambda} + \right.\\ &\left. + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!\gamma_1(\gamma_1+1)}\frac{x_1^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!\gamma_2(\gamma_2+1)}\frac{x_2^2}{\lambda^2} + ...\right] = 1 + \frac{1}{1!\gamma_1}x_1 + \frac{1}{1!\gamma_2}x_2 + \frac{1}{1!\gamma_1\gamma_2}x_1x_2 + \\ &+ \frac{1}{2!\gamma_1(\gamma_1+1)}x_1^2 + \frac{1}{2!\gamma_2(\gamma_2+1)}x_2^2 + ... = \left(1 + \frac{1}{1!\gamma_1}x_1 + \frac{1}{2!\gamma_1(\gamma_1+1)}x_1^2 + ...\right)\times \\ &\times\left(1 + \frac{1}{1!\gamma_2}x_2 + \frac{1}{2!\gamma_2(\gamma_2+1)}x_2^2 + ...\right) = J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2) = J(\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2). \end{aligned} \quad (2.3.12) $$

Что требовалось доказать.

Учитывая (2.3.10), получим ряд двух переменных

$$ J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma_1)_{m_1}(\gamma_2)_{m_2}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}. \quad (2.3.13) $$

Теорема 2.3.2. *Функция Бесселя двух переменных первого рода представляется в виде*

$$ J_{\gamma_1,\gamma_2}(x_1,x_2) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!\Gamma(\gamma_1+m_1+1)\Gamma(\gamma_2+m_2+1)}\cdot\left(\frac{x_1}{2}\right)^{2m_1+\gamma_1}\cdot\left(\frac{x_2}{2}\right)^{2m_2+\gamma_2}. \quad (2.3.14) $$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся полученными функциями путем предельного перехода (2.3.12) и рядом (2.3.7). Тогда имеем

$$J_{\gamma_1,\gamma_2}(x_1,x_2)=\frac{\left(\frac{x_1}{2}\right)^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1+1)}\cdot\frac{\left(\frac{x_2}{2}\right)^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2+1)}\cdot J_{\gamma_1}\left(\gamma_1+1;-\frac{x_1^2}{2^2}\right)J_{\gamma_2}\left(\gamma_2+1;-\frac{x_2^2}{2^2}\right)=$$

$$=\frac{\left(\frac{x_1}{2}\right)^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1+1)}\cdot\frac{\left(\frac{x_2}{2}\right)^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2+1)}\cdot J\left(\gamma_1+1,\gamma_2+1;-\frac{x_1^2}{2^2},-\frac{x_2^2}{2^2}\right)=$$

$$=\frac{\left(\frac{x_1}{2}\right)^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1+1)}\cdot\frac{\left(\frac{x_2}{2}\right)^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2+1)}\cdot\left[1-\frac{1}{1!(\gamma_1+1)}\cdot\frac{x_1^2}{2^2}-\frac{1}{1!(\gamma_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)}\left(\frac{x_2^2}{2^2}\right)^2+\frac{1}{1!(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}\cdot\left(\frac{x_1^2}{2^2}\right)\cdot\left(\frac{x_2^2}{2^2}\right)+\frac{1}{2!(\gamma_2+1)(\gamma_2+2)}\left(\frac{x_2^2}{2^2}\right)^2+\ldots\right]=$$

$$=\frac{\left(\frac{x_1}{2}\right)^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1+1)}\cdot\frac{\left(\frac{x_2}{2}\right)^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2+1)}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}\left(\frac{x_1}{2}\right)^{2m_1}\cdot\left(\frac{x_2}{2}\right)^{2m_2}}{m_1!m_2!\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}=$$

$$=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!\Gamma(\gamma_1+m_1+1)\Gamma(\gamma_2+m_2+1)}\cdot\left(\frac{x_1}{2}\right)^{2m_1+\gamma_1}\cdot\left(\frac{x_2}{2}\right)^{2m_2+\gamma_2}. \tag{2.3.15}$$

Теорема 2.3.2 доказана.

Теорема 2.3.3. *Система дифференциальных уравнений (2.3.8) имеет четыре линейно-независимых частных решения в виде рядов, сводящаяся к функциям Бесселя*

$$Z_1(x_1,x_2)=J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n}\cdot\frac{x_1^{\ m}}{m!}\cdot\frac{x_2^{\ n}}{n!}, \tag{2.3.16}$$

$$Z_2(x_1,x_2)=x_2^{1-\gamma_2}J(\gamma_1;x_1)J(2-\gamma_2;x_2), \tag{2.3.17}$$

$$Z_3(x_1,x_2)=x_1^{1-\gamma_1}J(2-\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2), \tag{2.3.18}$$

$$Z_4(x_1,x_2)=x_1^{1-\gamma_1}x_2^{1-\gamma_2}J(2-\gamma_1;x_1)J(2-\gamma_2;x_2). \tag{2.3.19}$$

Доказательство. Вблизи особенности $(0,0)$ решение ищем в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$Z=x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{m,n}x^m y^n,\ (A_{0,0}\neq 0), \tag{2.3.20}$$

где $\rho,\sigma,A_{m,n}(m,n=0,1,2,\ldots)$ – неизвестные постоянные.

В (2.3.20) неизвестные постоянные ρ и σ определяются из системы определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$. Она имеет четыре пары корней: $(0,0),(0,1-\gamma_2),(1-\gamma_1,0),(1-\gamma_1,1-\gamma_2)$. Неизвестные коэффициенты $A_{m,n}\,(m,n=0,1,2,...)$ определим из системы рекуррентных последовательностей

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} A^{(j)}_{\mu-m,\nu-n}\cdot f^{(j)}_{m,n}(\rho+\mu-m,\sigma+\nu-n)=0\,,(\mu,\nu=0,1,2,...;\,j=1,2;m,n=0,1,2,...).\quad (2.3.21)$$

Тогда учитывая, значения неизвестных постоянных, получим частные решения вида (2.3.16)-(2.3.19). Что и требовалось доказать.

Отметим, что для получения рядов вида (2.3.7) используются различные функции Аппеля F_1-F_4.

Теорема 2.3.4 *Ряд (XIII)*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_2\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};\gamma;\varepsilon^2 x_1,\varepsilon^2 x_2\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_{m+n}}\cdot\frac{x_1^{\ m}}{m!}\cdot\frac{x_2^{\ n}}{n!}=J(\gamma;x_1+x_2),\qquad (2.3.22)$$

является частным решением системы

$$\begin{aligned} &x_1 Z_{x_1x_1}+x_2 Z_{x_1x_2}+\gamma_1 Z_{x_1}-Z=0,\\ &x_2 Z_{x_2x_2}+x_1 Z_{x_1x_2}+\gamma_2 Z_{x_2}-Z=0, \end{aligned}\qquad (2.3.23)$$

полученный путем предельного перехода из системы

$$\begin{aligned} &x_1(1-\varepsilon^2 x_1)Z_{x_1x_1}-x_1(1-\varepsilon^2 x_1)Z_{x_1x_2}+\left[\gamma-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\varepsilon^2 x_1\right]Z_{x_1}-\varepsilon x_2 Z_{x_2}-Z=0,\\ &x_2(1-\varepsilon^2 x_2)Z_{x_2x_2}-x_2(1-\varepsilon^2 x_2)Z_{x_1x_2}+\left[\gamma-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\varepsilon^2 x_2\right]Z_{x_2}-\varepsilon x_1 Z_{x_1}-Z=0. \end{aligned}\qquad (2.3.24)$$

где $J(\gamma;x_1+x_2)$ *– вырожденная гипергеометрическая функция, сводящаяся к функции Бесселя двух переменных;* $Z=Z(x_1,x_2)$ *– общая неизвестная.*

Методом Фробениуса-Латышевой устанавливаем, что система (2.3.23) при выполнении условий совместности и при

$$1-\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1}{x_2}=0\qquad (2.3.25)$$

имеет не более трех линейно-независимых решений, поскольку (2.3.25) показывает, что не выполняется условие интегрируемости.

Рассуждения предыдущих пунктов показывает, что функция Бесселя в основном связана с функцией Гумберта $\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)$, которая является частным решением системы Горна (2.3.6). На основании общей теории таких систем, как указано в теореме 2.3.3 справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3.5. *Система Горна (2.3.23) имеет четыре линейно-независимых частных решения [21, с.125]:*

$$Z_1(x_1,x_2)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{m_1+m_2}}{(\gamma_1)_{m_1}(\gamma_2)_{m_2}}\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}=\Psi_2(\lambda,\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2), \tag{2.3.26}$$

$$Z_2(x_1,x_2)=x_1^{1-\gamma_1}\cdot\Psi_2(\lambda+1-\gamma_1,2-\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2), \tag{2.3.27}$$

$$Z_3(x_1,x_2)=x_2^{1-\gamma_2}\cdot\Psi_2(\lambda+1-\gamma_2;\gamma_1;2-\gamma_2;x_1,x_2), \tag{2.3.28}$$

$$Z_4(x_1,x_2)=x_1^{1-\gamma_1}x_2^{1-\gamma_2}\cdot\Psi_2(\lambda+2-\gamma_1-\gamma_2;2-\gamma_1,2-\gamma_2;x_1,x_2). \tag{2.3.29}$$

Доказательство. Первое частное решение (2.3.26) определяет функцию Гумберта Ψ_2. Далее исследуем некоторые дифференциальные свойства функции Гумберта.

Находим производные этой функции по независимым переменным. Производные функции Гумберта по переменным x_1 и x_2 представляются в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\frac{\lambda}{\gamma_1}\Psi_2(\lambda+1;\gamma_1+1,\gamma_2;x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\frac{\lambda}{\gamma_2}\Psi_2(\lambda+1;\gamma_1,\gamma_2+1;x_1,x_2), \tag{2.3.30}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\frac{\lambda(\lambda+1)}{\gamma_1\gamma_2}\Psi_2(\lambda+2;\gamma_1+1,\gamma_2+1;x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\frac{\lambda(\lambda+1)}{\gamma_1(\gamma_1+1)}\Psi_2(\lambda+2;\gamma_1+2,\gamma_2;x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\frac{\lambda(\lambda+1)}{\gamma_2(\gamma_2+1)}\Psi_2(\lambda+2;\gamma_1,\gamma_2+2;x_1,x_2), \tag{2.3.31}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1^m}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-1)}{\gamma_1(\gamma_1+1)\ldots(\gamma_1+m-1)}\Psi_2(\lambda+m;\gamma_1+m,\gamma_2;x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x_2^n}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)}{\gamma_2(\gamma_2+1)\ldots(\gamma_2+n-1)}\Psi_2(\lambda+n;\gamma_1,\gamma_2+n;x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x_1^m\partial x_2^n}\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+m+n-1)}{\gamma_1(\gamma_1+1)\ldots(\gamma_1+m-1)\cdot\gamma_2(\gamma_2+1)\ldots(\gamma_2+n-1)}\times$$
$$\times\Psi_2(\lambda+m+n;\gamma_1+m,\gamma_2+n;x_1,x_2).$$

Аналогично, можно найти и производные других частных решений (2.3.27)-(2.3.29).

Приступим к нахождению дифференциальных свойств функций Бесселя двух переменных первого рода.

Вырожденная система (2.3.8) на основании теоремы 2.3.3 имеет четыре линейно-независимых частных решений (2.3.16)-(2.3.19). Первое частное решение определяет ряд, сводящаяся к функции Бесселя двух переменных

$$J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n}\cdot\frac{x_1{}^m}{m!}\cdot\frac{x_2{}^n}{n!}. \tag{2.3.32}$$

Производную (2.3.32) можно найти как произведение двух функции $J(\gamma_1;x_1)$ и $J(\gamma_2;x_2)$.

Производные функций, сводящиеся к функции Бесселя двух переменных представляются в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)]=\frac{1}{\gamma_1}[J(\gamma_1+1;x_1)J(\gamma_2;x_2)],\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)]=\frac{1}{\gamma_2}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2+1;x_2)],\\
&\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)]=\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}[J(\gamma_1+1;x_1)J(\gamma_2+1;x_2)],\\
&\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)]=\frac{1}{(\gamma_1)_2}[J(\gamma_1+2;x_1)J(\gamma_2;x_2)],\\
&\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)]=\frac{1}{(\gamma_2)_2}[J(\gamma_1+2;x_1)J(\gamma_2;x_2)],\\
&\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)]=\frac{1}{(\gamma_1)_{m_1}}[J(\gamma_1+m_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)],\\
&\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{n}}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)]=\frac{1}{(\gamma_2)_{m_2}}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2+m_2;x_2)],\\
&\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}}[J(\gamma_1;x_1)J(\gamma_2;x_2)]=\frac{1}{(\gamma_1)_{m_1}(\gamma_2)_{m_2}}[J(\gamma_1+m_1;x_1)J(\gamma_2+m_2;x_2)].
\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

Аналогично определяются производные частных решений (2.3.17)-(2.3.19).

Основные дифференциальные свойства функции Бесселя двух переменных были изучены в работе [38, с.23-35]. Дифференциальные свойства вырожденных гипергеометрических функций одной переменной приводятся в [1, с.15-23], [9], [41].

Рассмотрим частное решение (2.3.22):

$$J(\gamma;x_1+x_2)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_{m_1+m_2}}\cdot\frac{x_1{}^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2{}^{m_2}}{m_2!}$$

вырожденной гипергеометрической системы (2.3.23).

Теорема 2.3.6. *Для вырожденной гипергеометрической функции (2.3.22) имеет место равенство:*

$$J(\gamma;x_1+x_2)=\sum_{n=0}^{\infty}J^{(n)}(x_1)\cdot\frac{x_2{}^n}{n!}. \tag{2.3.34}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы используется формула

$$f(x+y)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x)\cdot\frac{y^n}{n!}, \tag{2.3.35}$$

примененная Слейтером [1, с.22], при установлении свойства сложения для производных функций Куммера ${}_1F_1[a;b;x]$.

Итак, на основании (2.3.35) получим

$$J(\gamma;x_1+x_2)=\sum_{n=0}^{\infty} J^{(n)}(x_1)\cdot\frac{x_2{}^n}{n!}=J^{(0)}(\gamma;x_1)\frac{x_2^0}{0!}+J'(\gamma+1;x_1)\frac{x_2}{1!}+$$
$$+J''(\gamma+2;x_1)\frac{x_2^2}{2!}+\ldots+J^{(n)}(\gamma+n;x_1)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_n}\cdot\frac{x_2{}^n}{n!}\cdot J^{(n)}(\gamma+n;x_1).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2.3.7. *Для вырожденной гипергеометрической функции* $J(\gamma;x_1,x_2)$ *имеет место равенство:*

$$J(\gamma;x_1\cdot x_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_1^n(x_2-1)^n}{(\gamma)_n\cdot n!}J(\gamma+n;x_1).$$

Доказательство. Приведем схему доказательства теоремы.

Для доказательства теоремы используется формула

$$f(x_1\cdot x_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_1^n(x_2-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\{f(x_1)\}$$

полученная из (2.3.35) заменой x_2 на $(x_2-1)x_1$ и формула Тейлора.

Теорема 2.3.7 связана с теоремой умножения для функций Куммера [1, с.23].

2.4 Нормально-регулярные решения родственных систем типа Уиттекера и Бесселя

Из системы Горна (2.3.6) с помощью преобразования вида

$$Z=\exp\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)\cdot x_1^{-\frac{\gamma_1}{2}}\cdot x_2^{-\frac{\gamma_2}{2}}U(x_1,x_2), \tag{2.4.1}$$

установлена система типа Бесселя

$$x_1^2 \cdot U_{x_1 x_1} - x_1 x_2 \cdot U_{x_2} + \left\{ -\frac{1}{4} x_1^2 - \frac{1}{2} x_1 x_2 + k x_1 + \alpha(1-\alpha) \right\} U = 0,$$
$$x_2^2 \cdot U_{x_2 x_2} - x_1 x_2 \cdot U_{x_1} + \left\{ -\frac{1}{4} x_2^2 - \frac{1}{2} x_1 x_2 + k x_2 + \beta(1-\beta) \right\} U = 0, \quad (2.4.2)$$

где $k = \alpha + \beta - \lambda$, α, β, λ – некоторые параметры, $U = U(x_1, x_2)$ – общая неизвестная.

Используя метод Фробениуса-Латышевой [9] требуется доказать, что решениями системы (2.4.2) являются функции, сводящиеся к функциям Бесселя двух переменных.

Теорема 2.4.1. *Система типа Бесселя (2.4.2) при выполнении условий совместности и интегрируемости имеет четыре линейно-независимых частных решения*

$$U_1(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} \right) x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdot \Psi_2(\lambda, 2\alpha, 2\beta; x_1, x_2),$$
$$U_2(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} \right) x_1^{\alpha} x_2^{1-\beta} \cdot \Psi_2(\lambda - 2\beta + 1, 2\alpha, 2\beta - 2; x_1, x_2),$$
$$U_3(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} \right) x_1^{1-\alpha} x_2^{\beta} \cdot \Psi_2(\lambda - 2\alpha + 1, 2\alpha - 2, 2\beta; x_1, x_2),$$
$$U_4(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} \right) x_1^{1-\alpha} x_2^{1-\beta} \cdot \Psi_2(\lambda - 2\alpha - 2\beta + 1, 2\alpha - 2, 2\beta - 2; x_1, x_2), \quad (2.4.3)$$

которые выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию Гумберта, сводящиеся при $\gamma_1 = 2\alpha$, $\gamma_2 = 2\beta$ *к функции Бесселя двух переменных с помощью предельного перехода*

$$\lim_{\lambda \to 0} \Psi_2(\lambda, 2\alpha, 2\beta; \lambda x_1, \lambda x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\alpha)_m (2\beta)_n} \frac{x_1^m}{m!} \frac{x_2^n}{n!}. \quad (2.4.4)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы применяется метод Фробениуса-Латышевой [9, с.160]. Изучаемая система относится к системе типа Уиттекера [21, с.132]. Применение метода Фробениуса-Латышевой к построению решения системы типа Уиттекера изложено в работе [47], в которой установлено, что решениями являются нормально-регулярные решения вида

$$Z(x_1, x_2) = \exp Q(x_1, x_2) \cdot x_1^{\rho} \cdot x_2^{\sigma} \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} \cdot x_1^m \cdot x_2^n, \; A_{0,0} \neq 0, \quad (2.4.5)$$

где $\rho, \sigma, A_{m,n} (m, n = 0,1,2,...)$ – неизвестные постоянные; $Q = Q(x_1, x_2)$ - многочлен от двух переменных:

$$Q(x_1,x_2)=\frac{\alpha_{p0}}{p}x_1^p+\frac{\alpha_{0p}}{p}x_2^p+...+\alpha_{11}x_1x_2+\alpha_{10}x_1+\alpha_{01}x_2 \qquad (2.4.6)$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{p0},\alpha_{0p},...,\alpha_{11},\alpha_{10},\alpha_{01}$.

Изучаемая система (2.4.2) имеет ранг $p=1>0$ и антиранг $m\le 0$ [9, с.53]. Поэтому, особенность (∞,∞)– иррегулярная, а особенность $(0,0)$ – регулярная и существует нормально-регулярное решение вида (2.4.5). Наибольшая степень многочлена (2.4.6) равна рангу системы, то есть $p=1$. Тогда, многочлен (2.4.6) превращается в многочлен первой степени $Q(x_1,x_2)=\alpha_{10}x_1+\alpha_{01}x_2$ и его неизвестные коэффициенты α_{10} и α_{01} определяются из вспомогательной системы, полученной из (2.4.2) с помощью преобразования

$$U(x_1,x_2)=\exp(\alpha_{10}x_1+\alpha_{01}x_2)\cdot\Phi(x_1,x_2), \qquad (2.4.7)$$

где $\Phi(x_1,x_2)$ – новая неизвестная функция, путем приравнивая к нулю коэффициентов при старших степенях независимых переменных x_1 и x_2:

$$f_{10}^{(1)}(\alpha_{10},\alpha_{01})=\alpha_{10}^2-\frac{1}{4}=0,\ f_{01}^{(2)}(\alpha_{10},\alpha_{01})=\alpha_{01}^2-\frac{1}{4}=0\,. \qquad (2.4.8)$$

Полученная система характеристических уравнений (2.4.8) имеет четыре пары корней:

$$\begin{gathered}\left(\alpha_{10}^{(1)},\alpha_{01}^{(1)}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\alpha_{10}^{(1)},\alpha_{01}^{(2)}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\\ \left(\alpha_{10}^{(2)},\alpha_{01}^{(1)}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\alpha_{10}^{(2)},\alpha_{01}^{(2)}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).\end{gathered} \qquad (2.4.9)$$

Из них только, пара $\left(\alpha_{10}^{(2)},\alpha_{01}^{(2)}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ определяет совместную систему

$$\begin{gathered}x_1^2\cdot\Phi_{x_1x_1}-x_1^2\Phi_{x_1}-x_1x_2\cdot\Phi_{x_2}+[kx_1+\alpha(1-\alpha)]\Phi=0,\\ x_2^2\cdot\Phi_{x_2x_2}-x_2^2\Phi_{x_2}-x_1x_2\cdot\Phi_{x_1}+[kx_2+\beta(1-\beta)]\Phi=0,\end{gathered} \qquad (2.4.10)$$

где $k=\alpha+\beta-\lambda$, α,β,λ – некоторые параметры, $\Phi=\Phi(x_1,x_2)$ – общая неизвестная.

Она имеет четыре линейно-независимых частных решения, которые выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию Гумберта $\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)$, $(\gamma_1=2\alpha,\gamma_2=2\beta)$:

$$\begin{gathered}\Phi_1(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\cdot\Psi_2(\lambda;2\alpha,2\beta;x_1,x_2),\\ \Phi_2(x\ ,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{1-\beta}\cdot\Psi_2(\lambda-2\beta+1,2\alpha,2\beta-2;x_1,x_2),\end{gathered}$$

$$\Phi_3(x_1,x_2)=x_1^{1-\alpha}x_2^{\beta}\cdot\Psi_2(\lambda-2\alpha+1,2\alpha-2,2\beta;x_1,x_2),$$
$$\Phi_4(x_1,x_2)=x_1^{1-\alpha}x_2^{1-\beta}\cdot\Psi_2(\lambda-2\alpha-2\beta+1,2\alpha-2,2\beta-2;x_1,x_2). \qquad (2.4.11)$$

Следует отметить, что система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$:

$$f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)=\rho(\rho-1)+\alpha(\alpha-1)=0,\ f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)=\sigma(\sigma-1)+\beta(\beta-1)=0 \qquad (2.4.12)$$

имеет четыре пары корней

$$(\rho_1,\sigma_1)=(\alpha,\beta),(\rho_1,\sigma_2)=(\alpha,1-\beta),$$
$$(\rho_2,\sigma_1)=(1-\alpha,\beta),(\rho_2,\sigma_2)=(1-\alpha,1-\beta).$$

Они определяют показатели рядов (2.4.11).

Полученные результаты сформулируем в виде теорем.

Теорема 2.4.2. *Для того чтобы вспомогательная система полученная из системы (2.4.2) с помощью преобразования (2.4.7) имела хотя бы одно решение вида (2.4.5), необходимо выполнение равенства (2.4.8).*

Система характеристических уравнений (2.4.8) имеет четыре пары корней. Это первое необходимое условие существования нормально-регулярного решения вида (2.4.5), связанное с определением неизвестных постоянных $\alpha_{p0},\alpha_{0p},...,\alpha_{11},\alpha_{10},\alpha_{01}$ многочлена $Q(x_1,x_2)$.

Второе необходимое условие связано с определением неизвестных постоянных $\rho,\sigma,A_{m,n}(m,n=0,1,2,...)$ в (2.4.5).

Теорема 2.4.3. *Для существования решения в виде обобщенного степенного ряда двух переменных системы (2.4.10), необходимо чтобы пара (ρ,σ) была корнем системы определяющих уравнений относительно особенности (2.4.12).*

Доказательство. В (2.4.10) вместо неизвестной функций $\Phi(x_1,x_2)$ используем $x_1^{\rho}x_2^{\sigma}$. Система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$ имеет пары корней (ρ,σ). Согласно теореме 2.4.2 имеем, что выполнение двух необходимых условий обеспечивает существование четырех нормально-регулярных решений вида (2.4.3). Теорема доказана.

На основании вышеприведенных исследований можно сделать некоторые **выводы:**

1. Равенство (2.4.4) на основании (2.3.11) и (2.3.12) при $\gamma_1=2\alpha$ и $\gamma_2=2\beta$ представимо в виде

$$J(\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=J(2\alpha,2\beta;x_1,x_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(2\alpha)_m(2\beta)_n}\frac{x_1^m}{m!}\cdot\frac{x_2^n}{n!}=J(2\alpha;x_1)J(2\beta;x_2). \qquad (2.4.13)$$

Тогда на основании (2.3.14) функцию Бесселя двух переменных первого рода, получим в виде

$$J_{2\alpha,2\beta}(x_1,x_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m!n!\Gamma(2\alpha+m+1)\Gamma(2\beta+n+1)}\cdot\left(\frac{x_1}{2}\right)^{2m+2\alpha}\cdot\left(\frac{x_2}{2}\right)^{2n+2\beta}. \qquad (2.4.14)$$

2. Производная функции Бесселя:

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x_1^m\partial x_2^n}\left[J(2\alpha;x_1)J(2\beta;x_2)\right]=\frac{1}{(2\alpha)_m(2\beta)_n}\left[J(2\alpha+m;x_1)J(2\beta+n;x_2)\right],$$

где учтено $\gamma_1=2\alpha$, $\gamma_2=2\beta$.

3. Решение присоединенной системы (2.4.10) выражается через гипергеометрическую функцию Гумберта, сводящаяся к функции Бесселя двух переменных с помощью предельного перехода (2.4.4). Отметим, что в данном случае справедливо равенство (2.4.13):

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_j(x_1,x_2)=\lim_{\lambda\to\infty}\left[x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\cdot\Psi(\lambda;2\alpha,2\beta;x_1,x_2)\right]=$$
$$=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\lim_{\lambda\to\infty}\Psi(\lambda;2\alpha,2\beta;x_1,x_2)=J(2\alpha,2\beta;x_1,x_2).$$

Следовательно, в предельном переходе $\Phi_j(x_1,x_2)\ \left(j=\overline{1,4}\right)$ выражаются через функцию $J(2\alpha,2\beta;x_1,x_2)$.

Анологичным образом, частные решения системы (2.4.2) также выражаются через (2.4.13).

Таким образом, установлены и изучены ряд систем с решениями в виде вырожденных гипергеометрических функций Гумберта двух переменных, сводящимися к функциям Бесселя двух переменных. Раскрыта связь между этими функциями двух переменных как решения систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Исследованы некоторые дифференциальные свойства, свойства сложения и умножения функции Бесселя двух переменных. В дальнейшем, с помощью этих свойств установили рекуррентные соотношения между этими функциями, а также между вырожденными гипергеометрическими функциями двух и многих переменных в целом. Установлена система типа Бесселя и показаны особенности применения метода Фробениуса-Латышевой для построения нормально-регулярных решений. Показана также, что система типа Бесселя является родственной ситемой типа Уиттекера.

Теорема 2.4.4. *Система типа Бесселя*

$$x_j^2U_{x_jx_j}-x_j\sum_{(r\neq j)}x_rU_{x_r}+\left[-\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{(r\neq j)}x_r+kx_j+\alpha_j(1-\alpha_j)\right]U=0,\ \left(j=\overline{1,n}\right), \qquad (2.4.15)$$

полученная из системы типа Горна (1.3.1) с помощью преобразования

$$F(x_1,...,x_n)=\exp\left(\frac{x_1}{2}+...+\frac{x_n}{2}\right)x_1^{-\frac{\gamma_1}{2}}...x_n^{-\frac{\gamma_n}{2}}$$

при выполнении условий совместности и интегрируемости [24] имеет 2^n *линейно-независимые частные нормально-регулярные решения вида (3.9), которые выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию Гумберта* $\Psi_2^{(n)}$, *сводящейся при значениях параметров* $\gamma_j=2\alpha_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ *к функции Бесселя двух переменных с помощью предельного перехода*

$$\lim_{\lambda\to 0}\Psi_2^{(n)}(\lambda,2\alpha_1,2\alpha_2,...,2\alpha_n;\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)=$$

$$=\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{1}{(2\alpha_1)_{m_1}(2\alpha_2)_{m_2}(2\alpha_3)_{m_3}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}...\frac{x_n^{m_n}}{m_n!},$$

где $k=\alpha+\beta-\lambda$, $\alpha_j,\ j=\overline{1,n}$, λ *– некоторые параметры,* $U(x_1,..,x_n)$ *– общая неизвестная.*

В следующем подразделе приводится вывод системы типа Лагерра родственные с системами Горна и Уиттекера, а также построены ее нормально-регулярные решения.

2.5 Вывод родственной системы типа Лагерра и построение ее решения

Из системы (2.2.6) Горна (Ψ_2) с помощью преобразования

$$Z(x,y)=\exp\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\cdot x^{-\frac{\alpha+1}{2}}\cdot y^{-\frac{\beta+1}{2}}\cdot U(x,y) \tag{2.5.1}$$

устанавливается система типа Лагерра

$$\left.\begin{aligned} &x^2\cdot U_{xx}-xy\cdot U_y+\left(-\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{2}+kx+\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\cdot U=0,\\ &y^2\cdot U_{yy}-xy\cdot U_x+\left(-\frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2}+ky+\frac{1}{4}-\beta^2\right)\cdot U=0,\end{aligned}\right\} \tag{2.5.2}$$

где $k=(\alpha+\beta+2-2\lambda)/2$. Такие системы относятся к системе типа Уиттекера [21].

Ставится задача: применяя метод Фробениуса-Латышевой [9] установить отличительные особенности системы (2.5.2) и построить её нормально-регулярное решение, зависящее от многочленов Лагерра двух переменных.

Теорема 2.5.1. *Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (2.5.2) имеет четыре линейно-независимых частных решения, которые выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию Гумберта* $\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x,y)$ *в виде нормально-регулярных рядов*

$$U(x,y)=\exp\left(-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\cdot x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot y^{\frac{\beta+1}{2}}\cdot\Psi_2(-n,\alpha+1,\beta+1;x,y)=$$
$$=\exp\left(-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\cdot x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot y^{\frac{\beta+1}{2}}\cdot L_{n,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) \qquad (2.5.3)$$

зависящая от многочлена Лагерра двух переменных

$$L_{n,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=1-\frac{n}{1!(\alpha+1)}\cdot x-\frac{n}{1!(\beta+1)}\cdot y+\frac{n(n-1)}{1!(\alpha+1)(\beta+1)}\cdot xy+\frac{n(n-1)}{2!(\alpha+1)(\alpha+2)}\cdot x^2+$$
$$+\frac{n(n-1)}{2!(\beta+1)(\beta+2)}\cdot y^2+\ldots+(-1)^n\frac{n(n-1)\ldots1}{n!(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}\cdot x^n+ \qquad (2.5.4)$$
$$+(-1)^n\frac{n(n-1)\ldots1}{n!(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\beta+1)}\cdot x^{n-1}\cdot y+\ldots+(-1)^n\frac{n(n-1)\ldots1}{n!(\beta+1)\ldots(\beta+n)}\cdot y^n.$$

Доказательство. Для доказательства применяется метод Фробениуса-Латышевой. Вырожденная система (2.5.2) имеет регулярную особенность $(0,0)$ и иррегулярную особенность (∞,∞). По наибольшим степеням независимых переменных x и y определены подранги: $k_1'=0,\ k_1''=0,$ а ранг $p=1+k=1.$ Тогда согласно методу Фробениуса-Латышевой для построения нормально-регулярного решения, в системе (2.5.2) справедливо преобразование:

$$U=\exp(\alpha_{10}\cdot x+\alpha_{01}\cdot y)\cdot\Phi(x,y), \qquad (2.5.5)$$

где α_{10} и α_{01} – неопределенные коэффициенты, которые следует определить из вновь полученной вспомогательной системы

$$x^2\cdot\Phi_{xx}+2\alpha_{10}^2\cdot x^2\cdot\Phi_x-xy\cdot\Phi_y+\left(\left(\alpha_{10}^2-\frac{1}{4}\right)x^2-\left(\alpha_{01}^2-\frac{1}{2}\right)xy+kx+\frac{1}{4}-\frac{\alpha^2}{4}\right)\cdot\Phi=0,$$
$$y^2\cdot\Phi_{yy}+xy\cdot\Phi_x+2\alpha_{01}^2\cdot y^2\cdot\Phi_y+\left(\left(\alpha_{01}^2-\frac{1}{4}\right)y^2-\left(\alpha_{10}^2-\frac{1}{2}\right)xy+ky+\frac{1}{4}-\frac{\beta^2}{4}\right)\cdot\Phi=0. \qquad (2.5.6)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при наибольших степенях независимых переменных x^2 и y^2 неизвестной $\Phi(x,y)$, определим систему характеристических уравнений

$$b_{10}^{(1)}(\alpha_{10},\alpha_{01})=\alpha_{10}^2-\frac{1}{4}=0,$$
$$b_{01}^{(2)}(\alpha_{10},\alpha_{01})=\alpha_{01}^2-\frac{1}{4}=0. \qquad (2.5.7)$$

Это показывает выполнение первого необходимого условия существования нормально-регулярного решения, связанное с определением неизвестных коэффициентов многочлена $Q(x,y)$.

Теорема 2.5.2. *Для того чтобы вспомогательная система (2.5.6) имела хотя бы одно решение, необходимо выполнение равенства (2.5.7).*

Доказательство. Система (2.5.7) имеет четыре пары корней:

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_{10}^{(1)},\alpha_{01}^{(1)}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(\alpha_{10}^{(1)},\alpha_{01}^{(2)}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\\&\left(\alpha_{10}^{(2)},\alpha_{01}^{(1)}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\alpha_{10}^{(2)},\alpha_{01}^{(2)}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\end{aligned}\tag{2.5.8}$$

определяющие четыре многочлена первой степени вида:

$$Q_i(x,y)=\alpha_{10}^{(i)}\cdot x+\alpha_{01}^{(i)}\cdot y,\ i=\overline{1,4}.\tag{2.5.9}$$

Четыре пары $\left(\alpha_{10}^{(l)},\alpha_{01}^{(l)}\right)$, $l=1,2$ в (2.5.7) определяют четыре системы из вспомогательной системы. Каждая из них может иметь до четырех линейно-независимых частных решений. Таким образом, исходная система должна иметь до 16 частных решений. Однако подробное исследование показывает, что из четырех систем только система

$$\begin{aligned}&x^2\cdot\Phi_{xx}+x^2\cdot\Phi_x-xy\cdot\Phi_y+\left(kx+\frac{1}{4}-\frac{\alpha^2}{4}\right)\cdot\Phi=0,\\&y^2\cdot\Phi_{yy}-xy\cdot\Phi_x+y^2\cdot\Phi_y+\left(ky+\frac{1}{4}-\frac{\beta^2}{4}\right)\cdot\Phi=0\end{aligned}\tag{2.5.10}$$

имеет четыре линейно-независимых частных решения. Все они выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию Гумберта $\Psi_2(\alpha,\gamma,\gamma';x,y)$. Действительно, составляя систему характеристических функций системы (2.5.10) убеждаемся, что система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$

$$\left.\begin{aligned}&f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)=\rho(\rho-1)+\frac{1}{4}-\frac{\alpha^2}{4}=0,\\&f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)=\sigma(\sigma-1)+\frac{1}{4}-\frac{\beta^2}{4}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.5.11}$$

имеет четыре пары корней:

$$(\rho_1,\sigma_1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}\right),\qquad(\rho_1,\sigma_2)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}\right),$$

$$(\rho_2,\sigma_1)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}\right),\qquad (\rho_2,\sigma_2)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}\right). \tag{2.5.12}$$

Это показывает выполнение второго необходимого условия. Теорема доказана.

Теорема 2.5.3. *Для того чтобы существовало нормально-регулярное решение системы (2.5.2) необходимо, чтобы пара* (ρ,σ) *относительно особенности* $(0,0)$, *была корнем определяющих уравнений вида (2.5.11), полученных из вспомогательной системы (2.5.6) путем подстановки вместо неизвестной* $Z(x,y)=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}$.

Доказательство. Существование четырех пар корней (2.5.12) обеспечивает существование четырех линейно независимых частных решений системы (2.5.10) в виде обобщенных степенных рядов (2.5.1). Поскольку, значения ρ и σ определены, то остается находить неизвестные постоянные $A_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,...)$ с помощью систем рекуррентных последовательностей

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A^{(i)}_{m-\mu,n-\nu}\cdot f^{(i)}_{\mu,\nu}(\rho+m-\mu,\sigma+n-\nu)=0,(m,n=0,1,2,...;\ j=1,2;\ \mu,\nu=0,1,2,...).$$

Таким образом, построенные частные решения системы (2.5.10) имеют вид

$$\Phi_1(x,y)=x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot y^{\frac{\beta+1}{2}}\cdot\Psi_2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1-k,\alpha+1,\beta+1;x,y\right),$$
$$\Phi_2(x,y)=x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot y^{\frac{1-\beta}{2}}\cdot\Psi_2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+1-k,\alpha+1,1-\beta;x,y\right),$$
$$\Phi_3(x,y)=x^{\frac{1-\alpha}{2}}\cdot y^{\frac{\beta+1}{2}}\cdot\Psi_2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+1-k,1-\alpha,\beta+1;x,y\right),$$
$$\Phi_4(x,y)=x^{\frac{1-\alpha}{2}}\cdot y^{\frac{1-\beta}{2}}\cdot\Psi_2\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}+1-k,1-\alpha,1-\beta;x,y\right).$$

С учетом $k=(\alpha+\beta+2-2\lambda)/2$ эти решения представляются в виде

$$\begin{aligned}\Phi_1(x,y)&=x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot y^{\frac{\beta+1}{2}}\cdot\Psi_2(-n,\alpha+1,\beta+1;x,y),\\ \Phi_2(x,y)&=x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot y^{\frac{1-\beta}{2}}\cdot\Psi_2(-n-\beta,\alpha+1,1-\beta;x,y),\\ \Phi_3(x,y)&=x^{\frac{1-\alpha}{2}}\cdot y^{\frac{\beta+1}{2}}\cdot\Psi_2(-n-\alpha,1-\alpha,\beta+1;x,y),\\ \Phi_4(x,y)&=x^{\frac{1-\alpha}{2}}\cdot y^{\frac{1-\beta}{2}}\cdot\Psi_2(-n-\alpha-\beta,1-\alpha,1-\beta;x,y).\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Отсюда нетрудно заметить, что интересующая нас решение системы (2.5.10):

$$\Phi_1(x,y)=x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot y^{\frac{\beta+1}{2}}\cdot\Psi_2(-n,\alpha+1,\beta+1;x,y)=x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot y^{\frac{\beta+1}{2}}L^{(\alpha,\beta)}_{n,n}(x,y) \tag{2.5.14}$$

и остальные решения мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Выполнение двух необходимых условий обеспечивает существование нормально-регулярного решения (2.5.3), зависящее от многочлена Лагерра двух переменных (2.5.4). Теорема доказана.

Общее решение системы (2.5.1) с учетом формул (2.5.13) представляется в виде

$$U(x,y)=C_1\cdot U_1(x,y)+C_2\cdot U_2(x,y)+C_3\cdot U_3(x,y)+C_4\cdot U_4(x,y)=$$
$$=C_1\cdot \exp\left(-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\cdot \Phi_1(x,y)+C_2\cdot \exp\left(-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\cdot \Phi_2(x,y)+$$
$$+C_3\cdot \exp\left(-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\cdot \Phi_3(x,y)+C_4\cdot \exp\left(-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\cdot \Phi_4(x,y),$$

где $C_i\cdot(i=1,2,3,4)$ – произвольные постоянные.

Система (2.5.2) для которого $p>0, m\le 0$ имеет нормально-регулярное решение (2.5.3), которой выражается через обобщенный многочлен Лагерра двух переменных, причем правая часть сходится вблизи особенности $(x=0, y=0)$.

Систему (2.5.2) назовем родственной с системой типа Лагерра. Как мы убедились её решения также выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию М.П.Гумберта $\Psi_2(\alpha,\gamma,\gamma';x,y)$ в виде нормально-регулярных рядов (2.5.3) зависящее от многочлена Лагерра двух переменных (2.5.4).

Таким образом, с помощью преобразования (2.5.1) нами установлен вид одной родственной системы типа Лагерра. Применение метода Фробениуса-Латышевой позволило построить нормально-регулярные решения полученной родственной системы (2.5.2) вблизи особенности $(0,0)$. Обобщенные многочлены Лагерра имеют представления и через другие гипергеометрические функции двух переменных [46, с.358].

Справедлива формула предельного перехода

$$\lim_{\alpha\to\infty} L_{m,n}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha}\right)=L_m^{(\beta-1)}(x)\cdot L_n^{(\gamma-1)}(y)$$

Формулу (2.5.14) аналогично можно представить с помощью такого же предельного перехода в виде произведения многочленов Лагерра по переменным x и y.

В работе [50] была указана связь рассмотренных систем с переопределенными системами, изученными в работах таджикской математической школы [57-59].

Исследованный в данной работе случай можно распространить и на случай трех переменных. Связь обобщенных многочленов Лагерра одной и двух переменных с обобщенными гипергеометрическими функциями [1], [42] многих переменных, рассмотрена в работах [43-44].

3 МНОГОМЕРНЫЕ НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ СИСТЕМ ЛАУРИЧЕЛЛА (F_D)

3.1 Многомерный ортогональный многочлен Лагерра как решения вырожденных гипергеометрических систем

В данном разделе изучены возможности построения нормально-регулярных решений вырожденных систем полученных из систем Лауричелла путем предельного перехода. Рассмотрены также возможности построения решения вырожденных гипергеометрических систем в виде ортогональных многочленов Лагерра многих переменных. Установлены связи между многочленами Лагерра и нормально-регулярными решениями.

Исследованы ряд важных частных случаев систем с решениями в виде нормально-регулярных решений. Доказаны некоторые свойства таких рядов, установлена связь этих рядов с вновь введенными функциями В.И. Художникова. Установлены также необходимые условия существования нормально-регулярных решений. Построенные новые решения являются обобщениями известных функций Горна и Гумберта двух переменных. Необходимые и достаточные условия существования нормально-регулярных решений устанавливаются с помощью понятия ранга и антиранга. Для построения решения применяется модифицированный метод Фробениуса-Латышевой.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно только одно вырожденное гипергеометрическое уравнение. Его решение функция Куммера

$$G(\lambda,\gamma;x)=1+\frac{\lambda}{\gamma}x+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2+...$$

является источником многих известных функций и ортогональных многочленов одной переменной [1], [20], [32]. В частности, если γ не целое отрицательное, а λ отрицательное целое число или нуль, то ряд обрывается, и получим многочлен $G(-n,\gamma;x)$, в частности выражающий многочлен Лагерра.

В отличие от одномерного случая, при исследовании многочленов Лагерра двух переменных следует рассматривать их связь с 20-тью вырожденными гипергеометрическими рядами двух переменных, удовлетворяющих им. Пока не установлено, сколько существует систем типа

Лагерра и с какими из 20-ти вырожденных систем они связаны. В ряде работ [48-49] в качестве связывающей системы была подобрана система Горна Ψ_2 и изучена связь между вырожденной гипергеометрической функцией Гумберта $\Psi_2(\alpha,\gamma,\gamma';x,y)$ и многочленом Лагерра двух переменных $L_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$. Однако, неизученными остаются связи этих многочленов с нормально-регулярными решениями, решениями систем типа Уиттекера. В данном подразделе доказаны ряд свойств вырожденной гипергеометрической функции Гумберта $\Psi_2^{(n)}$ и связанных с ней многочленов Лагерра многих переменных.

Материалы этого раздела опубликованы в [82], [84], [87], [90-91].

3.1.1 О вырожденных гипергеометрических функциях многих переменных

Исследуется связь ортогональных многочленов Лагерра многих переменных с частными решениями частных случаев вырожденной гипергеометрической системы Горна, состоящей из трех уравнений

$$x_j F_{x_j x_j} + (\gamma_j - x_j)F_{x_j} - \sum_{(k\neq j)} x_k F_k - \lambda F = 0,\ \ j=\overline{1,3}, \tag{3.1.1}$$

где γ_j и λ – const; $F(x_1,x_2,x_3)$ - искомая функция.

Введем определение функций Гумберта $\Psi_2^{(3)}$.

Определение 3.1.1. *Функцией Гумберта* $\Psi_2^{(3)}$ *называется вырожденная гипергеометрическая функция трёх переменных* x_j, $(j=\overline{1,3})$ *определяемая с помощью ряда*

$$\Psi_2^{(3)} = \sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{m_1+m_2+m_3}}{(\gamma_1)_{m_1}\cdot(\gamma_2)_{m_2}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{x_3^{m_3}}{m_3!} \tag{3.1.2}$$

и являющаяся частным решением системы Горна (3.1.1).

Заметим, что ряд сходится абсолютно и равномерно при $|x_1|<\varepsilon$, $|x_2|<\varepsilon$, $|x_3|<\varepsilon$.

Лауричелла, занимаясь обобщением четырёх функций Аппеля $F_1 - F_4$ двух переменных, ввел также четыре функций от n переменных $F_A^{(n)}$, $F_B^{(n)}$, $F_C^{(n)}$, $F_D^{(n)}$ [27, с.33]. Вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта $\Psi_2^{(3)}$ из функций Лауричелла $F_C^{(n)}$ и $F_A^{(n)}$ выводится с помощью передельного перехода. В частности, при $n=3$ для функций Гумберта (3.1.2) справедливы равенства [27, стр.35]

$$\Psi_2^{(3)} = \Psi_2[\lambda,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;x_1,x_2,x_3] = \lim_{|\beta|\to\infty} F_C^{(3)}[\lambda,\beta;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;x_1/\beta,x_2/\beta,x_3/\beta] =$$
$$= \lim_{\min\{|\beta_1|,|\beta_2|,|\beta_3|\}} F_A^{(3)}[\lambda,\beta_1,\beta_2,\beta_3;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;x_1/\beta_1,x_2/\beta_2,x_3/\beta_3], \tag{3.1.3}$$

а также при $n=2$, $\Psi_2^{(2)}=\Psi_2$, где $\Psi_2^{(2)}=\Psi_2$ – вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта двух переменных.

В дальнейшем убедимся, что функции Гумберта играют важную роль при исследовании ортогональных многочленов. Раскроем некоторые свойства функции Гумберта, относительно ее связи с ортогональными многочленами Лагерра.

3.1.2 Представление функций Гумберта в виде нормально-регулярного решения системы Горна

Наиболее изученной системой Горна является система

$$\begin{aligned} &x_1 Z_{x_1x_1}+\left(\gamma_1-x_1\right)Z_{x_1}-x_2Z_{x_2}-\lambda Z=0,\\ &x_2 Z_{x_2x_2}+\left(\gamma_2-x_2\right)Z_{x_2}-x_1Z_{x_1}-\lambda Z=0, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

где $\gamma_i,\ (i=1,2)$ некоторые постоянные, $Z(x_1,x_2)$ – общая неизвестная.
Справедливо утверждение.

Теорема 3.1.1. *Система Горна (3.1.4) имеет четыре линейно-независимых частных решения, одним из которых является функция Гумберта*

$$\Psi_2^{(2)}=\Psi_2[\lambda,\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2]=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{m_1+m_2}}{(\gamma_1)_{m_1}\cdot(\gamma_2)_{m_2}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}. \tag{3.1.5}$$

Определение 3.1.2. *Решение вида*

$$W(x_1,x_2)=\exp\left(\alpha_{1,0}\cdot x_1+\alpha_{0,1}\cdot x_2\right)\cdot x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}A_{m_1,m_2}\cdot x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2},\ A_{0,0}\neq 0 \tag{3.1.6}$$

называется нормально-регулярным решением двух переменных системы (3.1.4), где $\rho=1,2,\ A_{m_1,m_2}(m_1,m_2=0,1,2,...);\ \alpha_{1,0},\alpha_{0,1}$ *- неизвестные постоянные.*
Ряд в правой части сходится вблизи особенности $(x_1=0,x_2=0)$.

Функция Гумберта (3.1.5) является частным случаем нормально-регулярного решения, получающиеся при $\alpha_{1,0}=0$, $\alpha_{0,1}=0$. Она представляет регулярное решение вблизи особенности (0,0). Следующая теорема устанавливает нормально-регулярные решения системы Горна (3.1.4).

Теорема 3.1.2. *Пусть вспомогательная система*

$$\begin{aligned} &x_1\cdot U_{x_1,x_1}+(2\alpha_{1,0}\cdot x_1+\gamma-x_1)\cdot U_{x_1}-x_2\cdot U_{x_2}+\\ &+[\left(\alpha_{1,0}^2-\alpha_{1,0}\right)\cdot x_1+\gamma_1\cdot\alpha_{1,0}-\alpha_{0,1}\cdot x_2-\lambda]\cdot U=0,\\ &x_2\cdot U_{x_2,x_2}+(2\alpha_{0,1}\cdot x_2+\gamma_2-x_2)\cdot U_{x_2}-x_1\cdot U_{x_1}+\\ &+[\left(\alpha_{0,1}^2-\alpha_{0,1}\right)\cdot x_2+\gamma_2\cdot\alpha_{0,1}-\alpha_{1,0}\cdot x_1-\lambda]\cdot U=0 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

получена из системы Горна (3.1.4) с помощью преобразования

$$W(x_1,x_2)=\exp(\alpha_{1,0}\cdot x_1+\alpha_{0,1}\cdot x_2)\cdot U(x_1,x_2). \qquad (3.1.8)$$

Тогда при выполнении двух необходимых условий

$$\alpha_{1,0}^2-\alpha_{1,0}=0, \alpha_{0,1}^2-\alpha_{0,1}=0, \qquad (3.1.9)$$

$$f_{0,0}^{(j)}(\rho_1,\rho_2)=\rho_j\cdot(\rho_j-1+\gamma_j)=0 \qquad (3.1.10)$$

система (3.1.7) имеет два решения в виде нормально-регулярных рядов:

$$\begin{aligned}W_3(x_1,x_2)&=\exp(x_2)\cdot\{1+\frac{\lambda}{\gamma_1}\cdot x_1-\frac{\gamma_2-\lambda}{\gamma_2}\cdot x_2+\\&+\frac{\lambda(\lambda+1-\gamma_2)}{\gamma_1\cdot\gamma_2}\cdot x_1\cdot x_2+\frac{\lambda\cdot(\lambda+1)}{\gamma_1\cdot(\gamma_1+1)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{(\gamma_2-\lambda)\cdot(\gamma_2+1-\lambda)}{\gamma_2\cdot(\gamma_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+...\},\end{aligned} \qquad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned}W_4(x_1,x_2)&=\exp(x_1)\cdot\{1-\frac{\gamma_1-\lambda}{\gamma_1}\cdot x_1+\frac{\lambda}{\gamma_2}\cdot x_2+\\&+\frac{\lambda(\lambda+1-\gamma_1)}{\gamma_1\cdot\gamma_2}\cdot x_1\cdot x_2+\frac{(\gamma_1-\lambda)\cdot(\gamma_1+1-\lambda)}{\gamma_1\cdot(\gamma_1+1)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{\lambda\cdot(\lambda+1)}{\gamma_2\cdot(\gamma_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+...\},\end{aligned} \qquad (3.1.12)$$

где $\alpha_{1,0},\alpha_{0,1}$ *– неизвестные постоянные.*

Доказательство. Доказательство теоремы проводится методом Фробениуса-Латышевой и состоит из двух этапов. Сначала, с помощью преобразования (3.1.8) определяется вспомогательная система (3.1.7), откуда приравнивая коэффициентов при старших степенях независимых переменных x_1 и x_2 к нулю, определим корни системы характеристических функций (3.1.9):

1) $(\alpha_{1,0}=0,\alpha_{0,1}=1)$,
2) $(\alpha_{1,0}=1,\alpha_{0,1}=0)$.

Эти пары корней определяют две присоединенные системы относительно неизвестной $U(x_1,x_2)$:

$$\begin{aligned}&x_1\cdot U_{x_1,x_1}+(\gamma_1+x_1)\cdot U_{x_1}-x_2\cdot U_{x_2}+(\gamma_1-\lambda)\cdot U=0\\&x_2\cdot U_{x_2,x_2}+(\gamma_2-x_2)\cdot U_{x_2}-x_1\cdot U_{x_1}-(x_1-\lambda)\cdot U=0.\end{aligned} \qquad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned}&x_1\cdot U_{x_1,x_1}+(\gamma_1-x_1)\cdot U_{x_1}-x_2\cdot U_{x_2}-(x_2-\lambda)\cdot U=0,\\&x_2\cdot U_{x_2,x_2}+(\gamma_2+x_2)\cdot U_{x_2}-x_1\cdot U_{x_1}+(\gamma_2-\lambda)\cdot U=0.\end{aligned} \qquad (3.1.14)$$

Из присоединенных систем (3.1.13) и (3.1.14) находится два решения

$$U_1(x_1,x_2)=1+\frac{\lambda}{\gamma_1}\cdot x_1-\frac{\gamma_2-\lambda}{\gamma_2}\cdot x_2+\frac{\lambda(\lambda+1-\gamma_2)}{\gamma_1\cdot\gamma_2}\cdot x_1\cdot x_2+ \\ +\frac{\lambda\cdot(\lambda+1)}{\gamma_1\cdot(\gamma_1+1)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{(\gamma_2-\lambda)\cdot(\gamma_2+1-\lambda)}{\gamma_2\cdot(\gamma_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\ldots, \tag{3.1.15}$$

$$U_2(x_1,x_2)=1-\frac{\gamma_1-\lambda}{\gamma_1}\cdot x_1+\frac{\lambda}{\gamma_2}\cdot x_2+ \\ +\frac{\lambda(\lambda+1-\gamma_1)}{\gamma_1\cdot\gamma_2}\cdot x_1\cdot x_2+\frac{(\gamma_1-\lambda)\cdot(\gamma_1+1-\lambda)}{\gamma_1\cdot(\gamma_1+1)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{\lambda\cdot(\lambda+1)}{\gamma_2\cdot(\gamma_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\ldots, \tag{3.1.16}$$

которые при 1) $(\alpha_{1,0}=0,\alpha_{0,1}=1)$ и 2) $(\alpha_{1,0}=1,\alpha_{0,1}=0)$ определяют второй множитель $U(x_1,x_2)$ в (3.1.8). Поэтому, вспомогательная система полученная из системы Горна (3.1.4) с помощью преобразования (3.1.7) имеют решения (3.1.11) и (3.1.12) в виде:

$$W_3(x_1,x_2)=\exp(x_1)\cdot U_1(x_1,x_2), \\ W_4(x_1,x_2)=\exp(x_2)\cdot U_2(x_1,x_2). \tag{3.1.17}$$

Раскроем связь между функцией Гумберта (3.1.6) и нормально-регулярными решениями (3.1.11), (3.1.12).

Теорема 3.1.3. *Для функции Гумберта имеют место соотношения*

$$\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\exp(x_t)\cdot U_t(x_1,x_2),\ t=1,2. \tag{3.1.18}$$

Доказательство. Доказательство приведем для случая $t=1$, то есть когда $U_1(x_1,x_2)$ представляется в виде (3.1.15).

Раскроем правую часть равенства, разлагая в ряд заданные функции

$$e^{x_1}\cdot U(x_1,x_2)=\left(1+\frac{x_1}{1!}+\frac{x_1^2}{2!}+\ldots+\frac{x_1^n}{n!}+\ldots\right)\times \\ \times\left\{1-\frac{\gamma_1-\lambda}{\gamma_1}\cdot x_1+\frac{\lambda}{\gamma_2}\cdot x_2+\frac{\lambda(\lambda+1-\gamma_1)}{\gamma_1\gamma_2}\cdot x_1x_2+\ldots\right\}= \\ =\left\{1+\left[\frac{1}{1!}-\frac{\gamma_1-\lambda}{\gamma_1}\right]\cdot x_1+\frac{\lambda}{\gamma_2}\cdot x_2+\left[\frac{\lambda}{\gamma_2}+\frac{\lambda\cdot(\lambda+1-\gamma_1)}{\gamma_1\cdot\gamma_2}\right]\cdot x_1x_2+\right. \\ +\left[\frac{(\gamma_1-\lambda)\cdot(\gamma_1+1-\lambda)}{\gamma_1\cdot(\gamma_1+1)\cdot 2!}+\frac{1}{2!}-\frac{\gamma_1-\lambda}{\gamma_1}\cdot\frac{1}{1!}\right]\cdot x_1^2+ \\ \left.+\frac{\lambda\cdot(\lambda+1)}{\gamma_2\cdot(\gamma_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+..\right\}=\left\{1+\frac{\lambda}{\gamma_1}\cdot x_1+\frac{\lambda}{\gamma_2}\cdot x_2+\frac{\lambda(\lambda+1)}{\gamma_1\cdot\gamma_2}\cdot x_1x_2+\right. \\ \left.+\frac{\lambda(\lambda+1)}{\gamma_1(\gamma_1+1)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{\gamma_2(\gamma_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\ldots\right\}=$$

$$= \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{m_1+m_2}}{(\gamma_1)_{m_1} \cdot (\gamma_2)_{m_2}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \frac{x_2^{m_2}}{m_2!} = \Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2) .$$

Что и требовалась доказать.

Аналогично доказывается равенство и при $t = 2$.

Лемма 3.1.1. *Имеет место равенство*

$$\exp(-x_t) \cdot \Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2) = U_t(x_1,x_2), (t = 1,2). \tag{3.1.19}$$

Доказательство проводится аналогично как и в случае теоремы 3.1.3.

Приведенные выше свойства функций Гумберта в дальнейшем обобщим на случаи трех и более переменных опираясь на приведенные здесь результатов.

3.1.3 Связь гипергометрической функции с многочленами Лагерра двух переменных

Для того чтобы установить, сколько существует систем типа Лагерра и каким из 20-ти вырожденных гипергеометрических систем связаны. В качестве связывающей системы нами была подобрана система Горна (Ψ_2) и изучена связь между гипергеометрической функцией Гумберта $\Psi_2(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)$ и многочленам Лаггера двух переменных $L_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(x_1,x_2)$.

Требуется изучение связи этих многочленов с нормально-регулярными решениями вида (3.1.11) и (3.1.12), а также обобщение этих идеи на многочлены Лагерра трёх и более переменных.

Теорема 3.1.4. *Пусть в системе Горна (3.1.4) параметры* $\gamma_1 = \alpha_1 + 1,\ \gamma_2 = \alpha_2 + 1\ (\alpha_1 > -1, \alpha_2 > -1, \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0)$. *Тогда система (3.1.4) согласно общей теории таких систем имеет четыре линейно-независимых частных решений, из них решение*

$$W_1(x_1,x_2) = \Psi_2^{(2)}(-n;\alpha_1+1,\alpha_2+1;x_1,x_2) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(-n)_{m_1+m_2}}{(\alpha_1+1)_{m_1} + (\alpha_2+1)_{m_2}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \frac{x_2^{m_2}}{m_2!},$$

где $\lambda = -n\ (n > 0)$ определяет полином Лагерра двух переменных

$$\begin{gathered} L_{n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2) = \Psi_2[-n,\alpha_1+1,\alpha_2+1;x_1,x_2] = \\ = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(-n)_{m_1+m_2}}{(\alpha_1+1)_{m_1} \cdot (\alpha_2+1)_{m_2}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \frac{x_2^{m_2}}{m_2!} . \end{gathered} \tag{3.1.20}$$

Система

$$\begin{gathered} x_1 \cdot W_{x_1x_1} + (\alpha_1 + 1 - x_1) \cdot W_{x_1} - x_2 \cdot W_{x_2} + nW = 0, \\ x_{2.} \cdot W_{x_2x_2} + (\alpha_2 + 1 - x_2) \cdot W_{x_2} - x_1 \cdot W_{x_1} + nW = 0 \end{gathered} \tag{3.1.21}$$

называется *основной системой Лагерра*. Полином (3.1.20) называется *обобщенным полиномом Лагерра* двух переменных.

Известно из [18, с.238] справедливость представления:

$$L_{n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=C_{n,n}\cdot\Psi_2\left[-n,\alpha_1+1,\alpha_2+1;x_1,x_2\right]. \tag{3.1.22}$$

В соотношении (3.1.22) постоянную $C_{n,n}$ приняв в виде

$$C_{n,n}=\frac{\Gamma(\alpha_1+n+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_2+n+1)}{\Gamma(\alpha_2+1)} \tag{3.1.23}$$

получим несколько начальных обобщенных полиномов Лаггера двух переменных при различных значениях $(n,n):(0,0),(1,1),(2,2),\ldots$:

$$\begin{aligned}
&L_{0,0}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=1,\\
&L_{1,1}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=-x_1(\alpha_2+1)-x_2(\alpha_1+1)+(\alpha_1+1)(\alpha_2+1),\\
&L_{2,2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=2(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)x_1^2+2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)x_2^2+2(\alpha_1+2)(\alpha_2+2)x_1\cdot x_2-\\
&-2(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)x_1-2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)x_2+(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2).
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Заметим, что при $\alpha_j=0$, $j=\overline{1,2}$ тогда из обобщенного полинома Лагерра (3.1.24) получим простые полиномы Лагерра двух переменных.

Следствие 3.1.1. *Пусть в основной системе Лагерра (3.1.21) параметры* $\alpha_1=0$ *и* $\alpha_2=0$. *Тогда полученная система*

$$\left.\begin{aligned}
&x_1Z_{x_1x_1}+(1-x_1)Z_{x_1}-x_2Z_{x_2}-\lambda Z=0,\\
&x_2Z_{x_2x_2}+(1-x_2)Z_{x_2}-x_1Z_{x_1}-\lambda Z=0
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.25}$$

имеет четыре линейно-независимых частных решений, выражающиеся через функцию Гумберта Ψ_2, *из которых решение*

$$Z_1(x_1,x_2)=\Psi_2^{(2)}(\lambda,1,1;x_1,x_2)$$

при $\lambda=-n\ (n>0)$ *определяет полином Лагерра двух переменных вида*

$$L_{n,n}^{(0,0)}(x_1,x_2)=\sum_{m_1,m_2=0}^{n}\frac{(-n)_{m_1+m_2}}{(1)_{m_1}\cdot(1)_{m_2}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}\cdot \tag{3.1.26}$$

Вырожденные системы (3.1.21) и (3.1.25) при $\lambda=-n$ определяют простые и основные полиномы двух переменных Лагерра.

Теперь опираясь на результаты предыдущего пункта 3.1.2 раскроем связь многочленов Лагерра с нормально-регулярными решениями (3.1.11) и (3.1.12).

Отметим, что если α равна отрицательному числу, то функция $G(-\alpha;\gamma;x)$ сводится к многочлену $G(-n;\gamma;x)$. Если в преобразовании:

$$G(\alpha;\gamma;x)=e^{x}\cdot G(\gamma-\alpha;\gamma;-x)$$

$\gamma-\alpha$ целое отрицательное число, то $G(\alpha;\gamma;x)$ является произведением многочлена от x на показательную функцию.

Аналогичными свойствами обладает и функция Гумберта Ψ_2 (3.1.5).

Если в функции Гумберта (3.1.5) $\lambda -$ целое отрицательное число, то ее можно свести к многочлену Лагерра двух переменных.

Имеют место формулы преобразования (3.1.18) и (3.1.19), которые представляются в виде произведения показательной функции и функции двух переменных $U_t(x_1,x_2)\ (t=1{,}2)$ определяемые из (3.1.15) и (3.1.16) . Они являются решениями присоединенных систем (3.1.13) и (3.1.14) полученные с помощью преобразования (3.1.8). Это преобразование является определяющим и при построении многочлена Лагерра двух переменных.

Теорема 3.1.5. *Имеют место соотношения*

$$\Psi_2(-n\,;\alpha_1+1,\,\alpha_2+1\,;x_1\,,\,x_2)=\exp(x_t)\cdot\Phi_{2,t}(x_1,x_2)\,,\ t=1{,}2 \qquad (3.1.27)$$

где $\Phi_{2,t}(x_1,x_2)$ *– ряды полученные из* $U_t(x_1,x_2)$, *путем подстановки* $\lambda=-n,\ \gamma_1=\alpha_1+1;\ \gamma_2=\alpha_2+1\,(\alpha_1,\alpha_2>-1)$ *в (3.1.15) и (3.1.16):*

$$\Phi_{2,1}(x_1,x_2)=\left\{1+\frac{\alpha_1+1+n}{\alpha_1+1}\cdot x_1-\frac{n}{\alpha_2+1}\cdot x_2+\frac{n\,(n+\alpha_1)}{(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_1+1)}\cdot x_1x_2+\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha_1+1+n)(\alpha_1+2+n)}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{n\,(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\ldots\right\} \qquad (3.1.28)$$

$$\Phi_{2.2}(x_1,x_2)=\left\{1-\frac{n}{\alpha_1+1}\cdot x_1-\frac{\alpha_2+1+n}{\alpha_2+1}\cdot x_2+\frac{n\,(n+\alpha_2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot x_1x_2+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{(\alpha_2+1+n)(\alpha_2+2+n)}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\ldots\right\}. \qquad (3.1.29)$$

Доказательство. Для доказательства при $t=1$ правую часть (3.1.27) представим в виде произведения с помощью разложения двух рядов $\exp(x_1)$ и (3.1.28):

$$\exp(x_1)\cdot\Phi_{2,1}(x_1,x_2)=\left(1+\frac{x_1}{1!}+\frac{x_1^2}{2!}+...\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{\alpha_1+1+n}{\alpha_1+1}\cdot x_1-\frac{n}{\alpha_2+1}\cdot x_2+\frac{n\,(n+\alpha_1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_1+1)}\cdot x_1x_2+...\right)=$$

$$=\left\{1+\left[\frac{1}{1!}-\frac{\alpha_1+1+n}{\alpha_1+1}\right]\cdot x_1-\frac{n}{\alpha_2+1}\cdot x_2+\left[\frac{n\,(n+\alpha_1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_1+1)}-\frac{n}{\alpha_2+1}\right]\cdot x_1x_2+\right.$$

$$\left.+\frac{n\,(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\left[\frac{(\alpha_1+1+n)(\alpha_1+2+n)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)\cdot 2!}-\frac{\alpha_1+1+n}{\alpha_1+1}+\frac{1}{2!}\right]\cdot x_1^2+...\right\}=$$

$$=\left\{1-\frac{n}{\alpha_1+1}\cdot x_1-\frac{n}{\alpha_2+1}\cdot x_2+\frac{n\,(n-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot x_1x_2+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{n\,(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+...\right\}=$$

$$=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-n)_{m_1+m_2}}{(\alpha_1+1)_{m_1}\cdot(\alpha_2+1)_{m_2}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}=\Psi_2(-n\,;\alpha_1+1,\alpha_2+1;\,x_1,x_2).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3.1.6. *Имеют место равенства*

$$\exp(-x_t)\cdot\psi_2(-n\,;\alpha_1+1,\alpha_2+1;\,x_1,x_2)=\Phi_{2,t}(x_1,x_2),\ t=1,2. \qquad (3.1.30)$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично, как в теореме 3.1.4.

Равенство многочленов обеспечивают условия: γ_t-n целые отрицательные числа $(t=1,2)$, $\lambda=-n$ в рядах (3.1.15) и (3.1.16).

3.1.4 Применение полученных результатов

Далее, исследуем применение полученных результатов.

Ставится задача: построить нормально-регулярное решение уравнения

$$LU\equiv U_t-U_{xx}-U_{yy}-\frac{2\alpha}{x}\cdot U_x-\frac{2\beta}{y}\cdot U_y=0,\ \alpha,\beta=const \qquad (3.1.31)$$

в области $\Omega=\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0\}$.

После применения преобразований, задача приводится к построению решения системы

$$\xi\cdot W_{\xi\xi}+\left(\frac{1+2\alpha}{2}-\xi\right)\cdot W_\xi-\eta\cdot W_\eta-\frac{1}{2}\cdot W=0,$$

$$\eta\cdot W_{\eta\eta}+\left(\frac{1+2\beta}{2}-\eta\right)\cdot W_\eta-\xi\cdot W_\xi-\frac{1}{2}\cdot W=0, \qquad (3.1.32)$$

где введены обозначения $\xi = -\frac{x_1^2}{8t}, \eta = -\frac{x_2^2}{8t}$.

Согласно общей теории таких систем, вырожденная гипергеометрическая система типа Горна (3.1.32) имеет до четырех линейно-независимых частных решений. С помощью этих четырех линейно-независимых частных решений, в работе [75] определены четыре линейно-независимых частных решений уравнения (3.1.31).

В работе [75] изучена задача связанная с решением параболического уравнения с двумя линиями вырождения.

Введя обозначения $\gamma_1 = \frac{1+2\alpha}{2}, \gamma_2 = \frac{1+2\beta}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$ нетрудно заметить, что получена вырожденная гипергеометрическая система Горна (3.1.4) с частным решением вида

$$W_1 = C_1 \cdot \Psi_2^{(2)}(\lambda; \gamma_1, \gamma_2; x_1, x_2).$$

С учетом введенных обозначений частное решение системы получено в виде

$$W_1 = C_1 \cdot \Psi_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1+2\alpha}{2}, \frac{1+2\beta}{2}; \xi, \eta\right) = C_1 \cdot \Psi_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1+2\alpha}{2}, \frac{1+2\beta}{2}; -\frac{x^2}{8t}, \frac{y^2}{8t}\right) \tag{3.1.33}$$

Используя преобразования вида (3.1.8) на основании теоремы 3.1.2 можно утверждать, что система (3.1.32) имеет еще две нормально-регулярные решения вида (3.1.11) и (3.1.12).

Нормально-регулярные решения рассматриваемой системы имеет вид:

$$W_5(\xi,\eta) = \exp(\xi) \cdot \left\{1 - \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \cdot \xi + \frac{1}{1+2\beta} \cdot \eta - \frac{2(\alpha-1)}{(1+2\alpha)(1+2\beta)} \cdot \xi\eta + \right.$$
$$\left. + \frac{4\alpha(\alpha+1)}{(1+2\alpha)(3+2\alpha)} \cdot \frac{\xi^2}{2!} + \frac{1\cdot 3}{(1+2\beta)(3+2\beta)} \cdot \frac{\eta^2}{2!} + \dots\right\}, \tag{3.1.34}$$

$$W_6(\xi,\eta) = \exp(\eta) \cdot \left\{1 + \frac{1}{1+2\alpha} \cdot \xi - \frac{2\beta}{1+2\beta} \cdot \eta - \frac{2(\beta-1)}{(1+2\alpha)(1+2\beta)} \cdot \xi\eta + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3}{(1+2\alpha)(3+2\alpha)} \cdot \frac{\xi^2}{2!} + \frac{4\beta(\beta+1)}{(1+2\beta)(3+2\beta)} \cdot \frac{\eta^2}{2!} + \dots\right\}. \tag{3.1.35}$$

В заключении отметим, что для частного решения (3.1.33) и нормально-регулярных решений (3.1.34), (3.1.35) справедлива теорема 3.1.4 и ее следствие.

3.1.5 Связь функции Гумберта с многочленами Лагерра трёх переменных

Известно, что вырожденная система Горна (3.1.1), состоящая из трёх уравнений имеет 2^3 линейно-независимых частных решений [21]. Установим связь этих решений с многочленами Лагерра трёх переменных.

Теорема 3.1.7. *Пусть в системе Горна (3.1.1) состоящей из трех уравнений параметры* $\gamma_j = \alpha_j + 1$ $\left(\alpha_j > -1, \alpha_j \neq 0,\, j = \overline{1,3}\right)$. *Тогда система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (3.1.1) имеет восемь линейно-независимых частных решений, выражающиеся через функции Гумберта* $\Psi_2^{(3)}$ *трех переменных. И решение*

$$W_1(x_1, x_2, x_3) = \Psi_2^{(3)}(\lambda, 1+\alpha_1, 1+\alpha_2, 1+\alpha_3; x_1, x_2, x_3), \tag{3.1.36}$$

определяет обобщенный полином Лагерра трех переменных

$$L_{n,n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{n} \frac{(-n)_{m_1+m_2+m_3}}{(1+\alpha_1)_{m_1}(1+\alpha_2)_{m_2}(1+\alpha_3)_{m_3}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}\frac{x_3^{m_3}}{m_3!} \tag{3.1.37}$$

при $\lambda = -n$ *(* $n > 0$ *- целое число).*

Доказательство. Приведем схему доказательства.

Система (3.1.1) имеет регулярную особенность $(0,0,0)$ и иррегулярную особенность (∞,∞,∞). Вблизи регулярной особенности $(0,0,0)$ решение ищем в виде обобщенного степенного ряда трёх переменных (3.1.2), где показатели ρ_1, ρ_2, ρ_3 определяются из системы определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,0)$, которая для системы (3.1.1) представляется в виде

$$f_{0,0,0}^{(j)}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \equiv \rho_j(\rho_j - 1) + (1+\alpha_j)\rho_j = 0, \; j = \overline{1,3} \tag{3.1.38}$$

и определяет восемь троек корней

$$\begin{gathered}(\rho_1^t, \rho_2^t, \rho_3^t), (t = 1,2): (0,0,0), (-\alpha_1,0,0), (0,-\alpha_2,0), (0,0,-\alpha_3), \\ (-\alpha_1,-\alpha_2,0), (-\alpha_1,0,-\alpha_3), (0,-\alpha_2,-\alpha_3), (-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3).\end{gathered} \tag{3.1.39}$$

Этим показателям соответствуют восемь линейно-независимых частных решений. Все они выражаются через функции Гумберта $\Psi_2^{(3)}$ трех переменных. Из них, нас больше интересует решение W_1, которое при $\lambda = -n$ определяет полином Лагерра трёх переменных. Действительно, тогда функция Гумберта (3.1.2) представляется в виде

$$\begin{aligned}W_1 &= \Psi_2^{(3)}(-n, 1+\alpha_1, 1+\alpha_2, 1+\alpha_3; x_1, x_2, x_3) = \\ &= \sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{n} \frac{(-n)_{m_1+m_2+m_3}}{(1+\alpha_1)_{m_1}(1+\alpha_2)_{m_2}(1+\alpha_3)_{m_3}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}\frac{x_3^{m_3}}{m_3!}.\end{aligned} \tag{3.1.40}$$

Как видно отсюда, вырожденный ряд Гумберта (3.1.2) обращается в ортогональный полином трёх переменных Лагерра (3.1.37).

По аналогии обыкновенному случаю, $L_{n,n,n}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(x_1,x_2,x_3)$, $\alpha_j \neq 0, \left(j=\overline{1,3}\right)$ называют *обобщенным полиномом Лагерра трех переменных*, а $L_{n,n,n}(x_1,x_2,x_3)$ - *простым полиномом Лагерра трех переменных.*

Система

$$x_j W_{x_j x_j} + (\alpha_j + 1 - x_j) W_{x_1} - \sum_{k \neq j} x_k W_{x_k} - \lambda W = 0, \quad \left(j=\overline{1,3}\right), \qquad (3.1.41)$$

состоящей их трех уравнений называется системой типа Лагерра.

Следствие 3.1.2. *Если в системе (3.1.41) параметры* $\alpha_j = 0$ $\left(j=\overline{1,3}\right)$, *то система*

$$x_j W_{x_j x_j} + (1 - x_j) W_{x_1} - \sum_{k \neq j} x_k W_{x_k} - \lambda W = 0$$

имеет восемь линейно-независимых частных решений, выражающиеся через функции Гумберта $\Psi_2^{(3)}$ *трех переменных и решение*

$$W_1(x_1,x_2,x_3) = \Psi_2^{(3)}(\lambda,1,1,1;x_1,x_2,x_3)$$

определяет простой полином Лагерра трех переменных вида

$$L_{n,n,n}^{(0,0,0)}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{n} \frac{(-n)_{m_1+m_2+m_3}}{(1)_{m_1}(1)_{m_2}(1)_{m_3}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \frac{x_2^{m_2}}{m_2!} \frac{x_1^{m_3}}{m_3!}$$

при $\lambda = -n$ *(* $n > 0$ *- целое число).*

Теперь установим связь между многочленом Лагерра трёх переменных и нормально-регулярными решениями системы (3.1.41).

Теорема 3.1.8. *Для функции Гумберта имеют место соотношения*

$$\Psi_2^{(3)}(-n,1+\alpha_1,1+\alpha_2,1+\alpha_3;x_1,x_2,x_3) = \exp(x_t) U_t(x_1,x_2,x_3), \ \left(t=\overline{1,3}\right). \qquad (3.1.42)$$

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1.5 для каждого случая отдельно.

Приведем схему доказательства. Раскрывая правую часть (3.1.42) и учитывая

$$U_1(x_1,x_2,x_3) = \left\{1 - \frac{\alpha_1+n+1}{\alpha_1+1}\cdot x_1 - \frac{n}{\alpha_2+1}\cdot x_2 - \frac{n}{\alpha_3+1}\cdot x_3 + \right.$$
$$+ \frac{n(\alpha_1+n)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot x_1\cdot x_2 + \frac{n(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)}\cdot x_2\cdot x_3 + \frac{n(\alpha_1+n)}{(\alpha_1+1)(\alpha_3+1)}\cdot x_1\cdot x_3 -$$
$$- \frac{n(n-1)(n+\alpha_1-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)(\alpha_3+1)}\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3 + \frac{(\alpha_1+n+1)(\alpha_1+n+2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}\cdot\frac{x_1^2}{2!} +$$

$$+\frac{n(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\frac{n(n-1)}{(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)}\cdot\frac{x_3^2}{2!}+\ldots\Bigg\},\tag{3.1.43}$$

$$U_1(x_1,x_2,x_3)=\Bigg\{1-\frac{\alpha_1+n+1}{\alpha_1+1}\cdot x_1-\frac{n}{\alpha_2+1}\cdot x_2-\frac{n}{\alpha_3+1}\cdot x_3+$$
$$+\frac{n(\alpha_1+n)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot x_1\cdot x_2+\frac{n(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)}\cdot x_2\cdot x_3+\frac{n(\alpha_1+n)}{(\alpha_1+1)(\alpha_3+1)}\cdot x_1\cdot x_3-$$
$$-\frac{n(n-1)(n+\alpha_1-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)(\alpha_3+1)}\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3+\frac{(\alpha_1+n+1)(\alpha_1+n+2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+$$
$$+\frac{n(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\frac{n(n-1)}{(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)}\cdot\frac{x_3^2}{2!}+\ldots\Bigg\}\tag{3.1.44}$$

$$U_3(x_1,x_2,x_3)=\{1-\frac{n}{\alpha_1+1}\cdot x_1-\frac{n}{\alpha_2+1}\cdot x_2-\frac{\alpha_3+n+1}{\alpha_3+1}\cdot x_3+\frac{n(n-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot x_1\cdot x_3+$$
$$+\frac{n(n+\alpha_3)}{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)}\cdot x_2\cdot x_3+\frac{n(n+\alpha_3)}{(\alpha_1+1)(\alpha_3+1)}\cdot x_1\cdot x_3-\frac{n(n-1)(n+\alpha_3-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)}\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3+$$
$$+\frac{n(n+\alpha_3)}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{n(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\frac{(\alpha_3+n+1)(\alpha_3+n+2)}{(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)}\cdot\frac{x_3^2}{2!}+\ldots\Bigg\}.\tag{3.1.45}$$

получим требуемое соотношение. Что и требовалось доказать.

Лемма 3.1.2. *Имеют место соотношения*

$$\exp(-x_t)\cdot\Psi_2^{(3)}(-n;\alpha_1+1,\alpha_2+1,\alpha_3+1;x_1,x_2,x_3)=U_t(x_1,x_2,x_3),\left(t=\overline{1,3}\right)\tag{3.1.46}$$

где $U_t(x_1,x_2,x_3),\ \left(t=\overline{1,3}\right)$ *функция от трех переменных вида (3.1.42)-(3.1.44).*

Здесь важно отметить, что нормально-регулярное решение существует тогда, и только тогда, когда выполняются две необходимые условия:

$$\alpha_{1,0,0}^2-\alpha_{1,0,0}=0\,,\alpha_{0,1,0}^2-\alpha_{0,1,0}=0\,,\alpha_{0,0,1}^2-\alpha_{0,0,1}=0\tag{3.1.47}$$

и (3.1.38).

Первое необходимое условие (3.1.47) определяется из основной системы типа Лагерра, с помощью преобразования

$$W(x_1,x_2,x_3)=\exp(\alpha_{1,0,0}\cdot x_1+\alpha_{0,1,0}\cdot x_2+\alpha_{0,0,1}\cdot x_3)\cdot U(x_1,x_2,x_3).$$

Система (3.1.47) имеет 2^3 троек корней:
1) (0,0,0), 2) (0,0,1), 3) (0,1,0), 4) (1,0,0), 5) (1,1,0), 6) (1,0,1), 7) (0,1,1), 8) (1,1,1).

Из них, при 1) $(\alpha_{1,0,0}=0,\ \alpha_{0,1,0}=0,\alpha_{0,0,1}=0)$ получим исходную систему (3.1.41), которая определяет 2^3 линейно-независимых регулярных частных решений. Первое решение из них $W_1(x_1,x_2,x_3)$ при $\lambda=-n$ определяет многочлен Лагерра трех переменных (3.1.37). Второе необходимое условие (3.1.38) определяет показатели 2^3 регулярных степенных рядов, являющиеся решениями исходной системы (3.1.41).

Следующие три тройки корней 2)-4) позволяют получить три показательные функции $\exp(x_t), \left(t=\overline{1,3}\right)$.

Полученные присоединенные системы при тройках корней 5)-8) являются не совместными. Следовательно, такие корни не определяют решений уравнения.

Теперь полученные результаты обобщим на случай системы типа Лагерра состоящей из n уравнений.

3.1.6 Нормально-регулярные решения систем типа Лагерра, состоящих из n уравнений

Вырожденные гипергеометрические функции были изучены в работах П. Аппеля, Я. Горна, М. Лауричелла, М.П. Гумберта, А. Эрдейи, Э. Айнса и др. М.П. Гумберт определил вырожденную гипергеометрическую функцию $\Psi_2^{(n)}$ от n переменных и установил связь с функцией Лауричелла F_A [6].

Определение 3.1.9. *Функция Гумберта* $\Psi_2^{(n)}$ *от* n *переменных* $x_j, \left(j=\overline{1,n}\right)$, *определяемая с помощью ряда*

$$\Psi_2^{(n)}\left(\lambda,\gamma,\gamma_2,...,\gamma_n;x_1,x_2,...,x_n\right)=\sum_{m_1,m_2,...,m_k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda\right)_{m_1+m_2+...+m_k}}{\left(\gamma_1\right)_{m_1}\cdot\left(\gamma_2\right)_{m_2}\cdot...\cdot\left(\gamma_n\right)_{m_n}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}\cdot...\cdot\frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \qquad (3.1.48)$$

называется вырожденной гипергеометрической функцией.

Отметим, что ряд сходится абсолютно и равномерно при $|x_1|<\varepsilon,|x_2|<\varepsilon,...,|x_n|<\varepsilon$.

Для ряда (3.1.44) имеет место предельный переход

$$\Psi_2(\lambda,\gamma_1,\gamma_2,...\gamma_n;x_1,x_2,...x_n)=\lim_{\varepsilon\to0}F_A(\lambda;\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},...\frac{1}{\varepsilon},\gamma_1,\gamma_2;\varepsilon x_1,...\varepsilon x_n), \qquad (3.1.49)$$

устанавливающая связь между функцией Гумберта $\Psi_2^{(n)}$ с функцией Лауричелла F_A [27].

Функция Гумберта $\Psi_2^{(n)}$ (3.1.48) является частным решением системы, состоящих из n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$x_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2}+\left[\gamma_j-x_j\right]\frac{\partial W}{\partial x_j}-\sum_{(k\neq j)}\frac{\partial W}{\partial x_k}-\lambda\cdot W=0,\ \left(j=\overline{1,n}\right). \qquad (3.1.50)$$

При $n=2$ система (3.1.50) имеет 2^2 линейно-независимых регулярных и 2 нормально-регулярных частных решений. При $n=3$ она имеет 2^3 регулярных и 3 нормально-регулярных решений. Связь их с многочленами Лагерра двух и трех переменных установлены в пунктах 3.1.3 и 3.1.5. Обобщая эти результаты на случай системы (3.1.50) можно утверждать, что она имеет 2^n линейно-независимых регулярных и n нормально-регулярных решений.

Действительно, справедливо утверждение.

Теорема 3.1.10. *Если система Горна (3.1.50) имеет* 2^n *линейно-независимых регулярных частных решений вблизи особенности (0,...0):*

$$1\left\{W_1(x_1,...,x_n)=\Psi_2^{(n)}(\lambda,\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;x_1,x_2,...x_n),\right.$$

$$n\begin{cases}W_2(x_1,...,x_n)=x^{1-\gamma_1}\cdot\Psi_2^{(n)}(\lambda+1-\gamma_1,2-\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;x_2,...x_n)\\ ...\quad ...\quad ...\\ W_{n+1}(x_1,...x_n)=x^{1-\gamma_n}\cdot\Psi_2^n(\lambda+1-\gamma_n;\gamma_1,...;2-\gamma_n;x_1,...x_{n-1}),\end{cases}$$

$$1\left\{W_{2n}(x_1,...,x_n)=x^{1-\gamma_1}\cdot...x^{1-\gamma_n}\cdot\Psi_2^n(\lambda+n-\gamma_1-\gamma_2-...-\gamma_n,2-\gamma_1,...,2-\gamma_n;x_1,x_2,...x_n),\right.$$

выражающиеся через функции Гумберта $\Psi_2^{(n)}$ *от* n *переменных, то полученное из нее при* $\gamma_j=1+\alpha_j,\left(\alpha_j>-1,\alpha_j\neq 0,\ j=\overline{1,n}\right)$ *и* $\lambda=-n\,(n>0)$ *решение определяет обощенный многочлен Лагерра от* n *переменных*

$$L_{n,n,..n}^{(\alpha_1,\alpha_2,..\alpha_n)}(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{m_1,..m_n}^{\infty}\frac{(-n)_{m_1+m_2+...+m_n}}{(\alpha_1+1)_{m_1}\cdot...\cdot(1+\alpha_n)_{m_n}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot...\cdot\frac{x_n^{m_n}}{m_n!}\cdot \tag{3.1.51}$$

Система вида

$$x_i\frac{\partial^2W}{\partial x_j^2}+\left[1+\alpha_j-x_j\right]\frac{\partial W}{\partial x_j}-\sum_{(k\neq j)}\frac{\partial W}{\partial x_k}-n\cdot W=0,\ \ (j=\overline{1,n}) \tag{3.1.52}$$

называется *обобщенной системой типа Лагерра*.

Если $\alpha_j=0,\ j=\overline{1,n}$, то из (3.1.52) получим простую систему Лагерра с решением в виде простого полинома

$$W(x_1,...x_n)=L_{n,n,..n}^{(0,0,..0)}(x_1,....x_n)=\sum_{m_1,..m_n}^{\infty}\frac{(-n)_{m_1+m_2+...+m_n}}{(\alpha_1+1)_{m_1}\cdot...\cdot(1+\alpha_n)_{m_n}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdot...\cdot\frac{x_n^{m_n}}{m_n!}\cdot \tag{3.1.53}$$

Следующая теорема обеспечивает существование n нормально-регулярных решений.

Теорема 3.1.11. *Пусть вспомогательная система получена из обощенной системы Лагерра с помощью преобразования*

$$W(x_1,...,x_n)=\exp(\alpha_{1,0,...,0}\cdot x_1+...+\alpha_{0,0,...,1}\cdot x_n)\cdot U(x_1,...,x_n). \tag{3.1.54}$$

Тогда при выполнении двух необходимых условий:

$$\alpha_{1,0,..,0}^2-\alpha_{1,0,...,0}=0,\alpha_{0,1,0,...,0}^2-\alpha_{0,1,0,...,0}=0,...,\alpha_{0,..0,1}^2-\alpha_{0,..0,1}=0$$

$$f^{j}_{0,\dots,0}(\rho_1,\dots,\rho_n)=\rho_j\cdot(\rho_j-1)+(1+\alpha_j)\cdot\rho_j=0\quad\left(j=\overline{1,n}\right) \tag{3.1.55}$$

система имеет n *нормально-регулярных решений вида*

$$W_{1,j}(x_1,\dots,x_n)=\exp(x_j)\cdot U_j(x_1,\dots,x_n),\ (j=\overline{1,n}), \tag{3.1.56}$$

где

$$\begin{gathered}U_1(x_1,\dots,x_n)=\exp(x_1)\cdot\left\{1-\frac{\alpha_1+n+1}{\alpha_1+1}\cdot x_1-\frac{n}{\alpha_2+1}\cdot x_2-\dots-\right.\\
-\frac{n}{\alpha_n+1}\cdot x_n+\frac{n(n+\alpha_1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot x_1x_2+..+\\
+\frac{n(n+\alpha_1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_n+1)}x_1x_n+\frac{n(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)}\cdot x_2x_3+\dots+\\
+\frac{n(n-1)}{(\alpha_{n-1}+1)(\alpha_n+1)}x_{n-1}x_n+\frac{(\alpha_1+n+1)(\alpha_1+2+n)}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\\
\left.+\frac{n(n-1)}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\dots+\frac{n(n-1)}{(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)}\cdot\frac{x_n^2}{2!}+\dots\right\},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
U_n(x_1,\dots,x_n)=\exp(x_n)\cdot\left\{1-\frac{n}{\alpha_1+1}\cdot x_1-\dots-\right.\\
-\frac{\alpha_n+n+1}{\alpha_n+1}\cdot x_n+\frac{n(n-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot x_1x_2+..+\\
+\dots+\frac{n(n-1)}{(\alpha_{n-2}+1)(\alpha_{n-1}+1)}x_{n-2}x_{n-1}+\frac{n\cdot(n+\alpha_n)}{(\alpha_1+1)(\alpha_n+1)}\cdot x_ix_n+\dots+\\
+\frac{n\,(n+\alpha_n)}{(\alpha_{n-1}+1)(\alpha_n+1)}\cdot x_{n-1}x_n+\dots+\frac{n\,(n-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}\\
\left.+\frac{(\alpha_n+n+1)(\alpha_n+2+n)}{(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)}\cdot\frac{x_n^2}{2!}+\dots\right\}.\end{gathered} \tag{3.1.57}$$

Непосредственно можно установить, что между регулярным решением $\Psi_2^{(n)}(-n;\alpha_1+1,\dots,\alpha_n+1;x_1,\dots,x_n)$ и нормально-регулярными (3.1.57) существует связь.

Следствие 3.1.3. *Для функции Гумберта имеют место соотношения*

$$\Psi_2^{(n)}(-n;\alpha_1+1,\dots,\alpha_n+1;x_1,\dots,x_n)=\exp(x_j)\cdot U_j(x_1,\dots,x_n),\ (j=\overline{1,n}), \tag{3.1.58}$$

где $U_j(x_1,\dots,x_n)$ *определяются в виде ряда (3.1.53).*

Следствие 3.1.4. *Для регулярного и нормально-регулярного решения имеют место соотношения*

$$\exp(x_j)\cdot\Psi_2^{(n)}(-n;\alpha_1+1,\alpha_2+1,...,\alpha_n+1;x_1,...,x_n)=U_j(x_1,...,x_n),\ (j=\overline{1,n}) \qquad (3.1.59)$$

где $U_j(x_1,...,x_n)$ – ряды (3.1.57).

Отметим, что исследуемые системы должны быть совместными. Система (3.1.4) и полученные из нее с помощью преобразования (3.1.8), присоединенные системы (3.1.13)-(3.1.14) относятся к системе типа Вильчинского, который установил для таких систем четыре условия совместности [24]. С возрастанием количества уравнений в системах, установление условия совместности усложняются. Для системы Горна состоящих из трех уравнений справедливо утверждение.

Система типа Лагерра (3.1.41) и (3.1.52) совместны поскольку, полином Лагерра трех (3.1.40) и более переменных (3.1.51) удовлетворяет всем уравнениям системы.

Используя метод Кампе де Ферье, построив системы типа Лагерра с помощью известных полиномов Лагерра (3.1.40) и (3.1.51) можно показать, что системы (3.1.41) и (3.1.52) совместны.

Преобразование (3.1.54) из вспомогательной системы определяют n присоединенных новых систем типа Горна, из которых находятся n новых нормально-регулярных решений вида (3.1.56), при выполнении двух необходимых условий (3.1.55).

Действительно, когда $n=2$ были определены две присоединенные системы типа Горна (3.1.13) и (3.1.14). Из них получены две нормально-регулярные решения (3.1.11) и (3.1.12), связанные с многочленами Лагерра двух переменных соотношениями (3.1.27) и (3.1.30).

Таким же образом, с помощью преобразования (3.1.8) получим три новых присоединенных систем и три нормально-регулярных решения, связанные с многочленами Лагерра трех переменных соотношениями (3.1.51) и (3.1.53).

Эти результаты обобщены на случай n переменных в теореме 3.1.11, где доказано существование n нормально-регулярных решений вида (3.1.56), связанные с многочленами Лагерра n переменных (3.1.51) соотношениями (3.1.58) и (3.1.59).

3.2 Многомерные нормально-регулярные решения вырожденных систем, полученных из систем Лауричелла

Специальные вопросы аналитической теории дифференциальных уравнений, а именно существование нормально-регулярных решений и их применение к решению задач теории волноводов и теории колебаний были рассмотрены в монографии [1]. Все известные специальные функции являются частными случаями нормально-регулярных решений. Это понятие распространен на случай функций многих переменных [46], [78].

Определение 3.2.1 *Решение называется нормально-регулярным решением n переменных*

$$w(z_1,...,z_n)=\exp(\alpha_{1,0,...,0}z_1+...+\alpha_{0,0,...,1}z_n)z_1^{\rho_1}\cdot...\cdot z_n^{\rho_n}\times$$
$$\times\sum_{m_1,...,m_n=0}^{\infty}A_{m_1,...,m_n}z_1^{m_1}\cdot...\cdot z_n^{m_n},\; A_{0,...,0}\neq 0$$

где $\rho_t\ (t=\overline{1,n})$, $A_{m_1,...,m_n}(m_1,...,m_n=0,1,2,...)$, $\alpha_{1,...,0},...,\alpha_{0,...,1}$ *– неизвестные постоянные; ряд в правой части сходится вблизи особенности* $(z_1=0,...,z_n=0)$.

Степень многочлена $Q(\alpha_{1,0,...,0}z_1+...+\alpha_{0,0,...,1}z_n)$ определяется понятием ранга

$$p=1+k=1+\max\frac{\beta_j-\beta_0}{j},\quad (1\leq j\leq n),$$

где β_0,β_j - наибольшие степени коэффициентов заданной системы. Когда ранг $p=1$, многочлен $Q(z_1,...,z_n)$ первой степени имеет вид

$$Q(z_1,...,z_n)=\alpha_{1,0,...,0}z_1+...+\alpha_{0,0,...,1}z_n.$$

Ставится задача: исследовать возможность построения нормально-регулярных решений вырожденных систем, полученных из систем Лауричелла F_D, найти необходимые условия существования нормально-регулярных решений, выявить свойства связанных с функциями Горна двух и более переменных, установить связь рассматриваемых рядов с вновь введенными функциями В.И. Художникова $\Phi_D\begin{pmatrix}\alpha,(\beta_k)\\ \gamma\end{pmatrix}(z_{k+1})$ [76].

3.2.1 Исследование вырожденных систем, полученных из системы Лауричелла (F_D)

Постановка задачи. Исследовать существование нормально-регулярных решений вырожденных систем, полученных из системы дифференциальных уравнений

$$(1-z_i)\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-(\alpha+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\beta_i\sum_{j=1,j\neq i}^{n}z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha\frac{\partial w}{\partial z_i}-\beta_j w=0,\; i=\overline{1,n}. \quad (3.2.1)$$

Решением системы (3.2.1) является функция Лауричелла

$$F_D\begin{pmatrix}\alpha,(\beta_n)\\ \gamma\end{pmatrix}(z_n)=\sum_{i_1,...,i_n}\frac{(\alpha)_{\sum i_n}\prod(\beta_n)i_n}{(\gamma)_{\sum i_n}}\cdot\prod\frac{(z_n)^{i_n}}{i_n!}. \quad (3.2.2)$$

В [76], [24] приняты следующие обозначения и сокращения:
$(a_n)=(a_1,...,a_n)$, $\prod(\alpha_n)_{i_n}=\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k)_{i_k}$, $\sum i_n=\sum_{k=1}^{n}i_k$, $\sum i_1,...,i_k=\sum_{i_1=0}^{\infty}\cdot...\cdot\sum_{i_k=0}^{\infty}\cdot(...)$.

В.И. Художников совершая предельные переходы по параметру β_i в последних $n-k$ уравнениях системы (3.2.1) представил её в виде следующей вырожденной гипергеометрической системы дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}(1-z_i)\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i}+[\gamma-(\alpha+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\beta_i\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha\beta_i w=0,\ i=\overline{1,k},\\ \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i}+[\gamma-z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha w=0,\ i=\overline{k+1,n}.\end{gathered} \tag{3.2.3}$$

Решением системы (3.2.3) является введенная функция [5, с.842]:

$$\Phi_D\left(\begin{matrix}\alpha,(\beta_k)\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_{k+1})\right)=\sum_{i_1,\dots,i_{k+1}}\frac{(\alpha)_{\sum i_{k+1}}\prod(\beta_k)i_k}{(\gamma)_{\sum i_{k+1}}}\cdot\prod\frac{(z_{k+1})^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!}. \tag{3.2.4}$$

Предметом дальнейшего исследования будет построение нормально-регулярных решений системы (3.2.3) и её частных случаев, установление связи между функцией В.И. Художникова (3.2.4) и вновь построенных нормально-регулярных решений, а также изучение их различных свойств.

Как указано в работе Художникова, функция (3.2.4) при $n=2$ совпадает с хорошо изученной функцией Гумберта, со списка Горна.

Переходим к построению нормально-регулярного решения системы Горна (Φ_1) и изучим его свойства.

3.2.2 Нормально-регулярные решения вырожденной системы Горна (Φ_1) и некоторые его свойства

Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} z_1(1-z_1)w_{z_1z_1}+z_2(1-z_1)w_{z_1z_2}+[\gamma-(\alpha+\beta_1+1)z_1]w_{z_1}-\beta_1 z_2 w_{z_2}-\alpha\beta_1 w=0,\\ z_2 w_{z_2z_2}+z_1 w_{z_1z_2}+(\gamma-z_2)w_{z_2}-z_1 w_{z_1}-\alpha w=0\end{cases} \tag{3.2.5}$$

является частным случаем системы (3.2.3) полученная из нее при $n=2$.

Определение 3.2.2. Ряд вида

$$\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)}{(\gamma,m+n)}\frac{z_1{}^m}{(1,m)}\frac{z_2{}^n}{(1,n)}\ . \tag{3.2.6}$$

называется вырожденной гипергеометрической функцией $\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)$ *двух переменных* z_1 *и* z_2.

Отметим, что ряд сходится абсолютно и равномерно в области $|z_1|<\infty$, $|z_2|<\infty$.

Теорема 3.2.1. *Система (3.2.5) имеет три линейно-независимых частных решения*

$$w_1(z_1,z_2)=\Phi_1(\alpha,\beta,\gamma;z_1,z_2),$$
$$w_2(z_1,z_2)=y^{1-\gamma}\Phi_1(\alpha+1-\gamma,\beta,2-\gamma;z_1,z_2),$$
$$w_3(z_1,z_2)=x^{1-\gamma}\Phi_1(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\lambda,2-\gamma;z_1,z_2) \qquad (3.2.7)$$

одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция (3.2.6).

Приведем некоторые свойства системы (3.2.5), необходимые для построения решений.

- Система совместна по методу построения. Условие интегрируемости выполняется
$$\Delta_1 = 1-a_{1,1}b_{1,1} = \frac{z_2(1-z_1)}{z_1(1-z_2)} \equiv 0.$$

  Согласно общей теории [24] такие системы имеют не более трёх линейно-независимых частных решений.
- Особые кривые системы (3.2.5): $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,\infty)$, $(\infty,0)$, $(1,\infty)$, (∞,∞). Вблизи регулярной особенности (0,0) существуют три линейно-независимых регулярных решений вида (3.2.7).
- Все вырожденные уравнения имеют особую точку (иррегулярную) $z_1=+\infty$ [46]. Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка имеет иррегулярную особенность $(-\infty,+\infty)$.

  Справедливо утверждение.

Теорема 3.2.2. *Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (3.2.5) при выполнений двух необходимых условий*

$$f_{1,0}^{(1)}(\alpha_{10},\alpha_{01})=\alpha_{10}^2=0,\ f_{0,1}^{(2)}(\alpha_{10},\alpha_{01})=\alpha_{01}^2-\alpha_{01}=0, \qquad (3.2.8)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{0,0}^{(1)}(\rho_1,\rho_2)\equiv\rho_1(\rho_1-1+\rho_2+\gamma)=0,\\ f_{0,0}^{(2)}(\rho_1,\rho_2)\equiv\rho_2(\rho_2-1+\rho_1+\gamma)=0,\end{aligned}\right\} \qquad (3.2.9)$$

имеет нормально-регулярное решение вида

$$w_4(z_1,z_2)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!}. \qquad (3.2.10)$$

Доказательство. Для построения нормально-регулярного решения применяем методику [51], основанную на использовании преобразования

$$w=\exp(\alpha_{10}z_1+\alpha_{01}z_2)U(z_1,z_2), \qquad (3.2.11)$$

где α_{10}, α_{01} - неизвестные коэффициенты.

Используя преобразование (3.2.11) из системы (3.2.5) получим вспомогательную систему. Затем приравнивая к нулю коэффициенты при наибольших степенях независимых переменных, определим систему характеристических уравнений

$$f_{1,0}^{(1)}(\alpha_{10}, \alpha_{01}) = \alpha_{10}^2 - \alpha_{10} = 0,$$
$$f_{0,1}^{(2)}(\alpha_{10}, \alpha_{01}) = \alpha_{01}^2 - \alpha_{01} = 0. \qquad (3.2.12)$$

Отсюда составляем две пары коэффициентов многочлена

$$Q_s(x, y) = \alpha_{10}^{(j)} x + \alpha_{01}^{(j)} y, \; j = 1,2: \; (0,0) \text{ и } (0,1).$$

При $(\alpha_{10} = 0, \alpha_{01} = 0)$ многочлен $Q(z_1, z_2) = 0$, то есть в этом случае, получаем исходную систему (3.2.5) с решениями в виде (3.2.7).

Во втором случае, когда $(\alpha_{10} = 0, \alpha_{01} = 1)$ имеем систему

$$\begin{cases} z_1(1-z_1)U_{z_1 z_1} + z_2(1-z_1)U_{z_1 z_2} + [z_2 - z_1 z_2 + \gamma - (\alpha + \beta_1 + 1)z_1]U_{z_1} - \\ - \beta_1 z_2 U_{z_2} - \alpha\beta_1 U = 0, \\ z_2 U_{z_2 z_2} + z_1 U_{z_1 z_2} + (\gamma + z_2)U_{z_2} + (\gamma - \alpha)U = 0. \end{cases} \qquad (3.2.13)$$

Решение этой системы ищем в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$U(z_1, z_2) = z_1^{\rho} z_2^{\delta} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu} x^{\mu} y^{\nu}, \quad A_{0,0} \neq 0, \qquad (3.2.14)$$

где $\rho, \delta, A_{\mu,\nu}\ (\mu, \nu = 0,1,2,...)$ - неизвестные постоянные.

Система определяющих уравнений (3.2.12) системы (3.2.13) относительно особенности $(0,0)$ имеет три пары корней $(\rho_1 = 0, \delta_1 = 0)$, $(\rho_1 = 0, \delta_2 = 1-\gamma)$, $(\rho_1 = 1-\gamma, \delta_2 = 0)$.

Однако, она имеет только одно частное решение соответствующее показателю

$$U(z_1, z_2) = \left\{1 + \frac{\alpha\beta_1}{\gamma} z_1 - \frac{\gamma - \alpha}{\gamma} z_2 - \frac{\alpha\beta_1(\gamma - \alpha)}{\gamma(\gamma+1)} z_1 z_2 + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1(\beta_1+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} z_1^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{(\gamma-2)(\gamma+1-\alpha)}{2!\gamma(\gamma+1)} z_2^2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m (\gamma - a)_n}{(\gamma)_{m+n}} \frac{z_1^m}{m!} \frac{(-z_2)^n}{n!} \right\}. \qquad (3.2.15)$$

Тогда, учитывая значения $\alpha_{10} = 0$ и $\alpha_{01} = 1$, а также решение (3.2.15), убеждаемся, что выполнены необходимые условия теоремы и нормально-регулярное решение системы (3.2.5) представляется в виде

$$w_4(z_1,z_2)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!}. \tag{3.2.16}$$

Что и требовалось доказать.

На основе полученных результатов сформулируем некоторые свойства функций Гумберта $\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)$.

Теорема 3.2.3. *Справедливо соотношение*

$$\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!}. \tag{3.2.17}$$

Доказательство. Используя разложения рядов, раскроем правую часть равенства (3.2.17):

$$\begin{aligned}
&e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!}=\left(1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\ldots+\frac{z_2^n}{n!}+\ldots\right)\times\\
&\times\left\{1+\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}z_1+\frac{\gamma-\alpha}{\gamma}(-z_2)+\frac{\alpha\beta_1(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1}{1!}\frac{(-z_2)}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\right.\\
&+\frac{(\gamma-2)(\gamma+1-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{(-z_2)^2}{2!}=\left\{1+\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}\frac{z_1}{1!}+\left[\frac{1}{1!}-\frac{\gamma-1}{\gamma}\right]z_2+\left[\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}-\frac{\alpha\beta_1(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\ldots\right]\right\}=\\
&\quad=\left\{1+\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}\frac{z_1}{1!}+\frac{\alpha}{\gamma}z_2+\frac{\alpha(\alpha+1)-\beta_1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1}{1!}\frac{z_2}{1!}+\ldots\right\}=\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)
\end{aligned}\tag{3.2.18}$$

что и доказывает справедливость соотношения (3.2.17).

Вернемся к решению (3.2.15) присоединённой системы (3.2.13). Здесь можно заменить связь функций $\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)$ ещё одной вырожденной гипергеометрической функцией $\Xi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)$. Действительно, решение (3.2.17) можно выразить через эту функцию

$$\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!}. \tag{3.2.19}$$

Отсюда заключаем, что имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!}=\\
&=e^{z_2}\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2)
\end{aligned}\tag{3.2.20}$$

доказанное в теореме 3.2.3.

Кроме (3.2.17) справедливо также утверждение.

Теорема 3.2.4. *Имеет место равенство*

$$e^{-z_2}\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2)=\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2). \tag{3.2.21}$$

Доказательство. Для доказательства раскроем левую часть равенства (3.2.21):

$$e^{-z_2}\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)=\left(1+\frac{(-z_2)}{1!}+\frac{(-z_2)^2}{2!}+...+\frac{(-z_2)^n}{n!}+...\right)\times$$

$$\times\left\{1+\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}\cdot\frac{z_1}{1!}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{z_2}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{z_1z_2}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+...\right\}=$$

$$=\left\{1+\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}\frac{z_1}{1!}+\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{1}{1!}\right)\frac{z_2}{1!}+\left[\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1}{\gamma(\gamma+1)}-\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}\right]\frac{z_1z_2}{1!}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\left[\frac{1}{2!}-\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 2!}\right]z_2^2+...\right\}=$$

$$=\left\{1+\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}\frac{z_1}{1!}-\frac{\gamma-\alpha}{\gamma}\frac{z_2}{1!}-\frac{\alpha\beta_1(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+1-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+...\right\}=\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2).$$

Что и требовалось доказать.

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений, первая теорема Куммера утверждает справедливость равенства [1]:

$$e^{-z_2}F_1(\alpha,\beta_1;\gamma)=F_1(\gamma-\alpha,;\gamma;-z_1). \tag{3.2.22}$$

Доказанное равенство (3.2.21) показывает, что аналогичным свойством обладает и функция Гумберта двух переменных $\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2)$. Отметим также, что наряду с вновь построенным нормально-регулярным решением (3.2.16) и (3.2.20) можно вводить следующие новые функции:

$$\Phi_1(\gamma-\alpha-\beta_1,\beta_1;\gamma;-z_1,z_2-z_1)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha-\beta_1)_m(\beta_1)_m(-z_1)^m(z_2-z_1)^n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}, \tag{3.2.23}$$

$$\Phi_1(\alpha,\gamma-\alpha-\beta_1;\gamma;z_1-z_2,-z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\gamma-\alpha-\beta_1)_m(z_1-z_2)^m(-z_2)^n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}\ . \tag{3.2.24}$$

Таким образом, рассмотрены возможности построения нормально-регулярных решений вырожденной гипергеометрической системы (3.2.5). Выполнение условий (3.2.8) является первым необходимым условием существования нормально-регулярного решения. Кроме этого должно выполняться ещё второе необходимое условие. Оно связано с существованием решения (3.2.16) системы (3.2.13). Сформулируем эти необходимые условия в виде следующих лемм.

Лемма 3.2.1. Для того чтобы вспомогательная система (3.2.13) имела хотя бы одно нормально-регулярное решения вида (3.2.16) необходимо выполнение равенств (3.2.8).

Лемма 3.2.2. Для существования у присоединенной системы (3.2.13) решения вида (3.2.16) необходимо, чтобы система определяющих уравнений (3.2.9) относительно особенности (0,0) имела хотя бы одну пару корней.

В данном случае, система (3.2.9) имеет три пары корней: $(\rho_1 = 0, \rho_2 = 0), \left(\rho_1 = 0, \rho_2^{(2)} = 1-\gamma\right), \left(\rho_1^{(2)} = 1-\gamma, \rho_2^{(2)} = 0\right)$. Показано, что система (3.2.13) имеет только одно решение (3.2.15) соответствующее показателю $(\rho_1 = 0, \rho_2 = 0)$. Доказаны ряд равенств, раскрывающие свойства функций Гумберта двух переменных $\Phi_1(\alpha, \beta_1; \gamma; z_1, z_2)$. Такими же свойствами обладают введенные нами функции (3.2.23) и (3.2.24).

В дальнейшем эти идеи распространены на случай функции многих переменных Φ_D.

3.2.3 Нормально-регулярные решения вырожденных систем, состоящих из трех уравнений

Рассмотрим частный случай системы (3.2.3) полученную из неё путем предельного перехода при $k = 1, n = 3, n-k = 2$:

$$\begin{aligned}
&(1-z_i)\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - (\alpha + \beta_i + 1) z_i] \frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha\beta_i w = 0,\ i = \overline{1,k}, \\
&\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - z_i] \frac{\partial w}{\partial z_i} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha w = 0,\ i = \overline{k+1,n}\ \ j = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Отметим, что последние два вырожденные уравнения системы (3.2.25) получены путем предельного перехода из (3.2.3).

Требуется иследовать возможности построения нормально-регулярных решений вырожденной системы (3.2.25) и изучить некоторые его свойства. При этом будем опираться на полученные результаты в 3.2.1.

Теорема 3.2.5. *Вырожденная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (3.2.25) состоящая из трех уравнений, полученные путем предельного перехода из системы Лауричелла (F_D), вблизи регулярной особенности $(0,0,0)$ имеет 2^3 линейно-независимых частных решений, одним из которых является вырожденная функция от трёх переменных*

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha, \beta_1}{\gamma} / (z_3)\right) = \sum_{m_1, m_2, m_3 = 0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n} (\beta_1)_{m_1}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}} \cdot \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \cdot \frac{z_3^{m_3}}{m_3!}. \tag{3.2.26}$$

Доказательство. Решение вырожденной системы (3.2.25) вблизи регулярной особенности $(0,0,0)$ будем искать в виде обобщенного степенного ряда трёх переменных :

$$w(z_1,z_2,z_3)=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}z_3^{\rho_3}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}C_{m_1,m_2,m_3}\cdot z_1^{m_1}z_2^{m_2}z_3^{m_3}C_{0,0,0}\neq 0,\ C_{0,0,0}\neq 0, \tag{3.2.27}$$

где $\rho_j\ (j=1,2,3), C_{m_1,m_2,m_3}\ (m_1,m_2,m_3=0,1,2,...)$ - неизвестные коэффициенты.

Для построения решения вида (3.2.27) применяем метод Фробениуса-Латышевой [78]. С этой целью, подставляя вместо $w(z_1,z_2,z_3)=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}z_3^{\rho_3}$, составим систему характеристических функций Фробениуса $L_j\left(z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}z_3^{\rho_3}\right),\ j=\overline{1,3}$ как в предыдущем пункте, откуда определим систему определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,0)$:

$$f_{000}^{(j)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\equiv\rho_j\left(\rho_j-1+\sum_{j=1,i\neq j}^{3}\rho_j+\gamma\right)=0. \tag{3.2.28}$$

Система (3.2.28) имеет восемь троек корней:

$$\begin{array}{ll}
\text{I. } \left(\rho_1^{(1)}=0,\rho_2^{(1)}=0,\rho_3^{(1)}=0\right); & \text{II. } \left(\rho_1^{(2)}=1-\gamma,\rho_2^{(1)}=0,\rho_3^{(1)}=0\right);\\
\text{III. } \left(\rho_1^{(1)}=0,\rho_2^{(2)}=1-\gamma,\rho_3^{(1)}=0\right); & \text{IV. } \left(\rho_1^{(1)}=0,\rho_2^{(1)}=0,\rho_3^{(2)}=1-\gamma\right);\\
\text{V. } \left(\rho_1^{(2)}=1-\gamma,\rho_2^{(2)}=1-\gamma,\rho_3^{(1)}=0\right); & \text{VI. } \left(\rho_1^{(1)}=0,\rho_2^{(2)}=1-\gamma,\rho_3^{(2)}=1-\gamma\right);\\
\text{VII. } \left(\rho_1^{(2)}=1-\gamma,\rho_2^{(1)}=0,\rho_3^{(2)}=1-\gamma\right); & \text{VIII. } \left(\rho_1^{(2)}=1-\gamma,\rho_2^{(2)}=1-\gamma,\rho_3^{(2)}=1-\gamma\right)
\end{array} \tag{3.2.29}$$

и эти корни являются показателями восьми $\left(2^3\right)$ регулярных решений системы (3.2.25) вида (3.2.26). В начале исследуем решение вида (3.2.26) соответствующее показателю из (3.2.29): I.$\left(\rho_1^{(1)}=0,\rho_2^{(1)}=0,\rho_3^{(1)}=0\right)$. При этом неизвестные коэффициенты $C_{m_1,m_2,m_3}\ (m_1,m_2,m_3=0,1,2,...)$ определяются из последовательности рекуррентных соотношений. Здесь решение определяет вырожденную функцию трёх переменных Φ_D

$$w(z_1,z_2,z_3)=\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\gamma}/(z_3)\right)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}.$$

Как в случае функции $\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2)$ двух переменных можно установить связь этой функции с нормально-регулярным решением системы (3.2.25).

Покажем, что в случае трех переменных многочлен $Q(z_1, z_2, z_3)$ представляется в виде $Q(z_1, z_2, z_3) = \alpha_{1,0,0}z_1 + \alpha_{0,1,0}z_2 + \alpha_{0,0,1}z_3$ и для построения нормально-регулярного решения используется преобразование

$$w(z_1, z_2, z_3) = \exp\left(\alpha_{1,0,0}z_1 + \alpha_{0,1,0}z_2 + \alpha_{0,0,1}z_3\right)U(z_1, z_2, z_3), \tag{3.2.30}$$

где $\alpha_{1,0,0}, \alpha_{0,1,0}, \alpha_{0,0,1}$- неизвестные постоянные.

Действительно, преобразование (3.2.30) приводит систему (3.2.25) к вспомогательной системе. Согласно первому необходимому условию существования решения вида (3.2.30) приравнивая коэффициенты при наибольших степенях независимых переменных $z_j, j = \overline{1,3}$ неизвестной $U(z_1, z_2, z_3)$, получим систему характеристических уравнений

$$\begin{gathered}\alpha_{1,0,0}^2 = 0, \alpha_{0,1,0}^2 - \alpha_{0,1,0} = 0, \alpha_{0,0,1}^2 - \alpha_{0,0,1} = 0, \\ \alpha_{1,0,0} \cdot \alpha_{0,1,0} - \alpha_{0,1,0} = 0, \alpha_{0,1,0} \cdot \alpha_{0,0,1} - \alpha_{0,1,0} = 0, \alpha_{0,0,1} - \alpha_{1,0,0} = 0 .\end{gathered} \tag{3.2.31}$$

Система характеристических уравнений (3.2.31) имеет восемь троек корней:

I. $(0,0,0)$; II. $(0,1,0)$; III. $(0,0,1)$; IV. $(1,0,0)$;

V. $(1,1,0)$; VI. $(0,1,1)$; VII. $(1,0,1)$; VIII. $(1,1,1)$.

Совместность системы уравнений определяют I-III тройка корней:

- I. $(\alpha_{1,0,0} = 0, \alpha_{0,1,0} = 0, \alpha_{0,0,1} = 0)$ получим исходную систему с решением вида $\Phi_1(\alpha, \beta_1; \gamma; z_1, z_2, z_3)$;
- II. $(\alpha_{1,0,0} = 0, \alpha_{0,1,0} = 1, \alpha_{0,0,1} = 0)$ определяет многочлен $Q(z_1, z_2, z_3) = z_2$. При этих значениях из вспомогательной системы имеем присоединенную систему

$$\begin{gathered}(1 - z_i)\sum_{i=1}^{3} z_j \frac{\partial^2 U}{\partial z_j \partial z_i} + \{z_2(1 - z_1) \cdot 2[\gamma - (\alpha + \beta_1 + 1)z_i]\}\frac{\partial U}{\partial z_1} - \beta_1 z_2 \frac{\partial U}{\partial z_2} - \\ - \beta_1 z_3 \frac{\partial U}{\partial z_3} - \{\beta_1 z_1 + \beta_1 z_2 + \alpha\beta_1\}U = 0, \\ \sum_{i=1}^{3} z_j \frac{\partial^2 U}{\partial z_j \partial z_i} + \{z_2 + z_3 + \gamma\}\frac{\partial U}{\partial z_1} + 2z_3 \frac{\partial U}{\partial z_3} + (\gamma - \alpha)U = 0, \\ \sum_{i=1}^{3} z_j \frac{\partial^2 U}{\partial z_j \partial z_i} - z_1 \frac{\partial U}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial U}{\partial z_2} + (z_2 - z_3 + \gamma)\frac{\partial U}{\partial z_3} + (z_2 + \alpha)U = 0.\end{gathered} \tag{3.2.32}$$

Для этой системы выполняется второе необходимое условие существования нормально-регулярного решения. Решение соответствующее тройке корней $(\rho_1 = 0, \rho_2 = 0, \rho_3 = 0)$ представляется в виде

$$U_1(z_1,z_2,z_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}. \qquad (3.2.33)$$

Поэтому, учитывая преобразование (3.2.30) многочлен имеет вид $Q(z_1,z_2,z_3)=\alpha_{1,0,0}z_1+\alpha_{0,1,0}z_2+\alpha_{0,0,1}z_3=z_2U$. Отсюда следует, что решение (3.2.33) присоединенной системы (3.2.32) является нормально-регулярным решением вырожденной системы (3.2.25) и представляется в виде

$$w_4(z_1,z_2,z_3)=e^{z_2}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}. \qquad (3.2.34)$$

- III. $(\alpha_{1,0,0}=0,\alpha_{0,1,0}=0,\alpha_{0,0,1}=1)$ многочлен имеет вид $Q(z_1,z_2,z_3)=\alpha_{1,0,0}z_1+\alpha_{0,1,0}z_2+\alpha_{0,0,1}z_3=z_3$ и выполняется второе необходимое условие существования нормально-регулярного решения рассматриваемой системы. Тем самым, на основе аналогичных рассуждении можно построить решение соответствующее тройке корней $(\rho_1=0,\rho_2=0,\rho_3=0)$:

$$U_2(z_1,z_2,z_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{(-z_3)^{m_3}}{m_3!} \qquad (3.2.35)$$

и нормально-регулярное решение

$$w_5(z_1,z_2,z_3)=e^{z_3}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{(-z_3)^{m_3}}{m_3!}. \qquad (3.2.36)$$

Из формул (3.2.33) и (3.2.35) следуют, что они являются обобщениями формулы (3.2.19). Действительно, справедливыми являются следующие формулы

$$\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!} \qquad (3.2.37)$$

и

$$\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,-z_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{(-z_3)^{m_3}}{m_3!}. \qquad (3.2.38)$$

Формулы (3.2.37), (3.2.38) показывают справедливость свойства связывающих функций $\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)$, $\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;z_1,-z_2,z_3)$ от трёх переменных:

$$\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)=e^{z_2}\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3). \qquad (3.2.39)$$

Аналогично справедливо

$$\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)=e^{z_3}\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,-z_3). \qquad (3.2.40)$$

Подытоживая вышеприведенные рассуждения по построению нормально-регулярных решений системы (3.2.25) сформулируем следующие утверждения.

Теорема 3.2.6. *Вырожденная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (3.2.25) имеет две нормально-регулярные решения вида (3.2.34) и (3.2.36) и справедливы соотношения (3.2.39)- (3.2.40) между функциями Гумберта трёх переменных* $\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)$ *и* $\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3)$, $\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,-z_3)$.

Теорема 3.2.7. *Для нормально-регулярных решений (3.2.34) и (3.2.36) вырожденной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (3.2.25) имеют место соотношения:*

$$e^{-z_2}\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)=\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3), \qquad (3.2.41)$$

$$e^{-z_3}\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)=\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,-z_3). \qquad (3.2.42)$$

Доказательство. Раскроем левую часть соотношения (3.2.41) путем разложения в ряд:

$$e^{-z_2}\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)=e^{-z_2}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}=$$

$$=\left(1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\ldots+\frac{z_2^n}{n!}+\ldots\right)\cdot\left\{1+\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}z_1+\frac{\alpha}{\gamma}z_2+\frac{\alpha}{\gamma}z_3+\right.$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1}{\gamma(\gamma+1)}z_2z_3+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_3+$$

$$\left.+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta_1}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z_1z_2z_3+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+\ldots\right\}=$$

$$=\left\{1+\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}z_1+\frac{(\gamma-\alpha)}{\gamma}(-z_2)+\frac{\alpha}{\gamma}z_3+\frac{\alpha\beta_1(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}z_1(-z_2)+\right.$$

$$+\frac{\alpha(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{(-z_2)}{1!}\frac{z_3}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_3+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z_1(-z_2)z_3+$$

$$\left.+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+1-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{(-z_2)^2}{2!}+\ldots\right\}=$$

$$=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}=\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3).$$

Соотношение (3.2.42) доказывается аналогично. Таким образом, можно убедиться, что и в случае функций трех переменных имеет место выполнимость равенства (3.2.22) по первой теореме Куммера.

Что и требовалось доказать.

3.2.4 Свойства нормально-регулярных решений наиболее общей вырожденной системы

Вырожденная гипергеометрическая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{gathered}(1-z_i)\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - (\alpha+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha\beta_i w = 0,\ i=\overline{1,k},\\ \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha w = 0,\ i=\overline{k+1,n}\ \ j=\overline{1,3}\end{gathered} \tag{3.2.43}$$

была получена В.И. Художниковым из системы Лауричелла (3.2.1) с помощью предельного перехода по параметру β_i в последних $n-k$ уравнениях. Изучая систему (3.2.3) он ввёл вырожденную функцию Φ_D (3.2.4) как частный случай решения системы Лауричелла (F_D).

Возможность существования нормально-регулярных решений при $n=2$ и $n=3$ исследовано в 3.2.3. В случае $n=2$ получена система Горна, решением которой является вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта. Система (3.2.5) состоит из двух уранений, одно из них получено из второго уравнения системы (3.2.3) с помощью предельного перехода. Построено одно нормально-регулярное решение вида (3.2.12) и установлена связь этого решения с функцией Гумберта $\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2)$.

При $n=3$, система (3.2.32) состоит из трёх уравнений, две из которых получены из системы (3.2.3) путем предельного перехода. Доказано, что в этом случае, существуют две нормально-регулярные решения (3.2.34) и (3.2.36). Установлены некоторые свойства нормально-регулярного решения.

Ставится задача: изучить возможность построения нормально-регулярных решений наиболее общей системы, которая состоит из n уравнений и последние $n-k$ уравнений получены путём предельного перехода из системы (3.2.1).

Вырожденная гипергеометрическая система (3.2.43) вблизи $(0,0,\ldots,0)$ имеет регулярную особенность. Введенное В.И. Художниковым её решение (3.2.4) можно представить в виде

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\gamma}/(z_n)\right) = \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+\ldots+m_n}(\beta_1)_{m_1}}{(\gamma)_{m_1+\ldots+m_n}} \cdot \frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\ldots\cdot\frac{z_n^{m_n}}{m_n!}\ . \tag{3.2.44}$$

Обобщение результатов пункта 3.2.2 позволяет нам сформулировать общую теорему относительно существования нормально-регулярных решений системы (3.2.43) выражающиеся через функцию В.И. Художникова (3.2.44).

Теорема 3.2.8. *Вырожденная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (3.2.43) имеет* $n-1$ *нормально-регулярных решений вида*

$$w_1(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_2}\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}...\frac{z_n^{m_n}}{m_n!},$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$w_{n-1}(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_n}\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_{n-1}}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{(-z_n)^{m_n}}{m_n!} \qquad (3.2.45)$$

и справедливы соотношения между функциями Φ_D *и* Ξ_D

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\gamma}/(z_n)\right)=e^{z_2}\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3,...,z_n),$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots \qquad (3.2.46)$$

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_n}{\gamma}/(z_n)\right)=e^{z_n}\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,...,z_{n-1},-z_n).$$

Доказательство. Вырожденная гипергеометрическая функция Ξ_D определяется рядами:

$$\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,...,z_n)=$$
$$=\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}...\frac{z_n^{m_n}}{m_n!},$$

$$\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_2;\gamma;z_1,z_2,-z_3,...,z_n)=$$
$$=\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_2)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\frac{(-z_3)^{m_3}}{m_3!}...\frac{z_n^{m_n}}{m_n!},$$

$$\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_n;\gamma;z_1,z_2,...,-z_n)=$$
$$=\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_{n-1}}(\beta_2)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_{n-1}}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}...\frac{(-z_n)^{m_n}}{m_n!}. \qquad (3.2.47)$$

Обобщая формул (3.2.41)-(3.2.42) сформулируем утверждение.

Теорема 3.2.9. *Для нормально-регулярных решений (3.2.45) вырожденной системы (3.2.43) имеют место соотношения:*

$$e^{-z_2}\Phi_D\left(\frac{\alpha(\beta_1)}{\gamma}/(z_n)\right)=\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2,z_3...,z_n),$$

$$e^{-z_3}\Phi_D\left(\frac{\alpha(\beta_2)}{\gamma}/(z_n)\right)=\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2,z_3,z_4,...,z_n),$$

$$e^{-z_n}\Phi_D\left(\frac{\alpha(\beta_{n-1})}{\gamma}/(z_n)\right)=\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,\dots,-z_n). \qquad (3.2.48)$$

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2.7. Каждое равенство доказывается отдельно.

Таким образом, нормально-регулярные решения наиболее общей вырожденной системы (3.2.43) представляются в виде (3.2.45). Соотношения (3.2.46) являются обобщениями формул (3.2.18) и (3.2.39)-(3.2.41) доказанных в пунктах 3.2.1 и 3.2.2.

Согласно методу Фробениуса-Латышевой для построения решения вида (3.2.45) применяется преобразование

$$w(z_1,z_2,\dots,z_n)=\exp(\alpha_{1,0,\dots,0}\cdot z_1+\alpha_{0,1,\dots,0}\cdot z_2+\dots+\alpha_{0,0,\dots,1}\cdot z_n)U(z_1,z_2,\dots,z_n), \qquad (3.2.49)$$

где $\alpha_{1,0,0,\dots,0},\dots,\alpha_{0,0,\dots,1}$ - неопределенные постоянные. Они определяются из вспомогательного уравнения полученного с помощью преобразавания (3.2.49). Это приведет к вопросу определения первого необходимого условия существования нормально-регулярных решений вида (3.2.45).

Лемма 3.2.3. *Для того чтобы вспомогательная система полученная из вырожденной системы (3.2.43) с помощью преобразования (3.2.49), имела хотя бы одно нормально-регулярное решение вида (3.2.45) необходимо выполнение условий:*

$$\alpha^2_{1,0,\dots,0}=0,\ \alpha^2_{0,1,\dots,0}-\alpha_{0,1,\dots,0}=0,$$
$$\alpha^2_{0,0,1\dots,0}-\alpha_{0,0,1,\dots,0}=0,\ \alpha^2_{0,0,\dots,1}-\alpha_{0,0,\dots,1}=0.$$

Из системы характеристических уравнений находим $n-1$ многочленов первой степени:

$$Q\left(\alpha^i_{0,1,0,\dots,0},\alpha^i_{0,0,1,0,\dots,0},\dots,\alpha^i_{0,0,\dots,0,1}\right)=\alpha^i_{0,1,0,\dots,0}\cdot Z_2+\alpha^i_{0,0,1,0,\dots,0}\cdot Z_3+\dots+\alpha^i_{0,0,\dots,0,1}\cdot Z_n, \quad i=\overline{1,n-1}.$$

Таким образом, в (3.2.49) будут определены неопределенные коффициенты определяющего множителя $\exp(\alpha_{1,0,\dots,0}\cdot z_1+\dots+\alpha_{0,0,\dots,1}\cdot z_n)$.

Для установления вида решения

$$U(z_1,z_2,\dots,z_n)=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\dots z_n^{\rho_n}\sum_{m_1,m_2,\dots,m_n=0}^{\infty}C_{m_1,m_2,\dots,m_n}\cdot z_1^{m_1}z_2^{m_2}\dots z_n^{m_n},\ C_{0,0,\dots,0}\neq 0, \qquad (3.2.50)$$

требуется выполнение второго необходимого условия существования нормально-регулярного решения, где неизвестные постоянные ρ_l, $C_{m_1,\dots,m_n}$ $(l=1,\dots,n;m_1,\dots,m_n=0,1,2,\dots)$ присоединенной системы. Присоединенные системы определяются из вспомогательной системы путем подстановки значения неопределенных коэффициентов определяющего множителя.

Лемма 3.2.4. *Для существования присоединенной системы решения (3.2.50) необходимо, чтобы система определяющих уравнений*

$$f_{000}^{(j)}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \equiv \rho_j \left(\rho_j - 1 + \sum_{j=1, i \neq j}^{n-1} \rho_j + \gamma \right) = 0$$

относительно особенности $(0,0,...0)$ *имела хотя бы одну* $(n-1)$ *корней.*

Доказательство. Выполнение двух необходимых условий обеспечивают существование $(n-1)$ нормально-регулярных решений. Учитывая соотношения (3.2.46) и (3.2.48) между функциями Φ_D и Ξ_D, имеем, что вырожденная гипергеометрическая функция Ξ_D определяется рядами (3.2.47). Правые части ряда (3.2.47) определяют нормально-регулярные решения (3.2.45).

Что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Краткие выводы по результатам диссертационных исследований. Диссертационная работа посвящена исследованию построения решений родственных вырожденных гиперегеометрических систем вблизи особых кривых и установления ряда новых систем типа Бесселя, Уиттекера, Лагерра, а также взаимосвязи их решений между собой.

Основным объектом исследования является системы типа Уиттекера и её частные случаи полученные путем преобразования и с помощью предельных переходов из других родственных систем.

Основные результаты:

– обобщены теоремы Куммера на различные системы типа Горна и её применения к построению решения других родственных систем;

– показаны особенности применения обобщенного метода Фробениуса-Латышевой к построению регулярных и иррегулярных решений родственных систем вблизи различных конечных особенностей и особенностей на бесконечности;

– построены эффективные алгоритмы нормально-регулярных решений систем типа Бесселя с учетом регулярных и иррегулярных особенностей;

– получены необходимые условия существования нормальных и нормально-регулярных решений родственных систем;

– разработаны алгоритмы конечных решений родственных систем Лагерра и построения новых решений, применяя обобщенную теорему Куммера из родственной системы Горна;

– приведены особенности общего преобразования, применяемого для установления новых родственных систем;

– построены решения систем типа Бесселя, полученных путем преобразования и родственных систем типа Уиттекера и Горна;

– раскрыты особенности применения обобщенного метода Фробениуса-Латышевой для исследования связи между функциями, $\Phi_{D,n}^{k,l}\left(0 \le k, l \le n, n-1 \le k \le n\right)$ введенными Художниковым и нормально-реулярными решениями многих переменных вырожденной системы, полученной из системы Лауричелла $\left(F_D\right)$ путем предельного перехода.

Оценка полноты решения поставленных задач. Вопросы исследования построения решений родственных вырожденных гипергеометрических систем вблизи особых кривых и установления ряда новых систем типа Бесселя, Уиттекера, Лагерра, а также взаимосвязи их решений между собой полностью решены. Для вновь установленных систем построены эффективные алгоритмы нормально-регулярных решений с учетом регулярных и иррегулярных особенностей, раскрыты связи между нормально-регулярными решениями вырожденных систем и функциями Художниковым $\Phi_{D,n}^{k,l}$.

Разработка рекомендаций и исходных данных по конкретному использованию результатов. Результаты исследования имеют теоретическое значение и могут быть использованы при решений многих задач науки и техники, где используются специальные функции одной и многих переменных, а также могут быть использованы при организации элективных курсов для студентов физико-математических и технических специальностей.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области. Результаты выполненной научной работы опубликованы в журналах рекомендованных КОКСНВО МНВО РК, в материалах международных научных конференций и в журналах индексируемых в базах Scopus и Web of Science.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Слейтер Л. Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. – М.: Вычислительный центр, 1966. – 249 с.

2 Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функции I, II перевод со 2-го английского изд. ИЛ, 1919. – 972 с.

3 Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Трансцендентные функции II. – М., 1963. – 515 с.

4 Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. вып.II. – М.: Мир, 1970. - 352 с.

5 Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М., 1965. – 423 с.

6 Кузьмин Р.О. Бесселевы функции. – М.:ГИТТЛ, 1933. – 152 с.

7 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Харьков: ОНТИ, 1939. - 719 с.

8 Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 435 с.

9 Латышева К.Я., Терещенко Н.И. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения. Метод Фробениуса-Латышевой. – Киев: Изд. Института математики АН УССР, 1970. – 394 с.

10 Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ., 1962. – 351 с.

11 Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М.: ИЛ, 1957. – 443 с.

12 Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М.: Наука, 1964. – 206 с.

13 Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

14 Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1968. – 344 с.

15 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

16 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции I. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 294 с.

17 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. II. – М.: Наука, 1974. – 295 с.

18 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. III. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967. – 299 с.

19 Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

20 Кампе де Ферье, Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т. Функции математической физики. Справочное руководство. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 102 с.

21 Appell P. and Kampe de Feriet J. Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite. – Paris: Gauthier–Villars, 1926. – 434 p.

22 Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili. Rend // Circ. Matem. – 1897. – T.VII. – P. 111-158.

23 Ince E.L. Simultaneous Linear Partial Differential Equations // Proc. Royal Society of Edinburgh. – 1942. – P. 195-209.
24 Wilczynski E.J. Projective differential geometry of Curves and Ruled surfaces. – Leipzig: Leubner, 1966. – 120 p.
25 Humbert P. La fonction $W_{k,\mu_1,...\mu_n}(x_1,...x_n)$ // C.R. 171. – 1920. – P. 428-430.
26 Humbert P. The confluent Hypergeometric Functions of two variables // Proc. Roy. Sos. Edin. - 1920. – Vol.10. - P. 73-96.
27 Srivastava H.M, Karlsson P.W. Multiple Gaussian hypergeometric series. – Chichester: Ellis Harwood Limited. - 1985. – 426 p.
28 Watson G. N. A Treatise on the theory of Bessel functions. - Cambridge: At the university Press. - 1926. – 799 p.
29 Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным, М.: Наука, 1988. - 384 с.
30 Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: ИЛ, 1948. - 260 с.
31 Horn J. Uber die Convergenz der hypergeometrischen Reihen Zweierund drieier Veranderliechen // Math. Ann. – 1889. – Vol.34. – P. 544-600.
32 Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: ИЛ, 1962. – 500 с.
33 Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 415 с.
34 Borngusser L. Uber hypergeometrishe Functionen zweier Verander Lichen, Dissertation. Darmstsdt, 1933. – 236 p.
35 Krall HL, Seffer IM. A characterization of orthogonal polynomials // Journ. Math. Anal. – 1964. – Vol.2, №2. – P. 232-244.
36 Krall HL, Seffer IM. Orthogonal polynomials in two variables // Ann.Mathem.pura ed apll. –1967. Vol.76, №4. – P. 325-376.
37 Engelis G.K. Multidimensional analogs of classical orthogonal polynomials. Abstract of Ph.D. thesis. – Riga. – 1978. – 12 p. (In Russian).
38 Rabia A., Abdullah A., Bayram Çekim. On a two – variable analogue of the Bessel functions // Journal of Inequalities and Special functions. – 2012. – Vol.3, №4. – P. 13-23.
39 Koornwinder TH. Two variable analogues of the classical orthogonal polynomials // Theory and Appl. Spec.Funct. – New York: Academic Press.Inc. – 1975. – P. 435-495.
40 Yudell L. Luke. Mathematical functions and their approximations // Theory and Appl. Spec.Funct. – New York: Academic Press inc. – 1975. – 608 p.
41 Кратцер А, Франц В. Трансцендентные функции. М: ИЛ, 1963. – 465с.
42 Bailey W.N. Generalized hypergeometric series. Cambridge, Math. Trackt.32, Cambridge University Press, Cambridge.1935
43 Rainville E.D. Special functions. – New York: Macmillan C., 1960. – 203 p.
44 Beniwal P.S. and Saran S. On a two variable analogue of generalized Laguerre polynomials // Proc. Nat. Acad. Sei. Seet. – 1985. Vol.55. – P. 358-365.

45 Тасмамбетов Ж.Н. Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса-Латышевой / АН УССР. Институт математики: 91.29. – Киев, 1991. – 44 с.

46 Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – Актобе: ИП Жанадилова С.Т. – 2015. – 464 с.

47 Tasmambetov Zh.N. On irregular singular curves of Whittaker type system // Vestnik Sam.GTU. Physical and mathematical sciences. – 2013. – Issue 4(33). – P. 25-33.

48 Tasmambetov Zh.N., Zhakhina R.U. Solution of degenerate hypergeometric system of Horn consisting of three equations // AIP Proceedings 1880, edited by Tynysbek Kalmenov and Makhmud Sadybekov. – 2017. – Vol. 1880, №1.

49 Tasmambetov Zh.N. Confluent hypergeometric functions and two variables Laguerre polynomials as a solution of Wilczynski type system // AIP Conference Proceeding. – 2016. – Vol. 1729, №1.

50 Тасмамбетов Ж.Н. О применении специальных функций двух переменных к изучению ортогональных многочленов двух переменных // Вестник СамГТУ. Сер. Физико–математические науки. – 2015. – Т.19, №4. – С. 710-719.

51 Тасмамбетов Ж.Н., Об иррегулярных особых кривых систем типа Уиттекера // Вестник Сам. Гос. тех. университета. Сер. физ.-мат. науки. - 2013. - №4(11). - С. 25-33.

52 Тасмамбетов Ж.Н. Об особых кривых специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, определяемых линиями второго порядка // Евразийский союз ученых. XXXI Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы в современной науке и пути их решения». – 2016. №10(31). Ч.1. – С.108-118.

53 Younis J., Jain S., Agarwal P., Momani S. Certain integral representations involving hypergeometric functions in two variables // Mathematica Moravica. – 2022. - Vol. 26, №1. –P. 27–36.

54 Shehata A. On basic Horn hypergeometric functions H3 and H4. // Adv Differ Equ. – 2020. №595. – 29 p.

55 Ancarani L.U., Del Punta J.A., Gasaneo G. Derivatives of Horn hypergeometric functions with respect to their parameters // Journal of Mathematical Physics. – 2017. №58. – 19 p.

56 Bezrodnykh S.I. Analytic continuation of the Horn hypergeometric series with an arbitrary number of variables // Integral Transforms and Special Functions. – 2020. – Vol.31, - №4. – P. 1-16.

57 Radzhabov N.R, Elsaed Abdel Aal M. Over determined linear System of the second order with singular and super singular lines // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. - 2016. – Vol. 37, № 6. – P. 99-107.

58 Mikhaylov L.G. Some Partial differential systems of equations and Partial division of two unknown functions. – Dushanbe: Donisk Publ., 1986. – 115 p.

59 Shamsudinov F.M. On an over determined System of the second order differential equations with singular point // Trudy mat.centraim Lobachevskogo NI – Kazan’. – 2014. – Vol.49. – P. 335-339.

60 Georgiev G.N., Georgieva-Grosse M.N. The Kummer confluent hypergeometric function and some of its applications in the theory of azimuthally magnetized circular ferrite waveguides // Journal of Telecommunications and Information Technology. – 2005. №3. – P. 112-128.

61 Pham-Gia T., Thanh D.N. Hypergeometric Functions: From One Scalar Variable to Several Matrix Arguments, in Statistics and Beyond // Open Journal of Statistics. – 2016. - №6. – P. 951-994.

62 Sternberg W. Uber dis asymptotiche Integration von Differential gleichungen // Marh. Ann. - 1920. – P. 119-186.

63 Kharin S.N., Nauryz T.A. Two-phase Stefan problem for generalized heat equation // News of the national Academy of Sciences of the Republic of physic-mathematical series. – 2020. – Vol. 2, – №330. – P. 40-49.

64 Салахитдинов М.С, Расулов Х.Р. Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан. – 1996. – Т. 3. – С. 3-7.

65 Салахитдинов М.С, Уринов А.К. К спектральной к теории уравнений смешанного типа // Mumtoz so – Ташкент. – 2010. – 354 с.

66 Salakhitdinov M.S., Hasanov A. The Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Mathematical physics / arxiv-1401.5144. – 2014. – 11 p.

67 Yuldashev T.K., Kadirkulov B.J. Inverse boundary value problem for a fractional differential equations of mixed type with integral redefinition conditions // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2021. – №42 (3). – P. 649-662.

68 Yuldashev T.K., Abdullaev O. Kh. Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2021. – №42 (5). – P. 1113-1123.

69 Yuldashev T.K., Kadirkulov B.J. Boundary value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed type with fractional Hilfer operator // Axioms. – 2020. – №9 (68). – 19 p.

70 Hasanov A., Junesang Choi. Note on Euler-Bernoulli Equation // Sohag J. Math. – 2020. – №7 (2). – P. 33-36.

71 Hasanov A. and Djuraev N. Exact Solutions of the Thin Beam with Degrading Hysteresis Behavior // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2022. – №43 (3). – P. 577-584.

72 Hasanov A. and Yuldashev T. K. Analytic Continuation Formulas for the Hypergeometric Functions in Three Variables of Second Order // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2022. – №43 (5). – P. 1134-1141.

73 Ergashev T.G. and Komilova N.J. Generalized Solution of the Cauchy Problem for Hyperbolic Equation with Two Lines of Degeneracy of the Second Kind // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2022. – №43 (3). – P. 556-565.

74 Hasanov A. and Ruzhansky M. Hypergeometric Expansions of Solutions of the Degenerating Model Parabolic Equations of the Third Order // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2020. – №41 (1). – P. 27-31.

75 Ruzhansky M., Hasanov A. Self-Similar Solutions of Some Model Degenerate Partial Differential Equations of the Second, Third, and Fourth Order. // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2020. - Vol.41. No, 6. – P. 1103-1114.

76 Художников В.И. Две новые вырожденные гипергеометрические функции многих переменных и интегральные уравнения с ними // Дифф.уравнения. - 2003. –Т. 39, №6. - С. 835-843.

77 Ибраева Г.Т., Тлеубергенов М.И. Михлин С.Г. Об основной задаче дифференциальных систем с вырождающейся диффузией. // Укр.мат.журн. – 2013. – Т.65, №5. – С. 712-716.

78 Issenova A., Tasmambetov Zh., Rajabov N. On general properties of degenerate systems of second order partial differential equations of hypergeometric type // European journal of pure and applied mathematics. – 2021. – Vol. 14, №.3. – P. 1024-1043.

79 Issenova A., Tasmambetov Zh., Talipova M. Construction of Solutions Hypergeometric System of Horn Type in the Form of Laguerre Polynomials // Lobachevskii journal of mathematics. – 2022. – Vol. 43, №11. – P. 3167–3173.

80 Tasmambetov Zh.N., Rajabov N., Issenova A.A. The construction of a solution of a related system of the Laguerre type // News of the national Academy of Sciences of the Republic of physic-mathematical series. – 2019. – Vol. 1, №323. – P. 38-45.

81 Tasmambetov Zh.N., Issenova A.A. Bessel functions of two variables as solutions for systems of the second order differential equations // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – Vol. 98, №2. – P. 141-152.

82 Исенова А.А. Многомерные нормально-регулярные решения вырожденных систем, полученных из систем Лауричелла // КазНПУ им. Абая. Серия Физико-математические науки. – 2023. №1(81). – С. 7-17.

83 Тасмамбетов Ж.Н., Исенова А.А. Об особенностях преобразований, применяемых к системам типа Уиттекера // Материалы VIII международной научной конференции: Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. – Актобе. – 2018. – С. 115-121.

84 Тасмамбетов Ж.Н., Исенова А.А. About construction of Laguerre polynomials of many variables // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 80-летнему юбилею академика НАН РК С.Н.Харина. Тезисы докладов. – Алматы. – 2019. – С.104-105.

85 Тасмамбетов Ж.Н., Исенова А.А. Нормально-регулярные и логарифмические решения системы Уиттекера состоящей из трех уравнений // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки РК. Тезисы докладов. – Алматы. – 2020. – С. 167-168.

86 Исенова А.А. Нормально-регулярные решения вырожденных систем связанные с функциями Гумберта и их свойства // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня

работников науки Республики Казахстан, посвященна 75-летию академика НАН РК Т.Ш.Кальменова. Тезисы докладов. – Алматы. – 2021. – С. 151-152.

87 Исенова А.А. Многомерный ортогональный многочлен Лагерра как решения вырожденных гипергеометрических систем // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки. Тезисы докладов. – Алматы. – 4-8 апреля 2023. – С. 151-152.

88 Тасмамбетов Ж.Н., Исенова А.А. Bessel functions of two variables as solutions of systems of differential equations second order // Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики». Тезисы докладов. – Караганда. – 2019. – С. 55-56.

89 Tasmambetov Zh.N., Issenova A.A. Properties of related systems solutions with Whittaker type system // International Conference «Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra» (EMJ-2019) dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. The Abstract Book. – Nur-Sultan. – October 16-19, 2019. – P. 151-152.

90 Issenova A.A. On the connection of degenerate second-order hypergeometric systems with admissible equations // Академик Н. К. Надировтың 90 жылдығына және академик М. Ө. Өтелбаевтың 80 жасқа толу мерейтойына арналған «Ғылым, техника және білім берудегі есептеу және ақпараттық технологиялар» (CITech-2022) Халықаралық конференциясының Баяндама тезистері (12-15 қазан 2022 жыл). – Алматы. – 2022. – С. 59-60.

91 Tasmambetov Zh.N., Issenova A.A. Normal-regular solutions of laguerre-type system of n equations // Академик Н. К. Надировтың 90 жылдығына және академик М. Ө. Өтелбаевтың 80 жасқа толу мерейтойына арналған «Ғылым, техника және білім берудегі есептеу және ақпараттық технологиялар» (CITech-2022) Халықаралық конференциясының Баяндама тезистері (12-15 қазан 2022 жыл). – Алматы. – 2022. –С. 75-76.

92 Раджабов Н.Р., Убаева Ж.К., Исенова А.А. Исследование переопределенной линейной системы трех уравнений с постоянными коэффициентами содержащей гиперболическое уравнение второго порядка с сверхсингулярными линиями // Международная научная конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики». МГУ имени М.В.Ломоносова Казахстанский филиал. – Нур-Султан. – 2021. – С. 134-136.

93 Исенова А.А. Нормально-регулярные и логарифмические решения системы Уиттекера состоящей из трех уравнений // IX международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе. – 2022. – С. 281-288.