Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ӘҰЖ 517.957 қолжазба құқығында

ТОКМУРЗИН ЖАНИБЕК СЫРЛЫБАЕВИЧ

Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді шешу әдістері

6D060100-Математика

Философия докторы (PhD) ғылыми дәрежесін алу үшін дисертация

Ғылыми кеңесшілер:
Асанова АнарТұрмағанбетқызы
ф.-м.ғ. докторы, профессор,

Бойчук Александр Андреевич
ф.-м.ғ. докторы, профессор,

Қазақстан Республикасы
Ақтөбе, 2021

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Осы диссертацияда стандарттарға келесі сілтемелер қолданылды:

ҚР СОСЕ 5.04.034-2011. Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура.

Мемлекеттік стандарт 7.32-2001 (2006 жылғы өзгерістер). Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Ұсыну құрылымы мен ережелері.

Мемлекеттік стандарт 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар мен ережелер.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

$\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ −тіктөртбұрышты облыс;
$C(\Omega, \mathrm{R}^n) - \Omega$ кеңістігінде үзіліссіз $u(t, x)$ вектор-функциясының нормасы:

$$\|u\|_0 = \max_{(t,x)\in\Omega} \|u(t, x)\|, \|u(t, x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t, x)|;$$

$C([0, \omega], \mathrm{R}^n) - [0, \omega]$ аралығында үзіліссіз $\varphi(x)$ вектор-функцияларының кеңістігі және нормасы:

$$\|\varphi\|_0 = \max_{x\in[0,\omega]} \|\varphi(x)\|$$

$C^1([0, T], \mathrm{R}^n) - [0, \omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын $\psi(t)$ вектор-функцияларының кеңістігі және нормасы:

$$\|\psi\|_1 = \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|, \max_{t\in[0,T]} \|\dot{\psi}(t)\|\right);$$

$u(t, x) = col\big(u_1(t, x),\ u_2(t, x), \dots, u_n(t, x)\big)$ −белгісіз вектор-функция;
$i = \overline{1,7}$ −индекс;
$A_i(t, x) - n \times n$–матрицалар;
$f(t, x) -$ n-вектор-функция;
$\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial t^j \partial x^{i-j}} - i$-ші ретті дербес туынды;
$\varphi(x) - n$-вектор-функциясы $[0, \omega]$ аралығында үзіліссіз үш рет дифференциалданады;
$\psi_i(t) - n$-вектор-функциялары $[0, T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады;
$det[I - \Phi(T, x)] \neq 0$ матрицаның анықтауышы;
$\exists [I - \Phi(T, x)]^{-1}$ матрицасы кез келген $x \epsilon [0, \omega]$ үшін қайтымды;
$\{v^{(k)}(t, x)\}$ −тізбек.

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Диссертация екі тәуелсіз айнымалылы төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге арналған бастапқы-шеттік, бейлокалды есептерді зерттеуге және шешуге арналды.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Қазіргі уақытта әртүрлі ортадағы сұйықтықтардың толқындық қозғалысын сипаттауға байланысты математикалық физика есептеріне көп көңіл бөлінеді. Бұл қызығушылық осы есептердің үлкен қолданбалы маңыздылығымен ғана емес, сонымен бірге классикалық математикалық физикада теңдесі жоқ жаңа теориялық және математикалық мазмұнымен де байланысты. Мұндай есептердің маңызды кластарының бірі – төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептер болып табылады. Бүгінгі таңда [3-7] еңбектерінде гиперболалық текстес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді зерттеу және шешудің әртүрлі әдістері жасалды. Математикалық физиканың классикалық әдістерімен (Фурье әдісі, Грин функциясы әдісі, Пуанкаре метрикалық тұжырымдамасы) бірге төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін әртүрлі шеттік есептерді зерттеуге дифференциалдық теңсіздіктер әдісін және қарапайым дифференциалдық теңдеулердің сапалық теориясының басқа әдістері қолданылады. Олардың негізінде қарастырылып отырған бастапқы-шеттік есептің шешілімділік шарттары алынды және оларды шешу жолдары ұсынылды. Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі салыстырмалы түрде жақын аралықта зерттеле бастады.

Бұл жұмыста тіктөртбұрышты облыстағы төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылады. Уақыт айнымалысы үшін шеттік шарттар қажетті шешімнің кеңістік айнымалысы бойынша әртүрлі ретті дербес туындылы мәндерінің комбинациясы ретінде беріледі. Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі мен оның қосымшалары үшін бастапқы-шеттік есебінің классикалық шешімінің болуы мен бірмәнділігі зерттеледі.

Тақырыптың қазіргі жағдайы. Осындай есептер өткен ғасырдың 60-жылдарынан бастап қарқынды зерттелуде [13-15], [35-40]. Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің бастапқы-шеттік есептері өте маңызды, олар көбінесе стратификацияланған сұйықтықтың қозғалыс процестерін математикалық модельдеуде, магниттелмеген плазмадағы иондық-дыбыстық толқындарды зерттеуде, әртүрлі ортадағы толқындық процестерді және жер қыртысының реологиялық схемаларын зерттеуде пайда болады [12], [13, б. 65], [15, б. 127], [16], [17], [44-50]. Бұл теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептердің, бейлокалды шеттік есептердің шешілімділік шарттары характеристика әдісімен, Риман әдісімен, Грин функциялары мен дифференциалдық теңсіздіктер әдісімен алынады.

Дегенмен, бірмәнді шешілімділігінің тиімді белгілерін табу мәселесі әлі де өзекті. Бұл жұмыста осы кемшілікті толтыруға әрекет жасалды.

Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді жаңа белгісіз функциялар енгізу арқылы екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге келтіруге болады. Осыған ұқсас тәсілді екі тәуелсіз айнымалылы жоғары ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге қолдануға болады және теңдеуді ауыстыру арқылы екінші ретті аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесіне келтіруге болады.

Содан кейін, аралас туындылары бар гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептерді шешуде, шешімділік шарттары әр түрлі терминдерде орындалуы мүмкін белгілі әдістерін қолданамыз. Физиканың, механиканың, химияның, биологияның және т.б. көптеген есептерін математикалық модельдеу гиперболалық тектес жоғары ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелік, бейлокалды шеттік есептерді зерттеу қажеттілігіне әкелді. Дифференциалдық теңдеулердің сапалық теориясының әдістерін тікелей осы есептерге қолдана отырып, олардың шешімділік шарттарын анықтауға болады. Сондай-ақ, гиперболалық тектес жоғары ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелік және бейлокалды шеттік есептерді белгісіз функциямен, оның туындыларын жаңа функцияларға ауыстыру арқылы екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін бейлокалды шеттік есептерге келтіріледі. Екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін бейлокалды шеттік есептер теориясы көптеген авторлардың еңбектерінде жасалды. Қазіргі уақытта гиперболалық теңдеулер үшін бейлокалды шеттік есептерді шешудің әртүрлі шарттары алынды. Айнымалы коэффициентті гиперболалық теңдеулер үшін сызықтық шеттік есептердің кейбір кластарының бірмәнді шешілімділігі критерийлері жақында ғана алынған [8-11]. Гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін характеристикалық берілгендері бар бейлокалды шеттік есебіне [10, б. 380], [11, б. 559] жаңа белгісіз функцияларды қолдана отырып, функционалдық қатынастар мен қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептер әулетінен тұратын есепке келтіреміз. Гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін мәндері характеристикада берілген бейлокалды шеттік есептің дұрыс шешілімділігі қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептер әулетінің дұрыс шешілімділігіне пара-пар екендігі орнатылды. Бастапқы берілгендер терминдерінде гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін мәндері характеристикада берілген бейлокалды шеттік есептің дұрыс шешілімділігінің критерийі алынды.

Бұл жұмыста төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептердің бірмәнді шешілу шарттары белгіленген. Қарастырылған есептер екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін бейлокалды шеттік есебі мен функционалдық қатынастарға келтіріледі. [8, б. 312], [9, б. 304], [10, б. 381], [11, б. 560] еңбектерінде жасалған әдіс негізінде шешімді табу алгоритмдері және зерттелетін мәселенің бірмәнді шешілімділігінің коэффициенттік шарттары ұсынылған.

Зерттеудің мақсаттары мен міндеттері: екі тәуелсіз айнымалылы төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік және бейлокалды есептерді зерттеу және шешу әдістерін құру.

Зерттеу объектілері. Екі тәуелсіз айнымалылы төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер болып саналады.

Зерттеу тақырыбы – екі тәуелсіз айнымалылы төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік және бейлокалды есептердің шешімділігі және олардың шешімдерін іздеудің тиімді алгоритмдерін құру.

Диссертациялық зерттеудің жаңалығы.

a) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі зерттелді;
b) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есептерді шешуде бірыңғай әдісі қолданылды;
c) бастапқы берілгендер терминінде бірмәнді шешілімділік шарттары анықталды;
d) шешімдерді іздеу алгоритмдері ұсынылған және жинақтылығы тағайындалған.

Қорғауға шығарылатын негізгі ережелер:

- Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін бастапқы-шеттік есептердің шешілімділік шарттары және шешу әдістері зерттелді;
- Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы шеттік есептердің үш негізгі класы қарастырылды: периодты, қоснүктелік және көпнүктелік;
- Есептерді зерттеу үшін қосымша функцияларды енгізу әдісі және функционалдық параметрлеу әдісі, сондай-ақ Д. С. Жұмабаевтың параметрлеу әдісі қолданылды;
- Екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды шеттік есептер үшін алынған нәтижелер төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін бастапқы-шеттік есептерді шешуде қолданылды;

Сенімділік және негізділік. Диссертациялық жұмыста дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің сапалық теориясының, математикалық физиканың нәтижелері мен әдістері кеңінен қолданылады. Диссертацияда қарастырылған есептерді зерттеудің және шешудің негізгі әдістері –қосымша функциялар енгізу әдісі мен біртіндеп жуықтау әдісі.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертацияның нәтижелері негізінен теориялық болып табылады. Жұмыстың ғылыми маңыздылығы – екі тәуелсіз айнымалылы төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік және бейлокалды есептерді шешу және зерттеудің конструктивті әдісін құру.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігінің жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулерді гранттық қаржыландыру бағдарламасының "Жоғары ретті дербес туындылы теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді шешу әдістері және олардың қолданыстары" ғылыми жобасының шеңберінде орындалды (№ AP 05131220, 2018-2020 жылдар).

Автордың жеке үлесі. Автордың жеке үлесі – диссертацияда келтірілген барлық нәтижелерді автор алған. Бірлескен авторлар мен ғылыми кеңесшілердің қатысуы есептерді қою және алынған нәтижелерді талқылау болып табылады.

Жұмысты апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды: 1) Сәуір айындағы дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Математика және математикалық моделдеу институты. Алматы, 3-5 сәуір 2019 жыл. 2) Беларусь Ұлттық Ғылым Академиясының математика институты. Дифференциалдық теңдеулер бойынша XIX Халықаралық ғылыми конференция (ЕРУГИН оқулары-2019) Минск, 14-17 мамыр 2019 жыл. 3) Жас математиктердің халықаралық конференциясы. Украина Ұлттық Ғылым Академиясының Математика институты, Киев, 6-8 маусым 2019 жыл. 4) «Еуразиялық математикалық журналдың» 10 жылдығына арналған "Талдаудың, дифференциалдық теңдеулер мен алгебраның өзекті мәселелері" (EMJ-2019) халықаралық конференциясы. Нұр-Сұлтан, 16-19 қазан 2019 жыл. 5) "Математикалық физиканың классикалық емес теңдеулері және олардың қолданыстары". Өзбек-Ресей ғылыми конференциясы, Ташкент, 24-26 қазан 2019 жыл. 6) Сәуір айындағы дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Математика және математикалық моделдеу институты. Алматы, 3-5 сәуір 2020 жыл. 7) Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Математика кафедрасының "Қолданбалы математика және информатика" ғылыми семинары (семинар жетекшісі-ф.-м. ғ. докторы, профессор Ж. А. Сартабанов). 8) Сәуір айындағы дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Математика және математикалық моделдеу институты. Алматы, 5-8 сәуір 2021 жыл.

Жарияланымдар. Диссертация нәтижелері бойынша 13 жұмыс жарияланды: 6 мақала журналдарда (3 Scopus индекстелетін журналында [83], [84], [85] және 3 Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті [75], [79], [86] ұсынған журналдарда), сондай-ақ 7 халықаралық ғылыми конференциялардың еңбектерінде [87-92].

Диссертацияның көлемі мен құрылымы. Жұмысқа тақырып парағы, мазмұны, нормативтік сілтемелер, анықтамалар, белгілер мен қысқартулар, кіріспе, үш бөлім, қорытынды және сілтемелер кіреді. Диссертацияның жалпы көлемі – 135 бет, жұмыста 92 әдеби сілтеме бар.

Автор өзінің ғылыми кеңесшілері, Украина ҰҒА корреспондент-мүшесі физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Бойчук Александр Андреевичке және физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Асанова Анар Тұрмағанбетқызына қойылған есептері, пайдалы ескертулері,

алынған нәтижелерді талқылау кезіндегі кеңестері мен жан-жақты қолдауы үшін шынайы алғысын және ризашылығын білдіреді.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Кіріспе қарастырылып отырған есептердің қазіргі жағдайын бағалауды, ғылыми-зерттеу жұмыстарын жүргізу қажеттілігін негіздеуді қамтиды. Кіріспеде тақырыптың өзектілігі мен жаңалығы көрсетілген, зерттеудің негізгі мақсаттары мен міндеттері, қорғауға шығарылатын ережелер келтірілген.

Диссертацияның бірінші тарауында $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ облысында

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \\ + A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u + f(t,x), \tag{I}$$

төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылды. Мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A_i(t,x) - n \times n$-матрицалары, $i = \overline{1,7}$, және $f(t,x) - n$-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз.

Бірінші ішкітарауда (I) теңдеулер жүйесі

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.1}$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.2}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.3}$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \ \ x \in [0,\omega], \tag{0.4}$$

(0.1)-(0.4) шеттік шарттармен бірге Гурса тектес есеп болады және осы есептің шешімі табылды.

Екінші ішкітарауда (I) теңдеулер жүйесі

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.5}$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.6}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.7}$$
$$u(0,x) = u(T,x), \ \ x \in [0,\omega], \tag{0.8}$$

(0.5)-(0.8) шарттары үшін периодты есебінің шешімін іздеу қарастырылды.

Үшінші ішкітарауда (I) теңдеулер жүйесі

$$\frac{\partial^3 u(0,x)}{\partial x^3} = K(x)\frac{\partial^3 u(T,x)}{\partial x^3} + \varphi(x), \quad x \in [0,\omega]\,, \tag{0.9}$$
$$u(t,0) = \psi_0(t), \quad t \in [0,T]\,, \tag{0.10}$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_1(t), \quad t \in [0,T]\,, \tag{0.11}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T]\,, \tag{0.12}$$

(0.9)-(0.12) шарттары үшін бастапқы-периодты есебінің шешімі зерттелді.

Төртінші ішкітарауда (I) теңдеулер жүйесі

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.13}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.14}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.15}$$

$$P(x)u(0,x) + S(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{0.16}$$

(0.13)-(0.16) шарттары үшін қоснүктелік есебінің шешімін табу қарастырылды.

Бесінші ішкітарауда (I) теңдеулер жүйесі

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{3} M_{ij}(x)\frac{\partial^i u(t_j,x)}{\partial x^i} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{0.17}$$

$$u(t,0) = \psi_0(t), \qquad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_1(t), \qquad \left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \tag{0.18}$$

(0.17)-(0.18) шарттары үшін көпнүктелік есебінің шешімі зерттелді.

Диссертацияның екінші тарауында $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ облысында

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} +$$
$$+A_5(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_8(t,x)u + f(t,x), \tag{II}$$

төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылды. Мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A_i(t,x)$ – $n \times n$-матрицалары, $i = \overline{1,8}$, және $f(t,x)$ – n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз.

Бірінші ішкітарауда (II) теңдеулер жүйесі

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \epsilon [0,T], \tag{0.19}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad x \epsilon [0,\omega], \tag{0.20}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \epsilon [0,T], \tag{0.21}$$

$$\left.\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2}\right|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad x \epsilon [0,\omega], \tag{0.22}$$

(0.19)-(0.22) шарттары үшін Гурса есебінің шешімі зерттелді.

Екінші ішкітарауда $A_1(t,x) = A_2(t,x) = A_6(t,x) = A_7(t,x) =$ $= A_8(t,x) = 0$ болғанда (II) теңдеулер жүйесі

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{0.23}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}, \quad x \in [0,\omega], \tag{0.24}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T], \tag{0.25}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{0.26}$$

(0.23)-(0.26) шарттары үшін бастапқы периодты есебінің шешімі табылды.

Үшінші ішкітарауда $A_1(t,x) = A_2(t,x) = A_3(t,x) = A_6(t,x) = A_7(t,x) =$ 0 болғанда (II) теңдеулер жүйесі

$$u(0,x) = \varphi_1(t), \qquad x \in [0,\omega], \tag{0.27}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\left.\left\{P_i(x)\frac{\partial^2 u(t_j,x)}{\partial x^2} + S_i(x)\frac{\partial^2 u(t_j,x)}{\partial t^2}\right\}\right|_{t=t_i} = \varphi_2(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{0.28}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \;\; t \in [0,T], \tag{0.29}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{0.30}$$

(0.27)-(0.30) шарттары үшін бастапқы-шеттік есебінің шешімі зерттелді.

Диссертацияның үшінші тарауында $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ облысында

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} +$$
$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_7(t,x)u + f(t,x), \tag{III}$$

төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылды. Мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор функция; $A_s(t,x)$, $(s = \overline{1,7}), n \times n$-матрицалары және $f(t,x)$– n-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз.

Бірінші ішкітарауда (III) теңдеулер жүйесі

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[P_{i,j}(x)\frac{\partial^i u(t_j,x)}{\partial t^{i-1}\partial x} + S_{i,j}(x)\frac{\partial^i u(t_j,x)}{\partial t^i}\right] +\right.$$
$$\left.\left.+L_j(x)u(t,x)\right\}\right|_{t=t_j} = \varphi_1(x), \tag{0.31}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad u(0,x) = \varphi_3(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{0.32}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T] \tag{0.33}$$

(0.31)-(0.33) шарттары үшін бастапқы-шеттік есебінің шешімі табылды.

Екінші ішкітарауда (III) теңдеулер жүйесі

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \;\; x \in [0,\omega], \tag{0.34}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{0.35}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \varphi_3(t), \qquad x \in [0,\omega], \tag{0.36}$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t) \left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{x=x_j} = \psi(t), \qquad t \in [0,T] \tag{0.37}$$

(0.34)-(0.37) шарттары үшін бастапқы көпнүктелік есебінің шешімі қарастырылды.

Үшінші тақырыпта (III) теңдеулер жүйесі

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \;\; x \in [0,\omega], \tag{0.38}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{0.39}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=T}, \qquad x \in [0,\omega], \tag{0.40}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \;\; t \in [0,T] \tag{0.41}$$

(0.38)-(0.41) шарттары үшін жартылай периодты есебінің шешімі зерттелді.

1 ТӨРТІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ (I) ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

Бұл тарауда $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ облысында келесі түрдегі

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + $$
$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u + f(t,x), \qquad (I)$$

екі айнымалылы төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бірқатар бастапқы шеттік есептер зерттеледі.

Белгісіз функция мен оның туындыларын жаңа функциялар ретінде енгізу арқылы қарастырылатын есептер екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі бейлокал есепке және функционалдық қатынастарға келтіріледі. Осы пара-пар есепті зерттеу арқылы алғашқы есептің классикалық шешімінің болуы мен жалғыздығы шарттары орнатылады және шешімді табу жолдары зерттеледі.

1.1 Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесіне (I) арналған Гурса тектес есеп

$\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ облысында төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса тектес есебін келесі түрде қарастырамыз

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + $$
$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u + f(t,x), \qquad (1.1.1)$$
$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \qquad (1.1.2)$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \qquad (1.1.3)$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \quad t \in [0,T], \qquad (1.1.4)$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \;\; x \in [0,\omega] \qquad (1.1.5)$$

мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\; u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A_i(t,x)$ - $n \times n$–матрицалары, $i = \overline{1,7}$, және $f(t,x) - n$-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз, $\varphi(x) - n$-вектор-функциясы $[0,\omega]$ аралығында үш рет үзіліссіз дифференциалданады, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ және $\psi_3(t) – n$-вектор-фукциялар $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады.

$u(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ функциясы және $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$,

$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t \partial x^3} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ оның дербес туындыларымен Ω облысында (1.1.1) жүйені және (1.1.2)-(1.1.5) шеттік шарттарын қанағаттандыратын болса, онда $u(t,x)$ функциясы (1.1.1)-(1.1.5) Гурса тектес есебінің классикалық шешімі деп аталады.

Келесі келісімділік шарты орындалады деп жорамалданады:

$$\psi_3(0) = \ddot{\varphi}(0).$$

Мына түрдегі $v(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $v_1(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}$ жаңа функцияларды енгіземіз. (1.1.1)-(1.1.5) Гурса тектес бастапқы есепті пара-пар интегралдық шартты екінші ретті гиперболалық тектес дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды есепке келтіреміз

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial v}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial v}{\partial t} + A_3(t,x)v + F(t,x,v_1,u) + f(t,x), \quad (1.1.6)$$

$$v(t,0) = \psi_3(t), \quad t \in [0,T], \quad (1.1.7)$$

$$v(0,x) = \ddot{\varphi}(x), \quad x \in [0,\omega], \quad (1.1.8)$$

$$F(t,x,v_1,u) = A_4(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t} + A_5(t,x)v_1 + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u,$$

$$v_1(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v(t,\xi)d\xi,$$

$$u(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v(t,\xi_1)d\xi_1\, d\xi. \quad (1.1.9)$$

Мұнда (1.1.2), (1.1.3) шарттары (1.1.9) интегралдық қатынасында ескерілді.

$(v(t,x),\ v_1(t,x),\ u(t,x))$ функциялар үштігі және $v(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ функциясының $\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ дербес туындылары, $v_1(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ және $u(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ функциялардың

$$\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial^2 v_1(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),$$
$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),$$
$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\quad \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t \partial x^3} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$$

дербес туындылары Ω облысында (1.1.6) екінші ретті гиперболалық тектес теңдеулер жүйесін, (1.1.7), (1.1.8) шеттік шарттарын және (1.1.9) интегралдық қатынастарды қанағаттандырса, онда осы үштік (1.1.6)-(1.1.9) есебінің шешімі деп аталады.

Белгісіз $v(t,x)$ функциясы (1.1.6)-(1.1.8) гиперболалық теңдеулер жүйесінен анықталады, $v_1(t,x)$, $u(t,x)$ белгісіз функциялары (1.1.9) интегралдық қатынастардан табылады. (1.1.6)-(1.1.9) есебінің шешімі – ($v(t,x)$, $v_1(t,x)$, $u(t,x)$) функциялар үштігін табу үшін келесі алгоритм ұсынылады.
Алгоритм. Бастапқы қадам. 1) (1.1.9) жүйенің оң жағына төмендегідей болсын

$$v_1(t,x) = \psi_2(t), \qquad \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t),$$
$$u(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x, \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x,$$
$$F_0(t,x) = A_4(t,x)\dot{\psi}_2(t) + A_5(t,x)\psi_2(t) +$$
$$+A_6(t,x)\left[\dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x\right] + A_7(t,x)[\psi_1(t) + \psi_2(t)x],$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial v}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial v}{\partial t} + A_3(t,x)v + F_0(t,x) + f(t,x). \quad (1.1.6^0)$$

($1.1.6^0$), (1.1.7), (1.1.8) бейлокалды есептен $v^{(0)}(t,x)$, $\frac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial x}$ бастапқы жуықтауды табамыз:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \ddot{\varphi}(x) + \int_0^t \left[A_1(\tau,x)\frac{\partial v}{\partial x} + A_2(\tau,x)\frac{\partial v}{\partial \tau} + A_3(\tau,x)v + F_0(\tau,x) + f(\tau,x)\right] d\tau,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \dot{\psi}_3(t) + \int_0^x \left[A_1(t,\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi} + A_2(t,\xi)\frac{\partial v}{\partial t} + A_3(t,\xi)v + F_0(t,\xi) + f(t,\xi)\right] d\xi,$$
$$v(t,x) = \ddot{\varphi}(x) + \psi_3(t) - \psi_3(0) + \int_0^t \int_0^x \left[A_1(\tau,\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi} + A_2(\tau,\xi)\frac{\partial v}{\partial \tau} + \right.$$
$$\left. +A_3(\tau,\xi)v + F_0(\tau,\xi) + f(\tau,\xi)\right] d\xi d\tau.$$

2) $v(t,x) = v^{(0)}(t,x)$ болғанда (1.1.9) интегралдық қатынастардан

$$v_1^{(0)}(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v^{(0)}(t,\xi)d\xi,$$
$$u^{(0)}(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v^{(0)}(t,\xi_1)d\xi_1 \, d\xi,$$
$$\frac{\partial v_1^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(0)}(t,\xi)}{\partial t} d\xi,$$
$$\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial v^{(0)}(t,\xi_1)}{\partial t} d\xi_1 \, d\xi.$$

$(t,x) \in \Omega$ облысында $v_1^{(0)}(t,x)$, $u^{(0)}(t,x)$ функцияларын табамыз.
1-ші қадам. 1) (1.1.9) жүйенің оң жағына төмендегідей болсын

$$v_1(t,x) = v_1^{(0)}(t,x), \qquad \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial v_1^{(0)}(t,x)}{\partial t},$$

$$u(t,x) = u^{(0)}(t,x), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t},$$

$$F_1(t,x) = A_4(t,x)\frac{\partial v_1^{(0)}(t,x)}{\partial t} + A_5(t,x)v_1^{(0)}(t,x) +$$

$$A_6(t,x)\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t} + A_7(t,x)u^{(0)}(t,x),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial v}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial v}{\partial t} + A_3(t,x)v + F_1(t,x) + f(t,x). \quad (1.1.6^1)$$

$(1.1.6^1)$, (1.1.7), (1.1.8) бейлокалды есептен $v^{(1)}(t,x)$, $\frac{\partial v^{(1)}(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial v^{(1)}(t,x)}{\partial x}$
1-ші жуықтауды табамыз:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \ddot{\varphi}(x) + \int_0^t \left[A_1(\tau,x)\frac{\partial v}{\partial x} + A_2(\tau,x)\frac{\partial v}{\partial \tau} + A_3(\tau,x)v + F_1(\tau,x) + f(\tau,x)\right]d\tau,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \dot{\psi}_3(t) + \int_0^x \left[A_1(t,\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi} + A_2(t,\xi)\frac{\partial v}{\partial t} + A_3(t,\xi)v + F_1(t,\xi) + f(t,\xi)\right]d\xi,$$

$$v(t,x) = \ddot{\varphi}(x) + \psi_3(t) - \psi_3(0) + \int_0^t \int_0^x \Big[A_1(\tau,\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi} + A_2(\tau,\xi)\frac{\partial v}{\partial \tau} +$$

$$+A_3(\tau,\xi)v + F_1(\tau,\xi) + f(\tau,\xi)\Big]d\xi d\tau.$$

2) $v(t,x) = v^{(1)}(t,x)$ болғанда (1.1.9) интегралдық қатынастардан

$$v_1^{(1)}(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v^{(1)}(t,\xi)d\xi,$$

$$u^{(1)}(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v^{(1)}(t,\xi_1)d\xi_1\, d\xi,$$

$$\frac{\partial v_1^{(1)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(1)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,$$

$$\frac{\partial u^{(1)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial v^{(1)}(t,\xi_1)}{\partial t}d\xi_1\, d\xi.$$

$(t,x)\in\Omega$ облысында $v_1^{(1)}(t,x)$, $u^{(1)}(t,x)$ функцияларын табамыз.
және сол сияқты.
k-ші қадам. 1) (1.1.9) жүйенің оң жағына төмендегідей болсын

$$v_1(t,x)=v_1^{(k-1)}(t,x),\qquad \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial v_1^{(k-1)}(t,x)}{\partial t},$$

$$u(t,x)=u^{(k-1)}(t,x),\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t},$$

$$F_k(t,x)=A_4(t,x)\frac{\partial v_1^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}+A_5(t,x)v_1^{(k-1)}(t,x)+$$

$$+A_6(t,x)\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}+A_7(t,x)u^{(k-1)}(t,x),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}=A_1(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}+A_2(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}+A_3(t,x)v+F_k(t,x)+f(t,x).\ (1.1.6^k)$$

(1.1.6^k), (1.1.7), (1.1.8) бейлокалды есептен $v^{(0)}(t,x)$, $\frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial x}$
k–ші жуықтауды табамыз:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\ddot{\varphi}(x)+\int_0^t\left[A_1(\tau,x)\frac{\partial v}{\partial x}+A_2(\tau,x)\frac{\partial v}{\partial \tau}+A_3(\tau,x)v+F_k(\tau,x)+f(\tau,x)\right]d\tau,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\dot{\psi}_3(t)+\int_0^x\left[A_1(t,\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi}+A_2(t,\xi)\frac{\partial v}{\partial t}+A_3(t,\xi)v+F_k(t,\xi)+f(t,\xi)\right]d\xi,$$

$$v(t,x)=\ddot{\varphi}(x)+\psi_3(t)-\psi_3(0)+\int_0^t\int_0^x\left[A_1(\tau,\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi}+A_2(\tau,\xi)\frac{\partial v}{\partial \tau}+\right.$$

$$\left.+A_3(\tau,\xi)v+F_k(\tau,\xi)+f(\tau,\xi)\right]d\xi d\tau.$$

2) $v(t,x)=v^{(k)}(t,x)$ болғанда (1.1.9) интегралдық қатынастардан

$$v_1^{(k)}(t,x)=\psi_2(t)+\int_0^x v^{(k)}(t,\xi)d\xi,$$

$$u^{(k)}(t,x)=\psi_1(t)+\psi_2(t)x+\int_0^x\int_0^\xi v^{(k)}(t,\xi_1)d\xi_1\,d\xi,$$

$$\frac{\partial v_1^{(k)}(t,x)}{\partial t}=\dot{\psi}_2(t)+\int_0^x\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,$$

$$\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial v^{(k)}(t,\xi_1)}{\partial t} d\xi_1\, d\xi.$$

$(t,x) \in \Omega$ облысында $v_1^{(k)}(t,x)$,$u^{(k)}(t,x)$ функцияларын табамыз.

k-шы қадамды есептеу арқылы $(v^{(k)}(t,x),\ v_1{}^{(k)}(t,x),\ u^{(k)}(t,x))$ аламыз. Мұнда $k = 1,2,3, \dots$.

Алгоритмнің жинақтылығы шарттары мен пара-пар есептің бірмәнді шешілімділігі шарттары келесі теоремада беріледі.

1.1.1 теорема. Егер келесі шарттар орындалса:

i) $A_i(t,x) - n \times n$-матрицалар $(i = \overline{1,7})$, және $f(t,x) - n$-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз болса;

ii) $\varphi(x) - n$-вектор-функциясы $[0,\omega]$ аралығында үш рет үзіліссіз дифференциалданса;

iii) $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ және $\psi_3(t) - n$-вектор-функциялар $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса.

Онда (1.1.6)-(1.1.9) екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса тектес есебінің $v^{(*)}(t,x)$ жалғыз шешімі болады.

Дәлелдеуі.Теореманы дәлелдеу үшін мыналарды орнату керек

$$(v^{(k)}(t,x), v_1^{(k)}(t,x), u^{(k)}(t,x)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (v^{(*)}(t,x), v_1^{(*)}(t,x), u^{(*)}(t,x)).$$

Сондықтан $v(t,x) = v^{(k)}(t,x)$ кезінде (1.1.9) интегралдық қатынастардан норманы аламыз

$$\max\left(\left\|v^{(k)}(t,x)\right\|, \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right) \le$$

$$\le \widetilde{K} \max\left(\left\|v_1^{(k-1)}(t,x)\right\|, \left\|\frac{\partial v_1^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \left\|u^{(k-1)}(t,x)\right\|, \left\|\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right),$$

$$\left\|v_1^{(k)}(t,x)\right\| \le \|\psi_2(t)\| + \int_0^x \left\|v^{(k)}(t,\xi)\right\| d\xi,$$

$$\left\|\frac{\partial v_1^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\| \le \left\|\dot{\psi}_2(t)\right\| + \int_0^x \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\| d\xi,$$

$$\left\|u^{(k)}(t,x)\right\| \le \|\psi_1(t)\| + \int_0^x \left\|v_1^{(k)}(t,\xi)\right\| d\xi \le$$

$$\le \|\psi_1(t)\| + \int_0^x \left[\|\psi_2(t)\| + \int_0^\xi \left\|v^{(k)}(t,\xi_1)\right\| d\xi_1\right] d\xi =$$

$$= \|\psi_1(t)\| + \|\psi_2(t)\|x + \int_0^x \int_0^\xi \left\|v^{(k)}(t,\xi_1)\right\| d\xi_1\, d\xi,$$

$$\left\|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\| \le \left\|\dot{\psi}_1(t)\right\| + \int_0^x \left\|\frac{\partial v_1^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\| d\xi \le$$

$$\le \left\|\dot{\psi}_1(t)\right\| + \int_0^x \left[\left\|\dot{\psi}_2(t)\right\| + \int_0^\xi \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi_1)}{\partial t}\right\| d\xi_1\right] d\xi =$$

$$= \left\|\dot{\psi}_1(t)\right\| + \left\|\dot{\psi}_2(t)\right\|x + \int_0^x \int_0^\xi \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi_1)}{\partial t}\right\| d\xi_1\, d\xi,$$

$$\max\left(\left\|v_1^{(k)}(t,x)\right\|, \left\|\frac{\partial v_1^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \left\|u^{(k)}(t,x)\right\|, \left\|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right) \le$$

$$\le \max\left(\|\psi_2(t)\|, \left\|\dot{\psi}_2(t)\right\|, \|\psi_1(t)\| + \|\psi_2(t)\|x, \left\|\dot{\psi}_1(t)\right\| + \left\|\dot{\psi}_2(t)\right\|x\right) +$$

$$+ \max\left(\int_0^x \left\|v^{(k)}(t,\xi)\right\| d\xi, \int_0^x \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\| d\xi, \int_0^x \int_0^\xi \left\|v^{(k)}(t,\xi_1)\right\| d\xi_1\, d\xi,\right.$$

$$\left.\int_0^x \int_0^\xi \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi_1)}{\partial t}\right\| d\xi_1\, d\xi\right) \le \max\left(\|\psi_2(t)\|, \left\|\dot{\psi}_2(t)\right\|, \|\psi_1(t)\| + \|\psi_2(t)\|x,\right.$$

$$\left.\left\|\dot{\psi}_1(t)\right\| + \left\|\dot{\psi}_2(t)\right\|x\right) + \max\left(\int_0^x \max\left(\left\|v^{(k)}(t,\xi)\right\|, \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|\right) d\xi,\right.$$

$$\left. x \cdot \int_0^x \max\left(\left\|v^{(k)}(t,\xi)\right\|, \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|\right) d\xi\right) \le \max\left(\|\psi_2(t)\|, \left\|\dot{\psi}_2(t)\right\|,\right.$$

$$+ \max(1,x) \cdot \int_0^x \max\left(\left\|v^{(k)}(t,\xi)\right\|, \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|\right) d\xi.$$

мұндағы $0 \le x \le \xi$:

$$\int_0^x \int_0^\xi \left\|v^{(k)}(t,\xi_1)\right\| d\xi_1\, d\xi \le x \cdot \int_0^x \left\|v^{(k)}(t,\xi)\right\| d\xi,$$

$$\int_0^x \int_0^\xi \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi_1)}{\partial t}\right\| d\xi_1\, d\xi \le x \cdot \int_0^x \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\| d\xi,$$

$$\left\|v^{(k)}(t,x)\right\| \le \max\left(\left\|v^{(k)}(t,x)\right\|, \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right),$$

$$\left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\| \leq \max\left(\left\|v^{(k)}(t,x)\right\|, \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right).$$

$$\Delta v^{(k)}(x) \leq \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(k+1)}(t,x) - v^{(k)}(t,x)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(k+1)}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(k+1)}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial x}\right\|\right).$$

$$\Delta v^{(k)}(x) \leq \widetilde{K}\cdot\max(1,x)\cdot\int_0^x \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(k+1)}(t,\xi) - v^{(k)}(t,\xi)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(k+1)}(t,\xi)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(k+1)}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial x}\right\|\right).$$

$$\Delta v^{(k)}(x) \leq \widetilde{K}\cdot\max(1,x)\int_0^x max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(k)}(t,\xi) - v^{(k-1)}(t,\xi)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(k-1)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|\right)d\xi \leq \widetilde{K}\cdot\max(1,x)\int_0^x \Delta v^{(k-1)}(\xi)\,d\xi.$$

$k = 1$: $$\Delta v^{(1)}(x) \leq \widetilde{K}\cdot\max(1,x)\int_0^x \Delta v^{(0)}(\xi)\,d\xi,$$

$$\int_0^x \Delta v^{(0)}(\xi)\,d\xi \leq K_0\cdot x.$$

$k = 2$: $$\Delta v^{(2)}(x) \leq \widetilde{K}\cdot\max(1,x)\int_0^x \Delta v^{(1)}(\xi)\,d\xi \leq$$

$$\leq \widetilde{K}\cdot\max(1,x)\int_0^x \widetilde{K}\cdot\max(1,x)\,K_0\cdot\xi\,d\xi \leq$$

$$\leq \widetilde{K}\cdot\max(1,x)\cdot\widetilde{K}\cdot\max(1,x)\cdot K_0\cdot\frac{x^2}{2} = K_0\cdot\frac{\left(\widetilde{K}\cdot\max(1,x)\cdot x\right)^2}{2!};$$

$k = 3$: $$\Delta v^{(3)}(x) \leq K_0\cdot\frac{\left(\widetilde{K}\cdot\max(1,x)\cdot x\right)^3}{3!},$$

……………………………………..

$$\Delta v^{(k)}(x) \leq K_0\cdot\frac{\left(\widetilde{K}\cdot\max(1,x)\cdot x\right)^k}{k!}.$$

$\Delta v^{(k)}(x)$ функционалдық қатары жинақталады:

$$\Delta v^{(k)}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$K_0\cdot e^{\widetilde{K}\cdot\max(1,x)\cdot x}$$

$$\left\{v^{(k+1)}(t,x)\right\}, \qquad \left\{\frac{\partial v^{(k+1)}(t,x)}{\partial x}\right\}, \qquad \left\{\frac{\partial v^{(k+1)}(t,x)}{\partial t}\right\}$$

$$v^{(*)}(t,x), \qquad \frac{\partial v^{(*)}(t,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v^{(*)}(t,x)}{\partial t}.$$

1.1.1 теореманың i)-iv) шарттары Ω облысында $k \to \infty$ болғанда $\left\{v^{(k)}(t,x)\right\}$, $\left\{v_1{}^{(k)}(t,x)\right\}$ және $\left\{u^{(k)}(t,x)\right\}$ тізбектерінің бірқалыпты жинақтылығын қамтамасыз етеді, яғни Ω облысындағы $v^*(t,x)$, $v_1{}^*(t,x)$ және $u^*(t,x)$ функцияларға сәйкесінше жинақталады. Сонымен қатар, $k \to \infty$ болғанда олардың дербес туындыларының тізбектерінің де шегі бар болады.

$(v^*(t,x), v_1{}^*(t,x), u^*(t,x))$ функциялар үштігі Ω облысында барлық дербес туындылары бар және (1.1.6)-(1.1.9) есебінің шешімі болып табылады. (1.1.6)–(1.1.9) есебінің шешімінің жалғыздығы кері жору әдісімен дәлелденеді.

1.1.1 теорема дәлденді.

(1.1.6)-(1.1.9) және (1.1.1)-(1.1.5) есептерінің пара-пар болғандықтан төмендегі теорема орындалады:

1.1.2 теорема. Егер төмендегі шарттары орындалса:

i) $A_i(t,x) - n \times n$-матрицалар $(i = \overline{1,7})$, және $f(t,x) - n$-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз болса;

ii) $\varphi(x) - n$-вектор-функциясы $[0,\omega]$ аралығында үш рет үзіліссіз дифференциалданса;

iii) $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ және $\psi_3(t) - n$-вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса.

Онда (1.1.1)-(1.1.5) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса тектес есебінің $u^{(*)}(t,x)$ жалғыз шешімі болады.

1.2 Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (I) үшін периодты есеп

$\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$облысында төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін келесі түрдегі периодты есепті қарастырамыз

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} +$$
$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u + f(t,x), \qquad (1.2.1)$$
$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \qquad (1.2.2)$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \qquad (1.2.3)$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \quad t \in [0,T], \qquad (1.2.4)$$
$$u(0,x) = u(T,x), \ \ x \in [0,\omega], \qquad (1.2.5)$$

мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x),\dots,u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A_i(t,x)$–$n \times n$-матрицалары, $i = \overline{1,7}$, және $f(t,x)-n$-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ және $\psi_3(t)-n$-вектор-фукциялар $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын.

Келісімділік шарттары орындалсын:

$$\psi_1(0) = \psi_1(T),\ \ \psi_2(0) = \psi_2(T), \qquad \psi_3(0) = \psi_3(T).$$

$u(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ функциясы мен дербес туындылары

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),$$
$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t \partial x^3} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$$

Ω облысында (1.2.1) жүйені және (1.2.2)-(1.2.5) шеттік шарттарды қанағаттандыратын болса, онда $u(t,x)$ функциясы (1.2.1)-(1.2.5) периодты есебінің шешімі деп аталады.

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = v_1(t,x), \qquad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = v(t,x)$$

түріндегі жаңа белгісіз функцияларды енгіземіз. Зерттелетін есеп келесі функционалды параметрлері бар екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты есеп пен интегралдық қатынастарға келтіріледі

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial v}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial v}{\partial t} + A_3(t,x)v + F(t,x,v_1,u) + f(t,x), \quad (1.2.6)$$

$$v(t,0) = \psi_3(t), \quad t \in [0,T], \quad (1.2.7)$$

$$v(0,x) = v(T,x), \quad x \in [0,\omega], \quad (1.2.8)$$

мұндағы $F(t,x,v_1,u) = A_4(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t} + A_5(t,x)v_1 + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u.$

$$v_1(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v(t,\xi)d\xi,$$

$$u(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v(t,\xi_1)d\xi_1\, d\xi. \quad (1.2.9)$$

Одан кейін, (1.2.6)-(1.2.9) есебіне де ауыстыру жасаймыз. Сонда

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = V(t,x), \qquad \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = W(t,x)$$

жаңа белгісіз функцияларын енгізу арқылы, зерттеліп отырған есепті бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты есебі мен интегралдық шарттарға келтіріледі

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V + A_2(t,x)W + A_3(t,x)v + F(t,x,v_1,u), \quad (1.2.10)$$

мұндағы

$$F(t,x,v_1,u) = A_4(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t} + A_5(t,x)v_1 + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u + f(t,x),$$

$$V(0,x) = V(T,x), \quad x \in [0,\omega], \quad (1.2.11)$$

$$v(t,x) = \psi_3(t) + \int_0^x V(t,\xi)d\xi\,, \quad t \in [0,T],$$

$$W(t,x) = \dot{\psi}_3(t) + \int_0^x \frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t}d\xi\,, \qquad t \in [0,T]. \quad (1.2.12)$$

$(V(t,x),\ v(t,x),\ W(t,x))$ функциялар үштігі дербес туындыларымен Ω облысында (1.2.10) бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (1.2.11) периодты шартын және (1.2.12) интегралдық қатынастарды қанағаттандырса, онда осы үштік (1.2.10)-(1.2.12) есебінің шешімі деп аталады, мұндағы $V(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ функциясының $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ дербес туындылары, $v(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ және $W(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ функциялардың $\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial W(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial W(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ дербес туындылары.

Белгісіз $V(t,x)$ функциясы (1.2.10)-(1.2.11) бірінші ретті теңдеулер жүйесі үшін периодты есебінен анықталады, $v(t,x)$, $W(t,x)$ белгісіз функциялары (1.2.12) интегралдық қатынастардан табылады. (1.2.10)-(1.2.12) есебінің шешімі ($v(t,x)$, $W(t,x)$, $V(t,x)$) функциялар үштігін табу үшін келесі алгоритм ұсынылады.

Алгоритм. Бастапқы қадам. 1) (1.2.10), (1.2.11) есебінің бастапқы берілгендерін қолданамыз

$$v(t,x) = \psi_3(t), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = W(t,x) = \dot{\psi}_3(t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V + A_2(t,x)\dot{\psi}_3(t) + A_2(t,x)\psi_3(t) + F_0(t,x), \quad (1.2.10^0)$$

$$F_0(t,x) = A_4(t,x)\dot{\psi}_2(t) + A_5(t,x)\psi_2(t) + A_6(t,x)\big[\dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x\big] +$$
$$+A_7(t,x)[\psi_1(t) + \psi_2(t)x] + f(t,x),$$
$$V(0,x) = V(T,x), \;\; x \in [0,\omega] \qquad (1.2.11)$$

және біз (1.2.10^0), (1.2.11) есебін шешу арқылы бастапқы жуықтауды аламыз:

$$V^{(0)}(t,x), \qquad \frac{\partial V^{(0)}(t,x)}{\partial t}.$$

2) Алынған жуықтауды (1.2.12) интегралдық қатынастарына қойып, келесі теңдіктерді аламыз

$$v^{(0)}(t,x) = \psi_3(t) + \int_0^x V^{(0)}(t,\xi)d\xi\,, \quad t \in [0,T],$$

$$W^{(0)}(t,x) = \dot{\psi}_3(t) + \int_0^x \frac{\partial V^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi\,, \qquad t \in [0,T]. \qquad (1.2.12^0)$$

(1.2.12^0) мәнін (1.2.9) интегралдық қатынастарына қойып, келесілерді аламыз

$$v_1^{(0)}(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v^{(0)}(t,\xi)d\xi,$$

$$\frac{\partial v_1^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,$$

$$u^{(0)}(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v^{(0)}(t,\xi_1)d\xi_1\, d\xi,$$

$$\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial v^{(0)}(t,\xi_1)}{\partial t} d\xi_1\, d\xi. \qquad (1.2.9^0)$$

Бастапқы жуықтау нәтижесінде $V^{(0)}(t,x)$, $v^{(0)}(t,x)$, $W^{(0)}(t,x)$, $v_1^{(0)}(t,x)$, $u^{(0)}(t,x)$ аламыз.

1-ші қадам. 1) (1.2.10), (1.2.11) есебіне табылған бастапқы жуықтауды пайдаланамыз

$$v(t,x) = v^{(0)}(t,x), \qquad W(t,x) = W^{(0)}(t,x),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V + A_2(t,x)W^{(0)} + A_3(t,x)v^{(0)} + F_1(t,x), \qquad (1.2.10^1)$$

$$F_1(t,x) = A_4(t,x)\frac{\partial v_1^{(0)}(t,x)}{\partial t} + A_5(t,x)v_1^{(0)}(t,x) + A_6(t,x)\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t} +$$
$$+A_7(t,x)u^{(0)}(t,x) + f(t,x),$$
$$V(0,x) = V(T,x), \ \ x \in [0,\omega], \qquad (1.2.11)$$

және (1.2.10^1), (1.2.11) есебін шешу арқылы бірінші жуықтауды аламыз:

$$V^{(1)}(t,x), \qquad \frac{\partial V^{(1)}(t,x)}{\partial t}.$$

2) Алынған жуықтауды (1.2.12) қолданып (1.2.12^1) аламыз

$$v^{(1)}(t,x) = \psi_3(t) + \int_0^x V^{(1)}(t,\xi)d\xi, \quad t \in [0,T],$$

$$W^{(1)}(t,x) = \dot{\psi}_3(t) + \int_0^x \frac{\partial V^{(1)}(t,\xi)}{\partial t} d\xi, \qquad t \in [0,T]. \qquad (1.2.12^1)$$

Біз (1.2.12^1) мәнін (1.2.9) қолданып, (1.2.9^1) аламыз

$$v_1^{(1)}(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v^{(1)}(t,\xi)d\xi,$$

$$\frac{\partial v_1^{(1)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(1)}(t,\xi)}{\partial t} d\xi,$$

$$u^{(1)}(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v^{(1)}(t,\xi_1)d\xi_1\, d\xi,$$

$$\frac{\partial u^{(1)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \int_0^x \int_0^{\xi} \frac{\partial v^{(1)}(t,\xi_1)}{\partial t} d\xi_1 \, d\xi. \quad (1.2.9^1)$$

Бірінші жуықту нәтижесінде $V^{(1)}(t,x)$, $v^{(1)}(t,x)$, $W^{(1)}(t,x)$, $v_1^{(1)}(t,x)$, $u^{(1)}(t,x)$ аламыз.

Және тағы сол сияқты.

k-ші қадам. 1) (1.2.10), (1.2.11) есебіне табылған $(k-1)$-ші жуықтауды пайдаланамыз

$$v(t,x) = v^{(k-1)}(t,x), \qquad W(t,x) = W^{(k-1)}(t,x),$$

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = A_1(t,x)V(t,x) + A_2(t,x)W^{(k-1)}(t,x) + $$
$$+ A_3(t,x)v^{(k-1)}(t,x) + F_k(t,x), \quad (1.2.10^k)$$

$$F_k(t,x) = A_4(t,x)\frac{\partial v_1^{(k-1)}(t,x)}{\partial t} + A_5(t,x)v_1^{(k-1)}(t,x) + A_6(t,x)\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t} + $$
$$+ A_7(t,x)u^{(k-1)}(t,x) + f(t,x),$$

$$V(0,x) = V(T,x), \ \ x \in [0,\omega], \quad (1.2.11)$$

және (1.2.10^k), (1.2.11) есебін шешу арқылы k-ші жуықтауды аламыз:

$$V^{(k)}(t,x), \qquad \frac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}.$$

2) Алынған жуықтауды (1.2.12) қолданып, келесіні аламыз

$$v^{(k)}(t,x) = \psi_3(t) + \int_0^x V^{(k)}(t,\xi)d\xi, \quad t \in [0,T],$$

$$W^{(k)}(t,x) = \dot{\psi}_3(t) + \int_0^x \frac{\partial V^{(k)}(t,\xi)}{\partial t} d\xi, \qquad t \in [0,T]. \quad (1.2.12^k)$$

Біз (1.2.12^k) мәнін (1.2.9) қолданып, келесілерді аламыз

$$v_1^{(k)}(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v^{(k)}(t,\xi)d\xi,$$

$$\frac{\partial v_1^{(k)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t} d\xi,$$

$$u^{(k)}(t,x)=\psi_1(t)+\psi_2(t)x+\int_0^x\int_0^\xi v^{(k)}(t,\xi_1)d\xi_1\,d\xi,$$

$$\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}=\dot\psi_1(t)+\dot\psi_2(t)x+\int_0^x\int_0^\xi \frac{\partial v^{(k)}(t,\xi_1)}{\partial t}d\xi_1\,d\xi. \qquad (1.2.9^k)$$

k-шы қадам нәтижесінде $V^{(k)}(t,x)$, $v^{(k)}(t,x)$, $W^{(k)}(t,x)$, $v_1^{(k)}(t,x)$, $u^{(k)}(t,x)$ аламыз.

$\{V^{(k)}(t,x)\},\{v^{(k)}(t,x)\},\{W^{(k)}(t,x)\},\left\{v_1^{(k)}(t,x)\right\},\{u^{(k)}(t,x)\}$ бес тізбектен $k\to\infty$ ұмтылғанда бірқалыпты жинақталатын сәйкес $\{V^*(t,x)\}$, $\{v^*(t,x)\}$, $\{W^*(t,x)\}$, $\{v_1^*(t,x)\}$, $\{u^*(t,x)\}$ бес тізбектерін аламыз.

(1.2.10)-(1.2.12) есебінің шешімі $V^*(t,x)$ болады, (1.2.6)-(1.2.9) ізделінді есептің шешімі $v^*(t,x)$ болады, ал (1.2.1)-(1.2.5) бастапқы есептің шешімі $u^*(t,x)$ болады.

1.2.1 теорема. Егер келесі шарттар орындалса:

i) $A_i(t,x)$–$n\times n$-матрицалары, $i=\overline{1,7}$, және $f(t,x)$ – n-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз болса;

ii) $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ және $\psi_3(t)$– n-вектор-фукциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса;

iii) $\psi_1(0)=\psi_1(T)$, $\psi_2(0)=\psi_2(T)$, $\psi_3(0)=\psi_3(T)$ келісімділік шарттары орындалса;

iv) (1.2.10)-(1.2.12) периодты шеттік есебі бірмәнді шешілімді болса.

Онда (1.2.6)-(1.2.9) екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін периодты шеттік есебінің жалғыз $v^*(t,x)$ шешімі болады.

(1.2.10) теңдеуді шешу үшін (1.2.11) бастапқы шарттарды қолданып төмендегіні аламыз

$$\frac{\partial V}{\partial t}=A_1(t,x)V+g(t,x), \qquad (1.2.13)$$

$$V(0,x)=V(T,x),\ \ x\in[0,\omega]. \qquad (1.2.14)$$

(1.2.13), (1.2.14) периодты шеттік есебінің бірмәнді шешілімділік шарттарын көрсетейік.

$\frac{\partial V}{\partial t}=A_1V$ біртекті дифференциалдық теңдеудің $\Phi(t,x)$ фундаменталды матрицасы болсын: 1) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}=A_1\Phi$; 2) $det\Phi(t,x)\neq 0$.

(1.2.13), (1.2.14) периодты шеттік есебі төмендегідей шешіледі:

$$V(t,x)=\Phi(t,x)V(0,x)+\Phi(t,x)\int_0^t\Phi^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)\,d\tau,$$

$$V(0,x) = \Phi(T,x)V(0,x) + \Phi(T,x)\int_0^T \Phi^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)\,d\tau,$$

$$[I - \Phi(T,x)]V(0,x) = \Phi(T,x)\int_0^T \Phi^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)\,d\tau,$$

$$det[I - \Phi(T,x)] \neq 0\ \exists[I - \Phi(T,x)]^{-1}, \forall x\epsilon[0,\omega]:$$

$$V(0,x) = [I - \Phi(T,x)]^{-1}\cdot\Phi(T,x)\int_0^T \Phi^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)\,d\tau.$$

Онда (1.2.13)-(1.2.14) есебінің шешімі төмендегідей болады:

$$V(t,x) = \Phi(t,x)[I - \Phi(T,x)]^{-1}\cdot\Phi(T,x)\int_0^T \Phi^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)\,d\tau +$$

$$+\Phi(t,x)\int_0^t \Phi^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)\,d\tau. \qquad (1.2.15)$$

1.2.2 теорема. Егер төмендегі шарттар орындалса:

i) $A_i(t,x)$ – $n\times n$-матрицалары, $i=\overline{1,7}$, және $f(t,x)$–n-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз болса;

ii) $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ және $\psi_3(t)$– n-вектор-фукциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса;

iii) $\psi_1(0)=\psi_1(T)$, $\psi_2(0)=\psi_2(T)$, $\psi_3(0)=\psi_3(T)$ келісімділік шарттары орындалса;

iv) $[I-\Phi(T,x)]$ матрицасы $[0,\omega]$ аралығындағы қайтымды болса, мұндағы $\frac{\partial V}{\partial t}=A_1V$ біртекті дифференциалдық теңдеудің $\Phi(t,x)$ фундаменталды матрицасы.

Онда (1.2.1)-(1.2.5) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін периодты шеттік есебінің жалғыз $u^*(t,x)$ шешімі

$$u^*(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x\int_0^\xi v^*(t,\xi_1)d\xi_1\,d\xi$$

түрінде болады, мұндағы $v^*(t,x)$– (1.2.6)-(1.2.8) есебінің шешімі.

1.3 Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі (I) үшін бастапқы-шеттік есеп

$\Omega=[0,T]\times[0,\omega]$ облысында төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін келесі түрдегі бастапқы-периодты шеттік есебі қарастырылады:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t\partial x^3}=A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+$$
$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+A_7(t,x)u+f(t,x),\qquad (t,x)\in\Omega,\qquad (1.3.1)$$
$$\frac{\partial^3 u(0,\ x)}{\partial x^3}=K(x)\frac{\partial^3 u(T,x)}{\partial x^3}+\varphi(x),\quad x\in[0,\omega],\qquad (1.3.2)$$
$$u(t,0)=\psi_0(t),\quad t\in[0,T],\qquad (1.3.3)$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}=\psi_1(t),\quad t\in[0,T],\qquad (1.3.4)$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\psi_2(t),\quad t\in[0,T],\qquad (1.3.5)$$

мұндағы $u(t,x)=col(u_1(t,x),\ u_2(t,x),\dots,u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A_i(t,x)$–$n\times n$-матрицалары, $i=\overline{1,7}$, және $f(t,x)$– n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз, $K(x)$–$n\times n$-матрицасы мен $\varphi(x)$–n-вектор-фукциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ және $\psi_2(t)$–n-вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады. Бастапқы берілгендер келісім шартын қанағаттандырады.

$u(t,x)\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ функциясы мен дербес туындылары

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n),\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n),$$
$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t\partial x^2}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t\partial x^3}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$$

Ω облысында (1.3.1) жүйесін және (1.3.2)-(1.3.5) шеттік шарттарды қанағаттандыратын болса, онда $u(t,x)$ функциясы (1.3.1)-(1.3.5) есебінің шешімі деп аталады.

Жаңа белгісіз функциялар енгіземіз $v(t,x)=\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x)=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ және (1.3.1)-(1.3.5) есебін төмендегі есепке келтіреміз

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}=A_1(t,x)\frac{\partial w}{\partial x}+A_2(t,x)\frac{\partial w}{\partial t}+A_3(t,x)w+f(t,x)+A_4(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}+$$
$$+A_5(t,x)v+A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+A_7(t,x)u(t,x),\qquad (t,x)\in\Omega,\qquad (1.3.6)$$
$$\frac{\partial w(0,\ x)}{\partial x}=K(x)\frac{\partial w(T,x)}{\partial x}+\varphi(x),\quad x\in[0,\omega],\qquad (1.3.7)$$

$$w(t,0)=\psi_2(t), \quad t\in[0,T], \tag{1.3.8}$$

$$v(t,x)=\psi_0(t)+\int_0^x w(t,\ \xi)d\xi,$$

$$u(t,x)=\psi_0(t)+\psi_1(t)x+\int_0^x\int_0^\xi w(t,\xi_1)d\xi_1\,d\xi, \qquad (t,x)\in\Omega. \tag{1.3.9}$$

Мұнда (1.3.3), (1.3.4) шарттары (1.3.9) ескеріледі.

$(w(t,x),\ v(t,x),\ u(t,x))$ функциялар үштігі дербес туындылары мен Ω облысында (1.3.6) екінші ретті гиперболалық тектес теңдеулер жүйесін, (1.3.7), (1.3.8) шеттік шарттарын және (1.3.9) интегралдық қатынасты қанағаттандырса, онда осы үштік (1.3.6)-(1.3.9) есебінің шешімі деп аталады,

мұндағы $w(t,x)\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ функциясының $\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial w(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ дербес туындылары, $v(t,x)\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ және $u(t,x)\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ функциялардың дербес туындылары:

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n), \frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n), \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n), \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n),$$
$$\frac{\partial^3 v(t,x)}{\partial t\partial x^2}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n), \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n), \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n), \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n),$$
$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n), \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n), \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t\partial x^2}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n), \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t\partial x^3}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n).$$

Ω облысында $v(t,x)$ және $u(t,x)$ функциялары бекітілген кезде $w(t,x)$ функциясына қатысты (1.3.6)-(1.3.8) гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды есебі болады. Ω облысында (1.3.9) интегралдық қатынастар $v(t,x)$ және $u(t,x)$ белгісіз функцияларын анықтауға мүмкіндік береді.

Алгоритм. Біз $v(t,x)$, $u(t,x)$ функцияларын білсек, $w(t,x)$белгісіз функциясы (1.3.6)-(1.3.8) гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды есебінен анықталады. Егер $w(t,x)$ функциясын білсек, белгісіз $v(t,x)$, $u(t,x)$ функциялары (1.3.9) интегралдық қатынастардан табылады.

Бірақ бізге $w(t,x)$, $v(t,x)$, $u(t,x)$ функциялары бірге белгісіз болғандықтан, (1.3.6)-(1.3.9) есебінің шешімін табу үшін итерациялық (біртіндеп жуықтау) әдісті қолданамыз. (1.3.6)-(1.3.9) есебінің шешімі $(w^*(t,x), v^*(t,x),\ u^*(t,x))$ үштік функциялар болып табылады, біз оны $(w^{(k)}(t,x), v^{(k)}(t,x),\ u^{(k)}(t,x))$, $k=0,1,2,\ldots$, үштік тізбегінің шегі ретінде келесі алгоритмге сәйкес анықтаймыз:

Бастапқы қадам. 1) (1.3.6) жүйенің оң жағында $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}=\dot{\psi}_0(t)$, $v(t,x)=\psi_0(t)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\dot{\psi}_0(t)+\dot{\psi}_1(t)x$ және $u(t,x)=\psi_0(t)+\psi_1(t)x$ болсын,
$(t,x)\in\Omega$ облысында (1.3.6)-(1.3.8) бейлокалды есебінен $w^{(0)}(t,x)$ бастапқы жуықтауды табамыз;

2) Ω облысында $w(t,x) = w^{(0)}(t,x)$ болғанда, (1.3.9) интегралдық қатынастардан $v^{(0)}(t,x)$, $u^{(0)}(t,x)$ функцияларын табамыз.

1-ші қадам. 1) (1.3.6) жүйенің оң жағында $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial t}$, $v(t,x) = v^{(0)}(t,x)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ және $u(t,x) = u^{(0)}(t,x)$ болсын, $(t,x) \in \Omega$ облысында (1.3.6)-(1.3.8) бейлокалды есебінен $w^{(1)}(t,x)$ бірінші жуықтауды табамыз;

2) Ω облысында $w(t,x) = w^{(1)}(t,x)$ болғанда, (1.3.9) интегралдық қатынастардан $v^{(1)}(t,x)$, $u^{(1)}(t,x)$ функцияларын табамыз.

Және тағы сол сияқты.

k-қадам. 1) (1.3.6) жүйенің оң жағында $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial v^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}$, $v(t,x) = v^{(k-1)}(t,x)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}$ және $u(t,x) = u^{(k-1)}(t,x)$ болсын, $(t,x) \in \Omega$ облысында (1.3.6)-(1.3.8) бейлокалды есебінен $w^{(k)}(t,x)$ k-ші жуықтауды табамыз:

$$\frac{\partial^2 w^{(k)}(t,x)}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial w^{(k)}(t,x)}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial w^{(k)}(t,x)}{\partial t} + A_3(t,x)w^{(k)}(t,x) +$$
$$+f(t,x) + A_4(t,x)\frac{\partial v^{(k-1)}(t,x)}{\partial t} + A_5(t,x)v^{(k-1)}(t,x) +$$
$$+A_6(t,x)\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t} + A_7(t,x)u^{(k-1)}(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \tag{1.3.10}$$
$$\frac{\partial w^{(k)}(0,\ x)}{\partial x} = K(x)\frac{\partial w^{(k)}(T,x)}{\partial x} + \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{1.3.11}$$
$$w^{(k)}(t,0) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1.3.12}$$

2) Ω облысында $w(t,x) = w^{(k)}(t,x)$ болғанда, (1.3.9) интегралдық қатынастардан $v^{(k)}(t,x)$, $u^{(k)}(t,x)$ функцияларын табамыз:

$$v^{(k)}(t,x) = \psi_0(t) + \int_0^x w^{(k)}(t,\ \xi)d\xi,$$
$$u^{(k)}(t,x) = \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w^{(k)}(t,\xi_1)d\xi_1\, d\xi, \qquad (t,x) \in \Omega. \tag{1.3.13}$$

Мұнда $k = 1,2,3,\dots$.

Келесі теорема құрылған алгоритмнің жүзеге асырылымдығы мен жинақтылығын және (1.3.6)-(1.3.9) есебінің жалғыз шешімі болуы шарттарын береді.

1.3.1 теорема. Егер келесі шарттар орындалса:
i) $A_i(t,x)$–$n \times n$-матрицалары, $i = \overline{1,7}$, және $f(t,x)$– n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз болса;
ii) $K(x)$–$n \times n$-матрицасы мен $\varphi(x)$–n-вектор-фукциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса;
iii) $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ және $\psi_2(t)$–n-вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса;
iv) $Q(x) - n \times n$-матрицасы $x \in [0,\omega]$ аралығында қайтымды болса

$$Q(x) = I - K(x)\left[I + \int_0^T A_i(\tau,x)d\tau\right],$$

мұндағы I – n өлшемді бірлік матрица.

Онда (1.3.6)-(1.3.9) параметрлі гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды есебінің жалғыз $(w^*(t,x),\ v^*(t,x),\ u^*(t,x))$ шешімі болады, бұл $(w^{(k)}(t,x), v^{(k)}(t,x),\ u^{(k)}(t,x))$ үштіктер тізбегінің шегі жоғарыда ұсынылған алгоритммен анықталған, k=0,1,2,... .

Дәлелдеуі. 1.3.1 теорема. i)-iv) шарттары орындалсын. Жоғарыдағы алгоритмнің бастапқы қадамынан және 1.3.1 теоремасынан [57] гиперболалық теңдеулер жүйесіне арналған бейлокалды есеп шығады

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial w}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial w}{\partial t} + A_3(t,x)w + f(t,x) + A_4(t,x)\dot{\psi}_0(t) + \\ + A_5(t,x)\psi_0(t) + A_6(t,x)\left[\dot{\psi}_0(t) + \dot{\psi}_1(t)x\right] + \\ + A_7(t,x)[\psi_0(t) + \psi_1(t)x], \quad (t,x) \in \Omega, \tag{1.3.14}$$

$$\frac{\partial w(0,\ x)}{\partial x} = K(x)\frac{\partial w(T,x)}{\partial x} + \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{1.3.15}$$

$$w(t,0) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.3.16}$$

(1.3.14)-(1.3.16) есебінің шешімін табу үшін бастапқы қадамда параметрлеу әдісі қолданып $(t,x) \in \Omega$ облысында $w^{(0)}(t,x)$ жалғыз шешімін аламыз.
Әрі қарай, $(t,x) \in \Omega$ обылысында интегралдық қатынастардан $v^{(0)}(t,x)$, $u^{(0)}(t,x)$ анықтаймыз

$$v^{(0)}(t,x) = \psi_0(t) + \int_0^x w^{(0)}(t,\ \xi)d\xi,$$

$$u^{(0)}(t,x) = \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w^{(0)}(t,\xi_1)d\xi_1\, d\xi.$$

Ω облысында $v^{(0)}(t,x)$, $u^{(0)}(t,x)$ функциялары сәйкесінше $\frac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болады.

Ω облысында жоғарыда келтірілген алгоритмге сәйкес біртіндеп жуықтау әдісін жалғастыра отырып, $(t,x) \in \Omega$ және $k = 1,2,\ldots$ үшін біз $w^{(k)}(t,x)$, $v^{(k)}(t,x)$, $u^{(k)}(t,x)$ тізбектер жуықтауын анықтаймыз.

1.3.1 теореманың i)-iv) шарттары Ω облысында $k \to \infty$ ұмтылғанда $\{w^{(k)}(t,x)\}$, $\{v^{(k)}(t,x)\}$ және $\{u^{(k)}(t,x)\}$ тізбектерінің бірқалыпты жинақтылығын қамтамасыз етеді, яғни Ω облысындағы $w^*(t,x)$, $v^*(t,x)$ және $u^*(t,x)$ функцияларға сәйкесінше жинақталады. Сонымен қатар, $k \to \infty$ болғанда олардың дербес туындыларының тізбектерінің де шегі болады.

$(w^*(t,x), v^*(t,x), u^*(t,x))$ үштік функциялары Ω облысында барлық дербес туындылы және (1.3.6)-(1.3.9) есебінің шешімі болып табылады. (1.3.6)-(1.3.9) есебінің шешімінің жалғыздығы кері жору әдісімен дәлелденеді.

1.3.1 теорема дәлденді.

(1.3.6)-(1.3.9) және (1.3.1)-(1.3.5) есептері пара-пар болғандықтан төмендегі шығады:

1.3.2 теорема. Егер 1.3.1 теореманың i)-iv) шарттары орындалса.

Онда (1.3.1)-(1.3.5) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-периодты шеттік есебінің $u^*(t,x)$ жалғыз шешімі болады.

$K(x) = I$ және $\varphi(x) = 0$ болғанда (1.3.1), (1.3.3)-(1.3.5) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-периодты шеттік есебі төмендегі шартымен алынды:

$$\frac{\partial^3 u(0,\ x)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u(T,x)}{\partial x^3}, \quad x \in [0,\omega]. \qquad (1.3.2')$$

Онда келесі тұжырым дұрыс.

1.3.3 теорема. Егер төмендегі шарттар орындалса:

a) $A_i(t,x)$–$n \times n$-матрицалары, $i = \overline{1,7}$, және $f(t,x)$– n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз;

b) $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ және $\psi_2(t)$–n-вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады;

c) $Q(x) - n \times n$-матрицасы $x \in [0,\omega]$ аралығында қайтымды

$$Q(x) = \int_0^T A_i(\tau,x)d\tau.$$

Онда (1.3.1), (1.3.2’), (1.3.3)-(1.3.5) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-периодты шеттік есебінің жалғыз шешімі болады.

1.4 Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (I) үшін қоснүктелік бастапқы-шеттік есеп

$\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ облысында төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қоснүктелік бастапқы-шеттік есебін қарастырамыз:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} +$$

$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u + f(t,x), \tag{1.4.1}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.4.2}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.4.3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.4.4}$$

$$P(x)u(0,x) + S(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{1.4.5}$$

мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A_i(t,x)$–$n \times n$-матрицалары, $i = \overline{1,7}$, және $f(t,x)$– n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз, $P(x)$, $S(x)$ – $n \times n$-матрицалары мен $\varphi(x)$–n-вектор-фукциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз үш рет дифференциалданады, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ және $\psi_3(t)$–n-вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады.

Бастапқы берілгендер келісім шартын қанағаттандырады:

$$P(0)\psi_1(0) + \ S(0)\psi_1(T) = \varphi(0),$$
$$P'(0)\psi_1(0) + P(0)\psi_2(0) + S'(0)\psi_1(T) + \ S(0)\psi_2(T) = \varphi'(0),$$
$$P''(0)\psi_1(0) + 2P'(0)\psi_2(0) + P(0)\psi_3(0) +$$
$$S''(0)\psi_1(T) + \ 2S'(0)\psi_2(T) + S(0)\psi_3(T) = \varphi''(0).$$

$u(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ функциясы мен дербес туындылары

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),$$
$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),\ \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t \partial x^3} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$$

(1.4.1) жүйесін $(t,x) \in \Omega$ үшін және (1.4.2)-(1.4.5) шеттік шарттарды қанағаттандыратын болса, онда $u(t,x)$ функциясы (1.4.1)-(1.4.5) есебінің шешімі деп аталады.

Бастапқы берілгендер қасиеттерін қолдана отырып және (1.4.5) қоснүктелік шартты x бойынша үш рет туындылау арқылы төмендегіні аламыз:

$$P'''(x)u(0,x)+3P''(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}+3P'(x)\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2}+P(x)\frac{\partial^3 u(0,x)}{\partial x^3}+$$
$$+S'''(x)u(T,x)+3S''(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x}+3S'(x)\frac{\partial^2 u(T,x)}{\partial x^2}+$$
$$+S(x)\frac{\partial^3 u(T,x)}{\partial x^3}=\dddot{\varphi}(x). \qquad (1.4.6)$$

Берілген есепті пара-пар интегралдық қатынастары бар қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қоснүктелік шеттік есебіне келтіру.

Біріншіден, $v(t,x)=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$, $v_1(t,x)=\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ жаңа белгісіз функцияларын енгіземіз, және (1.4.1)-(1.4.5) есебін төмендегідей қайта жазамыз

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}=A_1(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}+A_2(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}+A_3(t,x)v+F(t,x,u,v_1)+f(t,x), \qquad (1.4.7)$$
$$v(t,0)=\psi_3(t), \quad t\in[0,T], \qquad (1.4.8)$$
$$3P'(x)v(0,x)+P(x)\frac{\partial v(0,x)}{\partial x}+3S'(x)v(T,x)+$$
$$+S(x)\frac{\partial v(T,x)}{\partial x}=D(x,u,v_1), \qquad (1.4.9)$$
$$v_1(t,x)=\psi_2(t)+\int_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad (1.4.10)$$
$$u(t,x)=\psi_1(t)+\psi_2(t)x+\int_0^x\int_0^\xi v(t,\xi_1)d\xi_1\,d\xi, \qquad (1.4.11)$$

мұндағы

$$F(t,x,u,v_1)=A_4(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+\ A_5(t,x)v_1+A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+A_7(t,x)u,$$
$$D(x,u,v_1)=\dddot{\varphi}(x)-[P'''(x)u(0,x)+3P''(x)v_1(0,x)+$$
$$+S'''(x)u(T,x)+3S''(x)v_1(T,x)].$$

$\{v(t,x),\ v_1(t,x),u(t,x)\}$ функциялар үштігі дербес туындыларымен бірге (1.4.7) екінші ретті гиперболалық типті теңдеулер жүйесін, (1.4.8) шеттік шарттарын, (1.4.9) бейлокалды шартты және (1.4.10), (1.4.11) интегралдық қатынастарды Ω облысында қанағаттандырса, онда осы үштік (1.4.7)-(1.4.11) есебінің шешімі деп аталады, мұндағы $v(t,x)\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ функциясының $\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ дербес туындылары, $v_1(t,x)\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ және $u(t,x)\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ функциялардың $\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$ дербес туындылары.

Мұнда $v_1(t,x)$ және $u(t,x)$ функциялары $v(t,x)$ функциясымен сәйкесінше (1.4.10) және (1.4.11) интегралдық қатынасына байланысты.

(1.4.2) және (1.4.3) шарттары (1.4.11) және (1.4.10) интегралдық қатынасымен енгізілген.

(1.4.1)-(1.4.5) бастапқы берілген есеп пен (1.4.7)-(1.4.11) екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін қоснүктелік есебі пара-пар.

(1.4.10) және (1.4.11) интегралдық қатынаста t бойынша туындылау арқылы $\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ дербес туындысын аламыз:

$$\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi,$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial u(t,\xi_1)}{\partial t} d\xi_1 \, d\xi. \qquad (1.4.12)$$

Ω облысында $v_1(t,x)$, $u(t,x)$ бекітілгенде $v(t,x)$ функциясына қатысты (1.4.7)-(1.4.9) екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін қоснүктелік шеттік есебі болып табылады. (1.4.10) және (1.4.11) интегралдық қатынастары $v_1(t,x)$, $u(t,x)$ белгісіз функцияларды анықтауға мүмкіндік береді. (1.4.12) интегралдық қатынастан $\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ дербес туындылыларды анықтаймыз.

Енді, келесі $\frac{\partial v}{\partial x} = V(t,x)$, $\frac{\partial v}{\partial t} = W(t,x)$ жаңа белгісіз функцияларын енгіземіз.

(1.4.7)-(1.4.11) есебін төмендегі пара-пар есепке келтіреміз:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V + A_2(t,x)W + A_3(t,x)v + F(t,x,u,v_1) + f(t,x), \qquad (1.4.13)$$

$$P(x)V(0,x) + S(x)V(T,x) = D_1(x,u,v_1,v), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (1.4.14)$$

$$v(t,x) = \psi_3(t) + \int_0^x V(t,\xi)d\xi, \qquad W(t,x) = \dot{\psi}_3(t) + \int_0^x \frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t} d\xi, \qquad (1.4.15)$$

$$v_1(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad (1.4.16)$$

$$u(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v(t,\xi_1)d\xi_1 \, d\xi, \qquad (1.4.17)$$

мұндағы $D_1(x,u,v_1,v) = D(x,u,v_1) + 3P'(x)v(0,x) + 3S'(x)v(T,x)$.

(1.4.13)-(1.4.17) есебінде (1.4.8) шарты (1.4.14) қатынасында ескеріледі.

$\{V(t,x), W(t,x), v(t,x), v_1(t,x), v(t,x)\}$ бес функциялар жүйесі (1.4.13) дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (1.4.14) қоснүктелік шарттын және (1.4.15)-(1.4.17) интегралдық қатынастарды Ω облысында қанағаттандырса, онда осы бес функция жүйесі (1.4.13)-(1.4.17) есебінің шешімі болады.

Келесі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V, \tag{1.4.18}$$

фундаменталды матрицасын қолданып (1.4.13), (1.4.14) есебінің шешімін келтіреміз.
(1.4.18) жүйесінің $X(t,x)$ – фундаменталды матрицасы болсын және $X(0,x) = I$, мұндағы I – n өлшемді бірлік матрица.

Мына қоснүктелік шеттік есепті қарастырамыз

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V + g(t,x), \tag{1.4.19}$$

$$P(x)V(0,x) + S(x)V(T,x) = \Phi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{1.4.20}$$

мұндағы $g(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\Phi(x)$–n-вектор-функция $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз.

(1.4.18) жүйенің шешімі келесі түрде жазылады

$$V(t,x) = X(t,x)V(0,x) + X(t,x)\int_0^t X^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)d\tau. \tag{1.4.21}$$

Оны $t = T$ үшін анықтап, (1.4.20) шарттына қойып

$$P(x)V(0,x) + S(x)X(T,x)V(0,x) + S(x)X(T,x)\int_0^T X^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)d\tau = \Phi(x)$$

аламыз.
Осы жерден төмендегі теңдеу шығады

$$[P(x) + S(x)X(T,x)]V(0,x) = \Phi(x) - S(x)X(T,x)\int_0^T X^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)d\tau.$$

$V(0,x)$ функциясын бірмәнді анықтау үшін біз барлық x∈[0, ω] үшін $det[P(x) + S(x)X(T,x)] \neq 0$ деп болжаймыз. Сонда

$$V(0,x) = [P(x) + S(x)X(T,x)]^{-1} \times$$
$$\times \left\{\Phi(x) - S(x)X(T,x)\int_0^T X^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)d\tau\right\}. \tag{1.4.22}$$

Онда (1.4.19), (1.4.20) есебінің шешімі төмендегідей болады

$$V(t,x) = X(t,x)[P(x) + S(x)X(T,x)]^{-1}\{\Phi(x) -$$
$$-S(x)X(T,x)\int_0^T X^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)d\tau\Bigg\} + X(t,x)\int_0^t X^{-1}(\tau,x)g(\tau,x)d\tau. \quad (1.4.23)$$

$V(t,x)$ функциясы үшін келесі бағалау орынды:

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|V(t,x)\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}\right\|\right) \le \widetilde{K}\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|g(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right),$$

мұндағы $\widetilde{K}$ тұрақтысы $X(t,x)$ фундаменталды матрицаны, $[P(x) + S(x)X(T,x)]^{-1}$ кері матрицаны, $A_1(t,x)$, $P(x)$, $S(x)$ және T матрицаларын қолдана отырып есептеледі.

1.4.1 теорема. Егер төмендегі шарттар орындалса:

a) $\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V$ дифференциалдық теңдеудің $X(t,x)$ фундаменталды матрицасы болса;

b) $P(x) + S(x)X(T,x)$ –$n \times n$-матрицасы $[0,\omega]$ аралығында қайтымды болса.

Онда (1.4.19), (1.4.20) қоснүктелік шеттік есебінің $V^*(t,x)$ жалғыз шешімі (1.4.23) түрінде болады.

Алгоритм және (1.4.1)-(1.4.5) есеп шешімінің жалғыздығы.

$W(t,x)$, $v(t,x)$, $v_1(t,x)$ және $u(t,x)$ функциялары бекітілсе (1.4.13), (1.4.14) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қоснүктелік шеттік есебінің $V(t,x)$ белгісіз функциясы болып табылады. Белгісіз $W(t,x)$ және $v(t,x)$ функциялары $V(t,x)$ және оның $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}$ дербес туындысы бойынша (1.4.15) интегралдық қатынастан анықталады. Және, $v(t,x)$ көмегімен $v_1(t,x)$, $u(t,x)$ белгісіз функцияларды (1.4.16), (1.4.17) интегралдық қатынастар арқылы анықтаймыз. $V(t,x)$, $W(t,x)$, $v(t,x)$, $v_1(t,x)$ және $u(t,x)$ белгісіз болғандықтан, (1.4.13)-(1.4.17) есебінің шешімін табу үшін итерациялық әдісті қолданамыз. Сондықтан (1.4.13)-(1.4.17) есебінің шешімі $\{V^{(k)}(t,x)\}$, $\{W^{(k)}(t,x)\}$, $\{v^{(k)}(t,x)\}$, $\{{v_1}^{(k)}(t,x)\}$ және $\{u^{(k)}(t,x)\}$, $k = 0,1,2,...$, тізбектік шектер түрінде болады, әрі келесі алгоритммен анықталады:

Бастапқы қадам: 1) (1.4.15), (1.4.16) интегралдық қатынастарға $v^{(0)}(t,x) = \psi_3(t)$, $W^{(0)}(t,x) = \dot{\psi}_3(t)$ деп орнатып, біз Ω облысында бастапқы жуықтаулар ретінде аламыз:

$${v_1}^{(0)}(t,x) = \psi_2(t) + \psi_3(t)x, \qquad \frac{\partial {v_1}^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \dot{\psi}_3(t)x,$$
$$u^{(0)}(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)\frac{x^2}{2},$$

$$\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \dot{\psi}_3(t)\frac{x^2}{2};$$

2) Сонда, (1.4.13) жүйенің оң жағы және (1.4.14) шарттары $v(t,x) = v^{(0)}(t,x)$, $W(t,x) = W^{(0)}(t,x)$, $v_1(t,x) = v_1^{(0)}(t,x)$, $u(t,x) = u^{(0)}(t,x)$ болсын. Төмендегі қоснүктелік шеттік есебінен

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V + A_2(t,x)W^{(0)}(t,x) + A_3(t,x)v^{(0)}(t,x) +$$
$$+F\left(t,x,u^{(0)}(t,x),{v_1}^{(0)}(t,x)\right) + f(t,x), \qquad (1.4.24)$$
$$P(x)V(0,x) + S(x)V(T,x) = D_1\left(x,u^{(0)},{v_1}^{(0)},v^{(0)}\right), x \in [0,\omega], \qquad (1.4.25)$$

барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $V^{(0)}(t,x)$, $\frac{\partial V^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ бастапқы жуықтауды табамыз.

1-ші қадам: 1) (1.4.15) интегралдық қатынасынан $V(t,x) = V^{(0)}(t,x)$, $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial V^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ деп орнатып, біз барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $v^{(1)}(t,x)$, $W^{(1)}(t,x)$ табамыз:

$$v^{(1)}(t,x) = \psi_3(t) + \int_0^x V^{(0)}(t,\xi)d\xi\,, W^{(1)}(t,x) = \dot{\psi}_3(t) + \int_0^x \frac{\partial V^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi.$$

Барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін (1.4.16), (1.4.17) интегралдық қатынастарға $v(t,x) = v^{(1)}(t,x)$, $W(t,x) = W^{(1)}(t,x)$ қойып, төмендегі қатынастарды аламыз

$${v_1}^{(1)}(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v^{(1)}(t,\xi)d\xi,$$
$$\frac{\partial {v_1}^{(1)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(1)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,$$
$$u^{(1)}(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v^{(1)}(t,\xi_1)d\xi_1\, d\xi,$$
$$\frac{\partial u^{(1)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial v^{(1)}(t,\xi_1)}{\partial t}d\xi_1\, d\xi\,;$$

2) Содан, біз (1.4.13) жүйенің оң жағында және (1.4.14) шарттында $v(t,x) = v^{(1)}(t,x)$, $W(t,x) = W^{(1)}(t,x)$, $v_1(t,x) = v_1^{(1)}(t,x)$, $u(t,x) = u^{(1)}(t,x)$ болсын. Келесі қоснүктелік шеттік есебінен

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V + A_2(t,x)W^{(1)}(t,x) + A_3(t,x)v^{(1)}(t,x) +$$
$$+F\left(t,x,u^{(1)}(t,x),{v_1}^{(1)}(t,x)\right) + f(t,x), \qquad (1.4.26)$$
$$P(x)V(0,x) + S(x)V(T,x) = D_1\left(x,u^{(1)},{v_1}^{(1)},v^{(1)}\right), x \in [0,\omega] \quad (1.4.27)$$

барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін біз $V^{(1)}(t,x)$, $\frac{\partial V^{(1)}(t,x)}{\partial t}$ бірінші жуықтауды табамыз.

Және тағы сол сияқты.

k-ші қадам: 1) (1.4.15) интегралдық қатынасынан $V(t,x) = V^{(k-1)}(t,x)$, $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial V^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}$ деп орнатып, барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $v^{(k)}(t,x)$, $W^{(k)}(t,x)$табамыз:

$$v^{(k)}(t,x) = \psi_3(t) + \int_0^x V^{(k-1)}(t,\xi)d\xi,$$
$$W^{(k)}(t,x) = \dot{\psi}_3(t) + \int_0^x \frac{\partial V^{(k-1)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi.$$

Барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін (1.4.16), (1.4.17) интегралдық қатынастарға $v(t,x) = v^{(k)}(t,x)$, $W(t,x) = W^{(k)}(t,x)$ қойып, төмендегіні аламыз

$${v_1}^{(k)}(t,x) = \psi_2(t) + \int_0^x v^{(k)}(t,\xi)d\xi,$$
$$\frac{\partial {v_1}^{(k)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,$$
$$u^{(k)}(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v^{(k)}(t,\xi_1)d\xi_1\, d\xi,$$
$$\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial v^{(k)}(t,\xi_1)}{\partial t}d\xi_1\, d\xi\,;$$

2) Содан, (1.4.13) жүйенің оң жағында және (1.4.14) шартында $v(t,x) = v^{(k)}(t,x)$, $W(t,x) = W^{(k)}(t,x)$, $v_1(t,x) = v_1^{(k)}(t,x)$, $u(t,x) = u^{(k)}(t,x)$ болсын. Келесі қосңүктелік шеттік есебінен

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_1(t,x)V + A_2(t,x)W^{(k)}(t,x) + A_3(t,x)v^{(k)}(t,x) +$$
$$+F\left(t,x,u^{(k)}(t,x),{v_1}^{(k)}(t,x)\right) + f(t,x), \qquad (1.4.28)$$
$$P(x)V(0,x) + S(x)V(T,x) = D_1\left(x,u^{(k)},{v_1}^{(k)},v^{(k)}\right), x \in [0,\omega], \qquad (1.4.29)$$

барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін біз $V^{(k)}(t,x)$, $\frac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}$ k-ші жуықтауды табылады.
Мұнда $k=1,2,3,\dots$.

Осылайша, қосымша функциялар енгізу әдісі белгісіз функцияны табу процесін екі бөлікке бөледі: 1) (1.4.13), (1.4.14) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қосңүктелік шеттік есебінен белгісіз $V(t,x)$ (және оның туындысы $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}$) функциясын табылады; 2) (1.4.15)-(1.4.17) интегралдық теңдеулерден $W(t,x)$, $v(t,x)$, $v_1(t,x)$ және $u(t,x)$ (сонымен бірге олардың дербес туындыларын $\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$) функциялары анықталады.

Келесі теорема ұсынылған алгоритмнің жинақтылығын және бастапқы берілгендер арқылы (1.4.1)-(1.4.5) есебінің бірмәнді шешімінің шарттарын береді.

1.4.2 теорема. Егер келесі шарттар орындалса:

i) $A_i(t,x)$–$n\times n$-матрицалары, $i=\overline{1,7}$, және $f(t,x)$– n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз болса;

ii) $P(x)$, $S(x)$–$n\times n$-матрицалары мен $\varphi(x)$–n-вектор-фукциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз үш рет дифференциалданса;

iii) $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ және $\psi_3(t)$–n-вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса;

iv) $P(x)+S(x)X(T,x)-\ n\times n$-матрицасы $[0,\omega]$ аралығында қайтымды болса.

Онда (1.4.1)-(1.4.5) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қосңүктелік бастапқы-шеттік есебінің жалғыз $u^*(t,x)$ шешімі болады.

Дәлелдеуі. Жоғарыда ұсынылған итерациялық әдісті қолдана отырып, біз функциялар тізбегінің бағалауларын аламыз

$$\left\|{v_1}^{(k)}(t,x)\right\|\le\|\psi_2(t)\|+\int_0^x\left\|v^{(k)}(t,\xi)\right\|d\xi, \qquad (1.4.30)$$

$$\left\|\frac{\partial {v_1}^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\le\|\dot\psi_2(t)\|+\int_0^x\left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|d\xi, \qquad (1.4.31)$$

$$\left\|u^{(k)}(t,x)\right\|\le\|\psi_1(t)\|+\int_0^x\left\|{v_1}^{(k)}(t,\xi)\right\|d\xi\le$$

$$\le\|\psi_1(t)\|+\|\psi_2(t)\|x+\int_0^x\int_0^\xi\left\|v^{(k)}(t,\xi_1)\right\|d\xi_1\,d\xi \qquad (1.4.32)$$

$$\left\|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\le\|\dot\psi_1(t)\|+\int_0^x\left\|\frac{\partial {v_1}^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|d\xi\le$$

$$\leq \left\|\dot{\psi}_1(t)\right\| + \left\|\dot{\psi}_2(t)\right\|x + \int_0^x \int_0^\xi \left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi_1)}{\partial t}\right\| d\xi_1\, d\xi. \tag{1.4.33}$$

(1.4.30)-(1.4.33) теңсіздіктерден келесілерді аламыз

$$\max\left(\left\|{v_1}^{(k)}(t,x)\right\|, \left\|u^{(k)}(t,x)\right\|, \left\|\frac{\partial {v_1}^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \left\|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right) \leq$$
$$\leq (1+x)\max\left(\|\psi_1(t)\|, \left\|\dot{\psi}_1(t)\right\|, \|\psi_2(t)\|, \left\|\dot{\psi}_2(t)\right\|\right) +$$
$$+ \max(1,x)\int_0^x \max\left(\left\|v^{(k)}(t,\xi)\right\|, \left\|W^{(k)}(t,\xi)\right\|\right) d\xi. \tag{1.4.34}$$

$V^{(k)}(t,x)$, $\frac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}$ функциялары үшін келесі бағалауларды аламыз

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|V^{(k)}(t,x)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right) \leq \widehat{K}\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(k)}(t,x)\right\|,\right.$$
$$\max_{t\in[0,T]}\left\|W^{(k)}(t,x)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|{v_1}^{(k)}(t,x)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|u^{(k)}(t,x)\right\|,$$
$$\left.\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial {v_1}^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \max_{t\in[0,T]}\|f(t,x)\|, \|\ddot{\varphi}(x)\|\right), \tag{1.4.35}$$

мұндағы

$$\widehat{K} = \widetilde{K}\max\left(\max_{i=\overline{2,7}}\|A_i\|_0 + 1, \max_{x\in[0,\omega]}[\|P'''(x)\| + 3\|P''(x)\| + 3\|P'(x)\| +\right.$$
$$\left.+\|S'''(x)\| + 3\|S''(x)\| + 3\|S'(x)\|] + 1\right).$$

Белгілеулер енгіземіз

$$\alpha^{(k)}(x) = \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|V^{(k+1)}(t,x) - V^{(k)}(t,x)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial V^{(k+1)}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right),$$
$$\beta^{(k)}(x) = \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(k+1)}(t,x) - v^{(k)}(t,x)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|W^{(k+1)}(t,x) - W^{(k)}(t,x)\right\|\right),$$
$$\gamma^{(k)}(x) = \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|{v_1}^{(k+1)}(t,x) - {v_1}^{(k)}(t,x)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|u^{(k+1)}(t,x) - u^{(k)}(t,x)\right\|\right),$$
$$\theta^{(k)}(x) = \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial {v_1}^{(k+1)}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial {v_1}^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right).$$

Содан кейін, (1.4.30)-(1.4.35) ұқсас келесі бағалауларды аламыз

$$\max\left\{\gamma^{(k)}(x), \theta^{(k)}(x)\right\} \leq \max(1,x)\int_0^x \beta^{(k)}(\xi)d\xi, \tag{1.4.36}$$

$$\alpha^{(k)}(x) \leq \widehat{K}\max\left(\beta^{(k)}(x), \gamma^{(k)}(x), \theta^{(k)}(x)\right), \tag{1.4.37}$$

$$\beta^{(k)}(x) \leq \int_0^x \alpha^{(k-1)}(\xi)d\xi. \qquad (1.4.38)$$

Барлық $x \in [0, \omega]$ үшін (1.4.38) және (1.4.36) теңсіздіктерін ескере отырып, (1.4.37) теңсіздігінен негізгі теңсіздікті орнатамыз, $k = 1,2,3, \dots$

$$\alpha^{(k)}(x) \leq \widehat{K}\max(1, x, x^2)\int_0^x \alpha^{(k-1)}(\xi)d\xi. \qquad (1.4.39)$$

(1.4.39) теңсіздігінен шығатыны

$$\alpha^{(k)}(x) \leq \frac{\left(\widehat{K}\max(1, x, x^2)\right)^k}{k!}\max_{x\in[0,\omega]}\alpha^{(0)}(x). \qquad (1.4.40)$$

$\{\alpha^{(k)}(x)\}$ функционалдық тізбегі $k \to \infty$ ұмтылғанда $\alpha^*(x)$ функциясына барлық $x \in [0, \omega]$ үшін бірқалыпты жинақталады. $\{\beta^{(k)}(x)\}$, $\{\gamma^{(k)}(x)\}$ және $\{\theta^{(k)}(x)\}$ функционалдық тізбектері $k \to \infty$ ұмтылғанда сәйкесінше $\beta^*(x)$, $\gamma^*(x)$ және $\theta^*(x)$ функцияларына барлық $x \in [0, \omega]$ үшін бірқалыпты жинақталады. Сонымен, $\{V^{(k)}(t, x)\}$, $\{v^{(k)}(t, x)\}$, $\{W^{(k)}(t, x)\}$, $\{{v_1}^{(k)}(t, x)\}$ және $\{u^{(k)}(t, x)\}$ функционалдық тізбектері $k \to \infty$ ұмтылғанда сәйкесінше $V^*(t, x)$, $v^*(t, x)$, $W^*(t, x)$, ${v_1}^*(t, x)$ және $u^*(t, x)$ функцияларына барлық $(t, x) \in \Omega$ үшін бірқалыпты жинақталығын береді. Және сондай-ақ, $\left\{\frac{\partial {v_1}^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\}$ дербес туындылы функционалдық тізбектері $k \to \infty$ ұмтылғанда $\frac{\partial {v_1}^*(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial t}$ функцияларына барлық $(t, x) \in \Omega$ үшін бірқалыпты жинақталады. $u^*(t, x)$ функциясы (1.4.1)-(1.4.5) есебінің шешімі болады. (1.4.1)-(1.4.5) есебі шешімінің жалғыздығы қарама-қайшылық әдісімен дәлелденеді.

1.4.2 теорема дәлелденді.

(1.4.1)-(1.4.5) есебінің бірмәнді шешілуінің негізгі шартты (1.4.19)-(1.4.20) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қоснүктелік шеттік есебінің бірмәнді шешілуі болып табылады. Жалпы қоснүктелік және интегралдық қатынасты дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептің дұрыстық шешілімділігінің критерийлері [52] жұмысында бастапқы берілгендер терминдерінде белгіленген.

1.5 Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі (I) үшін бейлокалды көпнүктелік есеп

$\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ облысында төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік бейлокалды есебін қарастырамыз:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ A_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u}{\partial x^{4-i}} + B_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u}{\partial t \partial x^{3-i}} \right\} + C(t,x)u + f(t,x), \qquad (1.5.1)$$

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{3} M_{ij}(x) \frac{\partial^i u(t_j, x)}{\partial x^i} = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \qquad (1.5.2)$$

$$u(t,0) = \psi_0(t), \qquad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_1(t), \qquad \left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad (1.5.3)$$

мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A_i(t,x), B_i(t,x),\ i = \overline{1,3},\ C(t,x) -\ n \times n$-матрицалары және $f(t,x) - n$-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз, $M_{ij}(x) -\ n \times n$-матрицаларымен $\varphi(x)$–n-вектор-фукциясы $[0, \omega]$ аралығында үзіліссіз, $i = \overline{0,3},\ j = \overline{0, m},\ \psi_0(t),\ \psi_1(t)$ және $\psi_2(t)$–n-вектор-функциялары $[0, T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады.

$u(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ функциясы мен туындылары

$$\frac{\partial^{s+p} u(t,x)}{\partial x^p \partial t^s} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \qquad s + p < 4, \qquad \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t \partial x^3} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$$

(1.5.1) жүйесін және (1.5.2)-(1.5.3) шеттік шарттарды Ω облысында қанағаттандыратын болса, онда $u(t,x)$ функциясы (1.5.1)-(1.5.3) есебінің шешімі деп аталады.

$v(t,x) = \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}$ жаңа белгісіз функцияны енгіземіз. (1.5.3) шарттарын ескере отырып келесі интегралдық қатынастарды аламыз:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \psi_2(t) + \int_0^x v(t,\xi) d\xi, \qquad (1.5.4)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \int_0^x (x - \xi) v(t,\xi) d\xi, \qquad (1.5.5)$$

$$u(t,x) = \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2(t)\frac{x^2}{2!} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^2}{2!} v(t,\xi) d\xi. \qquad (1.5.6)$$

(1.5.4)-(1.5.6) интегралдық қатынастан t айнымалысы бойынша олардың дербес туындысын табамыз:

$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi, \qquad (1.5.7)$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x + \int_0^x (x-\xi) \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi, \qquad (1.5.8)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_0(t) + \dot{\psi}_1(t)x + \dot{\psi}_2(t)\frac{x^2}{2!} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^2}{2!} \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi. \qquad (1.5.9)$$

(1.5.4)-(1.5.9) интегралдық қатынастарды қолдана отырып, (1.5.1)-(1.5.3) есебін келесі пара-пар есепке келтіреміз:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_1(t,x)v + \int_0^x \left\{K_1(t,x,\xi)\frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} + K_2(t,x,\xi)v(t,\xi)\right\} d\xi + F(t,x), \qquad (1.5.10)$$

$$\sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)v(t_j,x) + \sum_{j=0}^{m} \int_0^x L_j(x,\xi)v(t_j,\xi)d\xi = \Phi(x), \qquad (1.5.11)$$

мұндағы

$$K_1(t,x,\xi) = B_1(t,x) + B_2(t,x)(x-\xi) + B_3(t,x)\frac{(x-\xi)^2}{2!},$$

$$K_2(t,x,\xi) = A_2(t,x) + A_3(t,x)(x-\xi) + C(t,x)\frac{(x-\xi)^2}{2!},$$

$$F(t,x) = A_2(t,x)\psi_2(t) + A_3(t,x)[\psi_1(t) + \psi_2(t)x] + C(t,x)[\psi_0(t) + \psi_1(t)x +$$
$$+\psi_2(t)\frac{x^2}{2!}] + B_1(t,x)\dot{\psi}_2(t) + B_2(t,x)\left[\dot{\psi}_1(t) + \dot{\psi}_2(t)x\right] +$$
$$+B_3(t,x)\left[\dot{\psi}_0(t) + \dot{\psi}_1(t)x + \dot{\psi}_2(t)\frac{x^2}{2!}\right] + f(t,x),$$

$$L_j(x,\xi) = M_{2,j}(x) + M_{1,j}(x)(x-\xi) + M_{0,j}(x)\frac{(x-\xi)^2}{2!},$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \sum_{j=0}^{m}\left\{M_{2,j}(x)\psi_2(t_j) + M_{1,j}(x)\left[\psi_1(t_j) + \psi_2(t_j)x\right] + \right.$$
$$\left. +M_{0,j}(x)[\psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2(t)\frac{x^2}{2!}]\right\}.$$

$v{:}\,\Omega \to R^n$ үзіліссіз функциясы мен оның t айнымалысына қатысты үзіліссіз туындысы (1.5.10) жүйені және (1.5.11) шартты $x \in [0,\omega]$ қанағаттандырса, онда $v(t,x)$ функциясы (1.5.10)-(1.5.11) қарапайым интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік бейлокалды есебінің шешімі деп аталады.

(1.5.1)-(1.5.3) есебінің $u^*(t,x)$ шешімі болсын. Сонда $v^*(t,x) = \frac{\partial^3 u^*(t,x)}{\partial x^3}$ теңдігімен анықталады $v^*(t,x)$ функциясы (1.5.10), (1.5.11) есебінің шешімі болып табылады. Және керсінше, (1.5.10), (1.5.11) есебінің шешімі $\tilde{v}(t,x)$ болса, онда (1.5.1)-(1.5.3) есебінің шешімі $\tilde{u}(t,x)$ келесідей теңдікпен анықталады:

$$\tilde{u}(t,x) = \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2(t)\frac{x^2}{2!} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^2}{2!}\tilde{v}(t,\xi)d\xi.$$

(1.5.10), (1.5.11) есебі интегралдық шартты бірінші ретті қарапайым интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есептер тобынан болады. (1.5.10), (1.5.11) есебі параметрлік жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есебі ретінде түсіндірілуі мүмкін [20]. x айнымалысы параметр рөлін атқарады және $[0,\omega]$ өзгереді.

Бекітілген $x \in [0,\omega]$ үшін (1.5.10), (1.5.11) есебі - интегралды шартты сызықты қарапайым интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есеп. x айнымалысы $[0,\omega]$ аралығынан мәндер қабылдайтын болсын, содан кейін интегралды шартты қарапайым интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есептер тобын аламыз. (1.5.10) жүйедегі ізделінді функцияның интегралы және оның туындысы x айнымалысына тәуелді.

(1.5.10) қарапайым интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне арналған әртүрлі шеттік есептерді көптеген авторлар зерттеді ([20,б. 82][49, б. 390], [56] және олардың библиографиясын қара). (1.5.10), (1.5.11) есебінен $v(t,x)$ функциясын таба отырып, біз (1.5.6) интегралдық қатынастан $u(t,x)$ функциясын анықтаймыз, бұл (1.5.1)-(1.5.3) есебінің шешімі болып табылады.

(1.5.10), (1.5.11) интегралдық шарттары бар қарапайым интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есептер тобын қарастырамыз.

Келесі теорема

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_1(t,x)v$$

жүйесінің фундаменталды матрицасы көмегімен (1.5.10), (1.5.11) есебінің бірмәнді шешілуінің шарттарын қамтамасыз етеді.

Оның дәлелдеуіне Гронуолл-Беллман теңсіздігінің келесі дербес жағдайы қолданылады.

$\alpha, \beta \in R,\ \beta \geq 0$ және $w[0,\omega]$ аралығында анықталған үзіліссіз функция болсын.

Егер w интегралдық теңсіздікті қанағаттандырса

$$w(x) \leq \alpha + \beta \int_0^x w(s)ds, \qquad \forall x \in [0, \omega],$$

онда $w(x) \leq \alpha e^{\beta x}$, $\forall x \in [0, \omega]$.

1.5.1 теорема. Егер $Q(x) - n \times n$-матрицасы $[0, \omega]$ аралығында қайтымды болса

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x) X(t_j, x),$$

онда (1.5.10), (1.5.11) есебі бірмәнді шешіледі және $v^*(t, x)$ шешіміне $[0, \omega]$ аралығында келесі бағалау орынды

$$\max_{t \in [0,T]} \|v^*(t, x)\| \leq \tilde{C} \max\left(\max_{t \in [0,T]} \|F(t, x)\|, \|\Phi(x)\|\right)$$

болады,
мұнда $\tilde{C} > 0$ - x, v^*, F және Φ тәуелсіз тұрақты, I- бірлік матрица, X - Коши есебінің шешімі:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A_1(t, x)X, \qquad X(0, x) = I.$$

Дәлелдеуі. (1.5.10), (1.5.11) есебін шешу үшін итерациялық әдісті қолданамыз. (1.5.10) жүйенің барлық $(t, \xi) \in \Omega$ үшін оң жағындағы интегралдық шартпен (1.5.11) шарттары

$$\frac{\partial v(t, \xi)}{\partial t} = v(t, \xi) = 0$$

болсын. Содан кейін, келесі есепті аламыз:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_1(t, x)v + F(t, x), \tag{1.5.12}$$

$$\sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x) v\big(t_j, x\big) = \Phi(x). \tag{1.5.13}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A_1(t, x)X, \quad X(0, x) = I.$$

мұндағы $X -$ Коши есебінің шешімі болсын.
Коши формуласы бойынша вектор-функция

$$v(t,x) = X(t,x)c(x) + X(t,x)\int_0^t X^{-1}(\tau,x)F(\tau,x)d\tau \qquad (1.5.14)$$

әрбір $c(x) \in C([0,\omega],R^n)$ үшін (1.5.12) жүйенің шешімі болып табылады. Керісінше, (1.5.12) жүйенің әр шешімі үшін $c(x) \in C([0,\omega],R^n)$ бар болады және (1.5.14) формула орын алады

(1.5.14) формуланы (1.5.13) формулаға қоя отырып, келесіні аламыз:

$$\sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)X(t_j,x)\,c(x) + \sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)X(t_j,x)\int_0^{t_j} X^{-1}(\tau,x)F(\tau,x)d\tau = \Phi(x),$$

мұндағы $x \in [0,\omega]$. Бұл мынаны білдіреді

$$Q(x)c(x) = \Phi(x) - \sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)X(t_j,x)\int_0^{t_j} X^{-1}(\tau,x)F(\tau,x)d\tau\,, \qquad (1.5.15)$$

Егер $Q(x)$–$n \times n$-матрицасы $[0,\omega]$ аралығында қайтымды болса, онда (1.5.15) функционалды теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімі болады

$$c^{(0)}(x) = Q^{-1}(x)\left\{\Phi(x) - \sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)X(t_j,x)\int_0^{t_j} X^{-1}(\tau,x)F(\tau,x)d\tau\right\}. \quad (1.5.16)$$

(1.5.14) формуладағы $c(x)$–ті $c^*(x)$ - ге ауыстыру арқылы, біз (1.5.12), (1.5.13) есептер тобының жалғыз шешімінің келесі түрде аламыз

$$v^{(0)}(t,x) = X(t,x)Q^{-1}(x)\left\{\Phi(x) - \sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)X(t_j,x)\int_0^{t_j} X^{-1}(\tau,x)F(\tau,x)d\tau\right\} +$$

$$+X(t,x)\int_0^t X^{-1}(\tau,x)F(\tau,x)d\tau. \qquad (1.5.17)$$

$v^{(0)}$ шешімі келесі бағалауды қанағаттандырады

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(0)}(t,x)\right\| \le C_0 \max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|\,, \|\Phi(x)\|\right), \qquad (1.5.18)$$

мұндағы C_0 тұрақтысы F, Φ және $x \in [0,\omega]$ тәуелсіз.

Келесі бағалау орындалады:

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(0)}(t,x)\right\|\right), \tag{1.5.19}$$

мұндағы $\alpha_1 = \max_{(t,x)\in\Omega}\|A_1(t,x)\|$.

Сондықтан $Q(x)$ матрицасы $x \in [0,\omega]$ аралығында қайтымды болған жағдайда, (1.5.12), (1.5.13) есептер әулеті бірмәнді шешілімді және оның $v^{(0)}$ шешімі үшін (1.5.17) бағалау орындалады, яғни (1.5.12), (1.5.13) есебі қисынды болады.

Әрі қарай, біз барлық $(t,\xi) \in \Omega$ үшін (1.5.10) жүйенің оң жағындағы интегралдық бөлігіне және (1.5.11) шартында мынаны болжаймыз

$$\frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} = \frac{\partial v^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}, \qquad v(t,\xi) = v^{(0)}(t,\xi).$$

Келесі есепті аламыз:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_1(t,x)v + F^{(0)}(t,x), \tag{1.5.20}$$

$$\sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)v(t_j,x) = \Phi^{(0)}(x), \tag{1.5.21}$$

мұндағы

$$F^{(0)}(t,x) = \int_0^x \left\{K_1(t,x,\xi)\frac{\partial v^{(0)}(t,\xi)}{\partial t} + K_2(t,x,\xi)v^{(0)}(t,\xi)\right\}d\xi + F(t,x),$$

$$\Phi^{(0)}(x) = \Phi(x) - \sum_{j=0}^{m}\int_0^x L_j(x,\xi)v^{(0)}(t_j,\xi)d\xi.$$

(1.5.20), (1.5.21) көпнүктелік есептер әулетінен біз $v^{(1)}(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial v^{(0)}(t,\xi)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$ табамыз. Сол сияқты (1.5.15) шығатыны

$$\mathrm{Q}(x)c(x) = \Phi^{(0)}(x) -$$

$$-\sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)X(t_j,x)\int_0^{t_j} X^{-1}(\tau,x)F^{(0)}(\tau,x)d\tau, \quad x \in [0,\omega]. \tag{1.5.22}$$

Егер $Q(x) - n \times n$-матрицасы $[0,\omega]$ аралығында қайтымды болса, онда (1.5.22) функционалды теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімі болады

$$c(x) = \mathrm{Q}^{-1}(x)\big\{\Phi^{(0)}(x) -$$

$$-\sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)X(t_j,x)\int_0^{t_j} X^{-1}(\tau,x)F^{(0)}(\tau,x)d\tau\Bigg\}, \quad x \in [0,\omega]. \qquad (1.5.23)$$

Осылайша, біз (1.5.20), (1.5.21) есептер әулетінің жалғыз шешімін келесі түрде аламыз

$$v^{(1)}(t,x) = X(t,x)Q^{-1}(x)\left\{\Phi^{(0)}(x) - \sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)X(t_j,x) \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^{t_j} X^{-1}(\tau,x)F^{(0)}(\tau,x)d\tau\right\} + X(t,x)\int_0^{t} X^{-1}(\tau,x)F^{(0)}(\tau,x)d\tau. \qquad (1.5.24)$$

$v^{(1)}(t,x)$ шешімі мен оның $\frac{\partial v^{(1)}(t,x)}{\partial t}$туындысы келесі бағалауларға сәйкес келеді:

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(1)}(t,x)\right\| \leq C_0 \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|F^{(0)}(t,x)\right\|, \left\|\Phi^{(0)}(x)\right\|\right), \qquad (1.5.25)$$

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(1)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(1)}(t,x)\right\|\right) \leq$$

$$\leq \max(\alpha_1 C_0 + 1, C_0)\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|F^{(0)}(t,x)\right\|, \left\|\Phi^{(0)}(x)\right\|\right). \qquad (1.5.26)$$

Осыдан, $F^{(0)}(t,x)$, $\Phi^{(0)}(x)$ және (1.5.19) бағалауды ескере отырып, шығатыны:

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(1)}(t,x)\right\| \leq C_0\left\{C_1\int_0^{x} \max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,\xi)\|, \|\Phi(\xi)\|\right)d\xi +\right.$$

$$\left.+\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right)\right\}, \qquad (1.5.27)$$

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(0)}(t,x)\right\|\right) \leq$$

$$\leq \max(\alpha_1 C_0 + 1, C_0)\left\{C_1\int_0^{x} \max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,\xi)\|, \|\Phi(\xi)\|\right)d\xi +\right.$$

$$\left.+\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right)\right\}, \qquad (1.5.28)$$

мұндағы

$$C_1 = \max\left([k_1 + k_2] \max(\alpha_1 C_0 + 1, C_0), \sum_{j=0}^{m} l_j C_0 \right),$$

$$k_i = \max_{(t,x,\xi)\in\Omega\times[0,\omega]} \|K_i(t,x,\xi)\|, \qquad i = 1,2, \;\; l_j = \max_{x\in[0,\omega]} \left\|L_j(x)\right\|, \;\; j = \overline{0,m}.$$

Осы процесті k-шы қадамға дейін жалғастыра отырып, $v^{(k)}(t,x)$ (k=1,2,...) функциясын табу үшін біз келесі есепті аламыз

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_1(t,x)v + F^{(k-1)}(t,x), \qquad (1.5.29)$$

$$\sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x) v\left(t_j, x\right) = \Phi^{(k-1)}(x), \qquad (1.5.30)$$

мұндағы

$$F^{(k-1)}(t,x) = \int_0^x \left\{ K_1(t,x,\xi) \frac{\partial v^{(k-1)}(t,\xi)}{\partial t} + K_2(t,x,\xi) v^{(k-1)}(t,\xi) \right\} d\xi + F(t,x),$$

$$\Phi^{(k-1)}(x) = \Phi(x) - \sum_{j=0}^{m} \int_0^x L_j(\,x,\xi) v^{(k-1)}\left(t_j,\xi\right) d\xi.$$

(1.5.29), (1.5.30) есептер әулетінің жалғыз шешімі келесі түрде болады:

$$v^{(k)}(t,x) = X(t,x)Q^{-1}(x) \left\{ \Phi^{(k-1)}(x) - \sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x) X\left(t_j,x\right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{t_j} X^{-1}(\tau,x) F^{(k-1)}(\tau,x) d\tau \right\} + X(t,x) \int_0^t X^{-1}(\tau,x) F^{(k-1)}(\tau,x) d\tau. \qquad (1.5.31)$$

$v^{(k)}(t,x)$ үшін келесі бағалау орынды:

$$\max_{t\in[0,T]} \left\|v^{(k)}(t,x)\right\| \le C_0 \max\left(\max_{t\in[0,T]} \left\|F^{(k-1)}(t,x)\right\|, \left\|\Phi^{(k-1)}(x)\right\| \right), \qquad (1.5.32)$$

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t} \right\|, \max_{t\in[0,T]} \left\|v^{(k)}(t,x)\right\| \right) \le$$

$$\le \max(\alpha_1 C_0 + 1, C_0) \max\left(\max_{t\in[0,T]} \left\|F^{(k-1)}(t,x)\right\|, \left\|\Phi^{(k-1)}(x)\right\| \right). \qquad (1.5.33)$$

Демек, біз мына теңіздіктерді аламыз:

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(k)}(t,x)\right\| \leq C_0\left\{C_1\int_0^x \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(k-1)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|, \left\|v^{(k-1)}(t,\xi)\right\|\right)d\xi + \right.$$

$$\left. + \max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right)\right\}, \qquad (1.5.34)$$

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(k)}(t,x)\right\|\right) \leq$$

$$\leq \max(\alpha_1 C_0 + 1, C_0)\left\{C_1\int_0^x \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(k-1)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|, \left\|v^{(k-1)}(t,\xi)\right\|\right)d\xi + \right.$$

$$\left. + \max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right)\right\}. \qquad (1.5.35)$$

Келесі есепті қарастырамыз:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_1(t,x)v + F^{(k)}(t,x), \qquad (1.5.36)$$

$$\sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)v(t_j,x) = \Phi^{(k)}(x). \qquad (1.5.37)$$

(1.5.36), (1.5.37) есебінен $v^{(k+1)}(t,x)$ функциясын және оның $\frac{\partial v^{(k+1)}(t,x)}{\partial t}$ туындысын барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін табамыз. (1.5.29), (1.5.30) және (1.5.36), (1.5.37) есептерінің сәйкесінше $v^{(k)}(t,x)$ және $v^{(k+1)}(t,x)$ шешімдерін пайдалана отырып, барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін $\Delta z^{(k+1)}(t,x) = \frac{\partial v^{(k+1)}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}$ және $\Delta v^{(k+1)}(t,x) = v^{(k+1)}(t,x) - v^{(k)}(t,x)$ айырмаларды құрастырамыз. Онда $\Delta v^{(k+1)}(t,x)$ функциясы келесі есептің шешімі болып табылады

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial t} = A_1(t,x)\Delta v + F^{(k)}(t,x) - F^{(k-1)}(t,x), \qquad (1.5.38)$$

$$\sum_{j=0}^{m} M_{3,j}(x)\Delta v(t_j,x) = \Phi^{(k)}(x) - \Phi^{(k-1)}(x). \qquad (1.5.39)$$

(1.5.32)-(1.5.35) теңсіздіктерін ескере отырып және $F^{(k)}(t,x)$, $\Phi^{(k)}(x)$ функциялары $\mathrm{k} = 1,2,3,\ldots$ үшін келесі бағалауларды аламыз:

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\Delta v^{(k+1)}(t,x)\right\| \leq$$

$$\leq C_0C_1\int_0^x \max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\Delta z^{(k)}(t,\xi)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\Delta v^{(k)}(t,\xi)\right\|\right)d\xi, \qquad (1.5.40)$$

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\Delta z^{(k+1)}(t,x)\right\|,\max_{t\in[0,T]}\left\|\Delta v^{(k+1)}(t,x)\right\|\right)\le$$

$$\le\max(\alpha_1 C_0+1,C_0)\,C_1\int_0^x\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\Delta z^{(k)}(t,\xi)\right\|,\left\|\Delta v^{(k)}(t,\xi)\right\|\right)d\xi. \quad (1.5.41)$$

(1.5.41) бағалаудан шығатыны: $\{v^{(k)}(t,x)\}$, $\{z^{(k)}(t,x)\}$ тізбектері $k\to\infty$ ұмтылғанда сәйкесінше $v^*(t,x)$ және $z^*(t,x)$ функцияларына барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін жинақталады. Бұл жағдайда $v^*(t,x)$ және $z^*(t,x)$ шекті функциялары Ω-де үзіліссіз болады. Сонымен қатар, $z^*(t,x)=\frac{\partial v^*(t,x)}{\partial t}$ теңдігі барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін орынды болады.

(1.5.35), (1.5.34) бағалауларынан $k\to\infty$ ұмтылғанда және Гронуолл-Беллман теңсіздігін қолдана отырып, біз келесі бағалауды аламыз:

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^*}{\partial t}\right\|,\max_{t\in[0,T]}\|v^*\|\right)\le C_2e^{C_2x}\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|,\|\Phi(x)\|\right) \quad (1.5.42)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|v^*(t,x)\|\le C_0(C_1C_2e^{C_2x}+1)\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|,\|\Phi(x)\|\right), \quad (1.5.43)$$

мұндағы

$$C_2=\max(\alpha_1C_0+1,C_0)\,C_1.$$

Сонымен, біз (1.5.10), (1.5.11) есептер әулетінің шешімін таптық.

(1.5.10), (1.5.11) есебінің шешімінің жалғыздығын көрсетеміз. $v^*(t,x)$ және $v^{**}(t,x)$ функциялары (1.5.10), (1.5.11) есебінің шешімдері болсын.

$z^*(t,x)=\frac{\partial v^*(t,x)}{\partial t}$ және $z^{**}(t,x)=\frac{\partial v^{**}(t,x)}{\partial t}$ болсын.

$v^*(t,x)-v^{**}(t,x)$, $z^*(t,x)-z^{**}(t,x)$ айырмалары үшін (1.5.34), (1.5.35) теңсіздіктерді қолдана отырып, біз аламыз

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|z^*(t,x)-z^{**}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|v^*(t,x)-v^{**}(t,x)\|\right)\le$$

$$\le C_2\int_0^x\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|z^*(t,\xi)-z^{**}(t,\xi)\|,\max_{t\in[0,T]}\|v^*(t,\xi)-v^{**}(t,\xi)\|\right)d\xi. \quad (1.5.44)$$

Гронуолл-Беллман теңсіздігін кез келген $0\le x\le\omega$ үшін қайта қолданып, келесіні аламыз

$$\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|z^*(t,x)-z^{**}(t,x)\|,\right.$$
$$\left.\max_{t\in[0,T]}\|v^*(t,x)-v^{**}(t,x)\|\right\}\le 0\cdot e^{C_2x}=0 \quad (1.5.45)$$

(1.5.45) бағалаудан барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін $z^*(t,x)\equiv z^{**}(t,x)$ және $v^*(t,x)\equiv v^{**}(t,x)$ шығады. Бұл (1.5.10), (1.5.11) есептің $v^*(t,x)$, $z^*(t,x)$ және $v^{**}(t,x)$, $z^{**}(t,x)$ екі шешімі деген болжамымызға қайшы келеді. Сондықтан, (1.5.10), (1.5.11) есебі бірмәнді шешілімді. Соңында, (1.5.40) теңсіздігі теоремада көрсетілген теңсіздікті білдіреді: $\tilde{C}=C_0(C_1C_2e^{C_2\omega}+1)$.

(1.5.1)-(1.5.3) есебінің бірмәнді шешілуі.

Біз (1.5.1)-(1.5.3) есебіне пара-пар (1.5.10), (1.5.11) есебін қарастырамыз.

Егер біз (1.5.10), (1.5.11) есебінің $v(t,x)$ шешімін білсек, онда интегралдық қатынастан

$$u(t,x)=\psi_0(t)+\psi_1(t)x+\psi_2(t)\frac{x^2}{2!}+\int_0^x\frac{(x-\xi)^2}{2!}v(t,\xi)d\xi, \qquad (1.5.46)$$

$u(t,x)$ функциясын табамыз.

Келесі теорема (1.5.1)-(1.5.3) есебінің бірмәнді шешілуі үшін жеткілікті жағдайларды қамтамасыз етеді.

1.5.2 теорема. Егер $Q(x)-n\times n$-матрицасы барлық $x\in[0,\omega]$ үшін қайтымды

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{m}M_{3,j}(x)X(t_j,x)$$

болса, мұндағы X –Коши есебінің шешімі:

$$\frac{\partial X}{\partial t}=A_1(t,x)X, \qquad X(0,x)=I$$

және I −бірлік матрица.

Онда (1.5.1)-(1.5.3) есебінің жалғыз шешімі болады және оның $u^*(t,x)$ шешімі үшін келесі бағалау орынды:

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|v^{(k)}(t,x)\right\|\le C_0\left\{C_1\int_0^x\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(k-1)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|,\left\|v^{(k-1)}(t,\xi)\right\|\right)d\xi+\right.$$
$$\max\left\{\left\|\frac{\partial^4u^*}{\partial x^3\partial t}\right\|_0,\left\|\frac{\partial^3u^*}{\partial x^3}\right\|_0,\left\|\frac{\partial^3u^*}{\partial x^2\partial t}\right\|_0,\left\|\frac{\partial^2u^*}{\partial x^2}\right\|_0,\left\|\frac{\partial^2u^*}{\partial x\partial t}\right\|_0,\left\|\frac{\partial u^*}{\partial x}\right\|_0,\left\|\frac{\partial u^*}{\partial t}\right\|_0,\|u^*\|_0\right\}\le$$
$$\le\hat{C}\max\{\|\psi_0\|_1,\|\psi_1\|_1,\|\psi_2\|_1,\|\varphi\|_0,\|f\|_0\}$$

$\hat{C}>0$ тұрақтысы $u^*,\psi_0,\psi_1,\psi_2,\varphi$ және f функцияларынан тәуелсіз.

Дәлелдеуі. Теореманың шарттары орындалатын болсын. Содан кейін, 1.5.1 теоремаға сәйкес, (1.5.10), (1.5.11) интегралдық шартты көпнүктелік шеттік есептердің әулеті бірмәнді шешіледі және $v^*(t,x)$ шешімі үшін (1.5.42), (1.5.43) теңсіздіктері орынды. (1.5.46) интегралдық қатынасты қолдана отырып $u^*(t,x)$ функциясын анықтаймыз:

$$u^*(t,x)=\psi_0(t)+\psi_1(t)x+\psi_2(t)\frac{x^2}{2!}+\int\limits_0^x\frac{(x-\xi)^2}{2!}v^*(t,\xi)d\xi. \qquad (1.5.47)$$

Бұл келесі теңдеулерді білдіреді:

$$\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial x}=\psi_1(t)+\psi_2(t)x+\int\limits_0^x(x-\xi)v^*(t,\xi)d\xi, \qquad (1.5.48)$$

$$\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial t}=\dot{\psi}_0(t)+\dot{\psi}_1(t)x+\dot{\psi}_2(t)\frac{x^2}{2!}+\int\limits_0^x\frac{(x-\xi)^2}{2!}\frac{\partial v^*(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \quad (1.5.49)$$

$$\frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial x^2}=\psi_2(t)+\int\limits_0^x v^*(t,\xi)d\xi, \qquad (1.5.50)$$

$$\frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial x\partial t}=\dot{\psi}_1(t)+\dot{\psi}_2(t)x+\int\limits_0^x(x-\xi)\frac{\partial v^*(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \qquad (1.5.51)$$

$$\frac{\partial^3 u^*(t,x)}{\partial x^2\partial t}=\dot{\psi}_2(t)+\int\limits_0^x\frac{\partial v^*(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \qquad (1.5.52)$$

$$\frac{\partial^3 u^*(t,x)}{\partial x^3}=v^*(t,x), \qquad (1.5.53)$$

$$\frac{\partial^4 u^*(t,x)}{\partial x^3\partial t}=\frac{\partial v^*(t,x)}{\partial t}, \qquad (1.5.54)$$

(1.5.10), (1.5.11) есептегі $K_1(t,x,\xi)$, $K_2(t,x,\xi)$, $L_j(\,x,\xi)$, $\;j=\overline{0,m}$ матрицалар мен $F(t,x)$, $\Phi(x)$ векторларының орнына тиісті өрнектермен алмастырамыз

$$\frac{\partial v^*}{\partial t}=A_1(t,x)v^*+B_1(t,x)\left[\dot{\psi}_2(t)+\int\limits_0^x\frac{\partial v^*(t,\xi)}{\partial t}d\xi\right]+A_2(t,x)[\psi_2(t)+$$

$$+\int\limits_0^x v^*(t,\xi)d\xi\Bigg]+B_2(t,x)\left[\dot{\psi}_1(t)+\dot{\psi}_2(t)x+\int\limits_0^x(x-\xi)\frac{\partial v^*(t,\xi)}{\partial t}d\xi\right]+$$

$$+A_3(t,x)\left[\psi_1(t)+\psi_2(t)x+\int\limits_0^x(x-\xi)v^*(t,\xi)d\xi\right]+B_3(t,x)\Big[\dot{\psi}_0(t)+\dot{\psi}_1(t)x+$$

$$+\dot{\psi}_2(t)\frac{x^2}{2!}+\int\limits_0^x\frac{(x-\xi)^2}{2!}\frac{\partial v^*(t,\xi)}{\partial t}d\xi\Bigg]+C(t,x)\Bigg[\psi_0(t)+\psi_1(t)x+\psi_2(t)\frac{x^2}{2!}+$$

$$+\int_0^x \frac{(x-\xi)^2}{2!} v^*(t,\xi)d\xi\Bigg] + f(t,x), \qquad (1.5.55)$$

$$\sum_{j=0}^{m} \Bigg\{ M_{3,j}(x) v^*(t_j,x) + M_{2,j}(x) \left[\psi_2(t_j) + \int_0^x v^*(t_j,\xi)d\xi \right] +$$

$$+M_{1,j}(x) \left[\psi_1(t_j) + \psi_2(t_j)x + \int_0^x (x-\xi) v^*(t_j,\xi)d\xi \right] + M_{0,j}(x) \Big[\psi_0(t_j) +$$

$$+\psi_1(t_j)x + \psi_2(t_j)\frac{x^2}{2!} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^2}{2!} v^*(t_j,\xi)d\xi \Big] \Bigg\} = \varphi(x). \qquad (1.5.56)$$

(1.5.55), (1.5.56) есебіндегі тік жақшаларды (1.5.47)-(1.5.54) өрнектермен сәйкес алмастыра отырып, біз есепті аламыз

$$\frac{\partial^4 u^*(t,x)}{\partial t \partial x^3} = \sum_{i=1}^{3} \Bigg\{ A_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u^*(t,x)}{\partial x^{4-i}} +$$

$$+B_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u^*(t,x)}{\partial t \partial x^{3-i}} \Bigg\} + C(t,x) u^*(t,x) + f(t,x), \qquad (1.5.57)$$

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{3} M_{ij}(x) \frac{\partial^i u^*(t_j,x)}{\partial x^i} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega]. \qquad (1.5.58)$$

(1.5.47), (1.5.48) және (1.5.50) өрнектерінен $x = 0$ үшін келесіні орнатылады

$$u^*(t,0) = \psi_0(t), \qquad \left. \frac{\partial u^*(t,x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_1(t), \qquad \left. \frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \psi_2(t). \quad (1.5.59)$$

Осыдан $u^*(t,x)$ функциясы (1.5.1)-(1.5.3) есебінің шешімі болып табылады. (1.5.42) теңсіздігін және (1.5.48)-(1.5.54) интегралдық қатынастарды ескере отырып, біз келесі бағалауды аламыз:

$$\max\Bigg\{ \left\| \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^3 \partial t} \right\|_0, \left\| \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} \right\|_0, \left\| \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^2 \partial t} \right\|_0, \left\| \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \right\|_0, \left\| \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial t} \right\|_0, \left\| \frac{\partial u^*}{\partial x} \right\|_0,$$

$$\left\| \frac{\partial u^*}{\partial t} \right\|_0, \|u^*\|_0 \Bigg\} \le C_3 \max\{ \|\psi_0\|_1, \|\psi_1\|_1, \|\psi_2\|_1, \|\varphi\|_0, \|f\|_0 \}, \qquad (1.5.60)$$

мұндағы

$$C_3 = 1 + \max(1,\omega) + \max\left(1,\omega,\frac{\omega^2}{2}\right) + C_2 \left[1 + \omega \max\left(1,\omega,\frac{\omega^2}{2}\right) \right] e^{C_2 \omega}.$$

(1.5.10), (1.5.11) есебінің шешімнің бірмәнділігі (1.5.1)-(1.5.3) есебінің шешімінің бірмәнділігін білдіреді. Сондықтан (1.5.1)-(1.5.3) есебінің $u^*(t,x)$ шешімі бірмәнді және $\hat{C} = C_3$ үшін (1.5.47) бағалауын қанағаттандырады.

2 ТӨРТІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ (II) ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

Бұл тарауда

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ + A_5(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_8(t,x)u + f(t,x), \quad (II)$$

төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есептер қарастырылады. Жаңа функциялар енгізу арқылы қарастырылып отырған есептер пара-пар екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал есептерге келтіріледі. Пара-пар есептің бірмәнді шешілімділігі шарттары мен шешімдерін табу жолдары ұсынылады. Зерттеліп отырған төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі (II) үшін бастапқы-шеттік есептердің шешімінің болуы мен жалғыздығы шарттары тағайындалады.

2.1 Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесіне (II) арналған Гурса тектес есеп

$\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ облысында төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса тектес есебін келесі түрде қарастырамыз

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ + A_5(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_8(t,x)u + f(t,x), \quad (2.1.1)$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t\epsilon[0,T], \quad (2.1.2)$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad x\epsilon[0,\omega], \quad (2.1.3)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t\epsilon[0,T], \quad (2.1.4)$$

$$\left.\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2}\right|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad x\epsilon[0,\omega], \quad (2.1.5)$$

мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A_i(t,x) -\ n \times n$-матрицалары, $i = \overline{1,8}$ және $f(t,x)$–n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$–n-вектор-фукциялары $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданады, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$–n-вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданады. Келесі келісілімділік шарты орынды:

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0).$$

$u(t,x) \in C(\Omega, \mathrm{R}^n)$ функциясы мен дербес туындылары

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),$$
$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^2 \partial x} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n), \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^2 \partial x^2} \in C(\Omega, \mathrm{R}^n),$$

(2.1.1) жүйесін және (2.1.2)-(2.1.5) шеттік шарттарды қанағаттандыратын болса, онда $u(t,x)$ функциясы (2.1.1)-(2.1.5) есебінің шешімі деп аталады.

(2.1.1)-(2.1.5) есебін $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} = U(t,x)$ алмастыруы арқылы пара-пар екінші ретті гиперболалық типтегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін интегралды шартты бейлокалды есепке келтіреміз

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial U}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial U}{\partial t} + A_3(t,x)U + F(t,x,u) + f(t,x), \quad (2.1.6)$$

$$U(t,0) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial U(0,x)}{\partial x} = \varphi_2(x), \quad x \in [0,\omega], \quad (2.1.8)$$

$$u(t,x) = \varphi_1(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0) + \int_0^t \int_0^x U(\tau,\xi)d\xi\, d\tau, \quad (2.1.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + \int_0^t U(\tau,x)d\tau, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \int_0^x U(t,\xi)d\xi, \quad (2.1.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \ddot{\varphi}_1(x) + \int_0^t \frac{\partial U(\tau,x)}{\partial x}d\tau, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{\psi}_1(t) + \int_0^x \frac{\partial U(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \quad (2.1.11)$$

мұндағы

$$F(t,x,u) = A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_5(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_8(t,x)u.$$

(2.1.8) шарты x бойынша интегралданады:

$$\int_0^x \frac{\partial U(0,\xi)}{\partial \xi}d\xi = \int_0^x \varphi_2(\xi)d\xi,$$

$$U(0,x) - U(0,0) = \int_0^x \varphi_2(\xi)d\xi,$$

$$U(0,0) = \psi_2(0),$$

$$U(0,x) = \int_0^x \varphi_2(\xi)d\xi + \psi_2(0)$$

$$\big(U(t,x), \qquad u(t,x)\big).$$

Алгоритм. Бастапқы қадам. 1)

$$u(t,x) = \varphi_1(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0),$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t), \quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \ddot{\varphi}_1(x), \quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \ddot{\psi}_1(t)$$

деп алайық және $F^{(0)}(t,x,u)$ функциясы келесі түрде болсын:

$$F^{(0)}(t,x,u) = A_4(t,x)\ddot{\psi}_1(t) + A_5(t,x)\ddot{\varphi}_1(x) + A_6(t,x)\dot{\psi}_1(t) +$$
$$+A_7(t,x)\dot{\varphi}_1(x) + A_8(t,x)[\varphi_1(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0)].$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial U}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial U}{\partial t} + A_3(t,x)U + F^{(0)}(t,x,u) + f(t,x), \quad (2.1.12)$$

$$U(t,0) = \psi_2(t), \quad t\epsilon[0,T], \quad (2.1.13)$$

$$U(0,x) = \int_0^x \varphi_2(\xi)d\xi + \psi_2(0), \quad x\epsilon[0,\omega]. \quad (2.1.14)$$

(2.1.12)-(2.1.14) Гурса есебі интегралдық қатынастарға пара-пар

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} = \varphi_2(x) + \int_0^t \bigg[A_1(\tau,x)\frac{\partial U(\tau,x)}{\partial x} + A_2(\tau,x)\frac{\partial U(\tau,x)}{\partial \tau} +$$
$$+A_3(\tau,x)U(\tau,x) + F^{(0)}(\tau,x,u) + f(\tau,x)\bigg]d\tau, \quad (2.1.15)$$

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \bigg[A_1(t,\xi)\frac{\partial U(t,\xi)}{\partial \xi} + A_2(t,\xi)\frac{\partial U(t,\xi)}{\partial t} +$$
$$+A_3(t,\xi)U(t,\xi) + F^{(0)}(t,\xi,u) + f(t,\xi)\bigg]d\xi, \quad (2.1.16)$$

$$U(t,x) = \int_0^x \int_0^t \bigg[A_1(\tau,\xi)\frac{\partial U(\tau,\xi)}{\partial \xi} + A_2(\tau,\xi)\frac{\partial U(\tau,\xi)}{\partial \tau} +$$

$$+A_3(\tau,\xi)U(\tau,\xi) + F^{(0)}(\tau,\xi,u) + f(\tau,\xi)\bigg]d\tau d\xi + \int_0^x \varphi_2(\xi)d\xi + \psi_2(t). \quad (2.1.17)$$

(2.1.15)-(2.1.17) интегралдық қатынастар жүйесін шешу арқылы бастапқы жуықтауды табамыз:

$$U^{(0)}(t,x), \quad \frac{\partial U^{(0)}(t,x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial U^{(0)}(t,x)}{\partial t}.$$

2) $U(t,x) = U^{(0)}(t,x)$ болғанда (2.1.9)-(2.1.11) интегралдық қатынастардан

$$u^{(0)}(t,x)=\varphi_1(x)+\psi_1(t)-\psi_1(0)+\int_0^t\int_0^x U^{(0)}(\tau,\xi)d\xi\, d\tau,$$

$$\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial x}=\dot{\varphi}_1(x)+\int_0^t U^{(0)}(\tau,x)d\tau,\quad \frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t}=\dot{\psi}_1(t)+\int_0^x U^{(0)}(t,\xi)d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}(t,x)}{\partial x^2}=\ddot{\varphi}_1(x)+\int_0^t \frac{\partial U^{(0)}(\tau,x)}{\partial x}d\tau,\frac{\partial^2 u^{(0)}(t,x)}{\partial t^2}=\ddot{\psi}_1(t)+\int_0^x \frac{\partial U^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi$$

анықтаймыз.
1- ші қадам. 1)

$$u(t,x)=u^{(0)}(t,x),\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial x},\qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u^{(0)}(t,x)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u^{(0)}(t,x)}{\partial t^2}$$

деп алайық және $F^{(1)}(t,x,u)$ функциясы келесі түрде болсын:

$$F^{(1)}(t,x,u)=A_4(t,x)\frac{\partial^2 u^{(0)}(t,x)}{\partial t^2}+A_5(t,x)\frac{\partial^2 u^{(0)}(t,x)}{\partial x^2}+A_6(t,x)\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t}+$$
$$+A_7(t,x)\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial x}+A_8(t,x)u^{(0)}(t,x).$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}=A_1(t,x)\frac{\partial U}{\partial x}+A_2(t,x)\frac{\partial U}{\partial t}+A_3(t,x)U+F^{(1)}(t,x,u)+f(t,x)\qquad(2.1.18)$$

(2.1.18), (2.1.13), (2.1.14) Гурса есебі келесі интегралдық қатынастарға пара-пар

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}=\varphi_2(x)+\int_0^t\Big[A_1(\tau,x)\frac{\partial U(\tau,x)}{\partial x}+A_2(\tau,x)\frac{\partial U(\tau,x)}{\partial \tau}+$$
$$+A_3(\tau,x)U(\tau,x)+F^{(1)}(\tau,x,u)+f(\tau,x)\Big]d\tau,\qquad(2.1.19)$$

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=\dot{\psi}_2(t)+\int_0^x\Big[A_1(t,\xi)\frac{\partial U(t,\xi)}{\partial \xi}+A_2(t,\xi)\frac{\partial U(t,\xi)}{\partial t}+$$
$$+A_3(t,\xi)U(t,\xi)+F^{(1)}(t,\xi,u)+f(t,\xi)\Big]d\xi,\qquad(2.1.20)$$

$$U(t,x)=\int_0^x\int_0^t\Big[A_1(\tau,\xi)\frac{\partial U(\tau,\xi)}{\partial \xi}+A_2(\tau,\xi)\frac{\partial U(\tau,\xi)}{\partial \tau}+$$

$$+A_3(\tau,\xi)U(\tau,\xi)+F^{(1)}(\tau,\xi,u)+f(\tau,\xi)\big]d\tau d\xi+\int_0^x \varphi_2(\xi)d\xi+\psi_2(t). \quad (2.1.21)$$

(2.1.19)-(2.1.21) интегралдық қатынастарын шешу арқылы бірінші жуықтауды табамыз:

$$U^{(1)}(t,x),\quad \frac{\partial U^{(1)}(t,x)}{\partial x},\quad \frac{\partial U^{(1)}(t,x)}{\partial t}.$$

2) $U(t,x)=U^{(1)}(t,x)$ болғанда (2.1.9)-(2.1.11) интегралдық қатынастардан

$$u^{(1)}(t,x)=\varphi_1(x)+\psi_1(t)-\psi_1(0)+\int_0^t\int_0^x U^{(1)}(\tau,\xi)d\xi\, d\tau,$$

$$\frac{\partial u^{(1)}(t,x)}{\partial x}=\dot\varphi_1(x)+\int_0^t U^{(1)}(\tau,x)d\tau,\quad \frac{\partial u^{(1)}(t,x)}{\partial t}=\dot\psi_1(t)+\int_0^x U^{(1)}(t,\xi)d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}(t,x)}{\partial x^2}=\ddot\varphi_1(x)+\int_0^t \frac{\partial U^{(1)}(\tau,x)}{\partial x}d\tau,\frac{\partial^2 u^{(1)}(t,x)}{\partial t^2}=\ddot\psi_1(t)+\int_0^x \frac{\partial U^{(1)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi$$

анықтаймыз.
Және тағы сол сияқты.
k-ші қадам. 1)

$$u(t,x)=u^{(k-1)}(t,x),\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial x},\qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u^{(k-1)}(t,x)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t^2}$$

деп алайық және $F^{(k)}(t,x,u)$ функциясы келесі түрде болсын:

$$F^{(k)}(t,x,u)=A_4(t,x)\frac{\partial^2 u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t^2}+A_5(t,x)\frac{\partial^2 u^{(k-1)}(t,x)}{\partial x^2}+$$
$$+A_6(t,x)\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}+A_7(t,x)\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial x}+A_8(t,x)u^{(k-1)}(t,x).$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}=A_1(t,x)\frac{\partial U}{\partial x}+A_2(t,x)\frac{\partial U}{\partial t}+A_3(t,x)U+F^{(k)}(t,x,u), \qquad (2.1.22)$$

(2.1.22), (2.1.13), (2.1.14) Гурса есебі келесі интегралдық қатынастарға пара-пар

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} = \varphi_2(x) + \int_0^t \Big[A_1(\tau,x)\frac{\partial U(\tau,x)}{\partial x} + A_2(\tau,x)\frac{\partial U(\tau,x)}{\partial \tau} +$$

$$+A_3(\tau,x)U(\tau,x) + F^{(k)}(\tau,x,u) + f(\tau,x)\Big]d\tau, \qquad (2.1.23)$$

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \Big[A_1(t,\xi)\frac{\partial U(t,\xi)}{\partial \xi} + A_2(t,\xi)\frac{\partial U(t,\xi)}{\partial t} +$$

$$+A_3(t,\xi)U(t,\xi) + F^{(k)}(t,\xi,u) + f(x,\xi)\Big]d\xi, \qquad (2.1.24)$$

$$U(t,x) = \int_0^x \int_0^t \Big[A_1(\tau,\xi)\frac{\partial U(\tau,\xi)}{\partial \xi} + A_2(\tau,\xi)\frac{\partial U(\tau,\xi)}{\partial \tau} +$$

$$+A_3(\tau,\xi)U(\tau,\xi) + F^{(k)}(\tau,\xi,u) + f(\tau,\xi)\Big]d\tau d\xi + \int_0^x \varphi_2(\xi)d\xi + \psi_2(t). \quad (2.1.25)$$

(2.1.23)-(2.1.25) интегралдық қатынастар жүйесін шешу арқылы k-шы жуықтауды табамыз:

$$U^{(k)}(t,x), \quad \frac{\partial U^{(k)}(t,x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial U^{(k)}(t,x)}{\partial t}.$$

Барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $U^{(k)}(t,x)$ функциясы мен туындыларын табамыз.
2) $U(t,x) = U^{(k)}(t,x)$ болғанда (2.1.9)-(2.1.11) интегралдық қатынастардан

$$u^{(k)}(t,x) = \varphi_1(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0) + \int_0^t \int_0^x U^{(k)}(\tau,\xi)d\xi\, d\tau,$$

$$\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + \int_0^t U^{(k)}(\tau,x)d\tau, \quad \frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \int_0^x U^{(k)}(t,\xi)d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}(t,x)}{\partial x^2} = \ddot{\varphi}_1(x) + \int_0^t \frac{\partial U^{(k)}(\tau,x)}{\partial x}d\tau, \frac{\partial^2 u^{(k)}(t,x)}{\partial t^2} = \ddot{\psi}_1(t) + \int_0^x \frac{\partial U^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi$$

анықтаймыз.
Мұнда $k = 1,2,3,\ldots$.
k-шы қадамды орындағанда $(U^{(k)}(t,x),\ u^{(k)}(t,x))$ жұбын табамыз.

2.1.1 теорема. Егер келесі шарттар орындаса:

i) $A_i(t,x)-\ n\times n$-матрицалары, $i=\overline{1{,}8}$ және $f(t,x)$–n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз болса;

ii) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$–n-вектор-фукциялары $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданса;

iii) $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$–n-вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданса.

Онда екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін (2.1.6)-(2.1.8) есебінің $U^{(*)}(t,x)$ жалғыз шешімі болады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін алдымен мыналардың орындалуы қажет:

$$U^{(k)}(t,x)\xrightarrow[k\to\infty]{}U^{(*)}(t,x),\qquad u^{(k)}(t,x)\xrightarrow[k\to\infty]{}u^{(*)}(t,x).$$

Сондықтан, $U(t,x)=U^{(k)}(t,x)$ болғанда (2.1.9)-(2.1.11) интегралдық теңдеулерден нормаларды есептейміз

$$\left\|\frac{\partial^2 u^{(k)}(t,x)}{\partial x^2}\right\|\le\|\ddot{\varphi}_1(x)\|+\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial U^{(k)}(\tau,x)}{\partial x}\right\|d\tau,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u^{(k)}(t,x)}{\partial t^2}\right\|\le\|\ddot{\psi}_1(t)\|+\int\limits_0^x\left\|\frac{\partial U^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|d\xi,$$

$$\left\|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial x}\right\|\le\|\dot{\varphi}_1(x)\|+\int\limits_0^t\left\|U^{(k)}(\tau,x)\right\|d\tau,$$

$$\left\|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\le\|\dot{\psi}_1(t)\|+\int\limits_0^x\left\|U^{(k)}(t,\xi)\right\|d\xi,$$

$$\left\|u^{(k)}(t,x)\right\|\le\|\varphi_1(x)\|+\|\psi_1(t)\|+\|\psi_1(0)\|+\int\limits_0^t\int\limits_0^x\left\|U^{(k)}(\tau,\xi)\right\|d\xi\,d\tau.$$

$$\max\left(\left\|U^{(k)}(t,x)\right\|,\left\|\frac{\partial U^{(k)}(t,x)}{\partial x}\right\|,\left\|\frac{\partial U^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right)\le$$
$$\le\widetilde{K}\max\left(\left\|\frac{\partial^2 u^{(k-1)}(t,x)}{\partial x^2}\right\|,\left\|\frac{\partial^2 u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t^2}\right\|,\right.$$
$$\left.\left\|\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial x}\right\|,\left\|\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}\right\|,\left\|u^{(k-1)}(t,x)\right\|\right).$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u^{(k)}(t,x)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u^{(k-1)}(t,x)}{\partial x^2}\right\|\le\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial U^{(k)}(\tau,x)}{\partial x}-\frac{\partial U^{(k-1)}(\tau,x)}{\partial x}\right\|d\tau,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u^{(k)}(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t^2}\right\| \le \int_0^x \left\|\frac{\partial U^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}-\frac{\partial U^{(k-1)}(t,\xi)}{\partial t}\right\| d\xi,$$

$$\left\|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial x}\right\| \le \int_0^t \left\|U^{(k)}(\tau,x)-U^{(k-1)}(\tau,x)\right\| d\tau,$$

$$\left\|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial u^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}\right\| \le \int_0^x \left\|U^{(k)}(t,\xi)-U^{(k-1)}(t,\xi)\right\| d\xi,$$

$$\left\|u^{(k)}(t,x)-u^{(k-1)}(t,x)\right\| \le \int_0^t \int_0^x \left\|U^{(k)}(\tau,\xi)-U^{(k-1)}(\tau,\xi)\right\| d\xi\, d\tau.$$

Яғни $U(t,x)$ функцияларының $(k+1)$-ші және k-ші айырмаларының максимумдары осы функциялардың k-ші және $(k-1)$-ші айырмаларының максимумдарының интегралдарымен бағаланады. Екінші ретті гиперболалық теңдеулер үшін Гурса есебінің интегралдарының бағалаулары ұқсас бағаланады. Біртіндеп орнына қоя отырып тізбектердің жинақтылығын аламыз. Барлығы экспонента қатарының мүшелерімен мажорантталып бағаланады. 2.1.1 теорема дәлелденді.

(2.1.1)-(2.1.5) есебі мен (2.1.6)-(2.1.8) есептері өзара пара-пар болғандықтан берілген есептің бірмәнді шешімі келесі теоремамен негіздейміз

2.1.2 теорема. Егер 2.1.1 теореманың шарттары орындаса, онда төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін (2.1.1)-(2.1.5) есебінің $u^{(*)}(t,x)$ жалғыз шешімі төмендегідей болады:

$$u^{(*)}(t,x)=\varphi_1(x)+\psi_1(t)-\psi_1(0)+\int_0^t \int_0^x U^{(*)}(\tau,\xi)d\xi\, d\tau.$$

2.2 Арнайы типті төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі (II) үшін периодты есепті шешу

$\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ облысында төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты есебі келесі түрде қарастырылады

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + f(t,x), \qquad (2.2.1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \qquad (2.2.2)$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}, \quad x \in [0,\omega], \qquad (2.2.3)$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (2.2.4)$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (2.2.5)$$

мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A(t,x), B(t,x), C(t,x) -\ n \times n$-матрицалары және $f(t,x)$ – n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз, $\varphi(x) - n$-вектор-фукциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданады, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t) - n$-вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданады.

Келісімділік шарттары орындалады:

$$\psi_1(0) = \varphi(0), \qquad \dot{\varphi}(0) = \psi_2(0), \qquad \dot{\psi}_1(0) = \dot{\psi}_1(T).$$

$v(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ жаңа белгісіз функциясын енгіземіз.

(2.2.2)-(2.2.5) шарттарының көмегімен дербес туындыларды таба аламыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \ddot{\varphi}(x) + \int_0^t \frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x} d\tau, \qquad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{\psi}_1(t) + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi. \qquad (2.2.7)$$

(2.2.6)-(2.2.7) интегралдық теңдіктерін қолдана отырып, (2.2.1)-(2.2.5) есебін келесі пара-пар екінші ретті дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін периодты есепке ауыстырамыз:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = A(t,x)\int_0^t \frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x} d\tau + B(t,x)\int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi + C(t,x)v + g(t,x), \quad (2.2.8)$$

$$v(0,x) = v(T,x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2.2.9)$$

$$v(t,0)=\dot{\psi}_2(t), \qquad t\in[0,T], \tag{2.2.10}$$
$$g(t,x)=f(t,x)+A\ddot{\varphi}(x)+B\ddot{\psi}_1(t).$$

мұндағы $v(t,x)=col(v_1(t,x),v_2(t,x),\dots,v_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $g(t,x)-n$-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз.
$v(t,x)\in C(\Omega,R^n)$ функциясы

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t\partial x}$$

дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болып, (2.2.8) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (2.2.9) периодты шарттын, (2.2.10) шеттік шарттын қанағаттандырса, онда $v(t,x)$ функциясы (2.2.8)-(2.2.10) есебінің шешімі деп аталады.
(2.2.8)-(2.2.10) есебінің шешімін табу алгоритмі және әдістемесі.

$v(0,x)=\lambda(x)$ болсын. (2.2.8)-(2.2.10) есебінде $v(t,x)=\tilde{v}(t,x)+\lambda(x)$ алмастыруын жасаймыз, мұндағы $\tilde{v}(t,x)=v(t,x)-\lambda(x)$ жаңа ізделінді функция.

(2.2.8)-(2.2.10) интегралдық шартты бейлокалды есебін келесі есепке түрлендіреміз

$$\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x\partial t}=A(t,x)\int_0^t\frac{\partial\tilde{v}(\tau,x)}{\partial x}d\tau+A(t,x)\dot{\lambda}(x)t+B(t,x)\int_0^x\frac{\partial\tilde{v}(t,\xi)}{\partial t}d\xi+$$
$$+C(t,x)\tilde{v}+C(t,x)\lambda(x)+g(t,x), \tag{2.2.11}$$
$$\tilde{v}(0,x)=0, \quad x\in[0,\omega], \tag{2.2.12}$$
$$\tilde{v}(t,0)=\dot{\psi}_2(t)-\dot{\psi}_2(0), \ \ t\in[0,T], \tag{2.2.13}$$
$$\tilde{v}(T,x)=0, \quad x\in[0,\omega], \tag{2.2.14}$$

Келісілімділік шарты орындалады:

$$\lambda(0)=\dot{\psi}_2(0). \tag{2.2.15}$$

(2.2.8)-(2.2.10) және (2.2.11)-(2.2.14) есептері пара-пар болады. (2.2.11)-(2.2.14) есебі $\lambda(x)$ функционалды параметрлі гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебі болып табылады. Егер $v(t,x)$ функциясы (2.2.8)-(2.2.10) есебінің шешімі болса, онда $\{\lambda(x)=v(0,x)$, $\tilde{v}(t,x)=v(t,x)-v(0,x)\}$ жұбы (2.2.11)-(2.2.14) есебінің шешімі болады және керісінше, $\{\lambda(x),\ \widetilde{\omega}(t,x)\}$ жұбы (2.2.11)-(2.2.14) есебінің шешімі болса, онда $\{\lambda(x)+\widetilde{\omega}(t,x)\}$ функциясы (2.2.8)-(2.2.10) есебінің шешімі болады. Қарастырылатын (2.2.11) жүйеде t айнымалысы бойынша да әрі x айнымалысы бойынша да интегралдары бар.

Бекітілген $\lambda(x)$, $\dot{\lambda}(x)$ үшін $\tilde{v}(t,x)$ функциясы (2.2.12), (2.2.13) шарттарымен берілген Гурса есебінің Ω облысындағы шешімі болып табылады. Гурса есебін пара-пар үш интегралдық теңдеулер жүйесіне келтіреміз

$$\frac{\partial \tilde{v}(t,x)}{\partial x} = \int_0^t \left\{ A(\tau,x) \int_0^\tau \frac{\partial \tilde{v}(\tau_1,x)}{\partial x} d\tau_1 + A(\tau,x)\dot{\lambda}(x)\tau + B(\tau,x) \int_0^x \frac{\partial \tilde{v}(\tau,\xi)}{\partial \tau} d\xi + \right.$$
$$\left. + C(\tau,x)\tilde{v} + C(\tau,x)\lambda(x) + g(\tau,x) \right\} d\tau, \qquad (2.2.16)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}(t,x)}{\partial t} = \ddot{\psi}_2(t) + \int_0^x \left\{ A(t,\xi) \int_0^t \frac{\partial \tilde{v}(\tau,\xi)}{\partial \xi} d\tau + A(t,\xi)\dot{\lambda}(\xi)t + \right.$$
$$\left. + B(t,\xi) \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{v}(t,\xi_1)}{\partial t} d\xi_1 + C(t,\xi)\tilde{v} + C(t,\xi)\lambda(\xi) + g(t,\xi) \right\} d\xi, \quad (2.2.17)$$

$$\tilde{v}(t,x) = \dot{\psi}_2(t) - \dot{\psi}_2(0) + \int_0^x \int_0^t \left\{ A(\tau,\xi) \int_0^\tau \frac{\partial \tilde{v}(\tau_1,\xi)}{\partial \xi} d\tau_1 + A(\tau,\xi)\dot{\lambda}(\xi)\tau + \right.$$
$$\left. + B(\tau,\xi) \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{v}(\tau,\xi_1)}{\partial \tau} d\xi_1 + C(\tau,\xi)\tilde{v} + C(\tau,\xi)\lambda(\xi) + g(\tau,\xi) \right\} d\tau d\xi. \quad (2.2.18)$$

(2.2.14) шартынан келесіні аламыз $\frac{\partial \tilde{v}(T,x)}{\partial x} = 0.$

(2.2.16) қолданып және $t = T$ болғанда $\frac{\partial \tilde{v}(t,x)}{\partial x}$ функциясының мәнін анықтаймыз

$$\int_0^T A(\tau,x)\tau\, d\tau \cdot \dot{\lambda}(x) = -\int_0^T C(\tau,x)\, d\tau \cdot \lambda(x) - \int_0^T A(\tau,x) \int_0^\tau \frac{\partial \tilde{v}(\tau_1,x)}{\partial x} d\tau_1\, d\tau -$$
$$- \int_0^T B(\tau,x) \int_0^x \frac{\partial \tilde{v}(\tau,\xi)}{\partial \tau} d\xi\, d\tau - \int_0^T C(\tau,x)\tilde{v}(\tau,x) d\tau - \int_0^T g(\tau,x) d\tau\,. \quad (2.2.19)$$

Бекітілген $\tilde{v}(t,x)$, $\frac{\partial \tilde{v}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{v}(t,x)}{\partial t}$ үшін (2.2.15) шартты (2.2.19) теңдеу $\lambda(x)$ қатысты дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі болып табылады.

$\tilde{v}(t,x)$ функциясы, оның $\frac{\partial \tilde{v}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{v}(t,x)}{\partial t}$ дербес туындылары және $\lambda(x)$ функциясы $\dot{\lambda}(x)$ туындысымен бірге белгісіз болғандықтан, келесі алгоритммен анықталған итерациялық процесті қолданамыз.

Бастапқы қадам: 1) (2.2.12), (2.2.13) шарттарын қолданамыз.

(2.2.19) оң жағына $\frac{\partial\tilde{v}(\tau_1,x)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\tilde{v}(\tau,\xi)}{\partial\tau} = \ddot{\psi}_2(\tau)$, $\tilde{v}(\tau,x) = \dot{\psi}_2(\tau) - \dot{\psi}_2(0)$ мәндерін қоямыз:

$$\int_0^T A(\tau,x)\tau\,d\tau \cdot \dot{\lambda}(x) = -\int_0^T C(\tau,x)\,d\tau \cdot \lambda(x) - \int_0^T B(\tau,x)\ddot{\psi}_2(\tau)x d\tau -$$
$$-\int_0^T C(\tau,x)\left[\dot{\psi}_2(\tau) - \dot{\psi}_2(0)\right]d\tau - \int_0^T g(\tau,x)d\tau.$$

Белгілеу енгіземіз

$$Q(x) = \int_0^T A(\tau,x)\tau\,d\tau.$$

Барлық $x \in [0,\omega]$ үшін $\det\big(Q(x)\big) \neq 0$, $\exists Q^{-1}(x)$ болсын.
Енді келесі (2.2.15) шартымен берілген Коши есебін аламыз:

$$\dot{\lambda}(x) = Q^{-1}(x)\left\{-\int_0^T C(\tau,x)\,d\tau \cdot \lambda(x) - \int_0^T B(\tau,x)\ddot{\psi}_2(\tau)x d\tau -\right.$$
$$\left. -\int_0^T C(\tau,x)\dot{\psi}_2(\tau)d\tau - \int_0^T g(\tau,x)d\tau\right\}. \qquad (2.2.20)$$

(2.2.20), (2.2.15) Коши есебін шешіп, барлық $x \in [0,\omega]$ үшін интегралдық теңдеуден $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\lambda^{(0)}(x)$ бастапқы жуықтауды табамыз:

$$\lambda^{(0)}(x) = \dot{\psi}_2(0) - \int_0^x Q^{-1}(\xi)\int_0^T C(\tau,\xi)\,d\tau \cdot \lambda^{(0)}(\xi)\,d\xi - \int_0^x Q^{-1}(\xi)\times$$
$$\times\left\{\int_0^T B(\tau,\xi)\ddot{\psi}_2(\tau)\xi d\tau + \int_0^T C(\tau,\xi)\dot{\psi}_2(\tau)d\tau + \int_0^T g(\tau,\xi)d\tau\right\}d\xi. \qquad (2.2.21)$$

2) (2.2.16)-(2.2.18) теңдеулердің оң жағына $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\lambda^{(0)}(x)$ қойып, барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $\tilde{v}^{(0)}(t,x)$ функциясы мен оның дербес туындыларын табамыз

$$\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(t,x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(t,x)}{\partial t}.$$

1–ші қадам: 1) (2.2.12), (2.2.13) шарттарын қолданып. (2.2.19) оң жағына $\frac{\partial\tilde{v}(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial\tilde{v}(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{v}(t,x)=\tilde{v}^{(0)}(t,x)$ функцияларын қоямыз:

$$Q(x)\cdot\dot{\lambda}(x)=-\int_0^T C(\tau,x)\,d\tau\cdot\lambda(x)-\int_0^T A(\tau,x)\int_0^\tau\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau_1,x)}{\partial t}d\tau_1\,d\tau-$$
$$-\int_0^T B(\tau,x)\int_0^x\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau,\xi)}{\partial\tau}d\xi\,d\tau-\int_0^T C(\tau,x)\tilde{v}^{(0)}(\tau,x)d\tau-\int_0^T g(\tau,x)d\tau\,. \quad (2.2.22)$$

Біз келесі (2.2.15) шартымен берілген Коши есебін аламыз:

$$\dot{\lambda}(x)=Q^{-1}(x)\left\{-\int_0^T C(\tau,x)\,d\tau\cdot\lambda(x)-\int_0^T A(\tau,x)\int_0^\tau\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau_1,x)}{\partial x}d\tau_1\,d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_0^T B(\tau,x)\int_0^x\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau,\xi)}{\partial\tau}d\xi\,d\tau-\int_0^T C(\tau,x)\tilde{v}^{(0)}(\tau,x)d\tau-\int_0^T g(\tau,x)d\tau\right\}. \quad (2.2.23)$$

(2.2.20), (2.2.15) Коши есебін шешіп, барлық $x\in[0,\omega]$ үшін интегралдық теңдеуден $\dot{\lambda}^{(1)}(x)$, $\lambda^{(1)}(x)$ бірінші жуықтауды табамыз:

$$\lambda^{(1)}(x)=\dot{\psi}_2(0)-\int_0^x Q^{-1}(\xi)\int_0^T C(\tau,\xi)\,d\tau\cdot\lambda^{(1)}(\xi)d\xi-$$
$$-\int_0^x Q^{-1}(\xi)\left\{\int_0^T A(\tau,\xi)\int_0^\tau\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau_1,\xi)}{\partial\xi}d\tau_1\,d\tau+\int_0^T B(\tau,\xi)\int_0^\xi\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau,\xi_1)}{\partial\tau}d\xi_1\,d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_0^T C(\tau,\xi)\tilde{v}^{(0)}(\tau,\xi)d\tau+\int_0^T g(\tau,\xi)d\tau\right\}d\xi. \quad (2.2.24)$$

2) (2.2.16)-(2.2.18) теңдеулердің оң жағына $\dot{\lambda}^{(1)}(x)$, $\lambda^{(1)}(x)$ қойып, барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін $\tilde{v}^{(1)}(t,x)$ функциясы мен оның дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial\tilde{v}^{(1)}(t,x)}{\partial x},\quad\frac{\partial\tilde{v}^{(1)}(t,x)}{\partial t}.$$

Және тағы сол сияқты.

k– ші қадам: 1) (2.2.12), (2.2.13) шарттарын қолданып. (2.2.19) оң жағына

$$\frac{\partial \tilde{v}(\tau_1,x)}{\partial x}=\frac{\partial \tilde{v}^{(k-1)}(t,x)}{\partial x},\quad \frac{\partial \tilde{v}(\tau,\xi)}{\partial \tau}=\frac{\partial \tilde{v}^{(k-1)}(t,x)}{\partial t},\quad \tilde{v}(\tau,x)=\tilde{v}^{(k-1)}(t,x)$$

қоямыз, келесі (2.2.15) шартымен берілген Коши есебін аламыз

$$\dot{\lambda}(x)=Q^{-1}(x)\Bigg\{-\int_0^T C(\tau,x)\,d\tau\cdot\lambda(x)-$$
$$-\int_0^T A(\tau,x)\int_0^\tau \frac{\partial \tilde{v}^{(k-1)}(\tau_1,x)}{\partial x}d\tau_1\,d\tau-\int_0^T B(\tau,x)\int_0^x \frac{\partial \tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi)}{\partial \tau}d\xi\,d\tau-$$
$$-\int_0^T C(\tau,x)\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,x)d\tau-\int_0^T g(\tau,x)d\tau\Bigg\}. \tag{2.2.25}$$

(2.2.20), (2.2.15) Коши есебін шешіп, барлық $x\in[0,\omega]$ үшін интегралдық теңдеуден $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\lambda^{(k)}(x)$ k-ші жуықтауды табамыз:

$$\lambda^{(k)}(x)=\dot{\psi}_2(0)-\int_0^x Q^{-1}(\xi)\int_0^T C(\tau,\xi)\,d\tau\cdot\lambda^{(k)}(\xi)d\xi-$$
$$-\int_0^x Q^{-1}(\xi)\Bigg\{\int_0^T A(\tau,\xi)\int_0^\tau \frac{\partial \tilde{v}^{(k-1)}(\tau_1,\xi)}{\partial \xi}d\tau_1\,d\tau+\int_0^T B(\tau,\xi)\int_0^\xi \frac{\partial \tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi_1)}{\partial \tau}d\xi_1\,d\tau$$
$$+\int_0^T C(\tau,\xi)\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi)d\tau+\int_0^T g(\tau,\xi)d\tau\Bigg\}d\xi. \tag{2.2.26}$$

2) (2.2.16)-(2.2.18) теңдеулердің оң жағына $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\lambda^{(k)}(x)$ қойып, барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін $\tilde{v}^{(k)}(t,x)$ функциясы мен оның $\frac{\partial \tilde{v}^{(k)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{v}^{(k)}(t,x)}{\partial t}$ дербес туындыларын табамыз.

$k=1,2,3,\dots$.

Келесі теорема құрылған алгоритм шешімінің жинақтылығын және (2.2.8)-(2.2.10) есебінің жалғыз шешімінің болуы шарттарын береді.

2.2.1 теорема. Келесі шарттар орындалса:

a) $A(t,x),B(t,x),C(t,x)-\ n\times n$-матрицалары және $f(t,x)$–n-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз болса;
b) $\varphi(x)$–n –вектор-фукциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданады, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)-n$–вектор-функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданса;
c) келісімділік шарттары орындалса:

$$\psi_1(0) = \varphi(0), \dot{\varphi}(0) = \psi_2(0), \dot{\psi}_1(0) = \dot{\psi}_1(T);$$

d) $Q(x)$–$n \times n$-матрицасы $x \in [0, \omega]$ аралығында қайтымды болып

$$Q(x) = \int_0^T A(\tau, x)\tau \, d\tau$$

және келесі бағалау орындалса

$$\|Q^{-1}(x)\| \leq k(x),$$

мұндағы $k(x)$ −оң $[0, \omega]$ аралығында үзіліссіз функция;

$$e)\; q(x) = exp\left(\gamma T \int_0^x k(\xi)\, d\xi\right) [\max(T, \omega, T\omega)]^2\, e^{H(T+\omega)} \times$$

$$\max\left(HT^2 \int_0^x k(\xi)\, d\xi, k(x)\gamma T + k(x)HT^2\right)(\alpha T + \gamma) \leq \chi < 1,$$

мұндағы χ −тұрақты.

Онда (2.2.8)-(2.2.10) гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін интегралдық шартты бейлокалды есебінің жалғыз шешімі болады.

Дәлелдеуі.

$$\alpha = \max_{(t,x)\in\Omega} \|A(t,x)\|, \qquad \beta = \max_{(t,x)\in\Omega} \|B(t,x)\|, \;\; \gamma = \max_{(t,x)\in\Omega} \|C(t,x)\|,$$

$$H = \alpha T + \beta\omega + \gamma$$

болсын.

Келесі бағалаулар орынды:

$$\left\|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\right\| \leq k(x)\gamma T \left\|\lambda^{(0)}(x)\right\| +$$

$$+k(x)\left\{\beta T \int_0^T \left\|\ddot{\psi}_2(\tau)\right\| d\tau + \gamma T \int_0^T \left\|\dot{\psi}_2(\tau)\right\| d\tau + \int_0^T \|g(\tau, x)\| d\tau\right\},$$

$$\left\|\lambda^{(0)}(x)\right\| \leq \left\|\dot{\psi}_2(0)\right\| + \int_0^x k(\xi)\gamma T \cdot \left\|\lambda^{(0)}(\xi)\right\| d\xi +$$

$$+\int_0^x k(\xi)\left\{\beta T\int_0^T \|\ddot{\psi}_2(\tau)\|d\tau+\gamma T\int_0^T \|\dot{\psi}_2(\tau)\|d\tau+\int_0^T \|g(\tau,\xi)\|d\tau\right\}d\xi.$$

$$\|\dot{\lambda}^{(1)}(x)\|\le k(x)\gamma T\|\lambda^{(1)}(x)\|+k(x)\left\{\alpha T\int_0^T\int_0^\tau \left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau_1,x)}{\partial x}\right\|d\tau_1\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\beta T\int_0^T\int_0^x \left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau,\xi)}{\partial\tau}\right\|d\xi\,d\tau+\gamma\int_0^T\|\tilde{v}^{(0)}(\tau,x)\|d\tau+\int_0^T\|g(\tau,x)\|d\tau\right\},$$

$$\|\lambda^{(1)}(x)\|\le\|\dot{\psi}_2(0)\|+\int_0^x k(\xi)\gamma T\cdot\|\lambda^{(1)}(\xi)\|d\xi+$$

$$+\int_0^x k(\xi)\left\{\alpha T\int_0^T\int_0^\tau \left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau_1,\xi)}{\partial\xi}\right\|d\tau_1\,d\tau+\beta T\int_0^T\int_0^\xi \left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau,\xi_1)}{\partial\tau}\right\|d\xi_1\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\gamma T\int_0^T\|\tilde{v}^{(0)}(\tau,\xi)\|d\tau+\int_0^T\|g(\tau,\xi)\|d\tau\right\}d\xi.$$

$$\|\dot{\lambda}^{(k)}(x)\|\le k(x)\gamma T\|\lambda^{(k)}(x)\|+k(x)\left\{\alpha T\int_0^T\int_0^\tau \left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau_1,x)}{\partial x}\right\|d\tau_1\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\beta T\int_0^T\int_0^x \left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi)}{\partial\tau}\right\|d\xi\,d\tau+\gamma T\int_0^T\|\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,x)\|d\tau+\int_0^T\|g(\tau,x)\|d\tau\right\},$$

$$\|\lambda^{(k)}(x)\|\le\|\dot{\psi}_2(0)\|+\int_0^x k(\xi)\gamma T\|\lambda^{(k)}(\xi)\|d\xi+$$

$$+\int_0^x k(\xi)\left\{\alpha T\int_0^T\int_0^\tau \left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau_1,\xi)}{\partial\xi}\right\|d\tau_1\,d\tau+\beta T\int_0^T\int_0^\xi \left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi_1)}{\partial\tau}\right\|d\xi_1\,d\tau\right.$$

$$\left.+\gamma T\int_0^T\|\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi)\|d\tau+\int_0^T\|g(\tau,\xi)\|d\tau\right\}d\xi.$$

Гронуолл-Беллман теңсіздігінің дербес жағдайын қолдансақ келесі теңсіздіктерді орнатамыз

$$\|\lambda^{(0)}(x)\|\le\exp\left(\gamma T\int_0^x k(\xi)\,d\xi\right)\{\|\dot{\psi}_2(0)\|+$$

$$+\int_0^x k(\xi)\left[\beta T\int_0^T \left\|\ddot{\psi}_2(\tau)\right\|d\tau+\gamma T\int_0^T\left\|\dot{\psi}_2(\tau)\right\|d\tau+\int_0^T\|g(\tau,\xi)\|d\tau\right]d\xi\Bigg\},$$

$$\left\|\lambda^{(1)}(x)\right\|\le exp\left(\gamma T\int_0^x k(\xi)d\xi\right)\left\{\left\|\dot{\psi}_2(0)\right\|+\right.$$

$$+\int_0^x k(\xi)\left[\alpha T\int_0^T\int_0^\tau\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau_1,\xi)}{\partial\xi}\right\|d\tau_1\,d\tau+\beta T\int_0^T\int_0^\xi\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\tau,\xi_1)}{\partial\tau}\right\|d\xi_1\,d\tau+\right.$$

$$\left.\left.+\gamma T\int_0^T\left\|\tilde{v}^{(0)}(\tau,\xi)\right\|d\tau+\int_0^T\|g(\tau,\xi)\|d\tau\right]d\xi\right\},$$

$$\left\|\lambda^{(k)}(x)\right\|\le exp\left(\gamma T\int_0^x k(\xi)d\xi\right)\times\left\{\left\|\dot{\psi}_2(0)\right\|+\right.$$

$$+\int_0^x k(\xi)\left[\alpha T\int_0^T\int_0^\tau\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau_1,\xi)}{\partial\xi}\right\|d\tau_1\,d\tau+\beta T\int_0^T\int_0^\xi\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi_1)}{\partial\tau}\right\|d\xi_1\,d\tau+\right.$$

$$\left.\left.+\gamma T\int_0^T\left\|\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi)\right\|d\tau+\int_0^T\|g(\tau,\xi)\|d\tau\right]d\xi\right\}.$$

Тізбек алгоритмінің k-шы және $(k+1)$-шы қадамдардан

$$\dot{\lambda}^{(k)}(x),\quad \lambda^{(k)}(x),\quad \frac{\partial\tilde{v}^{(k)}(t,x)}{\partial x},\quad \frac{\partial\tilde{v}^{(k)}(t,x)}{\partial t},\quad \tilde{v}^{(k)}(t,x),$$
$$\dot{\lambda}^{(k+1)}(x),\quad \lambda^{(k+1)}(x),\quad \frac{\partial\tilde{v}^{(k+1)}(t,x)}{\partial x},\quad \frac{\partial\tilde{v}^{(k+1)}(t,x)}{\partial t},\quad \tilde{v}^{(k+1)}(t,x)$$

функциялары анықталады және сәйкесінше айырмаларды бағалай отырып нормаланаймыз:

$$\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|\le exp\left(\gamma T\int_0^x k(\xi)d\xi\right)\times$$

$$\times\int_0^x k(\xi)\left\{\alpha T\int_0^T\int_0^\tau\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k)}(\tau_1,\xi)}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau_1,\xi)}{\partial\xi}\right\|d\tau_1\,d\tau+\right.$$

$$+\beta T\int\limits_0^T\int\limits_0^\xi\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k)}(\tau,\xi_1)}{\partial\tau}-\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi_1)}{\partial\tau}\right\|d\xi_1\,d\tau+$$

$$\left.+\gamma T\int\limits_0^T\left\|\tilde{v}^{(k)}(\tau,\xi)-\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi)\right\|d\tau\right\}d\xi. \qquad (2.2.27)$$

$$\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\|\le k(x)\gamma T\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|+$$

$$k(x)\left\{\alpha T\int\limits_0^T\int\limits_0^\tau\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k)}(\tau_1,x)}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau_1,x)}{\partial x}\right\|d\tau_1\,d\tau+\right.$$

$$+\beta T\int\limits_0^T\int\limits_0^x\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k)}(\tau,\xi)}{\partial\tau}-\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,\xi)}{\partial\tau}\right\|d\xi\,d\tau+$$

$$\left.+\gamma T\int\limits_0^T\left\|\tilde{v}^{(k)}(\tau,x)-\tilde{v}^{(k-1)}(\tau,x)\right\|d\tau\right\}, \qquad (2.2.28)$$

$$\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k)}(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(t,x)}{\partial x}\right\|\le\max(T,\omega,T\omega)e^{H(x+t)}\times$$

$$\times\left\{\alpha\frac{T^2}{2}\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\|+\gamma T\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|\right\}, (2.2.29)$$

$$\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(k)}(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{v}^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}\right\|\le\max(T,\omega,T\omega)e^{H(x+t)}\times$$

$$\times\left\{\alpha T\omega\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\|+\gamma\omega\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|\right\}, (2.2.30)$$

$$\left\|\tilde{v}^{(k)}(t,x)-\tilde{v}^{(k-1)}(t,x)\right\|\le\max(T,\omega,T\omega)e^{H(x+t)}\times$$

$$\times\left\{\alpha\frac{T^2}{2}\omega\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\|+\right.$$

$$\left.+\gamma T\omega\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|\right\}, \qquad (2.2.31)$$

Содан кейін (2.2.27)-(2.2.28) бағалаулардан, біз (2.2.29)-(2.2.31) ескере отырып, негізгі бағалауды аламыз

$$\Delta_{k+1}\le q(x)\Delta_k.$$

Теореманың e) шарты бойынша $q(x)\le\chi<1$. Осыдан Δ_k тізбегі $k\to\infty$ ұмтылғанда Δ_* жинақталады. Бұл $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\lambda^{(k)}(x)$ тізбектерінің $k\to\infty$ ұмтылғанда сәйкесінше $\dot{\lambda}^*(x)$, $\lambda^*(x)$ функцияларына бірқалыпты жинақталығын береді. $\lambda^*(x)$ функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз және үзіліссіз диференциалданады. (2.2.29)-(2.2.31) бағалауларды негізге ала отырып,

$\frac{\partial \tilde{v}^{(k)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{v}^{(k)}(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{v}^{(k)}(t,x)$ тізбектерінің сәйкесінше $\frac{\partial \tilde{v}^{*}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{v}^{*}(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{v}^{*}(t,x)$ функцияларына барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін бірқалыпты жинақталуы орнатылады. Әлбетте, $\frac{\partial \tilde{v}^{*}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{v}^{*}(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{v}^{*}(t,x)$ функциялары Ω облысында үзіліссіз. $(\tilde{v}^{*}(t,x), \lambda^{*}(x))$ функциялар жұбы (2.2.11)-(2.2.14) есебінің шешімі болады. Шешімнің жалғыздығы қарсы жору арқылы дәлелденеді. 2.2.1 теорема дәлелденді.

$v^{*}(t,x)$ функциясын $\tilde{v}^{*}(t,x)$ және $\lambda^{*}(x)$ функцияларының қосындысы ретінде анықтаймыз:

$$v^{*}(t,x) = \tilde{v}^{*}(t,x) + \lambda^{*}(x).$$

$v^{*}(t,x)$ функциясы (2.2.8)-(2.2.10) есебінің шешімі болады.

Себебі (2.2.8)-(2.2.10) және (2.2.1)-(2.2.5) есептері пара-пар және

$$v^{*}(t,x) = \frac{\partial^2 u^{*}(t,x)}{\partial x \partial t},$$
$$g(t,x) = f(t,x) + A\ddot{\varphi}(x) + B\ddot{\psi}_1(t).$$

келесі теорема орынды.

2.2.2 теорема. 2.2.1 теорема шарттары орындалса.

Онда (2.2.1)-(2.2.5) бейлокалды шартты төртінші ретті псевдогиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есебінің $u^{*}(t,x)$ жалғыз шешімі болады.

Дәлелдеуі. $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$, $v^{*}(t,x)$ функциялары бойынша интегралдық қатынасты жазамыз

$$u^{*}(t,x) = \varphi(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0) + \int_0^x \int_0^t v^{*}(\tau,\xi) d\tau d\xi, \quad (t,x) \in \Omega. \quad (2.2.32)$$

(2.2.8)-(2.2.10) бейлокалды есебіндегі $\frac{\partial^2 v^{*}(\tau,x)}{\partial x \partial t}$ функция мен $v^{*}(t,x)$, $\frac{\partial v^{*}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial v^{*}(t,x)}{\partial t}$ арасындағы интегралдық қатынастарға олардың кейіптемелерін қоямыз:

$$\frac{\partial^2 v^{*}(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^4 u^{*}(t,x)}{\partial x^2 \partial t^2},$$
$$\int_0^x \int_0^t v^{*}(\tau,\xi) d\tau d\xi = u^{*}(t,x) - \varphi(x) - \psi_1(t) + \psi_1(0),$$
$$\int_0^t \frac{\partial v^{*}(\tau,x)}{\partial x} d\tau = \frac{\partial^2 u^{*}(t,x)}{\partial x^2} - \ddot{\varphi}(x), \quad \int_0^x \frac{\partial v^{*}(t,\xi)}{\partial t} d\xi = \frac{\partial^2 u^{*}(t,x)}{\partial t^2} - \ddot{\psi}_1(t).$$

(2.2.32) шарты болғанда және

$$f(x,t) = g(t,x) - \{A(t,x)\ddot{\varphi}(x) + B(t,x)\ddot{\psi}_1(t) + \\ +C(t,x)[\varphi(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0)]\},$$

теңдігі жағдайында бізде $u^*(t,x)$ функциясы (2.2.1)-(2.2.5) төртінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды шартты шеттік есебінің жалғыз шешімі болып табылады. 2.2.2 теорема дәлелденді.

2.3 Төртінші ретті псевдо-гиперболалық теңдеулер жүйесі (II) үшін бейлокалды шартты шеттік есеп

Тік төртбұрышты $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ облысында екі айнымалылы төртінші ретті дербес туындылы псевдо-гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды шартты шеттік есебін қарастырамыз:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(t,x)u + f(t,x), \qquad (2.3.1)$$
$$(t,x) \in \Omega = (0,T) \times (0,\omega)$$
$$u(0,x) = \varphi_1(t), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2.3.2)$$
$$\sum_{i=0}^{m}\left\{P_i(x)\frac{\partial^2 u(t_j,x)}{\partial x^2} + S_i(x)\frac{\partial^2 u(t_j,x)}{\partial t^2}\right\}\Bigg|_{t=t_i} = \varphi_2(x), \quad x \in [0,\omega], \qquad (2.3.3)$$
$$u(t,0) = \psi_1(t), \;\; t \in [0,T], \qquad (2.3.4)$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (2.3.5)$$

мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A(t,x), B(t,x),\ C(t,x) - n \times n$-матрицалар және $f(t,x) - n$-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз, $\varphi_1(t) - n$-вектор-функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданады, $P_i(x),\ S_i(x)\ - n \times n$-матрицалар, $i = \overline{0,m}$ және $\varphi_2(x) - n$-вектор-функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз, $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$, және $\psi_1(t) - n$-вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданады, $\psi_2(t) - n$-вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз, және келісілімділік шарты (0; 0) нүктесінде орындалады:

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0).$$

$u(t,x) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ функциясы мен дербес туындыларымен $(t,x) \in \Omega$, аралығында (2.3.1) теңдеулер жүйесін және (2.3.2)-(2.3.5) шеттік шарттарын қанағаттандыратын болса, онда $u(t,x)$ функциясын (2.3.1)-(2.3.5) есебінің шешімі деп атайды, мұндағы

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n), \qquad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R^n),$$
$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega,, R^n), \qquad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \in C(\Omega, R^n), \qquad \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} \in C(\Omega, R^n),$$
$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x \partial t^2} \in C(\Omega, R^n), \qquad \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t^2} \in C(\Omega,, R^n).$$

Екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін интегралдық шартты бейлокалды есебіне келтіру

$$z(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$$

жаңа белгісіз функциясын енгіземіз. Содан кейін (2.3.2), (2.3.4) шарттарын ескере отырып, келесі теңдіктерді аламыз

$$u(t,x)=\varphi_1(x)+\psi_1(t)x+\psi_1(0)+\int_0^x\int_0^t z(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi,$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=\dot{\varphi}_1(x)+\int_0^t z(\tau,x)\,d\tau,\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\dot{\psi}_1(t)+\int_0^x z(t,\xi)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=\ddot{\varphi}_1(x)+\int_0^t \frac{\partial z(\tau,x)}{\partial x}d\tau,\quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=\ddot{\psi}_1(t)+\int_0^x \frac{\partial z(t,\xi)}{\partial \xi}d\xi.$$

(2.3.1)-(2.3.5) есебін ауыстыру арқылы пара-пар есепке келтіреміз

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=A(t,x)\int_0^t \frac{\partial z(\tau,x)}{\partial x}d\tau+B(t,x)\int_0^x \frac{\partial z(t,\xi)}{\partial \xi}d\xi+$$

$$+C(t,x)\int_0^x\int_0^t z(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi+g(t,x), \qquad (2.3.6)$$

$$\sum_{i=0}^{m}\left\{P_i(x)\int_0^t \frac{\partial z(\tau,x)}{\partial x}d\tau+S_i(x)\int_0^x \frac{\partial z(t,\xi)}{\partial \xi}d\xi\right\}\Bigg|_{t=t_i}=\phi(x),\quad x\in[0,\omega] \quad (2.3.7)$$

$$z(t,0)=\psi_2(t),\qquad t\in[0,T], \qquad (2.3.8)$$

мұндағы

$$g(t,x)=f(t,x)+A(t,x)\ddot{\varphi}_1(x)+B(t,x)\ddot{\psi}_1(t)+$$
$$+C(t,x)[\varphi_1(x)+\psi_1(t)x+\psi_1(0)],$$
$$\phi(x)=\varphi_2(x)-\sum_{i=0}^{m}\left\{P_i(x)\ddot{\varphi}_1(x)+S_i(x)\ddot{\psi}_1(t_i)\right\}.$$

(2.3.7), (2.3.8) шарттарында (2.3.2), (2.3.4) шеттік шарттарды ескереміз. $z(t,x)\in C(\Omega,R^n)$ функциясы дербес туындыларымен бірге

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial x},\qquad \frac{\partial z(t,x)}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2 z(\tau,x)}{\partial x\partial x}$$

(2.3.6) гиперболалық типті интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (2.3.7) бейлокалды интегралдық қатынасын және (2.3.8) шеттік шартын қанағаттандырса, онда $z(t,x)$ функциясы Ω облысындағы (2.3.6)-(2.3.8) есебінің шешімі деп аталады.

$$f(t,x) \in C(\Omega, R^n),\ \ \varphi_1(x) \in C^2([0,\omega], R^n),\ \varphi_2(x) \in C([0,\omega], R^n),$$
$$\psi_1(t) \in C^2([0,T], R^n), \qquad \psi_2(t) \in C^1([0,T], R^n)$$

болғанда $u^*(t,x)$ функциясы (2.3.1)-(2.3.5) есебінің шешімі болады.
Содан кейін

$$z^*(t,x) = \frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial x \partial t}$$

функциясы $g(t,x), \phi(x)$ төмендегідей болғанда (2.3.6)-(2.3.8) есебінің шешімі болады:

$$g(t,x) = f(t,x) + A(t,x)\ddot{\varphi}_1(x) + B(t,x)\ddot{\psi}_1(t) +$$
$$+C(t,x)[\varphi_1(x) + \psi_1(t)x + \psi_1(0)],$$
$$\phi(x) = \varphi_2(x) - \sum_{i=0}^{m} \{P_i(x)\ddot{\varphi}_1(x) + S_i(x)\ddot{\psi}_1(t_i)\}.$$

Керісінше, $\tilde{z}(t,x)$функциясы $g(t,x) \in C([0,\omega], R^n)$, $\phi(x) \in C([0,\omega], R^n)$ болғанда (2.3.6)-(2.3.8) есебінің шешімі болса, онда $\tilde{u}(t,x)$ функциясының $\tilde{z}(t,x)$ функциясымен интегралдық қатынасы келесідей түрде болады

$$\tilde{u}(t,x) = \varphi_1(x) + \psi_1(t)x + \psi_1(0) + \int_0^x \int_0^t \tilde{z}(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi,$$

мұндағы $\varphi_1(x) \in C^2([0,\omega], R^n)$, $\psi_1(t) \in C^2([0,T], R^n)$, $\tilde{u}(t,x)$ функциясы

$$f(t,x) = g(t,x) - \{A(t,x)\ddot{\varphi}_1(x) + B(t,x)\ddot{\psi}_1(t) +$$
$$+C(t,x)[\varphi_1(x) + \psi_1(t)x + \psi_1(0)]\},$$
$$\varphi_2(x) = \phi(x) + \sum_{i=0}^{m} \{P_i(x)\ddot{\varphi}_1(x) + S_i(x)\ddot{\psi}_1(t_i)\}.$$

функциялармен бірге (2.3.1)-(2.3.5) есебінің шешімі болады.
(2.3.6)-(2.3.8) есебінің шешімін табу алгоритмі мен әдісінің схемасы.

$\lambda(x) = z(0,x)$ болсын. (2.3.6)-(2.3.8) есебінде $z(t,x) = \tilde{z}(t,x) + \lambda(x)$ ауыстыру жасаймыз, мұнда $\tilde{z}(t,x)$ белгісіз жаңа фукция.

Интегралдық шартты (2.3.6)-(2.3.8) бейлокалды есебі төмендегі есепке ауысады

$$\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial x \partial t} = A(t,x)\int\limits_0^t \frac{\partial \tilde{z}(\tau,x)}{\partial x}d\tau + B(t,x)\int\limits_0^x \frac{\partial \tilde{z}(t,\xi)}{\partial \xi}d\xi + C(t,x)\int\limits_0^x\int\limits_0^t \tilde{z}(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi +$$

$$+A(t,x)t\dot{\lambda}(x) + C(t,x)t\int\limits_0^x \lambda(\xi)\,d\xi + g(t,x), \qquad (2.3.9)$$

$$\tilde{z}(0,x) = 0, \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2.3.10)$$

$$\tilde{z}(t,0) = \psi_2(t) - \psi_2(0), \qquad t \in [0,T], \qquad (2.3.11)$$

$$\sum_{i=0}^m P_i(x)t_i\dot{\lambda}(x) = -\sum_{i=0}^m \left\{P_i(x)\int\limits_0^t \frac{\partial \tilde{z}(\tau,x)}{\partial x}d\tau + \right.$$

$$\left. + S_i(x)\int\limits_0^x \frac{\partial \tilde{z}(t,\xi)}{\partial \xi}d\xi\right\}\Bigg|_{t=t_i} + \phi(x), \qquad x \in [0,\omega]. \qquad (2.3.12)$$

(2.3.11) шартына біз (0; 0) нүктесіндегі келісілімділік шартын ескереміз:

$$\lambda(0) = \psi_2(0). \qquad (2.3.13)$$

(2.3.9)-(2.3.12) есебі (2.3.12) интегралдық қатынасыты $\lambda(x)$ функционалдық параметрімен берілген гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебі болып табылады. Екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін Гурса есебін шешу үшін [14, б. 244] жұмыста Риман әдісі қолданылды. Шешілімділік шарттары екінші ретті Фредгольм интегралдық теңдеуінің шешімділігімен тұжырымдалды [14, б. 245]. Үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды есебін [59-65], [71] гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебіне келтірілді, мұнда интегралдық бөліктерде тек t және x айнымалысы бойынша интегралдар болады, сонымен қатар сол интегралдар (2.3.12) интегралдық қатынаста да болады.

$(\tilde{z}(t,x), \lambda(x))$ жұбы, мұндағы $\tilde{z}(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ функцияның дербес туындылары $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 \tilde{z}(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\lambda(x) \in C([0,\omega], R^n)$ функциясы $\dot{\lambda}(x) \in C([0,\omega], R^n)$ туындысымен бірге (2.3.9) гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (2.3.10), (2.3.11) характеристикалық шарттарын және (2.3.12) интегралдық қатынастарын қанағаттандыратын болса, онда осы жұп (2.3.9)-(2.3.12) есебінің шешімі болып табылады, (2.3.6)-(2.3.8) және (2.3.9)-(2.3.12) есептері пара-пар.

$z^*(t,x)$ функциясы (2.3.6)-(2.3.8) есебінің шешімі болса, онда $\{\tilde{z}^*(t,x), \lambda^*(x)\}$ функциялар жұбы, мұндағы $\tilde{z}^*(t,x) = z^*(t,x) - \lambda^*(x)$, $\lambda^*(x) = z^*(0,x)$, (2.3.9)-(2.3.12) есебінің шешімі болады. Және керсінше де дұрыс, $\{\tilde{z}^{**}(t,x), \lambda^{**}(x)\}$ функциялары (2.3.9)-(2.3.12) есебінің шешімі болса, онда

$z^{**}(t,x) = \tilde{z}^{**}(t,x) + \lambda^{**}(x)$ теңдігінен анықталатын $z^{**}(t,x)$ функциясы (2.3.6)-(2.3.8) есебінің шешімі болады, мұндағы $z^{**}(0,x) = \lambda^{**}(x)$.

$\lambda(x)$ функциясы және оның $\dot{\lambda}(x)$ туындысы белгілі болса, онда (2.3.9)-(2.3.11) гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебінен $\tilde{z}(t,x)$ функциясы және оның $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t}$ дербес туындыларын табамыз. Ал $\tilde{z}(t,x)$ функциясы және оның $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t}$ дербес туындылары белгілі болса, онда (2.3.12) интегралдық қатынастан $\dot{\lambda}(x)$ туындысын табамыз.

$\tilde{z}(t,x)$ функциясы да және оның $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t}$ дербес туындылары да, және $\lambda(x)$ функциясы $\dot{\lambda}(x)$ туындысымен бірге белгісіз болғандықтан, келесі алгоритммен анықталатын итерациялық процесті қолданамыз.

Бастапқы қадам. 1) (2.3.10), (2.3.11) шарттарын пайдаланамыз, (2.3.12) оң жағында

$$\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t} = \ddot{\psi}_1(t)$$

деп алып және

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(x) t_i$$

матрицасы $x \in [0,\omega]$ аралығында қайтымдылығын болжаймыз. Сонда (2.3.12) теңдеуінен $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$ алғашқы жуықтауын барлық $x \in [0,\omega]$ үшін анықтаймыз. (2.3.13) бастапқы шартын қолдана отырып, барлық $x \in [0,\omega]$ үшін

$$\lambda^{(0)}(x) = \psi_2(0) + \int_0^x \dot{\lambda}^{(0)}(\xi) d\xi$$

алғашқы жуықтауын табамыз.

2) (2.3.9)-(2.3.11) гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебіндегі (2.3.9) теңдеулер жүйесінің оң жағына $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ қою арқылы $\tilde{z}^{(0)}(t,x)$ функциясын және оның $\frac{\partial \tilde{z}^{(0)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ туындыларын барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін табамыз.

1-ші қадам. 1) (2.3.10), (2.3.11) шарттарын қолданамыз. (2.3.12) оң жағына

$$\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}^{(0)}(t,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{z}^{(0)}(t,x)}{\partial t}$$

қойып, барлық $x \in [0,\omega]$ үшін $\dot{\lambda}^{(1)}(x)$ функциясын анықтаймыз. (2.3.13) бастапқы шартын қолдана отырып, барлық $x \in [0,\omega]$ үшін

$$\lambda^{(1)}(x) = \psi_2(0) + \int\limits_0^x \dot{\lambda}^{(1)}(\xi)d\xi$$

функциясын табамыз.
2) (2.3.9)-(2.3.11) гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебіндегі (2.3.9) теңдеуінің оң жағына $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(1)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$ қою арқылы $\tilde{z}^{(1)}(t,x)$ функциясын және оның

$$\frac{\partial \tilde{z}^{(1)}(t,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \tilde{z}^{(1)}(t,x)}{\partial t}$$

туындыларын барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін табамыз.
Және тағы сол сияқты.
k-ші қадам. 1) (2.3.10), (2.3.11) шарттарын қолданамыз. (2.3.12) оң жағына

$$\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}^{(k-1)}(t,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{z}^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}$$

қойып барлық $x \in [0, \omega]$ үшін $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$ функциясын анықтаймыз. (2.3.13) бастапқы шартын қолдана отырып, барлық $x \in [0, \omega]$үшін

$$\lambda^{(k)}(x) = \psi_2(0) + \int\limits_0^x \dot{\lambda}^{(k)}(\xi)d\xi$$

функциясын табамыз.
2) (2.3.9)-(2.3.11) гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебіндегі (2.3.9) теңдеуінің оң жағына $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ қою арқылы $\tilde{z}^{(k)}(t,x)$ және оның $\frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,x)}{\partial t}$ туындыларын барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін табамыз. $k = 1,2, \ldots$.

Алгоритм қадамдарынан көрініп тұрғандай, ол екі бөлікті қамтиды: 1) $\tilde{z}(t,x)$ және $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t}$ бекітілгенде $\dot{\lambda}(x)$ және $\lambda(x)$ функциялары интегралдық қатынастардан анықталады; 2) $\lambda(x)$, $\dot{\lambda}(x)$ бекітілген болғанда, $\tilde{z}(t,x)$ функциясы екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебінен анықталады;
Интегралдық шартты псевдо-гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептің шешімділік шарттары.

Интегралдық шартты (2.3.1)-(2.3.5) псевдо-гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есебінің бірмәнді шешілімділігі туралы негізгі нәтижені тұжырымдамас бұрын, пара-пар балама (2.3.6)-(2.3.8) есебіне қатысты нәтижелерді береміз.

$$\alpha = \max_{(t,x)\in\Omega} \|A(t,x)\|, \qquad \beta = \max_{(t,x)\in\Omega} \|B(t,x)\|, \ \gamma = \max_{(t,x)\in\Omega} \|C(t,x)\|,$$

$$H = \alpha T + \beta\omega + \gamma T\omega, \qquad \zeta_i = \max_{x\in[0,\omega]} \|P_i(x)\|, \qquad \eta_i = \max_{x\in[0,\omega]} \|S_i(x)\|, i = \overline{0,m}$$

болсын.

Құрастырылған алгиритмдегі жинақтылық шарты бір мезгілде (2.3.6)-(2.3.8) бейлокалды есептің бірмәнді шешілімді болатындай келесідей теорема келтірілген.

2.3.1 теорема. Келесі шарттар орындалса:

a) $A(t,x), B(t,x)$, $C(t,x) - n\times n$-матрицалар және $f(t,x) - n$-вектор-фунциясы Ω, облысында үзіліссіз болса;
b) $\varphi_1(t) - n$-вектор-фукциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданаса, $P_i(x)$, $S_i(x) - n\times n$-матрицалар, $i = \overline{0,m}$ және $\varphi_2(x) - n$-вектор-фукциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз болса;
c) $\psi_1(t) - n$-вектор-функция $[0,T]$ аралығында үзіліссіз екі рет дифференциалданаса, $\psi_2(t) - n$-вектор-функция $[0,T]$ аралығында үзіліссіз болса, және (0; 0) нүктесінде келісілімділік шартты орындалса: $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$;
d) $Q(x) - n\times n$-матрицасы $x\in[0,\omega]$ аралығында қайтымды болса

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{m} P_i(x) t_i$$

және келесі бағалау орындалса

$$\|Q^{-1}(x)\| \le k(x),$$

мұндағы $k(x)$ оң $[0,\omega]$ аралығына үзілісіз функция;

$$e)\ q(x) = \max\left(k(x), \int_0^x k(\xi)d\xi\right)\max(T,\omega)T[\alpha+\gamma\omega] \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{m}\left\{\zeta_i t_i e^{H(\omega+t_i)} + \eta_i \omega e^{H(\omega+T)}\right\} \le \chi < 1,$$

мұндағы χ тұрақты.

Онда (2.3.6)-(2.3.8) интегралдық шартты гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды есебінің жалғыз шешімі болады.

Дәлелдеуі. (2.3.6)-(2.3.8) бейлокалды есебі мен (2.3.9)-(2.3.12) функционалды параметрлі гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебі пара-пар болғандықтан, (2.3.9)-(2.3.12) есебін қарастырамыз.
(2.3.9)-(2.3.12) есебінің шешімін табу үшін алгоритмді қолданамыз.

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{m} P_i(x) t_i$$

матрицасы $x \in [0, \omega]$ аралығында қайтымды болсын деп болжаймыз.
Бастапқы қадамда (2.3.12) оң жағында

$$\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t} = \ddot{\psi}_1(t)$$

болса, біз $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$ анықтаймыз:

$$\dot{\lambda}^{(0)}(x) = -Q^{-1}(x) \left\{ \sum_{i=0}^{m} S_i(x) x \ddot{\psi}_1(t_i) - \phi(x) \right\}, \quad x \in [0, \omega].$$

Онда (2.3.13) бастапқы шартын қолданып және

$$\lambda^{(0)}(x) = \psi_2(0) - \int_0^x Q^{-1}(\xi) \left\{ \sum_{i=0}^{m} S_i(\xi) \xi \ddot{\psi}_1(t_i) - \phi(\xi) \right\} d\xi, \quad x \in [0, \omega]$$

табамыз.
$\lambda(x)$ бекітілген болғанда (2.3.9)-(2.3.11) гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебі үш интегралдық теңдеулер жүйесіне пара-пар:

$$\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x} = \int_0^t \left\{ A(\tau,x) \int_0^\tau \frac{\partial \tilde{z}(\tau_1,x)}{\partial x} d\tau_1 + B(\tau,x) \int_0^x \frac{\partial \tilde{z}(\tau,\xi)}{\partial \xi} d\xi \right\} d\tau +$$
$$+ \int_0^t C(\tau,x) \int_0^x \int_0^\tau \tilde{z}(\tau_1,\xi)\, d\tau_1\, d\xi d\tau + \int_0^t g(\tau,x) d\tau +$$
$$+ \int_0^t \left\{ A(\tau,x)\tau\dot{\lambda}(x) + C(\tau,x)\tau \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi \right\} d\tau, \qquad (2.3.14)$$

$$\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial x} = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \left\{ A(t,\xi) \int_0^t \frac{\partial \tilde{z}(\tau,\xi)}{\partial \xi} d\tau + B(t,\xi) \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}(t,\xi_1)}{\partial t} d\xi_1 \right\} d\xi +$$
$$+ \int_0^x C(t,\xi) \int_0^\xi \int_0^t \tilde{z}(\tau,\xi_1)\, d\tau\, d\xi_1 d\xi + \int_0^x g(t,\xi) d\xi +$$

$$+\int_0^x \left\{A(t,\xi)t\dot{\lambda}(\xi) + C(t,\xi)t\int_0^\xi \lambda(\xi_1)\,d\xi_1\right\}d\xi, \qquad (2.3.15)$$

$$\tilde{z}(t,x) = \psi_2(t) - \psi_2(0) + \int_0^t\int_0^x \left\{A(t,\xi)\int_0^\tau \frac{\partial \tilde{z}(\tau_1,\xi)}{\partial \xi}d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + B(\tau,\xi)\int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}(\tau,\xi_1)}{\partial t}d\xi_1\right\}d\xi d\tau + \int_0^t\int_0^x C(\tau,\xi)\int_0^\xi\int_0^\tau \tilde{z}(\tau_1,\xi_1)\,d\tau_1\,d\xi_1 d\xi\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^x g(\tau,\xi)d\xi\,d\tau + \int_0^t\int_0^x \left\{A(\tau,\xi)\tau\dot{\lambda}(\xi) + C(\tau,\xi)\tau\int_0^\xi \lambda(\xi_1)\,d\xi_1\right\}d\xi d\tau. \quad (2.3.16)$$

$\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ қойып, (2.3.14)-(2.3.16) интегралдық теңдеулер жүйесінен $\tilde{z}^{(0)}(t,x)$ функциясын және оның $\frac{\partial \tilde{z}^{(0)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ дербес туындыларын барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін табамыз.

Келесі бағалаулар орындалады

$$\left\|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\right\| \le k(x)\left[1 + \sum_{i=0}^m (\zeta_i + (1+x)\eta_i)\right]\max(\|\psi_1\|_2, \|\varphi_1\|_2, \|\varphi_2\|_0),$$

$$\left\|\lambda^{(0)}(x)\right\| \le \left\{1 + \int_0^x k(\xi)\left[1 + \sum_{i=0}^m (\zeta_i + (1+\xi)\eta_i)\right]d\xi\right\} \times$$
$$\times \max(\|\psi_1\|_2, \|\varphi_1\|_2, \|\varphi_2\|_0),$$

$$\left\|\frac{\partial \tilde{z}^{(0)}(t,x)}{\partial x}\right\| \le \max(T,\omega)e^{H(x+t)}M,$$

$$\left\|\frac{\partial \tilde{z}^{(0)}(t,x)}{\partial t}\right\| \le \max(T,\omega)e^{H(x+t)}M,$$

$$\left\|\tilde{z}^{(0)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega)e^{H(x+t)}M,$$

мұндағы

$$M = \alpha T \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\right\| + \gamma T\omega \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(0)}(x)\right\| +$$
$$+(1 + H + 2\gamma)\max(\|f\|_0, \|\psi_1\|_2, \|\varphi_1\|_2).$$

Алгоритмнің k-ші және $(k+1)$-ші қадамдарынан бастап біртіндеп

$$\dot{\lambda}^{(k)}(x), \qquad \lambda^{(k)}(x), \qquad \frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,x)}{\partial t}, \qquad \tilde{z}^{(k)}(t,x),$$

$$\dot{\lambda}^{(k+1)}(x), \qquad \lambda^{(k+1)}(x), \qquad \frac{\partial \tilde{z}^{(k+1)}(t,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \tilde{z}^{(k+1)}(t,x)}{\partial t}, \qquad \tilde{z}^{(k+1)}(t,x),$$

функциялары анықталады және сәйкесінше айырмалардың бағалауларын аламыз

$$\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\| \leq k(x)\sum_{i=0}^{m}\left\{\zeta_i \int_0^{t_i}\left\|\frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(\tau,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{z}^{(k-1)}(\tau,x)}{\partial x}\right\| d\tau + \right.$$

$$\left. +\eta_i \int_0^{x}\left\|\frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,\xi)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}^{(k-1)}(t,\xi)}{\partial t}\right\| d\xi\right\}, \qquad (2.3.17)$$

$$\left\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\right\| \leq \int_0^{x} k(\xi)\sum_{i=0}^{m}\left\{\zeta_i \int_0^{t_i}\left\|\frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(\tau,\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{z}^{(k-1)}(\tau,\xi)}{\partial \xi}\right\| d\tau + \right.$$

$$\left. +\eta_i \int_0^{\xi}\left\|\frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,\xi_1)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}^{(k-1)}(t,\xi_1)}{\partial t}\right\| d\xi_1\right\} d\xi, \qquad (2.3.18)$$

$$\left\|\frac{\partial \tilde{z}^{(k+1)}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,x)}{\partial x}\right\| \leq \max(T,\omega)e^{H(x+t)} \times$$

$$\times\left\{\alpha T \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\| + \gamma T\omega \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\right\|\right\}, \quad (2.3.19)$$

$$\left\|\frac{\partial \tilde{z}^{(k+1)}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\| \leq \max(T,\omega)e^{H(x+t)} \times$$

$$\times\left\{\alpha T \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\| + \gamma T\omega \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\right\|\right\}, (2.3.20)$$

$$\left\|\tilde{z}^{(k+1)}(t,x) - \tilde{z}^{(k)}(t,x)\right\| \leq \max(T,\omega)e^{H(x+t)}\left\{\alpha T \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\| + \right.$$

$$\left. +\gamma T\omega \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\right\|\right\}. \qquad (2.3.21)$$

$$\Delta_{k+1} = \max\left(\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\|, \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\right\|\right)$$

болсын.

Содан кейін (2.3.17), (2.3.18) бағалаулардан (2.3.19)-(2.3.21) бағалауларын ескеріп, негізгі бағалауды

$$\Delta_{k+1} \leq q(x)\Delta_k$$

аламыз.

Теореманың е) шарты бойынша $q(x) \leq \chi < 1$. Осыдан Δ_k тізбегінің $k \to \infty$ ұмтылғанда Δ_* жинақтылығы шығады. Бұл сәйкесінше $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\lambda^{(k)}(x)$

тізбектерінің $k \to \infty$ ұмтылғанда $\dot{\lambda}^*(x)$, $\lambda^*(x)$ функцияларына бірқалыпты жинақталады. $\lambda^*(x)$ фукнциясы үзіліссіз және $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады. (2.3.19)-(2.3.21) бағалауды басшылыққа ала отырып, $\frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}^{(k)}(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{z}^{(k)}(t,x)$ тізбектерінің $(t,x) \in \Omega$ облысында сәйкесінше $\frac{\partial \tilde{z}^*(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}^*(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{z}^*(t,x)$ бірқалапты жинақтылығын орнатамыз. Әлбетте, $\frac{\partial \tilde{z}^*(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{z}^*(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{z}^*(t,x)$ функциялар Ω облысында үзіліссіз болады. $(\tilde{z}^*(t,x), \lambda^*(x))$ функциялар жұбы (2.3.9)-(2.3.12) есебінің шешімі болады. Бұл есептің шешімінің бірмәнділігі дәлелденді.

$z^*(t,x)$ функциясын $\tilde{z}^*(t,x)$ және $\lambda^*(x)$ функцияларының қосындысы ретінде анықтаймыз:

$$z^*(t,x) = \tilde{z}^*(t,x) + \lambda^*(x).$$

Содан кейін $z^*(t,x)$ функциясы (2.3.6)-(2.3.8) есебінің шешімі болады.

(2.3.6)-(2.3.8) есебі мен (2.3.1)-(2.3.5) есептері пара-пар болғандықтан және

$$z^*(t,x) = \frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial x \partial t},$$
$$g(t,x) = \{A(t,x)\ddot{\varphi}_1(x) + B(t,x)\ddot{\psi}_1(t) +$$
$$+C(t,x)[\varphi_1(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0)]\} + f(x,t),$$
$$\phi(x) = -\sum_{i=0}^{m}\{P_i(x)\ddot{\varphi}_1(x) + S_i(x)\ddot{\psi}_1(t_i)\} + \varphi_2(x)$$

теңдіктерінің орындылығынан, келесі теорема шығады.

2.3.2 теорема. 2.3.1 теорема шарттары орындалса.

Онда (2.3.1)-(2.3.5) бейлокалды шартты төртінші ретті псевдо-гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есебінің $u^*(t,x)$ жалғыз классикалық шешімі болады.

Дәлелдеуі. $\varphi_1(x)$, $\psi_1(t)$, $z^*(t,x)$ функциялармен интегралдық қатынасты құрамыз

$$u^*(t,x) = \varphi_1(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0) + \int_0^x \int_0^t z^*(\tau,\xi)d\tau d\xi, \quad (t,x) \in \Omega. \quad (2.3.22)$$

Бұл (2.3.6)-(2.3.8) бейлокалды есебіндегі $\frac{\partial^2 z^*(\tau,x)}{\partial x \partial t}$ функцияның және $z^*(t,x)$, $\frac{\partial z^*(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial z^*(t,x)}{\partial t}$ интегралдық функцияларының орнына келесі теңдіктерді қоямыз:

$$\frac{\partial^2 z^*(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^4 u^*(t,x)}{\partial x^2 \partial t^2},$$
$$\int_0^x \int_0^t z^*(\tau,\xi) d\tau d\xi = u^*(t,x) - \varphi_1(x) - \psi_1(t) + \psi_1(0),$$
$$\int_0^t \frac{\partial z^*(\tau,x)}{\partial x} d\tau = \frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial x^2} - \ddot{\varphi}_1(x), \quad \int_0^x \frac{\partial z^*(t,\xi)}{\partial t} d\xi = \frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial t^2} - \ddot{\psi}_1(t).$$

Содан кейін (2.3.22) шарттары болғанда және

$$f(x,t) = g(t,x) - \{A(t,x)\ddot{\varphi}_1(x) + B(t,x)\ddot{\psi}_1(t) +$$
$$+C(t,x)[\varphi_1(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0)]\},$$
$$\varphi_2(x) = \phi(x) - \sum_{i=0}^{m} \left\{P_i(x)\ddot{\varphi}_1(x) + S_i(x)\ddot{\psi}_1(t_i)\right\}$$

теңдіктері орындалады, $u^*(t,x)$ функциясы (2.3.1)-(2.3.5) бейлокалды шартты төртінші ретті псевдо-гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есебінің классикалық шешімі болып табылады. (2.3.2) және (2.3.4) шарттары (2.3.12) өрнегінен шығады.
Мысал ретінде,

$$A(t,x) = B(t,x) = C(t,x) = 0, m = 1,$$
$$P_0(x) = I, P_1(x) = -I, S_0(x) = S_1(x) = 0, \varphi_0(x) = 0$$

болғандағы есепті қарастырамыз, мұндағы $I - n -$ өлшемді бірлік матрица.

(2.3.1)-(2.3.5) есебі келесі түрде болады

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t^2} = f(t,x), \tag{2.3.23}$$
$$u(0,x) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2.3.24}$$
$$\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(T,x)}{\partial x^2}, \quad x \in [0,\omega], \tag{2.3.25}$$
$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.3.26}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{2.3.27}$$

Ал (2.3.6)-(2.3.8) есебі келесі түрде болады:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = f(t,x), \qquad z(t,0) = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T],$$

$$-\int_0^T \frac{\partial z(\tau,x)}{\partial x}d\tau = \ddot{\varphi}_1(x), \quad x \in [0,\omega].$$

Содан кейін (2.3.9)-(2.3.12) есебі келесі түрде болады:

$$\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial x \partial t} = f(t,x), \tag{2.3.28}$$

$$\tilde{z}(0,x) = 0, \qquad x \in [0,\omega], \tag{2.3.29}$$

$$\tilde{z}(t,0) = \psi_2(t) - \psi_2(0), \qquad t \in [0,T], \tag{2.3.30}$$

$$-\dot{\lambda}(x)T = \int_0^T \frac{\partial \tilde{z}(\tau,x)}{\partial x}d\tau + \ddot{\varphi}_1(x), \qquad x \in [0,\omega]. \tag{2.3.31}$$

2.3.1 теореманың a), b), c) шарттары берілген есеп үшін орындалады.
2.3.1 теореманың d) шартыда орынды:

$$Q(x) = -T, \;\; \exists [Q(x)]^{-1} = -\frac{1}{T}, \qquad k(x) = \frac{1}{T}.$$

e) шарттын тексерейік:

$$q(x) = \max\left(\frac{1}{T}, x\frac{1}{T}\right)\max(T,\omega)\, T \cdot 0 \cdot Te^0 = 0 < 1.$$

Бұл да орындалады. Сондықтан, (2.3.28)-(2.3.31) бейлокалды есебінің жалғыз шешімі болады.
(2.3.28)-(2.3.31) Гурса есебінің шешімін айқын түрде анықтаймыз

$$\tilde{z}^*(t,x) = \dot{\psi}_2(t) + \int_0^x \int_0^t f(\tau,\xi)d\tau d\xi.$$

Оның туындысын (2.3.31) шартына қойып, біз (2.3.31), (2.3.13) Коши есебінің шешімін табамыз:

$$\lambda^*(x) = \psi_2(0) - \frac{1}{T}[\dot{\varphi}_1(x) - \dot{\varphi}_1(0)] + \frac{1}{T}\int_0^x \int_0^T \int_0^\tau f(\tau_1,\xi)d\tau_1\, d\tau d\xi.$$

Сондықтан, (2.3.23)-(2.3.27) есебінің жалғыз шешімі келесідей болады

$$u^*(t,x) = \varphi_1(x) + \psi_1(t) - \psi_1(0) + x\int_0^t \left\{\dot{\psi}_2(\tau) + \psi_1(0)\right\} d\tau -$$

$$-t\frac{1}{T}\int_0^x [\dot{\varphi}_1(\xi) - \dot{\varphi}_1(0)]d\xi + \int_0^t \int_0^x \left\{\int_0^\tau \int_0^\xi f(\tau_1,\xi_1)\,d\xi_1 d\tau_1 -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^s f(s_1,\xi)\,ds_1 ds\right\} d\xi d\tau.$$

3 ТӨРТІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ (III) ҮШІН БАСТАПҚЫ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

Бұл тарауда

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + C_1(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \\ + B_2(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C_2(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_3(t,x)u + f(t,x), \qquad (III)$$

екі тәуелсіз айнымалылы төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есептер қарастырылады. Жаңа белгісіз функциялар енгізу арқылы зерттеліп отырған есептер екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал есепке және интегралдық қатынастарға келтіріледі. Осы пара-пар есептің бірмәнді шешілімділігі шарттары орнатылып, шешімін табу жолдары ұсынылады.

Одан әрі алғашқы қарастырылатын есептің шешімінің болуы мен жалғыздығы, шешімін табу алгоритмдері келтіріледі.

3.1 Төртінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері (III) үшін бастапқы-шеттік есеп

$\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ облысында екі тәуелсіз айнымалылы төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есебі қарастырылады:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + C_1(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \\ + B_2(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C_2(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_3(t,x)u + f(t,x), \qquad (3.1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[P_{i,j}(x)\frac{\partial^i u(t_j,x)}{\partial t^{i-1}\partial x} + S_{i,j}(x)\frac{\partial^i u(t_j,x)}{\partial t^i}\right] + \\ + L_j(x)u(t,x)\right\}\Big|_{t=t_j} = \varphi_1(x), \qquad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad u(0,x) = \varphi_3(x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (3.1.3)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (3.1.4)$$

мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция; $A_s(t,x)$, $s = 1,2,3$, $B_p(t,x)$, $C_p(t,x)$, $p = 1,2$, $n \times n$-матрицалары және $f(t,x) -$ n-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз; $P_{i,j}(x)$, $S_{i,j}(x)$, $L_j(x)$, $i = 1,2,3$, $j = \overline{1,m}$, $n \times n$–матрицалары және $\varphi_1(x) - n$-вектор-функция $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз; $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$; $\varphi_2(x)$ және $\varphi_3(x) - n$-вектор-функциялары $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады; және $\psi(t) - n$-вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында үш рет үзіліссіз дифференциалданады.

Келісілімділік шарттары $\varphi_3(0) = \psi(0)$, $\varphi_2(0) = \dot{\psi}(0)$ орындалады.

$u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ функциясы

$$\frac{\partial^{i+j} u(t,x)}{\partial t^i \partial x^j} \in C(\Omega, R^n), \qquad i = 0,1,2,3, \qquad j = 0,1,2,3$$

дербес туындыларымен бірге (3.1.1) жүйесін барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін және (3.1.2)-(3.1.4) шеттік шарттарын қанағаттандыратын болса, онда $u(t,x)$ функциясы (3.1.1)-(3.1.4) есебінің шешімі деп аталады.

Бастапқы есепті пара-пар екінші ретті гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін есебіне келтіру.

(3.1.1)-(3.1.4) есебін шешімін $u(t,x)$ функциясын

$$u(t,x) = \varphi_3(x) + \varphi_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau w(\tau_1, x)\, d\tau_1\, d\tau, \qquad (t,x) \in \Omega \qquad (3.1.5)$$

түрінде қарастырамыз.

(3.1.5) дифференциалдау арқылы

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varphi_2(x) + \int_0^t w(\tau,x)\, d\tau,$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_3(x) + \dot{\varphi}_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau \frac{\partial w(\tau_1,x)}{\partial t} d\tau_1\, d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} = \dot{\varphi}_2(x) + \int_0^t \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial t} d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = w(t,x), \qquad \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^2 \partial x} = \frac{\partial w(t,x)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} = \frac{\partial w(t,x)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^3 \partial x} = \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t \partial x}$$

қатынастарын және (3.1.3) шарттарын аламыз.

Сондай-ақ, қайталанатын интегралдың қасиетінен келесі теңдікті аламыз

$$\int_0^t \int_0^\tau w(\tau_1,x)\, d\tau_1\, d\tau = \int_0^t (t-\tau) w(\tau,x)\, d\tau.$$

Онда (3.1.1)-(3.1.4) есебін келесі есепке келтіреміз:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial w}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial w}{\partial t} + C_1(t,x)w + \int_0^t \tilde{A}_2(t,x,\tau)\frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x}d\tau +$$

$$+\int_0^t \tilde{B}_2(t,x,\tau)w(\tau,x)\,d\tau + \tilde{f}(t,x), \tag{3.1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{P_{3,j}(x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} + S_{3,j}(x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} + S_{2,j}(x)w(t,x)\right\}\Bigg|_{t=t_j} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_0^{t_j}\left\{\tilde{P}_{2,j}(t_j,x,\tau)\frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x} + \tilde{S}_{1,j}(t_j,x,\tau)w(\tau,x)\right\}d\tau = \tilde{\varphi}(x), \tag{3.1.7}$$

$$w(t,0) = \ddot{\psi}(t),\ \ t \in [0,T], \tag{3.1.8}$$

мұндағы

$$\tilde{A}_2(t,x,\tau) = A_2(t,x) + (t-\tau)C_2(t,x),$$
$$\tilde{B}_2(t,x,\tau) = B_2(t,x) + (t-\tau)A_3(t,x),$$
$$\tilde{f}(t,x) = f(t,x) + A_2(t,x)\dot{\varphi}_2(x) + B_2(t,x)\varphi_2(x) +$$
$$+C_2(t,x)[\dot{\varphi}_3(x) + \dot{\varphi}_2(x)t] + A_3(t,x)[\varphi_3(x) + \varphi_2(x)t],$$
$$\tilde{P}_{2,j}(t_j,x,\tau) = P_{2,j}(x) + (t_j-\tau)P_{1,j}(x),$$
$$\tilde{S}_{1,j}(t_j,x,\tau) = S_{1,j}(x) + (t_j-\tau)L_j(x),$$
$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi_1(x) - \sum_{j=1}^{m}\{P_{2,j}(x)\dot{\varphi}_2(x) + P_{1,j}(x)[\dot{\varphi}_3(x) + \dot{\varphi}_2(x)t_j] +$$
$$+S_{1,j}(x)\varphi_2(x) + L_j(x)[\varphi_3(x) + \varphi_2(x)t_j]\}.$$

$w(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ функциясы

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega,R^n), \qquad \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega,R^n), \qquad \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega,R^n)$$

дербес туындыларымен бірге (3.1.6) екінші ретті гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (3.1.7) бейлокалды шартын және (3.1.8) шеттік шартын қанағаттандыратын болса, онда $w(t,x)$ функциясы (3.1.6)-(3.1.8) есебінің шешімі деп аталады.

$u^*(t,x)$ функциясы (3.1.1)-(3.1.4) есебінің шешімі болса, онда

$$w^*(t,x) = \frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial t^2}$$

теңдігінен анықталатын $w^*(t,x)$ функциясы (3.1.6)-(3.1.8) есебінің шешімі болады. Және керісінше, $w^{**}(t,x)$ функциясы (3.1.6)-(3.1.8) есебінің шешімі болса, онда

$$u^{**}(t,x) = \varphi_3(x) + \varphi_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau w^{**}(\tau_1, x)\, d\tau_1\, d\tau$$

интегралдық қатынасымен анықталатын $u^{**}(t,x)$ функциясы (3.1.1)-(3.1.4) есебінің шешімі болады.

(3.1.6)-(3.1.8) есебі екінші ретті гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік интегралдық шартты бейлокалды есеп болып табылады.

(3.1.5) интегралдық қатынасы $u(t,x)$ белгісіз функциясын анықтауға мүмкіндік береді, атап айтқанда барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін (3.1.1)-(3.1.4) бастапқы-шеттік есебінің шешімі болады.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін топырақтың ылғалдығына байланысты есептерде кеңінен қолданылатын гиперболалық тектес жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі ретінде қарастыруға болады [3, 69б], [80-81].

(3.1.6)-(3.1.8) бейлокалды есебінің бірмәнді шешілімділік шарты мен шешімін табу алгоритмі.

Осылайша, (3.1.1)-(3.1.4) бастапқы есеп пара-пар (3.1.6)-(3.1.8) гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік интегралдық қатынасты бейлокалды есепке келтіріледі. Біз (3.1.6) жүйесінің коэффициенттері мен (3.1.7) бейлокалды шартының матрицалары терминінде екінші ретті гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік интегралдық қатынасты бейлокалды есебінің шешілімділік шарттарын ұсынамыз.

(3.1.6)-(3.1.8) есебін қарастырамыз. $\lambda(x)$ функционалдық параметрін келесі түрде енгіземіз: $\lambda(x) = w(0,x)$; (3.1.6)-(3.1.8) есебінде барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $w(t,x) = \widetilde{w}(t,x) + \lambda(x)$ алмастыруын жасаймыз.
Онда (3.1.6)-(3.1.8) есебі пара-пар келесі есепке ауысады:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial x \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} + C_1(t,x)\widetilde{w} + \tilde{f}(t,x) + \int_0^t \tilde{A}_2(t,x,\tau)\frac{\partial \widetilde{w}(\tau,x)}{\partial x} d\tau$$
$$+ \int_0^t \tilde{B}_2(t,x,\tau)\widetilde{w}(\tau,x)\, d\tau + \tilde{A}(t,x)\dot{\lambda}(x) + \tilde{A}(t,x)\lambda(x), \qquad (3.1.9)$$

$$\widetilde{w}(0,x) = 0, \qquad x \in [0,\omega], \qquad (3.1.10)$$
$$\widetilde{w}(t,0) = \ddot{\psi}(t) - \ddot{\psi}(0), \quad t \in [0,T], \qquad (3.1.11)$$

$$\left[P_{3,1}(x)+\sum_{j=2}^{m}\left\{P_{3,j}(x)+\int_{0}^{t_j}\tilde{P}_{2,j}(t_j,x,\tau)d\tau\right\}\right]\dot{\lambda}(x)+$$

$$+\left[S_{2,1}(x)+\sum_{j=2}^{m}\left\{S_{2,j}(x)+\int_{0}^{t_j}\tilde{S}_{1,j}(t_j,x,\tau)d\tau\right\}\right]\lambda(x)+$$

$$+\sum_{j=2}^{m}\left\{P_{3,j}(x)\frac{\partial\widetilde{w}(t_j,x)}{\partial x}+S_{2,j}(x)\widetilde{w}(t_j,x)\right\}+\sum_{j=1}^{m}S_{3,j}(x)\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j}+$$

$$+\sum_{j=2}^{m}\int_{0}^{t_j}\left\{\tilde{P}_{2,j}(t_j,x,\tau)\frac{\partial\widetilde{w}(\tau,x)}{\partial x}+\tilde{S}_{1,j}(t_j,x,\tau)\widetilde{w}(\tau,x)\right\}d\tau=\tilde{\varphi}(x),\qquad(3.1.12)$$

мұндағы

$$\tilde{A}(t,x)=A_1(t,x)+\int_{0}^{t}\tilde{A}_2(t,x,\tau)d\tau,\qquad \tilde{C}(t,x)=C_1(t,x)+\int_{0}^{t}\tilde{B}_2(t,x,\tau)d\tau.$$

(3.1.11) қатынасында (0; 0) нүктесі үшін келісімділік шартын ескереміз:

$$\lambda(0)=\ddot{\psi}(0).\qquad(3.1.13)$$

(3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімі деп $(\widetilde{w}(t,x),\ \lambda(x))$ функциялар жұбын айтамыз, мұндағы $\widetilde{w}(t,x))\in C(\Omega,R^n)$ функция өзінің $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R^n)$, $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, $\frac{\partial^2\widetilde{w}(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,R^n)$ дербес туындыларын және $\lambda(x)\in C([0,\omega],R^n)$ функциясы өзінің $\dot{\lambda}(x)\in C([0,\omega],R^n)$ туындысымен бірге (3.1.9) гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін, (3.1.10), (3.1.11) характеристикалық шарттарын және (3.1.12) қатынасын қанағаттандырады.

(3.1.6)-(3.1.8) және (3.1.9)-(3.1.12) есептері пара-пар. $w^*(t,x)$ функциясы (3.1.6)-(3.1.8) есебінің шешімі болса, онда $(\widetilde{w}^*(t,x),\ \lambda^*(x))$ функциялар жұбы (3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімі болады, мұнда барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін $\widetilde{w}^*(t,x)=w^*(t,x)-w^*(0,x)$ және барлық $x\in[0,\omega]$ үшін $\lambda^*(x)=w^*(0,x)$ теңдігі орынды. Және керісінше, $(\widetilde{w}^{**}(t,x),\ \lambda^{**}(x))$ функциялар жұбы (3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімі болса, онда

$$w^{**}(t,x)=\widetilde{w}^{**}(t,x)+\lambda^{**}(x)$$

теңдігімен анықталатын $w^{**}(t,x)$ функциясы барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін (3.1.6)-(3.1.8) есебінің шешімі болады.

Бекітілген $\lambda(x)$ үшін (3.1.9)-(3.1.11) есебі гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебі болады. Екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін Гурса есептерінің шешілімділіктері [8, 314б], [12, 315б], және [15, 102б] жұмыстарда қарастырылды. (3.1.9) жүйедегі жүктелген қосындылары интегралдық қатынаспен келтірілген, (3.1.9)-(3.1.11) гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебінің бекітілген $\lambda(x)$ үшін жалғыз шешімі болады [3, 98б], [15, 117б].

Берілген есепте $\tilde{v}(t,x)=\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial x}$ және $\tilde{z}(t,x)=\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial t}$ болсын. (3.1.9)-(3.1.11) Гурса есебі келесі үш интегралдық теңдеулер жүйесіне пара-пар:

$$\tilde{z}(t,x)=\ddot{\psi}(t)+\int_0^x\{A_1(t,\xi)\tilde{v}(t,\xi)+B_1(t,\xi)\tilde{z}(t,\xi)+C_1(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi)\}d\xi+$$
$$+\int_0^x\int_0^t\left\{\tilde{A}_2(t,\xi,\tau)\tilde{v}(\tau,\xi)+\tilde{B}_2(t,\xi,\tau)\widetilde{w}(\tau,\xi)\right\}d\tau\,d\xi+$$
$$+\int_0^x\left\{\tilde{A}(t,\xi)\dot{\lambda}(\xi)+\tilde{C}(t,\xi)\lambda(\xi)+\tilde{f}(t,\xi)\right\}d\xi, \qquad (3.1.14)$$

$$\tilde{v}(t,x)=\int_0^t\{A_1(\tau,x)\tilde{v}(\tau,x)+B_1(\tau,x)\tilde{z}(\tau,x)+C_1(\tau,x)\widetilde{w}(\tau,x)\}d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^\tau\left\{\tilde{A}_2(\tau,x,\tau_1)\tilde{v}(\tau_1,x)+\tilde{B}_2(\tau,x,\tau_1)\widetilde{w}(\tau_1,x)\right\}d\tau_1 d\tau+$$
$$+\int_0^t\left\{\tilde{A}(\tau,x)\dot{\lambda}(x)+\tilde{C}(\tau,x)\lambda(x)+\tilde{f}(\tau,x)\right\}d\tau, \qquad (3.1.15)$$

$$\widetilde{w}(t,x)=\ddot{\psi}(t)-\ddot{\psi}(0)+\int_0^x\tilde{v}(t,\xi)d\xi. \qquad (3.1.16)$$

(3.1.12) қатынасына (3.1.15) өрнектен $\frac{\partial\widetilde{w}(t_j,x)}{\partial x}$ мәндерін тауып, сәйкесінше қойып,

$$Q_1(x)\dot{\lambda}(x)=-Q_2(x)\lambda(x)-\Phi(x,\widetilde{w},\tilde{v},\tilde{z})-F(x), \qquad x\in[0,\omega] \quad (3.1.17)$$

теңдеулер жүйесін аламыз, мұндағы

$$Q_1(x)=P_{3,1}(x)+\sum_{j=2}^{m}\left\{P_{3,j}(x)+P_{3,j}(x)\int_0^{t_j}\tilde{A}(\tau,x)d\tau+\int_0^{t_j}\tilde{P}_{2,j}\left(t_j,x,\tau\right)d\tau\right\},$$

$$Q_2(x) = S_{2,1}(x) + \sum_{j=2}^{m} \left\{ S_{2,j}(x) + P_{3,j}(x) \int_0^{t_j} \tilde{C}(\tau, x) d\tau + \int_0^{t_j} \tilde{S}_{1,j}(t_j, x, \tau) d\tau \right\},$$

$$\Phi(x, \widetilde{w}, \tilde{v}, \tilde{z}) = \sum_{j=2}^{m} P_{3,j}(x) \left\{ \int_0^{t_j} A_1(\tau, x)\tilde{v}(\tau, x) + B_1(\tau, x)\tilde{z}(\tau, x) + \right.$$

$$\left. + C_1(\tau, x)\widetilde{w}(\tau, x) d\tau + \int_0^{t} \int_0^{\tau} \{\tilde{A}_2(\tau, x, \tau_1)\tilde{v}(\tau_1, x) + \tilde{B}_2(\tau, x, \tau_1)\widetilde{w}(\tau_1, x)\} d\tau_1 d\tau \right\} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{m} \tilde{S}_{2,j}(x)\, \widetilde{w}(t_j, x) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{S}_{3,j}(x)\, \tilde{z}(t_j, x) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{m} \int_0^{t_j} \{\tilde{P}_{2,j}(t_j, x, \tau)\tilde{v}(\tau, x) + \tilde{S}_{1,j}(t_j, x, \tau)\widetilde{w}(\tau, x)\} d\tau,$$

$$F(x) = \sum_{j=2}^{m} \tilde{P}_{3,j}(x) \int_0^{t_j} \tilde{f}(\tau, x) d\tau - \tilde{\varphi}(x).$$

Жоғарыда айтылғандай, $\lambda(x)$ функциясы (3.1.13) бастапқы шарттарын қанағаттандырады.

(3.1.17) теңдеулер жүйесі (3.1.13) шартпен бірге $\lambda(x)$ функциясына қатысты бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі болып табылады.

Бекітілген $\widetilde{w}$, $\tilde{v}$ және $\tilde{z}$ болғанда, (жоғарыда келтірілген) бастапқы берілгендері мен $Q_1(x) - n \times n$-матрицасы барлық $x \in [0, \omega]$ үшін қайтымды болса, онда (3.1.17), (3.1.13) Коши есебінің жалғыз шешімі болады.

Сонымен, (3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімін, яғни $(\widetilde{w}(t, x), \lambda(x))$ функциялар жұбын табу үшін (3.1.14)-(3.1.16) Гурса интегралдық теңдеулер жүйесі мен (3.1.17), (3.1.13) Коши есебінен құрылған тұйық теңдеулер жүйелеріне ие боламыз.

(3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімін табу алгоритмі.

$\widetilde{w}(t, x)$ функциясы да (оның $\tilde{v}(t, x)$, $\tilde{z}(t, x)$ дербес туындыларымен бірге) және $\lambda(x)$ функциясы да (оның $\dot{\lambda}(x)$ туындысымен бірге) белгісіз, сондықтан итерациялық процесті қолданамыз және (3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімін келесі алгоритм бойынша табамыз.

Бастапқы қадам. 1) $Q_1(x) - n \times n$-матрицасы барлық $x \in [0, \omega]$ үшін қайтымды делік. (3.1.17), (3.1.13) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебіндегі (3.1.17) жүйенің оң жағына $\widetilde{w}(t, x) = \ddot{\psi}(t) - \ddot{\psi}(0)$, $\tilde{v}(t, x) = 0$, $\tilde{z}(t, x) = \ddot{\psi}(t)$ мәндерін қойып, $\lambda^{(0)}(x)$ функциясын және оның $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$ туындысын барлық $x \in [0, \omega]$ үшін табамыз.

2) (3.1.9)-(3.1.11) екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебін $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ және $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$ болғанда шешу арқылы барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$ және оның $\tilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{z}^{(0)}(t,x)$ дербес туындыларын табамыз.

1-ші қадам. 1) $Q_1(x) - n \times n$-матрицасы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін қайтымды. (3.1.17), (3.1.13) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебіндегі (3.1.17) жүйенің оң жағына $\widetilde{w}(t,x) = \widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{v}(t,x) = \tilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{z}(t,x) = \tilde{z}^{(0)}(t,x)$ мәндерін қойып, $\lambda^{(1)}(x)$ функциясын және оның $\dot{\lambda}^{(1)}(x)$ туындысын барлық $x \in [0,\omega]$ үшін табамыз.

2) (3.1.9)-(3.1.11) екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебін $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$ және $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(1)}(x)$ болғанда шешу арқылы барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $\widetilde{w}^{(1)}(t,x)$ және оның $\tilde{v}^{(1)}(t,x)$, $\tilde{z}^{(1)}(t,x)$ дербес туындыларын табамыз.

Әрі қарай жалғастыра отырып, біз k —шы қадамды аламыз.

k —шы қадам. 1) $Q_1(x) - n \times n$-матрицасы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін қайтымды. (3.1.17), (3.1.13) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебіндегі (3.1.17) жүйенің оң жағына $\widetilde{w}(t,x) = \widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)$, $\tilde{v}(t,x) = \tilde{v}^{(k-1)}(t,x)$, $\tilde{z}(t,x) = \tilde{z}^{(k-1)}(t,x)$ мәндерін қойып, $\lambda^{(k)}(x)$ функциясын және оның $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$ туындысын барлық $x \in [0,\omega]$ үшін табамыз.

2) (3.1.9)-(3.1.11) екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебін $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ және $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(k)}(x)$ болғанда шешу арқылы барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$ және оның $\tilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\tilde{z}^{(k)}(t,x)$ дербес туындыларын аламыз және $k = 1,2,\ldots$.

$\lambda(x)$ функционалдық параметрді қосымша енгізу арқылы (3.1.6)-(3.1.8) екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі бейлокалды есебін және параметрге қатысты (3.1.12) қосымша көпнүктелі интегралдық қатынасты қарастыруға мүмкіндік береді. Сонымен бірге, (3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімін табу процесі өзара байланысты екі бөліктен тұрады:

1) $\widetilde{w}$ (және оның $\tilde{v}$, $\tilde{z}$ дербес туындылары) бекітілген болғанда, (3.1.17), (3.1.13) қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінен $\lambda(x)$ функционалдық параметрін анықтаймыз;

2) бекітілген $\lambda(x)$ (және оның туындысы $\dot{\lambda}(x)$) болғанда, (3.1.9)-(3.1.11) екінші ретті гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебінен $\widetilde{w}(t,x)$ функциясын анықтаймыз.

$Q_1(x)$ матрицасы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін қайтымды болсын.

$$\alpha_s = \max_{(t,x)\in\Omega} \|A_s(t,x)\|, \qquad s = 1,2,3,$$

$$\beta_p = \max_{(t,x)\in\Omega} \|B_p(t,x)\|, \ \ \gamma_p = \max_{(t,x)\in\Omega} \|C_p(t,x)\|, \qquad s = 1,2,$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \max_{(t,x)\in\Omega\times[0,\mathrm{T}]} \|\tilde{A}_2(t,x,\tau)\| = \alpha_2 + T\gamma_2, \ \ k = \max_{x\in[0,\omega]} \|[Q_1(x)]^{-1}\|,$$

$$\tilde{\beta}_2 = \max_{(t,x,\tau)\in\Omega\times[0,\mathrm{T}]} \|\tilde{B}_2(t,x,\tau)\| = \beta_2 + T\alpha_3, \ \ \alpha_0 = \max_{x\in[0,\omega]} \|[Q_1(x)]^{-1}Q_2(x)\|,$$

$$H=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+T\tilde{\alpha}_2+T\tilde{\beta}_2,\ \ H_1=\max(T,\omega)\left[\alpha_1+\gamma_1+T\tilde{\alpha}_2+T\tilde{\beta}_2\right],$$
$$p_{i,j}=\max_{x\in[0,\omega]}\left\|P_{i,j}(x)\right\|,\qquad s_{i,j}=\max_{x\in[0,\omega]}\left\|S_{i,j}(x)\right\|,$$
$$l_j=\max_{x\in[0,\omega]}\left\|L_j(x)\right\|,\qquad i=1,2,3,\qquad j=\overline{1,m}$$
$$\tilde{p}_{2,j}=\max_{(x,\tau)\in[0,\omega]\times[0,t_j]}\left\|\tilde{P}_{2,j}(t_j,x,\tau)\right\|=p_{2,j}+t_jp_{1,j},$$
$$\tilde{s}_{1,j}=\max_{(x,\tau)\in[0,\omega]\times[0,t_j]}\left\|\tilde{S}_{1,j}(t_j,x,\tau)\right\|=s_{1,j}+t_jl_j,\ \ j=\overline{1,m}$$

болсын.

Бұдан әрі, (3.1.9)-(3.1.12) есебінің бірмәнді шешілімділік шарттарын орнату бірмезгілде (3.1.9)-(3.1.12) есебіне пара-пар есебінің ұсынылған алгоритм бойынша табылған шешімінің жинақтылығын қамтамасыз етеді.

Келесі теорема орындалады.

3.1.1 теорема. Егер төмендегі шарттар орындалса:

i) $A_s(t,x),\ s=1,2,3,\ B_p(t,x),\ C_p(t,x)-n\times n$-матрицалары, $p=1,2,$ және $f(t,x)\ n$ —вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз болса;

ii) $P_{i,j}(x),\ S_{i,j}(x),\ L_j(x)-n\times n$-матрицалары, i= 1,2,3, $j=\overline{1,m}$ және $\varphi_1(x)-n$-вектор-функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз; $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)-n$-вектор-функциялары $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса, $\psi(t)-n$-вектор функциясы $[0,T]$ аралығында үш рет үзіліссіз дифференциалданады және келесі келісімділік шарттары орындалса: $\varphi_3(x)=\psi(0)$ және $\varphi_2(x)=\dot{\psi}(0)$;

iii) $Q_1(x)-n\times n$-матрицасы барлық $x\in[0,\omega]$ үшін қайтымды және келесі теңсіздік орындалса:

$$q(\omega,m)=k\cdot\max[\omega e^{\alpha_0\omega},\alpha_0\omega e^{\alpha_0\omega}+1]\times$$
$$\times H_1\left\{\sum_{j=2}^{m}\left[p_{3,j}t_j(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+p_{3,j}\frac{t_j^2}{2}\left(\tilde{\alpha}_2+\tilde{\beta}_2\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+s_{2,j}+s_{3,j}+\tilde{p}_{2,j}t_j\right]+s_{3,1}\right\}e^{H(\omega+t_j)}<1.$$

Онда (3.1.6)-(3.1.8) гиперболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокалды есебінің жалғыз шешімі болады.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша $Q_1(x)$ матрицасы барлық $x\in[0,\omega]$ үшін қайтымды. Онда (3.1.17), (3.1.13) теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінен алгоритмнің бастапқы қадамын қолданып, $\lambda^{(0)}(x)$ және $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$ функцияларын барлық $x\in[0,\omega]$ үшін табамыз. Келесі бағалау орындалады:

$$\lambda^{(0)}(x)\le(1+k\alpha_0\omega)\max(1,T)\max\left(\left\|\ddot{\psi}\right\|_2,\max_{i=1,2,3}(\|\varphi_i\|_1,\|\dot{\varphi}_i\|_1),\|f\|_0\right),$$
$$\left\|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\right\|\le\left[\alpha_0(1+k\alpha_0\omega)\max(1,T)\,e^{\alpha_0x}+\right.$$

$$+k\alpha_0]\max\left(\left\|\dddot{\psi}\right\|_2, \max_{i=1,2,3}(\|\varphi_i\|_1, \|\dot{\varphi}_i\|_1), \|f\|_0\right),$$

мұндағы

$$\alpha_0 = 1 + \sum_{j=2}^{m}\left[p_{3,j}\left\{t_j(\beta_1+\gamma_1) + \frac{t_j^2}{2}\tilde{\beta}_2\right\} + s_{2,j}T + \tilde{s}_{1,j}T + s_{3,j}\right] + s_{3,1} +$$
$$+\sum_{j=2}^{m} p_{3,j}t_j[1+\alpha_2+\beta_2+\gamma_2(1+T)+\alpha_3(1+T)] + 1 +$$
$$+\sum_{j=1}^{m}[p_{2,j} + p_{1,3}(1+t_j) + s_{1,j} + l_j(1+t_j)].$$

Табылған параметрдің мәндерін қолданып, (3.1.14)-(3.1.16) интегралдық теңдеулер жүйесін шешу арқылы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін $\frac{\partial \tilde{w}^{(0)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ және $\tilde{w}^{(0)}(t,x)$ табамыз.

Келесі бағалаулар орынды:

$$\left\|\tilde{v}^{(0)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega)M\, e^{H(\omega+t)},$$
$$\left\|\tilde{z}^{(0)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega)M\, e^{H(\omega+t)},$$
$$\left\|\tilde{w}^{(0)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega)M\, e^{H(\omega+t)},$$

мұндағы

$$M = (\alpha_1 + T\tilde{\alpha}_2)\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\right\| + \left(\gamma_1 + T\tilde{\beta}_2\right)\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(0)}(x)\right\| + \left\|\tilde{f}\right\|_0.$$

Біртіндеп, алгоритмнің k-шы және $(k+1)$-шы қадамдарынан $\lambda^{(k)}(x)$, $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\tilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\tilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\lambda^{(k+1)}(x)$, $\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)$, $\tilde{v}^{(k+1)}(t,x)$, $\tilde{w}^{(k+1)}(t,x)$ функцияларын анықтап және сәйкесінше айырмаларын бағалаймыз

$$\left\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\right\| \le k e^{\alpha_0 x} \times$$
$$\times \max_{x\in[0,\omega]}\int_0^x \left\|\Phi(\xi, \tilde{w}^{(k)} - \tilde{w}^{(k-1)}, \tilde{v}^{(k)} - \tilde{v}^{(k-1)}, \tilde{z}^{(k)} - \tilde{z}^{(k-1)}\right\| d\xi, \quad (3.1.18)$$

$$\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\| \le \alpha_0 k e^{\alpha_0 x} \times$$
$$\times \max_{x\in[0,\omega]}\int_0^x \left\|\Phi(\xi, \tilde{w}^{(k)} - \tilde{w}^{(k-1)}, \tilde{v}^{(k)} - \tilde{v}^{(k-1)}, \tilde{z}^{(k)} - \tilde{z}^{(k-1)}\right\| d\xi +$$
$$+k\left\|\Phi(\xi, \tilde{w}^{(k)} - \tilde{w}^{(k-1)}, \tilde{v}^{(k)} - \tilde{v}^{(k-1)}, \tilde{z}^{(k)} - \tilde{z}^{(k-1)}\right\|, \quad (3.1.19)$$

$$\left\|\tilde{v}^{(k+1)}(t,x) - \tilde{v}^{(k)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega)\left\{(\alpha_1 + T\tilde{\alpha}_2)\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\|\right.$$
$$\left. +\left(\gamma_1 + T\tilde{\beta}_2\right)\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\right\|\right\} e^{H(\omega+t)}, \quad (3.1.20)$$

$$\left\|\tilde{z}^{(k+1)}(t,x)-\tilde{z}^{(k)}(t,x)\right\| \leq \max(T,\omega)\Big\{(\alpha_1+T\tilde{\alpha}_2)\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\|$$

$$+\left(\gamma_1+T\tilde{\beta}_2\right)\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|\Big\}e^{H(\omega+t)}, \qquad (3.1.21)$$

$$\left\|\widetilde{w}^{(k+1)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k)}(t,x)\right\| \leq \max(T,\omega)\Big\{(\alpha_1+T\tilde{\alpha}_2)\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\|$$

$$+\left(\gamma_1+T\tilde{\beta}_2\right)\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|\Big\}e^{H(\omega+t)}. \qquad (3.1.22)$$

Келесі белгілеу енгізейік:

$$\Delta_{k+1}=\max\left(\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|, \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(k)}(x)\right\|\right).$$

Онда (3.1.20)-(3.1.22) бағалауларын ескере отырып, (3.1.18) және (3.1.19) қатынастарынан негізгі теңсіздікті аламыз

$$\Delta_{k+1}\leq q(\omega,m)\Delta_k. \qquad (3.1.23)$$

Теорема шарты бойынша $q(\omega,m)<1$. Бұл Δ_k тізбегі $k\to\infty$ ұмтылғанда Δ_*-ға жинақталатынын білдіреді. Яғни, $\lambda^{(k)}(x)$ және $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$ функционалдық тізбектерінің $k\to\infty$ ұмтылғанда шектері сәйкесінше $\lambda^*(x)$ және $\dot{\lambda}^*(x)$ функциялары болады. $\lambda^*(x)$ функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз және үзіліссіз дифференциалданады. (3.1.20), (3.1.21) және (3.1.22) бағалаулардың негізінде $\tilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\tilde{z}^{(k)}(t,x)$ және $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$ тізбектерінің $k\to\infty$ ұмтылғанда сәйкесінше $\tilde{v}^*(t,x)$, $\tilde{z}^*(t,x)$ және $\widetilde{w}^*(t,x)$ барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін бірқалыпты жинақтылығын орнатамыз.

Әлбетте, $\tilde{v}^*(t,x)=\frac{\partial\widetilde{w}^*(t,x)}{\partial x}$, $\tilde{z}^*(t,x)=\frac{\partial\widetilde{w}^*(t,x)}{\partial t}$ және $\widetilde{w}^*(t,x)$ функциялары Ω облысында үзіліссіз. $\{\widetilde{w}^*(t,x),\ \lambda^*(x)\}$ функциялар жұбы (3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімі болады. (3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімінің жалғыздығын дәлелдейік. (3.1.9)-(3.1.12) есебінің екі шешімі, яғни $\{\widetilde{w}^*(t,x),\lambda^*(x)\}$ және $\{\widetilde{w}^{**}(t,x),\lambda^{**}(x)\}$ функциялар жұптары болсын делік.

$$\tilde{\Delta}=\max\left(\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^*(x)-\lambda^{**}(x)\|, \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{**}(x)-\dot{\lambda}^{**}(x)\right\|\right)$$

деп белгілейік.

Есептеулерді (3.1.18)-(3.1.22) сияқты жүргізе отырып, табамыз

$$\tilde{\Delta}\leq q(\omega,m)\tilde{\Delta}. \qquad (3.1.24)$$

Теорема шарты $q(\omega,m)<1$ болса, онда (3.1.24) теңсіздігі $\tilde{\Delta}\equiv 0$ болғанда ғана орындалады; демек, $\lambda^*(x)=\lambda^{**}(x)$ және $\widetilde{w}^*(t,x)=\widetilde{w}^{**}(t,x)$ теңдіктерін аламыз. Осылайша, (3.1.9)-(3.1.12) есебінің жалғыз шешімі болады. Теорема дәлелденді.

3.1.1 теорема шарттары (3.1.9)-(3.1.12) есебінің жалғыз шешімі болуымен қатар, ұсынылған алгоритммен анықталатын $\left\{\widetilde{w}^{(k)}(t,x), \lambda^{(k)}(x)\right\}$ тізбегінің жинақтылығын береді, $k = 1,2, \dots$.

(3.1.9)-(3.1.12) есебінің шешімі болып табылатын $\{\widetilde{w}^*(t,x), \lambda^*(x)\}$ функциясының жұбын қолдана отырып, біз

$$w^*(t,x) = \widetilde{w}^*(t,x) + \lambda^*(x), \quad (t,x) \in \Omega$$

қосындысын аламыз.

$w^*(t,x)$ функциясы Ω үзіліссіз, $\frac{\partial w^*(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial w^*(t,x)}{\partial t}$ және $\frac{\partial^2 w^*(t,x)}{\partial x \partial t}$ дербес туындылары да Ω үзіліссіз болады және (3.1.6)-(3.1.8) есебінің шешімі болады.

(3.1.6)-(3.1.8) және (3.1.9)-(3.1.12) есептерінің пара-пар болғандығынан келесі теореманы аламыз.

3.1.2 теорема. Егер келесі шарттар орындалса:

a) $A_s(t,x)$, $s = 1,2,3$, $B_p(t,x)$, $C_p(t,x)$, $p = 1,2$, $n \times n$-матрицалары және $f(t,x) - n$-вектор функциясы Ω облысында үзіліссіз болса;
b) $P_{i,j}(x)$, $S_{i,j}(x)$ және $L_j(x) - n \times n$-матрицалары, $i = 1,2,3$, $j = \overline{1,m}$ және $\varphi_1(x) -$ n-вектор-функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз болса, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x) - n$-вектор-функциялары $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса, $\psi(t) - n$-вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз үш рет дифференциалданатын болса және келесі келісімділік шарттары орындалса: $\varphi_3(0) = \psi(0)$ және $\varphi_2(0) = \dot{\psi}(0)$;
c) $Q_1(x) - n \times n$-матрицасы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін қайтымды және 3.1.1 теореманың 3) шарты орындалса.

Онда (3.1.6)-(3.1.8) есебінің жалғыз шешімі болады.

Бұдан әрі (3.1.6)-(3.1.8) есебінің бірмәнді шешілімділігі негізінен пара-пар (3.1.1)-(3.1.4) есебінің бірмәнді шешілімділігі орнатылады.

(3.1.1)-(3.1.4) есебінің шешілімділік шарттары.

(3.1.6)-(3.1.8) және (3.1.1)-(3.1.4) есептерінің пара-пар болғандықтан келесі тұжырымда келтіріледі.

3.1.3 теорема. Егер келесі шарттар орындалса:

a) $A_s(t,x)$, $s = 1,2,3$, $B_p(t,x)$, $C_p(t,x)$, $p = 1,2$, $n \times n$-матрицалары және $f(t,x) - n$-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз болса;
b) $P_{i,j}(x)$, $S_{i,j}(x)$ және $L_j(x)$ $n \times n$-матрицалары, $i = 1,2,3$, $j = \overline{1,m}$, $\varphi_1(x) -$ n-вектор-функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз, $\varphi_2(x)$ және $\varphi_3(x) - n$-вектор-функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса, $\psi(t) - n$-вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз үш рет дифференциалданса және келісімділік шарттары орындалады: $\varphi_3(0) = \psi(0)$ және $\varphi_2(0) = \dot{\psi}(0)$;
c) $Q_1(x) - n \times n$-матрицасы $x \in [0,\omega]$ аралығында қайтымды және 3.1.1 теореманың 3) шарты орындалса.

Онда (3.1.1)-(3.1.4) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есебінің $u^*(t,x)$ жалғыз шешімі болады.

Дәлелдеуі. (3.1.6)-(3.1.8) екінші ретті гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін есебін қарастырамыз. 3.1.2 теорема шарттарында (3.1.6)-(3.1.8) есебінің $w^*(t,x)$ жалғыз шешімі болады, яғни келесі теңдіктер орындалады:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial w^*}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial w^*}{\partial t} + C_1(t,x)w^* + \int_0^t \tilde{A}_2(t,x,\tau)\frac{\partial w^*(\tau,x)}{\partial x}d\tau +$$

$$+\int_0^t \tilde{B}_2(t,x,\tau)w^*(\tau,x)\,d\tau + \tilde{f}(t,x), \qquad (3.1.25)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{P_{3,j}(x)\frac{\partial w^*(t,x)}{\partial x} + S_{3,j}(x)\frac{\partial w^*(t,x)}{\partial t} + S_{2,j}(x)w^*(t_j,x)\right\}\Bigg|_{t=t_j} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_0^{t_j}\left\{\tilde{P}_{2,j}(t_j,x,\tau)\frac{\partial w^*(\tau,x)}{\partial x} + \tilde{S}_{1,j}(t_j,x,\tau)w^*(\tau,x)\right\}d\tau = \tilde{\varphi}(x), \quad (3.1.26)$$

$$w^*(t,0) = \ddot{\psi}(t), \quad \mathrm{t} \in [0,T]. \qquad (3.1.27)$$

$\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ және $w^*(t,x)$ функциялар терминінде $u^*(t,x)$ функциясын келесідей анықтаймыз:

$$u^*(t,x) = \varphi_3(x) + \varphi_2(x)t + \int_0^t\int_0^\tau w^*(\tau_1,x)\,d\tau_1\,d\tau, \qquad (t,x) \in \Omega. \qquad (3.1.28)$$

$\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ және $w^*(t,x)$ функциялар қасиеттерін қолданып, (3.1.28) қатынасын x және t айнымалылары бойынша дифференциалдаймыз

$$\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_3(x) + \dot{\varphi}_2(x)t + \int_0^t\int_0^\tau \frac{\partial w^*(\tau_1,x)}{\partial t}d\tau_1\,d\tau, \qquad (t,x) \in \Omega, \quad (3.1.29)$$

$$\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial t} = \varphi_2(x) + \int_0^t w^*(\tau,x)\,d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial t \partial x} = \dot{\varphi}_2(x) + \int_0^t \frac{\partial w^*(\tau,x)}{\partial t}d\tau, \qquad (3.1.30)$$

$$\frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial t^2} = w^*(t,x), \qquad \frac{\partial^3 u^*(t,x)}{\partial t^2 \partial x} = \frac{\partial w^*(t,x)}{\partial x}, \qquad (t,x) \in \Omega, \tag{3.1.31}$$

$$\frac{\partial^3 u^*(t,x)}{\partial t^3} = \frac{\partial w^*(t,x)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^4 u^*(t,x)}{\partial t^3 \partial x} = \frac{\partial^2 w^*(t,x)}{\partial t \partial x}, (t,x) \in \Omega. \tag{3.1.32}$$

$\tilde{A}_2(t,x,\tau)$, $\tilde{B}_2(t,x,\tau)$, $\tilde{P}_{2,j}(t_j,x,\tau)$, және $\tilde{S}_{1,j}(t_j,x,\tau)$ матрицалары мен $\tilde{f}(t,x)$ және $\tilde{\varphi}(x)$ функцияларын ескере отырып, және де (3.1.25)-(3.1.27) есебінің итерациялық интегралдарын ескеріп, төмендегі теңдіктерді аламыз

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial w^*}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial w^*}{\partial t} + C_1(t,x)w^* +$$
$$+A_2(t,x)\left[\dot{\varphi}_2(x) + \int_0^t \frac{\partial w^*(\tau,x)}{\partial x} d\tau\right] + B_2(t,x)\left[\varphi_2(x) + \int_0^t w^*(\tau,x)\, d\tau\right] +$$
$$+C_2(t,x)\left[\dot{\varphi}_3(x) + \dot{\varphi}_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau \frac{\partial w^*(\tau_1,x)}{\partial t} d\tau_1\, d\tau\right] +$$
$$+A_3(t,x)\left[\varphi_3(x) + \varphi_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau w^*(\tau_1,x)\, d\tau_1\, d\tau\right] + f(t,x), \tag{3.1.33}$$

$$\sum_{j=1}^m \left\{P_{3,j}(x)\frac{\partial w^*(t,x)}{\partial x} + S_{3,j}(x)\frac{\partial w^*(t,x)}{\partial t} + S_{2,j}(x)w^*(t_j,x)\right\}\Bigg|_{t=t_j} +$$
$$+\sum_{j=1}^m \left\{P_{2,j}(x)\left[\dot{\varphi}_2(x) + \int_0^{t_j} \frac{\partial w^*(\tau,x)}{\partial x} d\tau\right] + S_{1,j}(x)\left[\varphi_2(x) + \int_0^{t_j} w^*(\tau,x)\, d\tau\right] +\right.$$
$$+P_{1,j}(x)\left[\dot{\varphi}_3(x) + \dot{\varphi}_2(x)t_j + \int_0^{t_j} \int_0^\tau \frac{\partial w^*(\tau_1,x)}{\partial t} d\tau_1\, d\tau\right] +$$
$$+L_j(x)\left[\varphi_3(x) + \varphi_2(x)t_j + \int_0^{t_j} \int_0^\tau w^*(\tau_1,x)\, d\tau_1\, d\tau\right] = \varphi_1(x), \tag{3.1.34}$$

$$w^*(t,0) = \ddot{\psi}(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{3.1.35}$$

Жақшадағы өрнектерді (3.1.28)-(3.1.30) интегралдық қатынастармен ауыстырып, (3.1.31), (3.1.32) теңдіктерін ескеріп, және (3.1.33), (3.1.34) қатынастарын қолдана отырып, біз келесі есепті жаза аламыз

$$\frac{\partial^4 u^*}{\partial t^3 \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u^*}{\partial t^2 \partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial^3 u^*}{\partial t^3} + C_1(t,x)\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^2 u^*}{\partial t \partial x} +$$

$$+B_2(t,x)\frac{\partial u^*}{\partial t}+C_2(t,x)\frac{\partial u^*}{\partial x}+A_3(t,x)u^*+f(t,x), \qquad (3.1.36)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[P_{i,j}(x)\frac{\partial^i u^*(t_j,x)}{\partial t^{i-1}\partial x}+S_{i,j}(x)\frac{\partial^i u^*(t_j,x)}{\partial t^i}\right]+\right.$$

$$\left.+L_j(x)u^*(t,x)\right\}\Big|_{t=t_j}=\varphi_1(x). \qquad (3.1.37)$$

$t=0$ болғанда (3.1.30) қатынастың бірінші теңдігінен және (3.1.28) интегралдық қатынасынан

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_2(x), \qquad u(0,x)=\varphi_3(x), \qquad x\in[0,\omega], \quad (3.1.38)$$

шарттарын аламыз.

Сонымен бірге, (3.1.35) қатынасында t айнымалысын τ_1 айнымалысына ауыстырып, (3.1.35) қатынасты 0-ден τ-ға дейін, содан соң 0-ден t-ға дейін τ_1 айнымалысы бойынша интегралдаймыз

$$\int_0^t\int_0^\tau w^*(\tau_1,0)\,d\tau_1\,d\tau=\int_0^t\int_0^\tau \ddot{\psi}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau=$$

$$=\int_0^t \dot{\psi}(\tau_1)\,d\tau-\dot{\psi}(0)t=\psi(t)-\psi(0)-\dot{\psi}(0)t. \qquad (3.1.39)$$

Тағы да, $x=0$ үшін (3.1.35) шартын ескере отырып, біз келесі түрде жаза аламыз

$$u^*(t,0)-\varphi_3(0)-\varphi_2(0)t=\psi(t)-\psi(0)-\dot{\psi}(0)t, \qquad t\in[0,T].$$

Берілгендер үшін $\varphi_3(0)=\psi(0)$ және $\varphi_2(0)=\dot{\psi}(0)$ келісімділік шарттарын қолданып,

$$u^*(t,0)=\psi(t), \qquad t\in[0,T] \qquad (3.1.40)$$

шартын аламыз.

Осылайша, $u^*(t,x)$ функциясы (3.1.36) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі, (3.1.37), (3.1.38) және (3.1.40) шарттарын қанағаттандырады, яғни біз $u^*(t,x)$ функциясы (3.1.1)-(3.1.4) есебінің шешімі болатынын дәлелдедік. (3.1.1)-(3.1.4) есебінің бірмәнді шешілімділігі, (3.1.6)-(3.1.8) есебінің бірмәнді шешілімділігінен туындайды және (3.1.28) түрінде болады. 3.1.3 теорема дәлелденді.

3.2 Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі (III) үшін бастапқы көпнүктелік шеттік есеп

$\Omega=[0,T]\times[0,\omega]$ облысында келесі төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы көпнүктелік шеттік есебін қарастырамыз

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}=A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}+A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+$$

$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+A_7(t,x)u+f(t,x), \tag{3.2.1}$$

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\;\; x\in[0,\omega], \tag{3.2.2}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_2(x),\qquad x\in[0,\omega], \tag{3.2.3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0}=\varphi_3(x),\qquad x\in[0,\omega], \tag{3.2.4}$$

$$\sum_{j=0}^{m}P_j(t)\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{x=x_j}=\psi(t),\qquad t\in[0,T], \tag{3.2.5}$$

мұндағы $u(t,x)=col(u_1(t,x),\dots,u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция, $A_i(t,x)-n\times n$-матрицалары, $(i=\overline{1,7})$, және $f(t,x)-n$-вектор-функциясы Ω үзіліссіз; $P_j(t)-n\times n$-матрицалары, $(j=\overline{0,m})$ және $\psi(t)-n$-вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады; $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ және $\varphi_3(x)-n$-вектор-функциялары $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады.

Келісімділік шарты орындалады:

$$\sum_{j=0}^{m}P_j(0)\varphi_3\big(x_j\big)=\psi(0).$$

$u(t,x)\in C(\Omega,R^n)$ функциясы

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R^n),\qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R^n),\qquad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x\partial t}\in C(\Omega,R^n),$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\in C(\overline{\Omega},R^n),\qquad \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^2\partial x}\in C(\Omega,R^n),\quad \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3}\in C(\Omega,R^n),$$

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^3\partial x}\in C(\Omega,R^n)$$

дербес туындыларымен бірге $(t,x)\in\Omega$ облысында (3.2.1) жүйесін (3.2.2)-(3.2.5) бастапқы және шеттік шарттарын қанағаттандырса, онда $u(t,x)$ функциясы (3.2.1)-(3.2.5) есебінің шешімі деп аталады.

Жоғарғы ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жаратылыстану мен техниканың әртүрлі есептерінде кеңінен қолданады [1], [2].

Бұл жұмыста төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есебінің шешімнің болуы мен жалғыздығы зерттеледі. Сондай–ақ, осы есептің жуықталған шешімін табу әдісін құрамыз.

Жаңа белгісіз функцияларды енгізу арқылы [4, б. 558], [6, б. 305] (3.2.1)-(3.2.5) есебін екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін функционалды параметрі мен интегралдық қатынасты көпнүктелік шеттік есепке келтіреміз. Қарастырылып отырған есептің жуық шешімін табу алгоритмі ұсынылған және оның дәл шешімге жинақтылығы дәлелденген.

Бастапқы берілгендер терминінде (3.2.1)-(3.2.5) есебінің бірмәнді шешімділігі.

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = w_1(t,x), \qquad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = w(t,x)$$

белгісіз функцияларды енгізу арқылы бастапқы есепті екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есебіне келтіреміз

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial w}{\partial t} + A_2(t,x)\frac{\partial w}{\partial x} + A_3(t,x)w + A_4(t,x)\frac{\partial w_1}{\partial x} +$$

$$+A_5(t,x)w_1 + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_7(t,x)u + f(t,x), \tag{3.2.6}$$

$$w(0,x) = \varphi_3(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3.2.7}$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t) w(t,x_j) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3.2.8}$$

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = \omega$$

$$w_1(t,x) = \varphi_2(x) + \int_0^t w(\tau,x)d\tau, \tag{3.2.9}$$

$$u(t,x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau w(\tau_1,x)d\tau_1\, d\tau. \tag{3.2.10}$$

(3.2.8) көпнүктелік шартынан t айнымалысы бойынша туынды табамыз:

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t)\frac{\partial w(t,x_j)}{\partial t} = \dot{\psi}(t) - \sum_{j=0}^{m} P_j{}'(t)w\big(t,x_j\big).$$

Туынды табылған шартты қайта жазамыз

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t) \frac{\partial w(t, x_j)}{\partial t} = D(t, w), \qquad t \in [0, T], \tag{3.2.11}$$

мұндағы

$$D(t, w) = \dot{\psi}(t) - \sum_{j=0}^{m} P_j{}'(t) w\big(t, x_j\big).$$

Екінші рет

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = W(t, x), \quad \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} = V(t, x)$$

жаңа функцияларын енгізу арқылы (3.2.6)-(3.2.8) есебін пара-пар есепке келтіреміз.
(3.2.6)-(3.2.8) есебі бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есебіне және интегралдық шарттарға келтіріледі

$$\frac{\partial W}{\partial x} = A_1(t, x) W + A_2(t, x) V + A_3(t, x) w + F(t, x, w_1, u), \tag{3.2.12}$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t) W(t, x_j) = D(t, w), \qquad t \in [0, T], \tag{3.2.13}$$

$$w(t, x) = \varphi_3(x) + \int_0^t W(\tau, x) d\tau, \tag{3.2.14}$$

$$V(t, x) = \dot{\varphi}_3(x) + \int_0^t \frac{\partial W(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \tag{3.2.15}$$

мұндағы

$$F(t, x, w_1, u) = A_4(t, x) \frac{\partial w_1}{\partial x} + A_5(t, x) w_1 + A_6(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + A_7(t, x) u + f(t, x).$$

Бұл есептің шешімін табу үшін алдымен келесі қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есептің

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial x} = A_1 W + g(t, x), \tag{3.2.16}$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t) W(t, x_j) = \Phi(t), \qquad t \in [0, T]. \tag{3.2.17}$$

шешімін келтіреміз.
(3.2.16)-(3.2.17) көпнүктелік шеттік есебі төмендегідей шешіледі.

$$\frac{\partial W(t,x)}{\partial x} = A_1 W, \tag{3.2.18}$$

біртекті дифференциалдық теңдеуінің фундаменталды шешімі $Y(t,x)$ болсын. $Y(t,0) = I,\ \ I$ −бірлік матрица, $detY(t,x) \neq 0$.
(3.2.16) теңдеулер жүйесінің шешімі

$$W(t,x) = Y(t,x)W(t,0) + Y(t,x)\int_0^x Y^{-1}(t,\xi)g(t,\xi)d\xi \tag{3.2.19}$$

түрінде болады.
(3.2.17) көпнүктелік шартына әрбір $x = x_j$ үшін (3.2.19) өрнегінің оң жағын қоямыз:

$$P_0(t)W(t,0) + P_1(t)W(t,x_1) + \cdots + P_{m-1}(t)W(t,x_{m-1}) + P_m(t)W(t,\omega) = \Phi(t),$$

$$P_0(t)W(t,0) + P_1(t)Y(t,x_1)W(t,0) + P_1(t)Y(t,x_1)\int_0^{x_1} Y^{-1}(t,\xi)g(t,\xi)d\xi +$$

$$+P_2(t)Y(t,x_2)W(t,0) + P_2(t)Y(t,x_2)\int_0^{x_2} Y^{-1}(t,\xi)g(t,\xi)d\xi + \cdots +$$

$$+P_m(t)Y(t,x_m)W(t,0) + P_m(t)Y(t,x_m)\int_0^{x_m} Y^{-1}(t,\xi)g(t,\xi)d\xi = \Phi(t),$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y\big(t,x_j\big)\,W(t,0) + \sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y\big(t,x_j\big)\int_0^{x_j} Y^{-1}(t,\xi)g(t,\xi)d\xi = \Phi(t),$$

$$W(t,0) = \left[\sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y\big(t,x_j\big)\right]^{-1}\left\{\Phi(t) - \sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y\big(t,x_j\big)\int_0^{x_j} Y^{-1}(t,\xi)g(t,\xi)d\xi\right\},$$

(3.2.16), (3.2.17) есебінің шешімі келесідей болады:

$$W(t,x) = Y(t,x)\left[\sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y\big(t,x_j\big)\right]^{-1} \times \left\{\Phi(t) - \sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y\big(t,x_j\big) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{x_j} Y^{-1}(t,\xi)g(t,\xi)d\xi\right\} + Y(t,x)\int_0^{x} Y^{-1}(t,\xi)g(t,\xi)d\xi. \tag{3.2.20}$$

мұндағы

$$det\left[\sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y(t,x_j)\right] \neq 0, \qquad \exists\left[\sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y(t,x_j)\right]^{-1}, \qquad t \in [0,T].$$

$W(t,x)$ функциясы үшін келесі бағалау орынды:

$$\max\left(\max_{x\in[0,\omega]}\|W(t,x)\|, \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\frac{\partial W(t,x)}{\partial x}\right\|\right) \leq \widetilde{K}\max\left(\max_{x\in[0,\omega]}\|g(t,x)\|, \|\Phi(t)\|\right),$$

мұндағы $\widetilde{K}$ тұрақтысын есептеуге $Y(t,x)$ фундаменталды матрицаны,

$$\left[\sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y(t,x_j)\right]^{-1}$$

кері матрицаны, $A_1(t,x), P_j(t)$, $(j=\overline{0,m})$ матрицаларын қолданады.

3.2.1 теорема. Егер келесі шарттар орындалса:

1) $\frac{\partial W}{\partial x} = A_1(t,x)W$ дифференциалдық теңдеудің $Y(t,x)$ фундаменталды матрицасы болса;
2) $S(t) - n \times n$-матрицасы $t \in [0,T]$ аралығында қайтымды болса

$$S(t) = \sum_{j=0}^{m} P_j(t)Y(t,x_j).$$

Онда (3.2.16), (3.2.17) көпнүктелік шеттік есебінің $W^*(t,x)$ жалғыз шешімі (3.2.20) түрінде болады.

Енді, (3.2.12)-(3.2.15) есебінің шешімін біртіндеп жуықтау әдісімен табудың алгоритмін келтірейік.

Алгоритм. Бастапқы қадам. 1) (3.2.12) жүйесінің оң жағына бастапқы берілгендерді қоямыз

$$F_0(t,x) = A_2(t,x)\dot{\varphi}_3(x) + A_3(t,x)\varphi_3(x) + A_4(t,x)[\dot{\varphi}_2(x) + \dot{\varphi}_3(x)t] +$$
$$+A_5(t,x)[\varphi_2(x) + \varphi_3(x)t] + A_6(t,x)\left[\dot{\varphi}_1(x) + \dot{\varphi}_2(x)t + \dot{\varphi}_3(x)\frac{t^2}{2}\right] +$$
$$+A_7(t,x)\left[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)t + \varphi_3(x)\frac{t^2}{2}\right] + f(t,x).$$

Мына көпнүктелік есепті қарастырамыз

$$\frac{\partial W}{\partial x} = A_1(t,x)W + F_0(t,x), \qquad (3.2.12^0)$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t)W(t,x_j) = D(t,w), \qquad t \in [0,T], \tag{3.2.13}$$

($3.2.12^0$), (3.2.13) есебін шешу арқылы $W^{(0)}(t,x)$ бастапқы жуықтауды анықтаймыз.
2) ($3.2.12^0$), (3.2.13) көпнүктелік есебінің $W^{(0)}(t,x)$ шешімін қолданып

$$w^{(0)}(t,x) = \varphi_3(x) + \int_0^t W^{(0)}(\tau,x)d\tau, \tag{$3.2.14^{(0)}$}$$

$$V^{(0)}(t,x) = \dot{\varphi}_3(x) + \int_0^t \frac{\partial W^{(0)}(\tau,x)}{\partial x}d\tau. \tag{$3.2.15^{(0)}$}$$

$$w_1^{(0)}(t,x) = \varphi_2(x) + \int_0^t w^{(0)}(\tau,x)d\tau, \tag{$3.2.9^{(0)}$}$$

$$\frac{\partial w_1^{(0)}(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_2(x) + \int_0^t \frac{\partial w^{(0)}(\tau,x)}{\partial x}d\tau,$$

$$u^{(0)}(t,x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau w^{(0)}(\tau_1,x)d\tau_1\, d\tau, \tag{$3.2.10^{(0)}$}$$

$$\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + \dot{\varphi}_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau \frac{\partial w^{(0)}(\tau_1,x)}{\partial x}d\tau_1\, d\tau.$$

сәйкесінше бастапқы жуықтауларды табамыз.
1-ші қадам. 1) (3.2.12) жүйенің оң жағына нөлінші жуықтауды қоямыз

$$F_1(t,x) = A_2(t,x)V^{(0)} + A_3(t,x)w^{(0)} + A_4(t,x)\frac{w_1^{(0)}}{\partial x} +$$
$$+A_5(t,x)w_1^{(0)} + A_6(t,x)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + A_7(t,x)u^{(0)} + f(t,x).$$

Мына көпнүктелік есепті қарастырамыз

$$\frac{\partial W}{\partial x} = A_1(t,x)W + F_1(t,x), \tag{$3.2.12^1$}$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t)W(t,x_j) = D(t,w), \qquad t \in [0,T], \tag{3.2.13}$$

(3.2.12^1), (3.2.13) есебін шешу арқылы $W^{(1)}(t,x)$ бірінші жуықтауды анықтаймыз.
2) (3.2.12^1), (3.2.13) көпнүктелік есебінің $W^{(1)}(t,x)$ шешімін қолданып

$$w^{(1)}(t,x) = \varphi_3(x) + \int_0^t W^{(1)}(\tau,x)d\tau, \qquad (3.2.14^1)$$

$$V^{(1)}(t,x) = \dot{\varphi}_3(x) + \int_0^t \frac{\partial W^{(1)}(\tau,x)}{\partial x}d\tau. \qquad (3.2.15^1)$$

$$w_1^{(1)}(t,x) = \varphi_2(x) + \int_0^t w^{(1)}(\tau,x)d\tau, \qquad (3.2.9^1)$$

$$\frac{\partial w_1^{(1)}(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_2(x) + \int_0^t \frac{\partial w^{(1)}(\tau,x)}{\partial x}d\tau,$$

$$u^{(1)}(t,x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau w^{(1)}(\tau_1,x)d\tau_1\, d\tau, \qquad (3.2.10^1)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + \dot{\varphi}_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau \frac{\partial w^{(1)}(\tau_1,x)}{\partial x}d\tau_1\, d\tau.$$

сәйкесінше бірінші жуықтауларды табамыз.
Және тағы сол сияқты.
k-ші қадам. 1) (3.2.12) жүйенің оң жағына $(k-1)$-ші жуықтауды қоямыз

$$F_k(t,x) = A_2(t,x)V^{(k-1)} + A_3(t,x)w^{(k-1)} + A_4(t,x)\frac{w_1^{(k-1)}}{\partial x} +$$
$$+A_5(t,x)w_1^{(k-1)} + A_6(t,x)\frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial x} + A_7(t,x)u^{(k-1)} + f(t,x).$$

Мына көпнүктелік есепті қарастырамыз

$$\frac{\partial W}{\partial x} = A_1(t,x)W + F_k(t,x), \qquad (3.2.12^k)$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t)W(t,x_j) = D(t,w), \qquad t \in [0,T], \qquad (3.2.13)$$

(3.2.12^k), (3.2.13) есебін шешу арқылы $W^{(k)}(t,x)$ k-ші жуықтауды анықтаймыз.
2) (3.2.12^k), (3.2.13) бейлокалды есебінің $W^{(k)}(t,x)$ шешімін қолданып

$$w^{(k)}(t,x) = \varphi_3(x) + \int_0^t W^{(k)}(\tau,x)d\tau, \qquad (3.2.14^k)$$

$$V^{(k)}(t,x) = \dot{\varphi}_3(x) + \int_0^t \frac{\partial W^{(k)}(\tau,x)}{\partial x} d\tau. \qquad (3.2.15^k)$$

$$w_1^{(k)}(t,x) = \varphi_2(x) + \int_0^t w^{(k)}(\tau,x)d\tau, \qquad (3.2.9^k)$$

$$\frac{\partial w_1^{(k)}(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_2(x) + \int_0^t \frac{\partial w^{(k)}(\tau,x)}{\partial x} d\tau,$$

$$u^{(k)}(t,x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau w^{(k)}(\tau_1,x)d\tau_1\, d\tau, \qquad (3.2.10^k)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + \dot{\varphi}_2(x)t + \int_0^t \int_0^\tau \frac{\partial w^{(k)}(\tau_1,x)}{\partial x} d\tau_1\, d\tau$$

сәйкесінше k-ші жуықтауларды табамыз.
Мұнда $k = 1,2,3,\dots$.

Осылайша, қосымша функциялар енгізу әдісі белгісіз функцияны табу процесін екі бөлікке бөледі: 1) (3.2.12), (3.2.13) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелік шеттік есебінен белгісіз $W(t,x)$ (және оның туындысы $\frac{\partial W(t,x)}{\partial x}$) функциясын табамыз; 2) (3.2.9), (3.2.10), (3.2.14), (3.2.15) интегралдық қатынастардан $V(t,x)$, $w(t,x)$, $w_1(t,x)$ және $u(t,x)$ (және олардың дербес туындылары $\frac{\partial w_1(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$) функцияларын табамыз.

Келесі тұжырым ұсынылған алгоритмнің жинақтылығын және бастапқы берілгендер арқылы (3.2.1)-(3.2.5) есебінің бірмәнді шешімінің шарттарын береді.

3.2.2 теорема. Егер келесі шарттар орындалса:

i) $A_i(t,x) - n \times n$-матрицалары, $i = \overline{1,7}$, және $f(t,x) - n$-вектор-фунциясы Ω облысында үзіліссіз болса;
ii) $P_j(t) - n \times n$-матрицалары $(j = \overline{0,m})$ мен $\psi(t) - n$-вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса;
iii) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x) - n$-вектор-фукциялары $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса;
iv) $S(t) - n \times n$-матрицасы $t \in [0,T]$ аралығында қайтымды болса

$$S(t) = \sum_{j=0}^{m} P_j(t) Y(t,x_j).$$

Онда (3.2.1)-(3.2.5) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы көпнүктелік шеттік есебінің жалғыз $u^*(t,x)$ шешімі болады.

3.2.2 теорема дәлелдеуі 1.4.2 теорема дәлелдеуіне ұқсас дәлелденеді.

3.3 Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (III) үшін бастапқы жартылай периодты есепті шешудің функционалдық параметрлеу әдісі

$\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ облысында төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы жартылай периодты есебін қарастырамыз

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} +$$

$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_7(t,x)u + f(t,x), \tag{3.3.1}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \ \ x \in [0,\omega], \tag{3.3.2}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3.3.3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=T}, \qquad x \in [0,\omega], \tag{3.3.4}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \ \ t \in [0,T], \tag{3.3.5}$$

мұндағы $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x),\dots,u_n(t,x))$ белгісіз вектор-функция; $A_i(t,x) - n \times n$-матрицалары $(i = \overline{1,7})$ және $f(t,x) - n$-вектор-функциясы Ω облысында үзіліссіз; $\psi(t) - n$-вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында үш рет үзіліссіз дифференциалданады; $\varphi_1(x)$ және $\varphi_2(x) - n$-вектор-функциялары $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады.

$u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ функциясы

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega,R^n), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega,R^n), \qquad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega,R^n),$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \in C(\Omega,R^n), \qquad \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^2 \partial x} \in C(\Omega,R^n),$$

$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} \in C(\Omega,R^n), \qquad \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^3 \partial x} \in C(\Omega,R^n)$$

дербес туындыларымен бірге $(t,x) \in \Omega$ облысында (3.3.1) жүйесін, (3.3.2)-(3.3.5) бастапқы және шеттік шарттарын қанағаттандырса, онда $u(t,x)$ функциясы (3.3.1)-(3.3.5) есебінің шешімі деп аталады.

Бұл ішкітарауда (3.3.1)-(3.3.5) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы жартылай периодты есептің шешімі болуы мен жалғыздығы зерттеледі. Біз есептің бірмәнді шешілімділігінің коэффициенттік жеткілікті шартын тауып, жуықталған шешімін іздеу алгоритмдерін құрамыз. Осы мақсатқа жету үшін (3.3.1)-(3.3.5) есебін шешімін табуға функционалдық параметрлеу әдісін [9, б. 30], [13, б. 89], [16, б. 21], [18], [19] қолданамыз.

Біріншіден $w(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}$ жаңа белгісіз функциясын енгіземіз және (3.3.1)-(3.3.5) есебін келесідей түрде қайта жазамыз

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial w}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial w}{\partial t} + A_3(t,x)w + f(t,x) +$$
$$+A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_7(t,x)u, \qquad (3.3.6)$$
$$w(0,x) = w(T,x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (3.3.7)$$
$$w(t,0) = \ddot{\psi}(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (3.3.8)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_2(x) + \int_0^t w(\tau,x)d\tau,$$
$$u(t,x) = \varphi_1(x) + t\cdot\varphi_2(x) + \int_0^t\int_0^\tau w(\tau_1,x)d\tau_1 d\tau, \qquad (3.3.9)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \dot{\varphi}_2(x) + \int_0^t \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x}d\tau,$$
$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + t\cdot\dot{\varphi}_2(x) + \int_0^t\int_0^\tau \frac{\partial w(\tau_1,x)}{\partial x}d\tau_1 d\tau. \qquad (3.3.10)$$

$(w(t,x),\ u(t,x))$ функциялар (3.3.6) екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесін, (3.3.7), (3.3.8) шарттарын және (3.3.9), (3.3.10) интегралдық қатынастарын $(t,x) \in \Omega$ облысында қанағаттандырса, онда (3.3.6)-(3.3.10) есебінің шешімі деп $(w(t,x), u(t,x))$ функциялар жұбын айтамыз, мұнда $w(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ функциясының $\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$ және $\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$ дербес туындылары бар, $u(t,x)$ функциясы және оның $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ және $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}$дербес туындылары бар.

Функционалдық параметрлеу әдісі Ω облысының $t = 0$ түзуінде ізделінді шешімнің мәні ретінде қосымша параметр енгізуге негізделген. (3.3.6)-(3.3.10) гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін интегралдық шартты бастапқы периодты шеттік есебін пара-пар гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін x айнымалысынан тәуелді функциялық параметрлі жартылай периодты есебіне келтіріледі. Шешімнің және оның дербес туындыларының қасиеті функционалдық параметрдің қасиетіне ауысады.

Осы әдісті қолданып, (3.3.1)-(3.3.5) төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы жартылай периодты шеттік есебінің бірмәнді шешілімділігінің коэффициенттік шарттарын аламыз.

Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің кейбір кластары үшін бастапқы-шеттік есептердің әртүрлі типтері қосымша жаңа функцияларды енгізу арқылы [20, б. 89], [21], [22] еңбектерде зерттеледі. Берілген облысты бөлмей функционалдық параметрлеу әдісінің схемасы.

$\lambda(x) = w(0,x)$ белгілеуін енгіземіз және (3.3.6)-(3.3.10) есебінде $\widetilde{w}(t,x) = w(t,x) - \lambda(x)$ алмастыруын жасаймыз. Сонда (3.3.9), (3.3.10) интегралдық қатынастарын аламыз:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varphi_2(x) + t\cdot\lambda(x) + \int_0^t \widetilde{w}(\tau,x)d\tau, \tag{3.3.11}$$

$$u(t,x) = \varphi_1(x) + t\cdot\varphi_2(x) + \frac{t^2}{2}\cdot\lambda(x) + \int_0^t\int_0^\tau w(\tau_1,x)d\tau_1 d\tau, \tag{3.3.12}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \dot{\varphi}_2(x) + t\cdot\dot{\lambda}(x) + \int_0^t \frac{\partial\widetilde{w}(\tau,x)}{\partial x}d\tau, \tag{3.3.13}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + t\cdot\dot{\varphi}_2(x) + \frac{t^2}{2}\cdot\dot{\lambda}(x) + \int_0^t\int_0^\tau \frac{\partial\widetilde{w}(\tau_1,x)}{\partial x}d\tau_1 d\tau. \tag{3.3.14}$$

Әрі қарай, (3.3.6) жүйесіндегі $u(t,x)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ және $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}$ функцияларының орнына сәйкесінше (3.3.11)-(3.3.14) қатынастармен алмастырамыз. Келесі пара-пар гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін белгісіз $\lambda(x)$ функциялы бейлокалды есепті аламыз:

$$\frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial t\partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t} + A_3(t,x)\widetilde{w} + A_4(t,x)\int_0^t \frac{\partial\widetilde{w}(\tau,x)}{\partial x}d\tau +$$
$$+A_5(t,x)\int_0^t \widetilde{w}(\tau,x)d\tau + A_6(t,x)\int_0^t\int_0^\tau \frac{\partial\widetilde{w}(\tau_1,x)}{\partial x}d\tau_1 d\tau +$$
$$+A_7(t,x)\int_0^t\int_0^\tau \widetilde{w}(\tau_1,x)d\tau_1 d\tau + \left[A_1(t,x) + A_4(t,x)t + A_6(t,x)\frac{t^2}{2}\right]\dot{\lambda}(x) +$$
$$\left[A_3(t,x) + A_5(t,x)t + A_7(t,x)\frac{t^2}{2}\right]\lambda(x) + f(t,x) + g_1(t,x) + g_2(t,x), \tag{3.3.15}$$

$$\widetilde{w}(0,x) = 0, \qquad x\in[0,\omega], \tag{3.3.16}$$

$$\widetilde{w}(t,0) = \ddot{\psi}(t) - \ddot{\psi}(0), \qquad t\in[0,T], \tag{3.3.17}$$

$$\widetilde{w}(T,x) = 0, \qquad x\in[0,\omega], \tag{3.3.18}$$

мұндағы $g_1(t,x) = A_4(t,x)\dot{\varphi}_2(x) + A_5(t,x)\varphi_2(x)$,

$$g_2(t,x) = A_6(t,x)[\dot{\varphi}_1(x) + t\cdot\dot{\varphi}_2(x)] + A_7(t,x)[\varphi_1(x) + t\cdot\varphi_2(x)].$$

Келісімділік шарты орындалады:

$$\lambda(0) = \ddot{\psi}(0). \tag{3.3.19}$$

(3.3.6)-(3.3.10) және (3.3.15)-(3.3.18) есептері пара-пар болып табылады.

$w(t,x)$ функциясы (3.3.6)-(3.3.10) есебінің шешімі болса, онда $\{\lambda(x) = w(0,x),\ \widetilde{w}(t,x) = w(t,x) - w(0,x)\}$ жұбы (3.3.15)-(3.3.18) есебінің шешімі болады және керісінше, $\{\lambda(x), \widetilde{w}(t,x)\}$ жұбы (3.3.15)-(3.3.18) есебінің шешімі болса, онда $\{\lambda(x) + \widetilde{w}(t,x)\}$ функциясы (3.3.6)-(3.3.10) есебінің шешімі болады.

Бекітілген $\lambda(x)$, $\dot{\lambda}(x)$ үшін $\widetilde{w}(t,x)$ функциясы Ω облысында (3.3.16), (3.3.17) шарттарымен берілген Гурса есебінің шешімі болып табылады.

(3.3.16), (3.3.17) шарттарынан $\frac{\partial\widetilde{w}(0,x)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\widetilde{w}(0,x)}{\partial t} = \ddot{\psi}(t)$ шарттарын аламыз және Гурса есебін пара-пар үш интегралдық теңдеулер жүйесіне келтіреміз

$$\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x} = \int_0^t \Big[A_1(\tau,x)\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x} + A_2(\tau,x)\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\tau} + A_3(\tau,x)\widetilde{w} + f(\tau,x) + A_1(\tau,x)\dot{\lambda}(x) +$$
$$+A_3(\tau,x)\lambda(x)\Big]d\tau + \int_0^t \Bigg[A_4(\tau,x)\int_0^\tau \frac{\partial\widetilde{w}(\tau_1,x)}{\partial x}d\tau_1 + A_5(\tau,x)\int_0^\tau \widetilde{w}(\tau_1,x)d\tau_1 +$$
$$+g_1(\tau,x) + A_4(\tau,x)\cdot\tau\cdot\dot{\lambda}(x) + A_5(\tau,x)\cdot\tau\cdot\lambda(x)\Bigg]d\tau +$$
$$\int_0^t \Bigg[A_6(\tau,x)\int_0^\tau\int_0^{\tau_1} \frac{\partial\widetilde{w}(\tau_2,x)}{\partial x}d\tau_2 d\tau_1 + A_7(\tau,x)\int_0^\tau\int_0^{\tau_1} \widetilde{w}(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1 +$$
$$+g_2(\tau,x) + A_6(\tau,x)\frac{\tau^2}{2}\cdot\dot{\lambda}(x) + A_7(\tau,x)\frac{\tau^2}{2}\cdot\lambda(x)\Bigg]d\tau, \tag{3.3.20}$$

$$\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t} = \ddot{\psi}(t) + \int_0^x \Big[A_1(t,\xi)\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\xi} + A_2(t,\xi)\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t} + A_3(t,\xi)\widetilde{w} + f(t,\xi) + A_1(t,\xi)\dot{\lambda}(\xi) +$$
$$+A_3(t,\xi)\lambda(\xi)\Big]d\xi + \int_0^x \Bigg[A_4(t,\xi)\int_0^t \frac{\partial\widetilde{w}(\tau,\xi)}{\partial\xi}d\tau + A_5(t,\xi)\int_0^t \widetilde{w}(\tau,\xi)d\tau +$$
$$+g_1(t,\xi) + A_4(t,\xi)\cdot t\cdot\dot{\lambda}(\xi) + A_5(t,\xi)\cdot t\cdot\lambda(\xi)\Bigg]d\xi +$$
$$+\int_0^x \Bigg[A_6(t,\xi)\int_0^t\int_0^\tau \frac{\partial\widetilde{w}(\tau_1,\xi)}{\partial\xi}d\tau_1 d\tau + A_7(t,\xi)\int_0^t\int_0^\tau \widetilde{w}(\tau_1,\xi)d\tau_1 d\tau +$$
$$+g_2(t,\xi) + A_6(t,\xi)\frac{t^2}{2}\cdot\dot{\lambda}(\xi) + A_7(t,\xi)\frac{t^2}{2}\cdot\lambda(\xi)\Bigg]d\xi, \tag{3.3.21}$$

$$\widetilde{w}(t,x) = \ddot{\psi}(t) - \ddot{\psi}(0) + \int_0^x \frac{\partial \widetilde{w}(\tau,\xi)}{\partial \xi} d\xi. \qquad (3.3.22)$$

$$\frac{\partial \widetilde{w}(\tau,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \widetilde{w}(\tau_1,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \widetilde{w}(\tau_2,x)}{\partial x}$$

өрнектерінің орнына (3.3.20) теңдеудің оң жағындағы сәйкес интегралдық бөлігін $m(m = 1,2,3,\dots)$ рет қайталап қою арқылы аламыз

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x} = D_m(t,x) \cdot \dot{\lambda}(x) + E_m(t,x) \cdot \lambda(x) +$$
$$+G_m\left(t,x,\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x}\right) + H_m\left(t,x,\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t},\widetilde{w}\right) + F_m(t,x), \qquad (3.3.23)$$

мұндағы

$$D_m(t,x) = D_m^{(1)}(t,x) + D_m^{(2)}(t,x) + D_m^{(3)}(t,x),$$
$$E_m(t,x) = E_m^{(1)}(t,x) + E_m^{(2)}(t,x) + E_m^{(3)}(t,x),$$
$$G_m\left(t,x,\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x}\right) = G_m^{(1)}\left(t,x,\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x}\right) + G_m^{(2)}\left(t,x,\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x}\right) + G_m^{(3)}\left(t,x,\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x}\right),$$
$$H_m\left(t,x,\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t},\widetilde{w}\right) = H_m^{(1)}\left(t,x,\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t},\widetilde{w}\right) + H_m^{(2)}(t,x,\widetilde{w}) + H_m^{(3)}(t,x,\widetilde{w}),$$
$$F_m(t,x) = F_m^{(1)}(t,x) + F_m^{(2)}(t,x) + F_m^{(3)}(t,x),$$
$$D_m^{(1)}(t,x) = \int_0^t A_1(\tau_1,x)d\tau_1 + \int_0^t A_1(\tau_1,x) \int_0^{\tau_1} A_1(\tau_2,x)d\tau_2\, d\tau_1 +$$
$$+ \dots + \int_0^t A_1(\tau_1,x) \dots \int_0^{\tau_{m-1}} A_1(\tau_m,x)d\tau_m \dots d\tau_1,$$
$$E_m^{(1)}(t,x) = \int_0^t A_3(\tau_1,x)d\tau_1 + \dots +$$
$$+ \int_0^t A_1(\tau_1,x) \dots \int_0^{\tau_{m-2}} A_1(\tau_{m-1},x) \int_0^{\tau_{m-1}} A_3(\tau_m,x)\, d\tau_m \dots d\tau_1,$$
$$G_m^{(1)}\left(t,x,\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x}\right) =$$
$$= \int_0^t A_1(\tau_1,x) \dots \int_0^{\tau_{m-2}} A_1(\tau_{m-1},x) \int_0^{\tau_{m-1}} A_1(\tau_m,x) \frac{\partial \widetilde{w}(\tau_m,x)}{\partial x} d\tau_m \dots d\tau_1,$$
$$H_m^{(1)}\left(t,x,\widetilde{w},\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}\right) = \int_0^t \left[A_2(\tau_1,x)\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \tau_1} + A_3(\tau_1,x)\widetilde{w}\right] d\tau_1 + \dots +$$

$$+\int_0^t A_1(\tau_1,x)\ldots\int_0^{\tau_{m-2}} A_1(\tau_{m-1},x)\int_0^{\tau_{m-1}}\left[A_2(\tau_m,x)\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\tau_m}+A_3(\tau_m,x)\widetilde{w}\right]d\tau_m\ldots d\tau_1,$$

$$F_m^{(1)}(t,x)=\int_0^t f(\tau_1,x)d\tau_1+\cdots+$$

$$+\int_0^t A_1(\tau_1,x)\ldots\int_0^{\tau_{m-2}} A_1(\tau_{m-1},x)\int_0^{\tau_{m-1}} f(\tau_m,x)\,d\tau_m\ldots d\tau_1,$$

$$D_m^{(2)}(t,x)=\int_0^t A_4(\tau_1,x)\cdot\tau_1 d\tau_1+\int_0^t A_4(\tau_1,x)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} A_4(\tau_3,x)\cdot\tau_3 d\tau_3\,d\tau_2\,d\tau_1+$$

$$+\cdots+\int_0^t A_4(\tau_1,x)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} A_4(\tau_3,x)\ldots\int_0^{\tau_{2m-3}}\int_0^{\tau_{2m-2}} A_4(\tau_{2m-1},x)\tau_{2m-1}d\tau_{2m-1}\ldots d\tau_1,$$

$$E_m^{(2)}(t,x)=\int_0^t A_5(\tau_1,x)\tau_1 d\tau_1+\cdots+\int_0^t A_4(\tau_1,x)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{\tau_{2m-5}}\int_0^{\tau_{2m-4}} A_4(\tau_{2m-3},x)\int_0^{\tau_{2m-3}}\int_0^{\tau_{2m-2}} A_5(\tau_{2m-1},x)\,\tau_{2m-1}\,d\tau_{2m-1}\ldots d\tau_1,$$

$$G_m^{(2)}\left(t,x,\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x}\right)=$$

$$=\int_0^t A_4(\tau_1,x)\ldots\int_0^{\tau_{2m-3}}\int_0^{\tau_{2m-2}} A_4(\tau_{2m-1},x)\int_0^{\tau_{2m-1}}\frac{\partial\widetilde{w}(\tau_{2m},x)}{\partial x}d\tau_{2m}\ldots d\tau_1,$$

$$H_m^{(2)}(t,x,\widetilde{w})=\int_0^t A_5(\tau_1,x)\int_0^{\tau_1}\widetilde{w}(\tau_2,x)d\tau_2\,d\tau_1+\cdots+\int_0^t A_4(\tau_1,x)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{\tau_{2m-5}}\int_0^{\tau_{2m-4}} A_4(\tau_{2m-3},x)\int_0^{\tau_{3m-3}}\int_0^{\tau_{2m-2}} A_5(\tau_{2m-1},x)\int_0^{\tau_{2m-1}}\widetilde{w}(\tau_{2m},x)d\tau_{2m}\ldots d\tau_1,$$

$$F_m^{(2)}(t,x)=\int_0^t g_1(\tau_1,x)d\tau_1+\cdots+$$

$$+\int_0^t A_4(\tau_1,x)\ldots\int_0^{\tau_{2m-5}}\int_0^{\tau_{2m-4}} A_4(\tau_{2m-3},x)\int_0^{\tau_{2m-3}}\int_0^{\tau_{2m-2}} g_1(\tau_{2m-1},x)\,d\tau_{2m-1}\ldots d\tau_1,$$

$$D_m^{(3)}(t,x)=\int_0^t A_6(\tau_1,x)\cdot\frac{\tau_1^2}{2}d\tau_1+$$

$$+\int_0^t A_6(\tau_1,x)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_3} A_6(\tau_4,x)\cdot\frac{\tau_4^2}{2}d\tau_4 d\tau_3\, d\tau_2\, d\tau_1+\cdots+\int_0^t A_6(\tau_1,x)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{\tau_{3m-8}}\int_0^{\tau_{3m-7}}\int_0^{\tau_{3m-6}} A_6(\tau_{3m-5},x)\int_0^{\tau_{3m-5}}\int_0^{\tau_{3m-4}}\int_0^{\tau_{3m-3}} A_6(\tau_{3m-2},x)\frac{\tau_{3m-2}^2}{2}d\tau_{3m-2}\ldots d\tau_1,$$

$$E_m^{(3)}(t,x)=\int_0^t A_7(\tau_1,x)\frac{\tau_1^2}{2}d\tau_1+\cdots+\int_0^t A_6(\tau_1,x)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{\tau_{3m-8}}\int_0^{\tau_{3m-7}}\int_0^{\tau_{3m-6}} A_6(\tau_{3m-5},x)\int_0^{\tau_{3m-5}}\int_0^{\tau_{3m-4}}\int_0^{\tau_{3m-3}} A_7(\tau_{3m-2},x)\frac{\tau_{3m-2}^2}{2}d\tau_{3m-2}\ldots d\tau_1,$$

$$G_m^{(3)}\left(t,x,\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x}\right)=\int_0^t A_6(\tau_1,x)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{\tau_{3m-5}}\int_0^{\tau_{3m-4}}\int_0^{\tau_{3m-3}} A_6(\tau_{3m-2},x)\int_0^{\tau_{3m-2}}\int_0^{\tau_{3m-1}}\frac{\partial\widetilde{w}(\tau_{3m},x)}{\partial x}d\tau_{3m}\ldots d\tau_1,$$

$$H_m^{(3)}(t,x,\widetilde{w})=\int_0^t A_7(\tau_1,x)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\widetilde{w}(\tau_3,x)d\tau_3\, d\tau_2\, d\tau_1+$$

$$+\cdots+\int_0^t A_6(\tau_1,x)\ldots\int_0^{\tau_{3m-8}}\int_0^{\tau_{3m-7}}\int_0^{\tau_{3m-6}} A_6(\tau_{3m-5},x)$$

$$\int_0^{\tau_{3m-5}}\int_0^{\tau_{3m-4}}\int_0^{\tau_{3m-3}} A_7(\tau_{3m-2},x)\int_0^{\tau_{3m-2}}\int_0^{\tau_{3m-1}}\widetilde{w}(\tau_{3m},x)\, d\tau_{3m}\ldots d\tau_1,$$

$$F_m^{(3)}(t,x)=\int_0^t g_2(\tau_1,x)d\tau_1+\cdots+\int_0^t A_6(\tau_1,x)\ldots$$

$$\int_0^{\tau_{3m-8}}\int_0^{\tau_{3m-7}}\int_0^{\tau_{3m-6}} A_6(\tau_{3m-5},x)\int_0^{\tau_{3m-5}}\int_0^{\tau_{3m-4}}\int_0^{\tau_{3m-3}} g_2(\tau_{3m-2},x)\, d\tau_{3m-2}\ldots d\tau_1.$$

(3.3.6)-(3.3.10) берілген есепке қатысты шарттар (3.3.18) қатынасты x бойынша дифференциалдауға мүмкіндік береді:

$$\frac{\partial\widetilde{w}(T,x)}{\partial x}=0. \qquad (3.3.24)$$

Егер (3.3.19) келісімділік шарты орындалса, онда (3.3.24) қатынасы (3.3.18) қатынасына пара-пар болады.

$t = T$ болғанда (3.3.23) теңдеуінің оң жағынан $\widetilde{w}(t,x)$ мәнін тауып, және (3.3.24) қою арқылы туындысы бойынша шешілмеген бірінші ретті n қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$D_m(T,x)\cdot\dot{\lambda}(x) = -E_m(T,x)\cdot\lambda(x) -$$
$$-G_m\left(T,x,\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x}\right) - H_m\left(T,x,\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t},\widetilde{w}\right) - F_m(T,x). \qquad (3.3.25)$$

Бекітілген $\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x}$, $\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t}$, $\widetilde{w}$ үшін (3.3.25) дифференциалдық теңдеулер жүйесі $x \in [0,\omega]$ аралығында $\lambda(x)$ функциясына қатысты (3.3.19) бастапқы шартпен берілген Коши есебі болып табылады. Біз (3.3.25), (3.3.19) Коши есебінің шешімін фундаменталды матрицаны қолданып табамыз.

$D_m(T,x)$ матрицасы $x \in [0,\omega]$ аралығында қайтымды болсын және

$$\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x} = -[D_m(T,x)]^{-1}E_m(T,x)\cdot\lambda(x) \qquad (3.3.26)$$

$\Phi(x) - (3.3.26)$дифференциалдық теңдеулер жүйесінің фундаменталды матрицасы делік.
(3.3.25) жүйені келесідей қайта жазамыз

$$\dot{\lambda}(x) = -[D_m(T,x)]^{-1}E_m(T,x)\cdot\lambda(x) + \tilde{F}_m\left(T,x,\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x},\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t},\widetilde{w}\right), \qquad (3.3.26)$$

мұндағы

$$\tilde{F}_m\left(T,x,\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x},\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t},\widetilde{w}\right) = [D_m(T,x)]^{-1}\times$$
$$\times\left(G_m\left(T,x,\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x}\right) + H_m\left(T,x,\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t},\widetilde{w}\right) + F_m(T,x)\right).$$

(3.3.27), (3.3.19) Коши есебінің шешімін аламыз

$$\lambda(x) = \Phi(x)\ddot{\psi}(0) + \Phi(x)\int_0^x \Phi^{-1}(\xi)\tilde{F}_m\left(T,\xi,\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\xi},\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t},\widetilde{w}\right)d\xi, \qquad x \in [0,\omega].$$

Осылайша, барлық $x \in [0,\omega]$ үшін $D_m(T,x)$ матрицасының қайтымдылығы (3.3.26) қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің фундаментальды матрицасын және (3.3.20)-(3.3.22) Гурса есебінің шешімі қолдана отырып, (3.3.1)-(3.3.5) бастапқы есептің шешімін табуға мүмкіндік береді.

Осыған ұқсас әдісті [23], [24] жұмыстарда екінші ретті квазисызықты және жартылай сызықты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты шеттік есептерде қолданылған. Бұл есептер сәйкесінше пара-пар квазисызықты және жартылай сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен функционалдық қатынасты шеттік есептер тобына келтірілген. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін бірқатар периодты шеттік есептерді шешу үшін [25] параметрлеу әдісін қолданады. Квазисызықты және жартылай периодты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есебінің шешімін табу алгоритмі ұсынылған. Алгоритмдерді құру үшін қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйелері мен енгізілген параметрлерге қатысты функционалды теңдеулер жүйелері үшін Коши есептер тобының шешімдері қолданылды. Осындай тәсіл қарастырылып отырған есеп шешімінің жеткіліктілік шартын орнатуға мүмкіндік берді.

(3.3.6)-(3.3.10) есебінің шешімін табу алгоритмі.

Фундаменталды матрицаны қолданып (3.3.6)-(3.3.10) есебінің шешімін біртіндеп табу алгоритмі ұсынамыз.

Осылайша, функционалды параметрлеу әдісі белгісіз функцияларды іздеу процесін екі кезеңге бөледі:

1) (3.3.19) шартымен берілген (3.3.25) жүйеден $\lambda(x)$ ($\dot{\lambda}(x)$) енгізілген функционалдық параметрді табамыз.
2) (3.3.20)-(3.3.22) интегралдық теңдеулер жүйесінен $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial t}$, $\widetilde{w}(t,x)$ белгісіз функцияларды табамыз.

Егер $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$ функциялары белгілі болса, онда (3.3.20)-(3.3.22) интегралдық теңдеулер жүйесінен $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial t}$, $\widetilde{w}(t,x)$ функцияларын табамыз, ал $\lambda(x)+\widetilde{w}(t,x)$ функциясы (3.3.6)-(3.3.10) есебінің шешімі болады. Егер $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial t}$, $\widetilde{w}(t,x)$ функциялары белгілі болса, онда (3.3.19) шартымен берілген (3.3.25) дифференциалдық теңдеулер жүйесінен $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$ функцияларын табамыз және тағы да (3.3.6)-(3.3.10) есебінің шешімі болатын $\lambda(x)+\widetilde{w}(t,x)$ функциялардың қосындысын анықтаймыз.

Мұнда $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$ функциялары да және $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial t}$, $\widetilde{w}(t,x)$ функциялары да белгісіз. Сондықтан, біз (3.3.20)-(3.3.22) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің және (3.3.25), (3.3.19) Коши есебінің шешімдері $\{\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$, $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial t}$, $\widetilde{w}(t,x)\}$ тізбектердің шегі болатындай итерациалық әдісті келесідей алгоритмде қолданамыз:

Бастапқы қадам. (3.3.25) теңдеулер жүйесінің оң жағында

$$\lambda(x)=\ddot{\psi}(0), \qquad \frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial\widetilde{w}(t,x)}{\partial t}=\ddot{\psi}(t), \qquad \widetilde{w}(t,x)=\ddot{\psi}(t)-\ddot{\psi}(0)$$

деп алсақ және барлық $x\in[0,\omega]$ үшін $D_m(T,x)$ матрицасының қайтымдылығын ескере отырып, (3.3.25) теңдеуден $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$ функциясын табамыз. (3.3.19) шарттарын қолдана отырып $\lambda^{(0)}(x)$ функциясын табамыз:

$$\lambda^{(0)}(x) = \ddot{\psi}(0) + \int_0^x \dot{\lambda}^{(0)}(\xi)\xi\,, \qquad x \in [0, \omega].$$

$\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$ болғанда (3.3.20)-(3.3.22) интегралдық теңдеулер жүйесінен барлық $(t, x) \in \Omega$ үшін $\frac{\partial \widetilde{w}^{(0)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \widetilde{w}^{(0)}(t,x)}{\partial t}$, $\widetilde{w}^{(0)}(t, x)$ функцияларын анықтаймыз.

1-ші қадам. (3.3.25) теңдеулер жүйесінің оң жағында

$$\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x), \qquad \frac{\partial \widetilde{w}(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{w}^{(0)}(t,x)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \widetilde{w}(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{w}^{(0)}(t,x)}{\partial t}, \qquad \widetilde{w}(t,x) = \widetilde{w}^{(0)}(t,x)$$

десек, барлық $x \in [0, \omega]$ үшін $D_m(T, x)$ матрицасының қайтымдылығын ескере отырып, $\dot{\lambda}^{(1)}(x)$ функциясын табамыз.

(3.3.19) шартты тағы қолданып, біз

$$\lambda^{(1)}(x) = \ddot{\psi}(0) + \int_0^x \dot{\lambda}^{(1)}(\xi)\xi\,, \qquad x \in [0, \omega].$$

функциясын табамыз.

$\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$, $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(1)}(x)$ болғанда (3.3.20)-(3.3.22) интегралдық теңдеулер жүйесінен барлық $(t, x) \in \Omega$ үшін $\frac{\partial \widetilde{w}^{(1)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \widetilde{w}^{(1)}(t,x)}{\partial t}$, $\widetilde{w}^{(1)}(t, x)$ функцияларын табамыз.

Жəне тағы сол сияқты.

k-шы қадам. (3.3.25) теңдеулер жүйесінің оң жағында

$$\lambda(x) = \lambda^{(k-1)}(x), \qquad \frac{\partial \widetilde{w}(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \widetilde{w}(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}, \qquad \widetilde{w}(t,x) = \widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)$$

деп алып, барлық $x \in [0, \omega]$ үшін $D_m(T, x)$ матрицасының қайтымдылығын ескере отырып, $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$ функциясын табамыз.

(3.3.19) шартты тағы қолданып, біз

$$\lambda^{(k)}(x) = \ddot{\psi}(0) + \int_0^x \dot{\lambda}^{(k)}(\xi)\xi\,, \qquad x \in [0, \omega].$$

функциясын табамыз.

$\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(k)}(x)$ болғанда (3.3.20)-(3.3.22) интегралдық теңдеулер жүйесінен барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін $\frac{\partial \widetilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \widetilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial t}$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$ функцияларын табамыз.

Мұнда $k = 1,2,3, \dots$.

Келесі теорема бастапқы берілгендер бойынша (3.3.6)-(3.3.10) есебінің бірмәнді шешілімділігін және ұсынылған алгоритмнің жинақтылық шарты тағайындалады.

3.3.1 теорема. Кейбір m, $m = 1,2,3, \dots$ үшін $D_m(T,x) - n \times n$-матрицасы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін қайтымды болса және келесі теңсіздіктер орындалса:

a) $\|[D_m(T,x)]^{-1}\| \leq \gamma_m(T,x)$, және $\gamma_m(T,x)$ −барлық $x \in [0,\omega]$ үшін үзіліссіз оң функция;

b) $q_m(T,x) = \gamma_m(T,x)\left\{e^{\alpha(x)T} - 1 - \alpha(x)T - \dots - \frac{1}{m!}[\alpha(x)T]^m\right\} \leq \chi < 1$, мұндағы χ −тұрақты,

$$\alpha(x) = \max_{t \in [0,T]} \|A_1(t,x), A_4(t,x), A_6(t,x)\|.$$

Онда (3.3.6)-(3.3.10) есебінің $w^*(t,x)$ жалғыз шешімі болады,

$$\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial t} = \varphi_2(x) + t \cdot \lambda^*(x) + \int_0^t \widetilde{w}^*(\tau,x)d\tau,$$

$$u^*(t,x) = \varphi_1(x) + t \cdot \varphi_2(x) + \frac{t^2}{2} \cdot \lambda^*(x) + \int_0^t \int_0^\tau \widetilde{w}^*(\tau_1,x)d\tau_1 d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial t \partial x} = \dot{\varphi}_2(x) + t \cdot \dot{\lambda}^*(x) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{w}^*(\tau,x)}{\partial x} d\tau,$$

$$\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + t \cdot \dot{\varphi}_2(x) + \frac{t^2}{2} \cdot \dot{\lambda}^*(x) + \int_0^t \int_0^\tau \frac{\partial \widetilde{w}^*(\tau_1,x)}{\partial x} d\tau_1 d\tau,$$

интегралдық қатынастармен бірге

$$w^*(t,x) = \lambda^*(x) + \widetilde{w}^*(t,x)$$

теңдігімен анықталады, мұндағы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін

$$\lambda^*(x) = \lim_{k \to \infty} \lambda^{(k)}(x), \;\; \dot{\lambda}^*(x) = \lim_{k \to \infty} \dot{\lambda}^{(k)}(x),$$

$(t,x) \in \Omega$ облысында

$$\widetilde{w}^*(t,x) = \lim_{k\to\infty} \widetilde{w}^{(k)}(t,x), \qquad \frac{\partial \widetilde{w}^*(t,x)}{\partial x} = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial \widetilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \widetilde{w}^*(t,x)}{\partial t} = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial \widetilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial t}.$$

3.3.1 теорема дәлелдеуі жоғарыда ұсынылған алгоритмге сәйкес жүргізіледі.

Демек, (3.3.6)-(3.3.10) және (3.3.1)-(3.3.5) есептерінің пара-пар болғандықтан келесі теорема шығады.

3.3.2 теорема. Кейбір m, $m = 1,2,3,\ldots$ үшін $D_m(T,x) - n \times n$-матрицасы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін қайтымды болса және 3.3.1 теорема a), b) шарттары орындалса.

Онда $u^*(t,x)$ функциясы (3.3.1)-(3.3.5) есебінің жалғыз шешімі болады, келесідей анықталады

$$u^*(t,x) = \varphi_1(x) + t \cdot \varphi_2(x) + \frac{t^2}{2} \cdot \lambda^*(x) + \int_0^t \int_0^\tau \widetilde{w}^*(\tau_1,x) d\tau_1 d\tau, \qquad (t,x) \in \Omega.$$

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ облысында төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің келесі үш класы

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \\ + A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u + f(t,x), \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ + A_5(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_8(t,x)u + f(t,x), \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + C_1(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \\ + B_2(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C_2(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_3(t,x)u + f(t,x), \qquad \text{(III)}$$

үшін бірқатар бастапқы-шеттік есептер зерттеледі.

Осы аталған теңдеулер үшін бастапқы шеттік есептерді зерттеудің конструктивті әдісі ұсынылған және соның негізінде бірмәнді шешілімділік шарттары орнатылған. Қарастырылған есептердің жуық шешімдерін табу жолдары келтірілген және құрылған алгоритмдердің жинақтылық шарттары табылған. Зерттелген есептер екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін бейлокалды шеттік есеп пен функционалдық қатынастарға келтіріледі. Екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін бейлокалды шеттік есептердің бірмәнді шешілімділігі шарттары көмегімен бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігі шарттары тағайындалған. Шешімді табу алгоритмдерінің жинақтылығы шарттары бірмезгілде қарастырған есептердің бірмәнді шешілімділігінің шарттарын береді.

Ұсынылып отырған зерттеу әдісін және тағайындалған нәтижелерді жоғары ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін бастапқы-шеттік есептерге, классикалық емес дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерге қолдануға болады. Оған қоса, орнатылған тұжырымдарды төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің (I), (II), (III) кластары үшін әртүрлі бастапқы-шеттік, периодты, бейлокал есептерді зерттеу барысында қолдануға болады.

Диссертациялық жұмыстың нәтижелерін математика мамандығы бойынша бакалавриат, магистратура және докторантурада арнайы және элективті курстар оқу кезінде, гранттық қаржыландыру бойынша ғылыми жобалар дайындау барысында пайдалануға болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Bishop, R.E.D. Longitudinal Waves in Beams // Aeronaut. – 1952. – Q. 3 (2), –P.280–293.

2. Чезари Л. Периодические решения гиперболических уравнений в частных производных. // Симптом. нелинейные колебания. –Изд. Акад. Российскаяакадемиянаук, –СССР, 1961. – С.440–457

3. Cesari L. A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Rend. Circ. Mat. – Palermo, 1965. –Vol.14, №2, – P.95–118

4. Aziz A.K. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. // Proc. Amer. Math. Soc. 1966, –Vol.17, – P.557–566

5. Aziz A.K., Meyers A.M. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in a strip. // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. –Vol.146, – P.167–178.

6. Aziz A.K., Brodsky S.L. Periodic solutions of a class of weakly nonlinear hyperbolic partial differential equations// SIAM. J. Math. Anal. 1972. – Vol.3, – P.300–313.

7. Cesari L. Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Arch. Rational Mech. Anal. 1965. – Vol. 20, № 2, –P. 170–190.

8. Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Shauder's canonic form. // Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1974. – Vol. 1. № 3–4, –P. 311–358.

9. Cesari L. Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Shauder. // Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. Sc. fis. mat. e natur. 1974. – Vol. 57. № 5, – P. 303–307.

10. Hale J.K. Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter. // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. –Vol. 23. – № 5. – P. 380–398.

11. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Diff. Equat. 1972. – Vol. 12. № 3. – P. 559–565.

12. Ptashnyck B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations.- Kiev: Naukova Dumka, 1984. –P. 265.

13. Ptashnyck B.I. Incorrect boundary value problems for partial differential equations. – Kiev: Naukova Dumka, 1984. –P.280.

14. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии.–Москва: Высшая школа, 1995. –P. 305.

15. Ptashnyk B.Yo., Il’kiv V.S., Kmit’ I. Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. – Kyiv: Naukova Dumka, Ukraine, 2002. (inUkrainian) – P. 292

16. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравненияматематическойфизики. – Москва: Наука, 1972. – С. 735.

17. Demidenko, G.V., Uspenskii, S.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative // Pure and Appl. Math. - Marcel Dekker, New York, 1998. – P.256.

18. АлгазинС. Д., КийкоИ. А. Флаттерпластиниоболочек. -Москва: Наука, 2006. –С.245.

19. Нахушев, А. М. Проблемы смещения для уравнений в частных производных. –Москва: Наука, 2006. –С.288.

20. Нахушев А. М. Задачи со сдвигом для уравнений в частных производных. –Москва: Наука, 2006. –С.287. ISBN: 5-02-034076-6.

21. Юлдашев Т. К. Обратная задача для нелинейных интегродифференциальных уравнений Бенни–Тип Люка с вырожденным ядром // Русская математика. Изв. ВУЗОВ –2016. – Т. 60, –№ 9, –С.53–60.

22. Liu, Y., Li, H. H1-Galerkin Mixed Finite Element Methods for Pseudo-Hyperbolic Equations // Applied Mathematics and Computation.-2009. – Vol. 212(2), – P. 446–457.

23. Guo, H. Analysis of Split Weighted Least-squares Procedures for Pseudo-hyperbolic Equations // Applied Mathematics and Computation. – 2010. – Vol. 217(8), – P. 4109–4121.

24. Pulkina, L.S. Solution to Nonlocal Problems of Pseudohyperbolic Equations // Electronic J. of Diff. Equat. – 2012. – Vol. 116, – P. 1–9.

25. Demidenko, G.V. Conditions for the Solvability of the Cauchy Problem for Pseudohyperbolic Equations // Sib. Math. J. – 2015. – Vol. 56 (6), – P. 1028–1041.

26. Kirane, M., Ragoub, L. Nonexistence Results for a Pseudo-Hyperbolic Equation in the Heisenberg Group // Electronic J. of Diff. Equat. – 2015.– Vol. 110, - P. 1–9.

27. Pul'kina, L.S. A Problem with a Dynamic Nonlocal Condition for a Pseudohyperbolic Equation // Russian Math. Iz. VUZ. – 2016.–Vol. 60 (9), –P. 38–45.

28. Fedotov, I., Shatalov, M., Marais, J. Hyperbolic and Pseudo-hyperbolic Equations in the Theory of Vibration // Acta Mech. – 2016. – Vol. 227 (12), – P. 3315–3324.

29. Chen, H., Hou, T. A Priori and a Posteriori Error Estimates of H1-Galerkin Mixed Finite Element Methods for Optimal Control Problems Governed by Pseudo-Hyperbolic Integro-Differential Equations // Appl. Math. and Computat. – 2018.–Vol. 328 (1), – P. 100–112.

30. Pulkina, L.S., Beylin, A.B. Nonlocal Approach to Problems on Longitudinal Vibration in a Short Bar // Electronic J. of Diff. Equat. – 2019. –Vol.29, – P. 1–9.

31. Zhao, Z., Li, H. A Continuous Galerkin Method for Pseudo-Hyperbolic Equations with Variable Coefficients // J. Math. Anal. and Appl. – 2019. – Vol. 473 (2), – P. 1053–1072.

32. Muntts, G. Integral Equations. P. 1. Linear Integral Volterra Equations // GTTI, Leningrad. – 1934. – P. 29. (in Russian).

33. Kiguradze T., Lakshmikantham V. On the Dirichlet problem for fourth order linear hyperbo-lic equations // Nonlinear Analysis. – 2002. – Vol.49, № 2, – P.197–219.

34. Kiguradze T., Lakshmikantham V. On the Dirichlet problem for fourth order linear hyperbolic equations, Nonlinear Analysis.– 2002. – P. 197–219. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00101-8.

35. Kiguradze T., Lakshmikantham V. On Dirichlet problem in a characteristic rectangle for higher order linear hyperbolic equations // Nonlinear Anal. – 2002. –Vol. 50(8), – P. 1153–1178. PII: S0362-546X(01)00806-9.

36. Kiguradze T.I., Kusano T. Well-posedness of initial-boundary value problems for higher-order linear hyperbolic equations with two independent variables // Differential Equations. – 2003.– Vol.39(4),– P. 553–563.

37. Kiguradze T., Kusano T. On ill-posed initial-boundary value problems for higher order linear hyperbolic equations with two independent variables // Differential Equations. – 2003. – Vol. 39(10), – P. 1379–1394.

38. Kiguradze I., Kiguradze T. On solvability of boundary value problems for higher order nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. – 2008.– Vol. 69, – P. 1914–1933. doi:10.1016/j.na.2007.07.033

39. Kiguradze T. On solvability and well-posedness of boundary value problems for nonlinear hyperbolic equations of the fourth order // Georgian Mathematical Journal. – 2008. – Vol. 15, № 3, - P. 555–569.

40. Kiguradze T. The Valle-Poussin problem for higher order nonlinear hyperbolic equations // Computers & Mathematics with Applications.– 2010. – Vol. 59, – P. 994–1002. doi:10.1016/j.camwa.2009.09.009.

41. Midodashvili B. A nonlocal problem for fourth order hyperbolic equations with multiple characteristics // Electr. J. of Differential Equations. – 2002. –Vol. 85, – P. 1–7.

42. Midodashvili B. Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms // Proc. of A. Razmadze Math. Institute, – 2005. – Vol. 138, – P.43–54.

43. Mamedov I. G. A fundamental solution to the Cauchy problem for a fourth-order pseudoparabolic equation // Comput. Math. Math. Phys. – 2009. – Vol. 49 (1), –P. 93–104.

44. Dzhokhadze O.M. The Riemann function for higher-order hyperbolic equations and systems with dominated lower terms // Differential Equations. – 2003. – Vol. 39(10), – P. 1440–1453. DOI: 0012-2661/03/3910-1440

45. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation// U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. - 1989. – Vol. 29. №1. – P.34–46.

46. Ferraioli D.C., Tenenblat K. Fourth order evolution equations which describe pseudospherical surfaces // J. Differential Equations.– 2014. – Vol. 257, – P. 3165–3199. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.06.010.

47. Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. On – Dimensional Schrodinger operator with a negative Parameter and Its Applications to the study of the Approximation Numbers of Singular Hyperbolic operator. // Filomat. – 2018. – V.32, ISSUE 3, – P.785–790.

48. Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. Sturm-Liouville operator with a parameter and its usage to spectrum research of some differential operators // Complex variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol.64, – P.1457–1476.

49. Asanova A.T. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem with data on intersecting lines for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. – 2009.– Vol. 45(3),– P. 385–394.

DOI: 10.1134/S0012266109030082.

50. Asanova A.T. On a boundary-value problem with data on noncharacteristic intersecting lines for systems of hyperbolic equations with mixed derivative // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2012.– Vol. 187(4),– P. 375-386. 1072–3374/12/1874–0375.

51. Asanova A.T. On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. – Vol. 65(3), – P. 349–365. 0041-5995/13/6503–0349.

52. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – Vol. 402(1), – P. 167–178. doi:10.1016/j.jmaa.2013.01.012.

53. Asanova A.T. Well-posed solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with impulse effects // Ukrainian Mathematical Journal. – 2015. – Vol. 67(3), – P. 333–346. DOI: 10.1007/s11253-015-1083-3.

54. Asanova A.T. On solvability of nonlinear boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2015. – Vol. 63, –P. 1–13. doi:10.14232/ejqtde.2015.1.63.

55. Asanova A.T., Imanchiev A.E. On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasi-linear systems of hyperbolic equations // Eurasian Mathematical Journal. – 2015. – Vol. 6(4), – P. 19–28.

56. Asanova A.T. Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2016.– Vol. 212(3), – P. 213–233. DOI: 10.1007/s10958-015-2660-6.

57. Asanova A.T. Criteria of solvability of nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives // Russian Mathematics. – 2016.– Vol. 60(1), – P. 1–17. DOI: 10.3103/S1066369X16050017.

58. Assanova A.T. On the solvability of nonlocal boundary value problem for the systems of impulsive hyperbolic equations with mixed derivatives // Journal of Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. – 2016. – Vol. 5(2), – V. 153–165. DOI:10.5890/DNC.2016.06.005.

59. Asanova A.T. Criteria of unique solvability of nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives//Russian Mathematics (Iz.VUZ). – 2016. – Vol. 60(5). – P. 1–17.

60. Assanova A.T. Nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations in characteristic rectangle // Russian Mathematics. – 2017.– Vol. 61(5), – P. 7–20. DOI: 10.3103/S1066369X17050024.

61. Assanova A.T. Periodic solutions in the plane of system of second–order hyperbolic equations // Mathematical Notes. – 2017. – Vol. 101(1), – P. 39–47. https://doi.org/10.1134/S0001434617010047.

62. Assanova A.T. Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions// Electronic Journal of Differential Equations. – 2017. № 170. – P.1–12.

63. Asanova A.T., Kadirbaeva Zh. M., and Bakirova E. A. On the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions // Ukrainian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 69(8), – P. 1175–1195. DOI: 10.1007/s11253-017-1424-5.

64. Assanova A. T., Bakirova E. A., Kadirbayeva Zh. M. Method for solving the periodic problem for an impulsive system of hyperbolic integro-differential equations//Intern. Conf. "Functional analysis in interdisciplinary applications" (FAIA2017), AIP Conference Proceedings. – New York:Melville, – 2017. – P. 1880.

65. Assanova A.T. On a nonlocal problem with integral conditions for the system of hyperbolic equations//Differential Equations. – 2018. – Vol.54(2), – P. 201–214. DOI: 10.1134/S0012266118020076.

66. Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M. Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations//Electronic Journal of Differential Equations.– 2018, – Vol. 72, – P. 1–8.

67. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., and Kadirbayeva Zh.M. Numerical Solution of Systems of Loaded Ordinary Differential Equations with Multipoint Conditions//Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2018. – Vol.58(4), – P. 508–516.DOI: 10.1134/S096554251804005X.

68. Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations//Computational and Applied Mathematics. – 2018. – Vol.37(4), –P. 4966–4976. DOI 10.1007/s40314-018-0611-9.

69. Assanova A.T., Alikhanova B.Zh., Nazarova K.Zh. Well-posedness of a nonlocal problem with integral conditions for third order system of the partial differential equations // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical Series. – 2018. – Vol.5 (321), – P. 33–41. https://doi.org/10.32014/2018.2518-1726.5.

70. Assanova A.T., Sabalakhova A.P., Toleukhanova Z.M. On the solving of initial-boundary value problem for system of partial differential equations of the third order // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico–Mathematical Series. – 2018.– Vol.3(319), – P. 67–73.

71. Asanova A. T. On one approach to solving a non-local problem for a system of differential equations of the Aller type // Mathematical Journal.– 2018. – Vol. 18, № 2(68), – P. 5-18 (in Russian).

72. Assanova A.T. On the solvability of a nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition//Georgian Math. J. Published Online: 02/19/2019. DOI: https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011.

73. Asanova, A.T. On Solving an Initial Boundary Value Problem for a System of Third-Order Partial Differential Equations // Russian Math. (Iz. VUZ) – 2019. – Vol. 63(4), – P. 12–23.

74. A.T. Assanova, An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order // Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43, № 4, – P. 1967–1978. DOI: 10.3906/mat-1903-111.

75. Assanova A.T., Boichuk A.A., Tokmurzin Zh.S. On the initial-boundary value problem for system of the partial differential equations of fourth order // News of the NAS RK. Physico–Mathem. Ser. – 2019. – Vol. 323, – P. 14-21. https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.2.

76. Asanova A.T. One approach to the solution of a nonlocal problem for systems of hyperbolic equations with integral conditions// J. Math. Sciences (United States). – 2019. – Vol. 238. № 3, – P.189–206. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04228-7

77. Assanova A.T. Solution of initial-boundary value problem for a system of partial differential equations of the third order// Russian Mathematics (Iz.VUZ). – 2019. – Vol. 63. №4. – P. 12–22. https://doi.org/10.3103/S1066369X19040029.

78. Assanova A.T., Tokmurzin Z.S. Parameter identification in an initial-boundary value problem for hyperbolic equation of the fourth order // International Conference ”Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra” (EMJ-2019), dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. Abstract books. Nur–Sultan, October 16–19, 2019, – P. 27.

79. Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. On two-point initial boundary value problem for fourth order partial differential equations// Kazakh Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 19. № 3. – P. 66–78.

80. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order//Bulletin of the Karaganda university–Series Mathematics. – 2020. – Vol. 97. №1. – P. 6–16. https://doi.org/10.31489/2020M1/6-16.

81. Orumbayeva N.T. On an algorithm of finding periodical boundary value problem for system of the quasi-linear of hyperbolic equations//Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2013. № 10. – P. 464–474.

82. Orumbaeva N.T. On solvability of non-linear semi-periodic boundary-value problem for system of hyperbolic equations//Russian Mathematics (Iz.VUZ). – 2016. – Vol. 60. №9. – P.23–37. https://doi.org/ 10.3103/S1066369X16090036.

83. Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. An Approach to the Solution of the Initial Boundary-Value Problem for Systems of Fourth–Order Hyperbolic Equations//ISSN 0001-4346, Mathematical Notes. – 2020, – Vol. 108, № 1, – P. 3–14. © Pleiades Publishing, Ltd., 2020. Russian Text © The Author(s), 2020, published in Matematicheskie Zametki, – 2020, – Vol. 108, № 1, – P. 3–16. DOI: 10.1134/S0001434620070019

84. Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. Boundary Value Problem for System of Pseudo-HyperbolicEquations of the Fourth Order with Nonlocal Condition //ISSN 1066-369X, Russian Mathematics.– 2020. – Vol. 64, № 9, – P. 1–11. © Allerton Press, Inc., 2020. Russian Text c © The Author(s), 2020, published in Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika.– 2020. № 9, – P. 3–14.

DOI: 10.3103/S1066369X20090017

85. Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. A nonlocal multipoint problem for a system of fourth-order partial differential equations //ISSN 2077-9879 Eurasian Mathematical Journal. – 2020.– Vol. 11(3).– P. 8–20.

DOI: https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-3-08-20

86. Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. Method of functional parametrization for solving a semi-periodicinitial problem for fourth-order partial differential equations //Bulletin of the Karaganda university – Series Mathematics. – 2020. – Vol. 100. № 4. – P. 5–16.DOI 10.31489/2020M4/5-16

87. Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. On the solvability of periodic problem for fourth order system of partial differential equations special type// Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus. XIX International Scientific Conference on Differential Equations (Erugin readings-2019) Minsk, 14–17 May 2019. – P.47–49.

88. Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. An initial-boundary value problem for system of partial differential equations of the fourth order // Non-classical equations of mathematical physics and their applications. Uzbek-Russian Scientific Conference, Tashkent, 24–26 October 2019. – P.28–30.

89. Tokmurzin Zh.S. A Goursat-type problem for a system of fourth-order partial differential equations //Traditional international scientific conference in April. Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. Almaty, April 3–5, 2019. – P.131–132.

90. Tokmurzin Zh.S. On the periodic problem for fourth order partial differential equations// International Conference of Young Mathematicians. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, June 6–8, 2019. – P.44.

91. Tokmurzin Zh.S. On the initial multi-point boundary value problem for fourth order partial differential equations// Traditional international scientific conference in April. Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. Almaty, April 3–5, 2020 –P.139–140.

92. Tokmurzin Zh.S. On the solvability a periodic initial problem for fourth order partial differential equations// Traditional international scientific conference in April. Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. Almaty, April 5–8, 2021 –P. 103–105.