Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ӘОЖ 517.946 Қолжазба құқығында

УБАЕВА ЖАНАР КАРТБАЕВНА

Клаузен текті біртекті емес жүйе шешімдерінің бар болуын зерттеу

6D060100 - Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесшілері
ф.-м.ғ.д., профессор Тасмамбетов Ж.Н.
ф.-м.ғ.д., профессор Сартабанов Ж.А.

Шетелдік ғылыми кеңесші
ф.-м.ғ.д., академик Раджабов Н.Р.
(Тәжік Республикасы)

Қазақстан Республикасы
Ақтөбе, 2023

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда келесі стандарттарға сілтемелер жасалды:

МС 7.1-2003 – Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар және жобалау ережелері.

МС 7.32-2001 (2006 жылғы өзгерістермен) – Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және рәсімдеу ережелері

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

$_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x)$ – Клаузен функциясы;

$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1),\ (b)_n = b(b+1)\dots(b+n-1)$ – Похгаммер белгіленуі;

$p = 1 + k$ – ранг ұғымы;

$m = -1 - \lambda$ – антиранг ұғымы;

$F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ – бір айнымалылы гипергеометриялық функция;

$_AF_B(a_1, a_2, ..., a_A; b_1, b_2, ..., b_B; x)$ – жалпыланған гипергеометриялық функция;

$_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, & ..., & \alpha_p \\ \beta_1, & ..., & \beta_q\end{matrix}\middle| x\right] = {}_pF_q(\alpha_r; \beta_t; x)$ – жалпыланған гипергеометриялық қатар;

$F_1(\alpha, \beta', \gamma; x, y)$ – екі айнымалылы гипергеометриялық Аппель функциясы;

$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$ – екі айнымалылы гипергеометриялық Аппель функциясы;

$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y)$ – екі айнымалылы гипергеометриялық Аппель функциясы;

$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y)$ – екі айнымалылы гипергеометриялық Аппель функциясы;

$\Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma'; x, y)$ – туындалған Гумберт қатары;

$$F\left(\begin{matrix} - & \\ \beta_1, & \beta_2\end{matrix}\middle| x\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} F\left(\begin{matrix}\frac{1}{\varepsilon}, & \frac{1}{\varepsilon}, & \frac{1}{\varepsilon} \\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}, \varepsilon^3 x\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta_1, n)(\beta_2, n)(1, n)} x^n$$

– туындалған гипергеометриялық Клаузен функциясы;

$_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1\alpha_1', & \alpha_2\alpha_2', & \alpha_3\alpha_3' \\ \beta_1\beta_1', & \beta_2\beta_2' & \end{matrix}\middle| x, y\right)$ – Клаузен текті функция;

$F_B\left(\begin{matrix}(\alpha_n), & (\beta_n) \\ \gamma & \end{matrix}\middle| (z_n)\right)$ – Лауричелла функциясы;

$\Phi_{B,n}^{k,l}\left(\begin{matrix}(\alpha_k), & (\alpha_l'), & (\beta_k) \\ & \gamma & \end{matrix}\middle| (z_n)\right)$ – Художников функциясы.

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Диссертациялық жұмыс

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^{h}\right)x^{j}y^{k}p_{j,k} &= f_{1}(x,y)\\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^{h}\right)x^{j}y^{k}p_{j,k} &= f_{2}(x,y)\end{aligned}\right\} \quad (0.1)$$

$$p_{j,k}=\frac{\partial^{j+k}Z(x,y)}{\partial x^{j}\partial y^{k}},\quad (j\geq 0,k\geq 0),$$
$$p_{0,0}(x,y)=Z(x,y),\quad (j=0,k=0)$$

түріндегі біріккен біртекті емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің бар болуы мәселелерін Фробениус-Латышева әдісі негізінде зерттеуге арналады, мұндағы $p_{j,k}$ арқылы $Z(x,y)$ белгісізінің әртүрлі реттегі дербес туындылары белгіленген, $p_{0,0}(x,y)=Z(x,y)-$жүйенің екі теңдеуі үшін де ортақ белгісіз, $r_{j,k},\alpha_{j,k},t_{j,k},\beta_{j,k},\ (j,k=0,1,2)-$ тұрақтылар, $f_{i}(x,y),\ (i=1,2)$ аналитикалық функция немесе екі айнымалылы көпмүшелік. Жүйедегі теңдеулердің реті ω мәнімен анықталады.

$f_{i}(x,y)=0,\ (i=1,2)$ болғанда алынған

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^{h}\right)x^{j}y^{k}p_{j,k} &= 0\\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^{h}\right)x^{j}y^{k}p_{j,k} &= 0\end{aligned}\right\} \quad (0.2)$$

біртекті жүйенің дербес жағдайлары толығырақ зерттелген [1].

Диссертациялық жұмыста Фробениус-Латышева әдісімен қатар, анықталмаған коэффициенттер әдісі және гипергеометриялық текті теңдеулер мен жүйелерді құрып, олардың жалпыланған гипергеометриялық функциялар түріндегі шешімдерін зерттеу үшін Кампе де Ферье әдісі қолданылған.

Тақырыптың өзектілігі. Зерттеу біртекті емес жоғары ретті жалпыланған гипергеометриялық теңдеулер мен біріккен теңдеулер жүйелерінің шешімдерінің бар болуының жаңа тиімді әдістеріне арналады. Жоғары ретті гипергеометриялық теңдеулер мен екінші және үшінші ретті дербес туындылы сызықты дифференциалдық теңдеулердің біртекті емес жүйелерінің шешімдерінің бар болуын зерттейтін әдістер бұрынғы жұмыстарда қарастырылмаған. Осындай текті теңдеулер мен олардың жүйелері арқылы алынған гипергеометриялық функциялар электродинамикада, ядролық және математикалық физикада, радиоэлектроникада кең қолданылады. Осындай маңызды қолданыстан, жалпы жағдайда, біртекті емес жалпыланған гипергеометриялық теңдеулер мен теңдеулер жүйелерінің шешімдерінің бар болуы мәселелерін жан-жақты зерттеудің қажеттігі туындайды.

Зерттеу тақырыбының қазіргі жағдайы. Математикалық физиканың қолданыстарында кездесетін арнайы функциялар гипергеометриялық $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ Гаусс функциясының дербес жағдайлары болып табылады . Біртекті емес Бессель теңдеуінің оң жағы дәрежелік немесе сызықты функциялар түрінде берілсе, онда біртекті емес теңдеудің шешімдері Ломмель, Струве, Ангер, Вебер арнайы функциялары болады [2-6]. Осы және басқа да белгілі арнайы функциялар шешімдері болатын гипергеометриялық текті біртекті емес теңдеулер А.В. Бэбистрдің монографиясында зерттелген [7]. Монографияда екінші ретті біртекті емес жай дифференциалдық теңдеулер қарастырылған, бірақ оларды жан-жақты зерттеуге арналған әдіс жоқ.

Кейінгі кезде көпөлшемді туындалған теңдеулерді зерттеулерге байланысты үшінші және жоғары ретті жалпыланған гипергеометриялық теңдеулер мен жүйелер әртүрлі есептерде жиі қолданыла бастады [8-10]. Бұл еңбектерде біртекті теңдеулердің шешімдерін табу зерттелгенімен, біртекті емес жағдайлар қарастырылмаған.

Жалпыланған гипергеометриялық функцияның алғашқы мысалы бес параметрге тәуелді Клаузен функциясы (1828) болып табылады [1, 170 б.]. Бірақ, үшінші ретті жай дифференциалдық теңдеудің шешімі болып табылатын Клаузен функциясының қасиеттерін зерттеу өз дәрежесіне жеткен жоқ. Әсіресе, ғылым мен техниканың есептерінде қолданылатын біртекті емес Клаузен дифференциалдық теңдеулерінің шешімдерін табу толық зерттелмеген. Клаузен теңдеуінен шекке көшу арқылы алынатын туындалған теңдеулердің шешімдерін құру ерекшеліктері де жете қаралмаған. Келтірілген жағдайды екі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпыланған гипергеометриялық жүйелері үшін де айтуға болады.

Алғашқы қарастырылған біртекті екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер

$$\left.\begin{aligned} P^{(0)}Z_{xx}+P^{(1)}Z_{xy}+P^{(2)}Z_{x}+P^{(3)}Z_{y}+P^{(4)}Z=0 \\ Q^{(0)}Z_{yy}+Q^{(1)}Z_{xy}+Q^{(2)}Z_{x}+Q^{(3)}Z_{y}+Q^{(4)}Z=0 \end{aligned}\right\} \qquad (0.3)$$

жүйесінің қалыпты шешімдерін құру ерекшеліктері Е.В. Вильчинский, В. Штернберг, Н.И. Терещенко, Ж.Н. Тасмамбетов және т.б. ғалымдардың жұмыстарында зерттелді, мұндағы $P^{(i)}=P^{(i)}(x,y),\ \ Q^{(i)}=Q^{(i)}(x,y),\ \ (i=\overline{0,4})-$ аналитикалық функциялар [11-14].

Е.В. Вильчинский берілген жүйенің үйлесімділігін және интегралдану шарттарын анықтап, оның проективті-дифференциалдық геометрияны негіздеуге қатысты қолданылуын көрсетті [11, 68 б.]. В. Штернберг ранг $p=1$ жағдайы үшін қалыпты шешімнің бар болуы туралы теореманы дәлелдеп, жүйенің асимтотикалық шешімінің бар болуын негіздеді [15].

Біртекті теңдеулер жүйелерін зерттеудің әрі қарай дамуы, негізінен, екі айнымалылы арнайы функциялар мен ортогональ көпмүшеліктеріне байланысты болды. Бұл бағыттағы зерттеулер белгілі ғалымдар П. Аппель, Ш. Эрмит, Я. Горн, Э. Айнс, А. Эрдейи, Ж. Кампе де Ферье, М. Лауричелла, М.П. Гумберт, Л. Борнгассер, Д. Джексон және т.б. еңбектерінде дамыды [16-20].

Екі айнымалылы ортогональ көпмүшеліктер мен дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер арасындағы байланыстар Г. Кролл, Э. Шредингер, И. Шеффер, Г.К. Энгелис, П.К. Суетин, Д. Джексон, Л. Слейтер, Т. Корвиндер және т.б. ғалымдардың еңбектерінде қарастырылды [21-27].

Ұзақ жылдар бойы әртүрлі бағыттағы зерттеу жұмыстары сәтті жүргізіліп, көптеген жоғары деңгейлі нәтижелер алынғанына қарамастан (0.3) түріндегі жүйенің қалыпты, іштей қалыпты, қалыпты-регуляр және ақырлы шешімдерін тауып, оларды жан-жақты зерттеуге жарамды ортақ әдіс табылған жоқ. Ерекше нүктелер классификациясын құрып, олардың маңайында шешімдерді анықтаудың тиімді әдістері де құрылмаған. Бұл бағыттағы кемшіліктерді жою мақсатында Ж.Н. Тасмамбетов жай дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық теориясында сәтті қолданыс тапқан, белгілі Фробениус-Латышева әдісін жетілдіріп, (0.3) түріндегі екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі жағдайына жалпылады [28, 29].

Зерттеудің мақсаты. Клаузен текті жүйенің шешімінің бар болуы мәселесін зерттеу, Клаузен текті біртекті емес теңдеу мен жүйенің шешімдерін құрудың тиімді әдістерін табу және сол әдістерді шешімдері көп айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық функциялар болатын теңдеулер жүйесіне тарату. Тиімді әдістерді пайдалана отырып ерекше қисықтар маңайында қалыпты, қалыпты-регуляр шешімдерді құрудың теориясын жасақтау.

Зерттеу міндеттері:

а) анықталмаған коэффициенттер және жетілдірілген Фробениус-Латышева әдістерін пайдаланып біртекті емес жалпыланған дифференциалдық теңдеулер мен екі теңдеуден тұратын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерін құру ерекшеліктерін көрсету, ерекше нүктелерін және қисықтарын классификациялау;

б) біртекті емес Клаузен теңдеуінің $x = 0$ және $x = \infty$ ерекше нүктелерінің маңайындағы шешімдерін құрудың тиімді әдістерін орнату;

в) туындалған біртекті емес Клаузен теңдеуінің шешімдерін құрудың тиімді әдісін орнату;

г) регуляр және иррегуляр ерекше қисықтар маңайындағы үшінші ретті екі теңдеуден тұратын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерін құру ерекшеліктерін көрсету;

д) жалпыланған гипергеометриялық текті теңдеулер жүйесінің көп айнымалылы ортогональ көпмүшелік түріндегі шешімдерін құруда жалпыланған гипергеометриялық функцияларды пайдалану мүмкіндіктерін көрсету;

е) жай Клаузен текті біртекті емес жүйенің жалпы шешімін құру және шешімінің қасиеттерін зерттеу;

ж) біртекті емес негізгі және туындалған Клаузен жүйелерінің шешімдерін құру ерекшеліктерін зерттеу;

з) Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы алынған туындалған жүйенің қалыпты-регуляр шешімінің бар болуын және олардың қасиеттерін зерттеу;

и) Художников функциясы мен қалыпты-регуляр шешімдер арасындағы байланыс ерекшеліктерін көрсету.

Зерттеу нысаны. Біртекті емес жоғары ретті жалпыланған гипергеометриялық текті теңдеулер мен екінші және үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі, олардың дербес жағдайлары болып табылатын Клаузен теңдеуі және Клаузен жүйелері.

Зерттеу пәні. Біртекті емес жоғары ретті жалпыланған гипергеометриялық текті теңдеулер мен үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпыланған гипергеометриялық функциялар түріндегі шешімдерін табудың тиімді әдісін құру, шешімдердің бар болуы шарттарын негіздеу.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы:

а) диссертациялық жұмыста Фробениус-Латышева және анықталмаған коэффициенттер әдістері бұрын қарастырылмаған біртекті емес үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін зерттеу үшін қолданылды;

ә) біртекті емес үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің қалыпты және қалыпты-регуляр шешімінің бар болуының қажетті шарттары және оларды құрудың тиімді әдістері жасалынды;

б) ерекше қисықтар маңайындағы жай Клаузен текті біртекті емес жүйенің шешімдерін құру ерекшеліктері айқындалды және оған сәйкес шешімдердің қасиеттері анықталды;

в) біртекті емес негізгі және туындалған Клаузен жүйелерінің шешімінің бар болу шарттары тағайындалды және шешімдерді табудың тиімді әдістері көрсетілді;

г) Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы туындалған Художников жүйесінің қалыпты-регуляр шешімінің бар болуы туралы теоремалар жалпы n айнымалылы жағдайлары үшін дәлелденді;

д) Художников функциясы мен зерттеу аясында құрылған қалыпты-регуляр шешімдер арасындағы байланыстар анықталды.

Қорғауға ұсынылған нәтижелер:

- анықталмаған коэффициенттер әдісі бойынша біртекті емес жалпыланған дифференциалдық теңдеулер мен дербес туындылы теңдеулер жүйелерінің шешімдерінің, олардың оң жақтарының берілу ерекшеліктеріне қарай анықталуы;
- Фробениус-Латышева әдісінің үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелерін зерттеуге қолданылуы;

- Фробениус-Латышева әдісі арқылы жалпыланған үшінші ретті теңдеулер жүйесінің әртүрлі ерекше қисықтар маңайында шешімдерінің құрылуы;

- шешімдері жалпыланған гипергеометриялық функциялар болатын теңдеулер мен теңдеулер жүйесінің нақты түрлерінің анықталуы және Кампе де Ферье әдісі арқылы шешімдерінің құрылуы;

- біртекті үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің $(0,0)$ және (∞,∞) ерекше қисығы маңайында қалыпты және қалыпты-регуляр шешімінің бар болуының қажетті шарттары;

- біртекті емес жай, негізгі және туындалған Клаузен жүйелерінің жалпыланған гипергеометриялық функциялар түріндегі шешімдерінің құрылуы;

- Фробениус-Латышева әдісімен туындалған екі, үш және n теңдеуден тұратын жүйелердің қалыпты-регуляр шешімдері мен Художников функциясы арасындағы байланыстардың орнатылуы.

Алынған нәтижелердің нақтылығы және негізделуі. Диссертацияда қарастырылған шешімдері бір және көп айнымалылы арнайы функциялар болатын дифференциалдық теңдеулер мен дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелері теориясының әдістері мен нәтижелері кеңінен қолданылады. Ғылыми нәтижелер леммалар мен теоремалар түрінде тұжырымдалған. Зерттеу жұмысының нәтижелерінің маңыздылығы, нақтылығы және алынған нәтижелері талап етілген журналдарда жариялануымен түйінделеді.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелердің теориялық бағалылығы үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің аналитикалық теориясын дамытуымен және қарастырылған есептердің шешімдерін жалпыланған гипергеометриялық функциялар түрінде табылуымен ерекшеленеді. Сондықтан да диссертациялық жұмыстың практикалық маңыздылығы көп айнымалылы арнайы функциялар теориясында маңызды орын алатындығы және математикалық физиканың, электродинамиканың, көп өлшемді туындалған теңдеулер теориясының, радиоэлектрониканың және антенналар теориясының әртүрлі есептерін зерттеулерде қолданыс табатындығында.

Зерттеудің басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Зерттеудің басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланыстары арасынан Өзбекстан академигі М.Салахатдиновтың математикалық мектебі айналысатын көпөлшемді туындалған теңдеулердің қасиеттерін зерттеуге жалпыланған гипергеометриялық функциялардың қолданылуын келтіруге болады. Атап айтсақ, А. Хасанов, Т.К. Юлдашев, М.Т. Иргашев және т.б. ғалымдар айналысады. Нақтырақ айтатын болсақ, бір сызықты туындалу қисығымен берілген үшінші ретті дербес туындылы теңдеулердің шешімдерін табу Клаузен теңдеуінің шешімдерін табуға, ал үш айнымалылы дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешімдерін табу туындалған Клаузен жүйесінің шешімдерін табуға келтірілетінін атауға болады [30].

Шешімдері жалпыланған гипергеометриялық функциялар болатын есептер аталған авторлардың басқа да жұмыстарында зерттелген [31-33]. Ол жұмыстарда қарастырылған есептердің қолданылу аясы да көрсетілген.

Шешімдері n айнымалылы функциялар болатын туындалған дербес туындылы жүйелер (F_A), (F_B), (F_C) және (F_D) Лауричелла жүйелерінен алынады. Диссертациялық жұмыста (F_B) Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы алынған туындалған жүйенің көп айнымалылы жалпыланған функциялар түрінде болатын шешімдерін табу мүмкіндіктері зерттелген.

Мұндай туындалған жүйенің В.И. Художников анықтаған $\Phi_{B,n}^{k,l}$ функциясынан басқа да қалыпты-регуляр шешімдері бар болатындығы көрсетілді. Бұл бағыттағы зерттеулер әлде де жалғастыруды қажет етеді.

Автордың жеке үлесі. Диссертацияда келтірілген барлық нәтижелер автордың жеке өзі немесе оның тікелей қатысуымен алынды. Ғылыми кеңесшілер және қосалқы авторлар мәселенің қойылымына және алынған нәтижелерді талқылауға ғана үлестерін қосты.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Диссертациялық жұмыста алынған негізгі нәтижелер келесі семинарлар мен конференцияларда баяндалды және талқыланды:

- дәстүрлі халықаралық сәуір ғылыми конференциясы, (ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан, 3-5 сәуір 2019ж.);
- «Математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы мәселелері» атты халықаралық ғылыми конференция (Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қарағанды, Қазақстан, 12-14 маусым, 2019 ж.);
- «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019): «Eurasian Mathematical Journal» журналының шығарыла бастағанына 10 жыл толуына арналған халықаралық конференция (Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан, 16-19 қазан 2019 ж.);
- «Кешенді талдау және оның қолданылуы» ғылыми семинары, Тәжік ұлттық университеті, Душанбе, Тәжік Республикасы (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., академик Н.Раджабов, караша, 2020ж.);
- «Қазіргі кезеңдегі іргелі және қолданбалы математика мәселелері» атты халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференция (М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Қазақстан филиалы, Нұр-Сұлтан, Қазақстан, 4 маусым, 2021ж.);
- «Математикалық биология, информатика және физикадағы жергілікті емес шекаралық есептер және олармен байланысты мәселелер» атты халықаралық ғылыми конференция, (Нальчик, Ресей, 5-9 желтоқсан, 2021ж.);

- «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері» атты IX халықаралық ғылыми конференция (Ақтөбе, Қазақстан, 24-28 мамыр, 2022 ж.);

- «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті математика кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Ж.А. Сартабанов).

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша негізгі ғылыми тұжырымдар 23 ғылыми жұмыста жарияланды. Оның ішінде 2 мақала Scopus мәліметтер базасында индекстелген рейтингтік ғылыми журналдарда [34, 35], 3 мақала ҚР ҒЖБССҚК ұсынған басылымдарда [36-38], 1 мақала ҚР ғылыми журналында [39], 1 мақала РИНЦ индексті журналында [40], 16 мақала Қазақстанда және жақын шет елдерде өткен Халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында жарияланды [41-56].

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кірісπеден, үш бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімнен тұрады. Тұжырымдар, формулалар екі индекстен тұратын сандармен нөмірленген. Бірінші индекс - бөлімнің номерін, екінші индекс - осы бөлімшедегі тұжырымның, формуланың номерін білдіреді. Диссертацияның жалпы көлемі 127 бет. Пайдаланылған әдебиеттер тізімі 117 атаулардан тұрады.

Жұмыстың қысқаша мазмұны. Кіріспеде қарастырылған тақырыптың қазіргі кезеңдегі жағдайы бағаланады және ғылыми-зерттеу жұмысын жүргізудің қажеттілігі негізделген. Сонымен қатар, кіріспеде тақырыптың өзектілігі және ғылыми жаңалығы көрсетілген. Зерттеудің негізгі мақсаты мен міндеттері және қорғауға ұсынылған негізгі нәтижелер келтірілген.

Жұмыстың бірінші бөлімінде ерекше нүктелері регуляр немесе иррегуляр болатын

$$x^{B+1}\left(\mu_{B+1}-\lambda_{B+1}x^k\right)\frac{d^{B+1}y}{dx^{B+1}}+...+x\left(\mu_1-\lambda_1 x^k\right)\frac{dy}{dx}+\left(\mu_0-\lambda_0 x^k\right)y=f(x) \quad (0.4)$$

түріндегі гипергеометриялық текті біртекті емес жалпыланған дифференциалдық теңдеудің әртүрлі дербес жағдайларының жалпыланған гипергеометриялық функциялар түріндегі шешімдерін құру мүмкіндіктері қарастырылады, мұндағы $\mu_i,\lambda_i\left(i=0,1,...,B+1\right)-$тұрақтылар, $k-$бүтін сан, $f(x)-$жалпыланған дәрежелік қатар.

1.1-бөлімшесінде зерттеу жұмысында қолданылатын негізгі анықтамалар мен түсініктер келтірілген.

Жалпыланған гипергеометриялық функция деп

$${}_AF_B\left(a_1,a_2,...,a_A;b_1,b_2,...,b_B;x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_n\left(a_2\right)_n...\left(a_A\right)_n}{\left(b_1\right)_n\left(b_2\right)_n...\left(b_B\right)_n n!}x^n \quad (0.5)$$

түріндегі дәрежелік қатарды айтады, мұндағы $a_k, k=\overline{1,A}$ және $b_j, j=\overline{1,B}$ тұрақты параметрлер. Бұл кез-келген жалпыланған функцияның канондық формасы, сондай-ақ

$$ {}_AF_B[(a);(b);x]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n n!}x^n \qquad (0.6)$$

түріндегі жазылу формасы да пайдаланылады, мұндағы $(a)_n=a(a+1)\dots(a+n-1)$, $(b)_n=b(b+1)\dots(b+n-1)$.

0.1-анықтама. ${}_AF_B$ функциясының B саны реті, $B+1-A$ оның класы, ал $B=A-1$(нольдік класс) болғанда толық функция деп аталады.

Реті, яғни $B=2$ болса, онда Клаузен функциясы деп аталады және ол

$$ {}_3F_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;x)=F\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & a_3\\ b_1, & b_2 & \end{pmatrix}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n(a_3)_n}{(b_1)_n(b_2)_n n!}x^n \qquad (0.7)$$

түрінде жазылады.

Жалпыланған гипергеометриялық қатар $A<B+1$ болғанда бүкіл комплекс жазықтықта жинақты болады және x айнымалысының бүтін функциясын анықтайды.

$A<B+1$ болса, онда ${}_AF_B$ функциясының реті $B-$ға тең толық функциядан шекке көшу арқылы

$$ {}_{A-1}F_B(a_1,\dots,a_{A-1};b_1,\dots,b_B;x)=\lim_{\varepsilon\to 0}{}_AF_B(a_1,\dots,a_A;b_1,\dots,b_B;\varepsilon x) \qquad (0.8)$$

түріндегі функция алынады.

$A>B+1$ болғанда жалпыланған гипергеометриялық функция бір ғана $x=0$ нүктесінде, ал $A<B+1$ болғанда $|x|<1$ дөңгелегінде жинақты болады. Жалпыланған гипергеометриялық ${}_AF_B(a_1,a_2,\dots,a_n;b_1,b_2,\dots,b_n;x)$ функциясы біртекті жалпыланған гипергеометриялық

$$x^{B+1}(\mu_{B+1}-\lambda_{B+1}x)\frac{d^{B+1}y}{dx^{B+1}}+\dots+(\mu_1-\lambda_1 x)\frac{dy}{dx}-\lambda_0 y=0 \qquad (0.9)$$

теңдеуінің дербес шешімі болады.

0.2-анықтама. Шекке көшу жолымен алынған (0.8) ${}_{A-1}F_B$ функциясы ${}_AF_B$ −дан туындалған функция деп аталады.

(0.7) Клаузен функциясынан шекке көшу арқылы

$$F(b_1,b_2;x)=\lim_{\varepsilon\to 0}F\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon}, & \frac{1}{\varepsilon}, & \frac{1}{\varepsilon}\\ b_1, & b_2 & \end{pmatrix}\varepsilon^3 x=\sum_{n-0}^{\infty}\frac{1}{(b_1)_n(b_2)_n n!}x^n \qquad (0.10)$$

туындалған функциясы алынады.

(0.7) Клаузен және (0.10) туындалған функциялары бірінші бөлімнің зерттеу нысандары.

Одан әрі, жалпыланған дифференциалдық теңдеулерді қалай құруға болатындығы туралы мәліметтер келтірілген. Үшінші ретті

$$x^3\left(\mu_3-\lambda_3x^k\right)\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\left(\mu_2-\lambda_2x^k\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\mu_1-\lambda_1x^k\right)\frac{dy}{dx}+\left(\mu_0-\lambda_0x^k\right)y=0 \qquad (0.11)$$

дифференциалдық теңдеуі енгізіліп, оның болашақ зерттеулерге қатысты кейбір қасиеттері көрсетілген. (0.11) теңдеуі көп зерттелмеген. Әсіресе, $k\geq 2$ жағдайында шешімдердің классикалық ортогональ көпмүшеліктермен байланысы және оларды табудағы Клаузен функциясының рөлі белгісіз.

(0.7) Клаузен функциясы $\omega=2,$ екінші ретті функциялар тобына жатады. Жалпы жағдайда белгісіз коэффициенттерді анықтау Кампе де Ферье әдісімен жүргізіледі [1, 115 б.] және шешімі (0.7) Клаузен функциясы болатын

$$\begin{gathered}x^2(1-x)\frac{d^3y}{dx^3}+\left[1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x\right]x\frac{d^2y}{dx^2}+\\+\left[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)x\right]\frac{dy}{dx}-\alpha_1\alpha_2\alpha_3y=0\end{gathered} \qquad (0.12)$$

түріндегі Клаузен теңдеуі алынады.

1.2-бөлімшесінде анықталмаған коэффициенттер әдісін қолдану арқылы регуляр ерекше нүктелі біртекті емес жалпыланған дифференциалдық теңдеудің шешімдерін құру ерекшеліктері қарастырылған. 1.2.1-ішкі бөлімшесінде Клаузен функциясының негізгі қасиеттері орнатылған [41, 103-110 б.].

Ерекше нүктелердің классификациясы А. Пуанкаре (1886) енгізген p ранг және Л. Томе енгізген m антиранг түсініктері арқылы анықталады.

Бір уақытта $p\leq 0$ және $m\leq 0$ болса, онда $x=0$ және $x=\infty$ ерекше нүктелері регуляр ерекше нүктелер деп аталады да, $x=0$ және $x=\infty$ нүктелері маңайында регуляр шешімдер орын алады [57].

Енгізілген түсініктерді пайдаланып, Клаузен теңдеуінің дербес және жалпы шешімінің бар болатындығы және оның қажетті шарттары туралы теоремалар келтірілген. Сондай-ақ, $x=0$ және $x=\infty$ ерекше нүктелерінің маңайында жинақты регуляр шешімдері бар болатындығы туралы теоремалар дәлелденген.

1.3-бөлімшесінде

$$\begin{gathered}x^2(1-x)\frac{d^3y}{dx^3}+\left[1+b_1+b_2-(3+a_1+a_2+a_3)x\right]x\frac{d^2y}{dx^2}+\\+\left[b_1b_2-(1+a_1+a_2+a_3+a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)x\right]\frac{dy}{dx}-a_1a_2a_3y=f(x)\end{gathered} \qquad (0.13)$$

түріндегі біртекті емес Клаузен теңдеуінің шешімдері теңдеудің оң жағындағы $f(x)$ функциясының берілу ерекшеліктеріне байланысты зерттелген.

(0.13) біртекті емес Клаузен теңдеуінің оң жағы $f(x)=x^{\rho}$ түрінде берілген жағдайда, оның жалпы шешімін табу үшін Фробениус-Латышева әдісін қолдану ерекшелігі көрсетілген және төмендегі теорема түрінде берілген.

0.1-теорема. Егер біртекті емес Клаузен теңдеуі

$$\begin{aligned} &x^2(1-x)\frac{d^3y}{dx^3}+\left[1+b_1+b_2-(3+a_1+a_2+a_3)x\right]x\frac{d^2y}{dx^2}+ \\ &+\left[b_1b_2-(1+a_1+a_2+a_3+a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)x\right]\frac{dy}{dx}-a_1a_2a_3y=x^{\rho} \end{aligned} \tag{0.14}$$

түрінде берілсе, онда оның жалпы шешімі біртекті Клаузен теңдеуінің $\bar{y}(x)$ жалпы шешімі және (0.14) біртекті емес Клаузен теңдеуінің $Y(x)$ дербес шешімінің қосындысы түрінде анықталады:

$$\begin{aligned} &y(x)=\bar{y}(x)+Y(x)=C_1\cdot{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2 & \end{matrix}\right| x\right)+C_2x^{1-b_1}\cdot{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix} a_1+1-b_1, & a_2+1-b_1, & a_3+1-b_1 \\ 2-b_1, & b_2+1-b_1 & \end{matrix}\right| x\right)+ \\ &+C_3x^{1-b_2}\cdot{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix} a_1+1-b_2, & a_2+1-b_2, & a_3+1-b_2 \\ b_1+1-b_2, & 2-b_2 & \end{matrix}\right| x\right)+ \\ &+\frac{x^{\rho}}{\rho(\rho-1+b_1)(\rho-1+b_2)}\cdot{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix} \rho-a_1, & \rho-a_2, & \rho-a_3 \\ \rho-1+b_1, & \rho-1+b_2 & \end{matrix}\right| x\right), \end{aligned}$$

мұндағы $\rho-$ тұрақты.

Одан әрі Клаузен теңдеуінің $x=\infty$ регуляр ерекше нүктесінің маңайындағы шешімдерін құру ерекшеліктері мен қасиеттеріне қатысты бірнеше теоремалар дәлелденген. Атап айтқанда (0.12) біртекті теңдеуінің $x=\infty$ регуляр ерекше нүктесінің маңайында үш сызықты тәуелсіз регуляр шешімдері $y_j(x), (j=1,2,3)$ бар болатындығы көрсетіліп, теңдеудің жалпы шешімі табылған.

0.2-теорема. (0.14) біртекті емес Клаузен теңдеуінің $x=\infty$ ерекше нүктесінің маңайындағы дербес шешімі

$$Y(x)=x^{\rho-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\rho)_n[-(\rho+\beta_1)]_n[-(\rho+\beta_2)]_n}{n![-(\rho-\alpha_1)]_n[-(\rho-\alpha_2)]_n[-(\rho-\alpha_3)]_n x^n}$$

түрінде анықталады, мұнда $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)=(-1)^n(-\alpha)_n$ белгілеуі қолданылған.

(0.7) жалпыланған гипергеометриялық Клаузен функциясының $m-$ші ретті туындысы

$$\frac{d^mF}{dx^m}=\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)...(\alpha_1+m-1)\alpha_2(\alpha_2+1)...(\alpha_2+m-1)\alpha_3(\alpha_3+1)...(\alpha_3+m-1)}{\beta_1(\beta_1+1)...(\beta_1+m-1)\beta_2(\beta_2+1)...(\beta_2+m-1)}\times$$

$$\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+m, & \alpha_2+m, & \alpha_3+m\\ \beta_1+m, & \beta_2+m & \end{matrix}\middle| x\right)=\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_m(\alpha_3)_m}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+m, & \alpha_2+m, & \alpha_3+m\\ \beta_1+m, & \beta_2+m & \end{matrix}\middle| x\right)$$

түрінде табылады.

Одан әрі, туындалған

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(1+b_1+b_2)x\frac{d^2y}{dx^2}+b_1b_2\frac{dy}{dx}-y=0 \qquad (0.15)$$

түріндегі Клаузен теңдеуінің шешімдерін құру қарастырылған.

Жалпы шешім үш сызықтық тәуелсіз шешімдердің қосындысы түрінде жазылады. Туындалған (0.15) теңдеудің ерекшелігі $x=0$ регуляр, ал $x=\infty$ иррегуляр ерекше нүктелер болатындығында. $x=0$ ерекше нүкте маңайында айқындауыш теңдеудің үш: $\rho_1=0,\quad \rho_2=1-b_1,\quad \rho_3=1-b_2$ нақты түбірлері табылады.

Сондай-ақ, біртекті емес Клаузен теңдеуінің оң жағы жалпыланған дәрежелік қатар түрінде берілсе, онда оның дербес шешімі жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ізделінетіндігі көрсетілген.

0.3-теорема. Егер біртекті емес туындалған гипергеометриялық теңдеуінің оң жағы $f(x)=x^\rho$ түрінде берілсе, онда оның дербес шешімі

$$Y(x)=x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\rho)_n(\rho-1+b_1)_n(\rho-1+b_2)_n}x^n=x^\rho F\left(\begin{matrix}-, & -, & -\\ \rho, & \rho-1+b_1, & \rho-1+b_2\end{matrix}\middle| x\right) \qquad (0.16)$$

түрінде табылады.

0.4-теорема. Біртекті емес туындалған гипергеометриялық Клаузен теңдеуінің жалпы шешімі (0.15) біртекті туындалған Клаузен теңдеуінің жалпы шешімі мен (0.14) біртекті емес теңдеуінің (0.16) дербес шешімінің қосындысынан тұрады.

Жалпыланған гипергеометриялық Клаузен функциясы мен туындалған гипергеометриялық Клаузен функциясының дифференциалдану қасиеттері де келтірілді.

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлімі (0.1) біртекті емес жүйені зерттеуге арналған. Сондай-ақ, (0.1) жүйенің оң жағы $f_i(x,y)=0,\ (i=1,2)$ болғанда алынатын (0.2) біртекті жүйесі қарастырылған.

Егер $\omega=1$ болса, онда (0.2) жүйе

$$
\begin{aligned}
&x^2\left(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x^h\right)p_{2,0}+xy\left(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x^h\right)p_{1,1}+x\left(r_{1,0}-\alpha_{1,0}x^h\right)p_{1,0}+y\left(r_{0,1}-\alpha_{0,1}x^h\right)p_{0,1}+\\
&+\left(r_{0,0}-\alpha_{0,0}x^h\right)p_{0,0}=0,\\
&y^2\left(t_{0,2}-\beta_{0,2}y^h\right)p_{0,2}+xy\left(t_{1,1}-\beta_{1,1}y^h\right)p_{1,1}+x\left(t_{1,0}-\beta_{1,0}y^h\right)p_{1,0}+y\left(t_{0,1}-\beta_{0,1}y^h\right)p_{0,1}+\\
&+\left(t_{0,0}-\beta_{0,0}y^h\right)p_{0,0}=0
\end{aligned}
\tag{0.17}
$$

түрінде жазылады, мұндағы $p_{0,0}(x,y)=Z(x,y)-$ ортақ белгісіз; $r_{j,k},\alpha_{j,k},t_{j,k},\beta_{j,k},\ (j,k=0,1,2)-$ тұрақты коэффициенттер.

$h=1$ жағдайы жақсы зерттелген. Я. Горн біртекті (0.17) жүйенің дербес жағдайларының шешімдері болатын 34 екі айнылмалылы гипергеометриялық функцияны анықтаған. Ал, $h=2$ болғанда шешімдері екі айнымалылы ортогональ көпмүшелік болатын жүйелер алынады.

2.1-бөлімде (0.1) жүйенің шешімінің бар болуы туралы бірнеше теоремалар дәлелденген [38, 137-147 б.].

0.5-теорема. (0.1) жүйенің жалпы шешімі (0.2) жүйенің

$$\overline{Z}=\sum_{j=1}^{4}C_jZ_j(x,y) \tag{0.18}$$

жалпы шешімі мен (0.1) жүйенің $Z_0(x,y)$ дербес шешімінің қосындыларынан тұрады:

$$Z(x,y)=\overline{Z}(x,y)+Z_0(x,y)=\sum_{j=1}^{4}C_jZ_j(x,y)+Z_0(x,y).$$

(0.2) біртекті жүйенің жалпы теориясы бойынша [11, 58 б.; 28, 3-15 б.], (0.18) түріндегі жалпы шешім біртекті жүйе үшін үйлесімділік шарты мен

$$1-\frac{xy\left(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x^h\right)}{x^2\left(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x^h\right)}\frac{xy\left(t_{1,1}-\beta_{1,1}y^h\right)}{y^2\left(t_{0,2}-\beta_{0,2}y^h\right)}\neq 0$$

интегралдану шарты орындалған кезде ғана бар болады.

Егер $h\geq 2$ болса, онда

$$x^h=u,\quad y^h=v$$

ауыстыруы біртекті (0.2) жүйені екінші ретті гипергеометриялық текті жүйеге келтіреді. Алынған гипергеометриялық текті жүйеден Аппельдің F_1-F_4 функцияларын пайдалану арқылы екі айнымалылы ортогональ көпмүшелік түріндегі шешімдері қалай табылатындығы теорема түрінде Эрмит жүйесінің нақты мысалында келтірілген.

2.1.2- ішкі бөлімшесінде екінші ретті гипергеометриялық текті біртекті емес жүйенің шешімдерін табу ерекшеліктері қарастырылған. Шешімдері ортогональ көпмүшелік болатын біртекті емес жүйелер аз зерттелген.

Сондықтан мысал ретінде Эрмит жүйесінің біртекті емес жағдайы үшін теорема тұжырымдалған.

Бірінші бөлімде (0.2) жүйенің $h=1$, $\omega=1$ жағдайы зерттелген. Екінші бөлімде (0.2) теңдеулер жүйесінің $\omega=2$ болған кездегі шешімдерін құру мәселелері қарастырылған. Бұл жағдайда үшінші ретті жүйенің шешімінің бар болуын анықтау қажеттігі туындайды. Мұнда да $h=0$, $h=1$ және $h\geq 2$ әртүрлі мәндеріне сай алынатын жүйенің шешімдерін құру мүмкіндіктерін қарастыру маңызды. $h=1$ дербес жағдайы бұрын қарастырылып, Кампе де Ферье текті жүйелер алынған.

Сонымен қатар, коэффициенттері

$$g^{(i)} = g^{(i)}(x,y) = a^{(i)}_{0,0} - a^{(i)}_{1,0}x,$$
$$q^{(i)} = q^{(i)}(x,y) = b^{(i)}_{0,0} - b^{(i)}_{0,1}y, \quad (i=\overline{0,6})$$

түрінде берілген

$$\begin{aligned}
&x^3 g^{(0)} p_{3,0} + x^2 y g^{(1)} p_{2,1} + x^2 g^{(2)} p_{2,0} + xy g^{(3)} p_{1,1} + x g^{(4)} p_{1,0} + y g^{(5)} p_{0,1} + g^{(6)} p_{0,0} = 0,\\
&y^3 q^{(0)} p_{0,3} + x y^2 q^{(1)} p_{1,2} + y^2 q^{(2)} p_{0,2} + xy q^{(3)} p_{1,1} + x q^{(4)} p_{1,0} + y q^{(5)} p_{0,1} + q^{(6)} p_{0,0} = 0
\end{aligned} \tag{0.19}$$

жүйе қарастырылған.

(0.19) теңдеулер жүйесінің регуляр және иррегуляр ерекшеліктерінің классификациясын және олардың маңайындағы сәйкес шешімдердің түрлерін анықтау керек. Шешімнің бар болуының үйлесімділік шарты тексерілуі тиіс. 2.2.1-ішкі бөлімшесінде сол шарттар тексерілген:

1. Жалпы жағдайда үйлесімділік шартын тексеру күрделі. Сондықтан шарт нақты жүйелер үшін орнатылады [11, 15 б.];

2. Интегралдану шарты

$$1 - \frac{g^{(1)}}{g^{(0)}} \cdot \frac{q^{(1)}}{q^{(0)}} \neq 0 \tag{0.20}$$

түрінде беріледі;

3. Белгісіз функция $p_{0,0} = Z(x,y)$ екі айнымалыға тәуелді, сондықтан, шешімдерді жалпыланған, қалыпты және қалыпты-регуляр қатарлар түрінде іздеген дұрыс [14, 145 б.];

4. Жүйенің ерекше қисықтары $p_{3,0} = Z_{xxx}$ және $p_{0,3} = Z_{yyy}$ бас туындыларының жанындағы коэффициенттерді нөлге теңестіру арқылы: $(0,0)$, $\left(0, b^{(0)}_{00}/b^{(0)}_{01}\right)$, $\left(a^{(0)}_{00}/a^{(0)}_{01}, 0\right)$, $\left(a^{(0)}_{00}/a^{(0)}_{01}, b^{(0)}_{00}/b^{(0)}_{01}\right)$– ақырлы ерекшеліктер; $(0,\infty)$, $(\infty,0)$, $\left(\infty, b^{(0)}_{00}/b^{(0)}_{01}\right)$, $\left(a^{(0)}_{00}/a^{(0)}_{01}, \infty\right)$, (∞,∞)– ақырсыз ерекшеліктер анықталады. Регуляр және иррегуляр ерекшеліктерді классификациялау үшін төменде келтірілген қарапайым ережелер пайдаланылады [14, 42 б.].

0.1-ереже. (0.19) теңдеулер жүйесінде $a^{(0)}_{0,0} \neq 0, b^{(0)}_{0,0} \neq 0$ жағдайында $(0,0)$ ерекше қисығы регуляр ерекше қисық болады да, теңдеулер жүйесінің шешімі

$$Z(x,y)=x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{m,n}x^{m}y^{n} \qquad (0.21)$$

жалпыланған дәрежелік қатар түрінде болады. Ал, $(0,0)$ иррегуляр болса, онда шешім

$$Z(x,y)=\exp Q(x,y)x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{m,n}x^{m}y^{n}, \quad (A_{0,0}\neq 0) \qquad (0.22)$$

$$Q(x,y)=\frac{\alpha_{p,0}x^{p}}{p}+\frac{\alpha_{0,p}y^{p}}{p}+...+\alpha_{1,1}xy+\alpha_{1,0}x+\alpha_{0,1}y$$

түрінде болады, мұндағы $\alpha_{p,0}, \alpha_{0,p}, ..., \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ – белгісіз параметрлер.

0.2-ереже. (0.19) теңдеулер жүйесінде $a_{1,0}^{(0)}\neq 0, b_{0,1}^{(0)}\neq 0$ жағдайында (∞,∞) ерекше қисығы регуляр ерекше қисық болады да, ал теңдеулер жүйесінің шешімі

$$Z(x,y)=x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}B_{m,n}x^{-m}y^{-n}, \quad (B_{0,0}\neq 0) \qquad (0.23)$$

түрінде ізделінеді. Ал, (∞,∞) иррегуляр болса, онда шешім

$$Z(x,y)=\exp Q(x,y)x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}B_{m,n}x^{-m}y^{-n}, \quad (B_{0,0}\neq 0) \qquad (0.24)$$

түрінде ізделеді. $Q(x,y)$ көпмүшелігі (0.22) және (0.24) қатарлары үшін ортақ және оның дәрежесі 1.2.2-ішкі бөлімшесінде енгізілген p ранг түсінігімен анықталады.

2.2.2-ішкі бөлімшесінде зерттеулерді жүргізудің негізгі әдісі болып табылатын Фробениус-Латышева әдісінің негізгі түсініктері енгізілген. Оларға Фробениус характеристикалық функция түсінігі, $(0,0)$ және (∞,∞) ерекше қисықтары бойынша анықталатын айқындауыш теңдеулер жүйесі түсініктері жатады. Айқындауыш теңдеулер

$$f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=0, \quad (j=1,2) \qquad (0.25)$$

және

$$\begin{aligned} f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma)=0, \\ f_{0,1}^{(2)}(\rho,\sigma)=0 \end{aligned} \qquad (0.26)$$

жүйелерінен (0.21)-(0.24) шешімдерінде келтірілген (ρ_t,σ_t) тұрақтыларының қос жұптары анықталады, ал t саны сызықты тәуелсіз шешімнің жалпы санын анықтайды.

0.1-лемма. Берілген (0.19) теңдеулер жүйесінің $(0,0)$ ерекше қисығының маңайында (0.21) түріндегі шешімі бар болуы үшін (0.25) айқындауыш жүйесінің ең болмағанда бір (ρ_t, σ_t) жұп түбірі бар болуы қажетті.

0.2-лемма. Берілген (0.19) теңдеулер жүйесінің (0.23) түріндегі шешімі бар болуы үшін (0.25) айқындауыш жүйесінің ең болмағанда бір (ρ_t, σ_t) жұп түбірі бар болуы қажетті.

(0.25) және (0.26) айқындауыш теңдеулер жүйесінің 9 жұп (ρ_t, σ_t) түбірлері бар болатындығы диссертациялық жұмыста көрсетілген.

0.3-лемма. Егер (0.19) теңдеулер жүйесінде тұрақты коэффициенттер $a_{0,0}^{(0)} \neq 0, b_{0,0}^{(0)} \neq 0$ және үйлесімділік, (0.20) интегралдану шарттары орындалатын болса, онда (0.19) теңдеулер жүйесінің $(0,0)$ ерекше қисығының маңайында (0.21) түріндегі тоғыз сызықты тәуелсіз шешімі бар болады.

0.4-лемма. Егер (0.19) теңдеулер жүйесінде тұрақты коэффициенттер $a_{1,0}^{(0)} \neq 0, b_{0,1}^{(0)} \neq 0$ және үйлесімділік, (0.20) интегралдану шарттары орындалатын болса, онда (0.19) теңдеулер жүйесінің (∞, ∞) ерекше қисығының маңайында (0.23) түріндегі тоғыз сызықты тәуелсіз шешімі бар болады.

Қатарлардың белгісіз $A_{m,n}$ және $B_{m,n}$ коэффициенттері

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{\mu-m,\nu-n}^{(t)} f_{m,n}^{(j)}(\rho+\mu-m, \sigma+\nu-n) = 0 \qquad (0.27)$$

рекуррентті тізбектер жүйесінен анықталады, мұнда $\mu, \nu = 0,1,2,...;\ j = 1,2;\ t = \overline{1,9}.$

2.3-бөлімшесінде дербес туындылы үшінші ретті екі теңдеуден тұратын нақты жүйенің шешімін табу ерекшелігі көрсетілген [47, 101-102 б.].

0.6-теорема. Біртекті үшінші ретті

$$\begin{aligned} &x^2 p_{3,0} + (\delta_1 + \delta_2 + 1)\, x p_{2,0} + (\delta_1 \delta_2 - x)\, p_{1,0} - y\, p_{0,1} - \alpha\, p_{0,0} = 0, \\ &y^2 p_{0,3} + (\delta_1' + \delta_2' + 1)\, y p_{0,2} + (\delta_1 \delta_2 - y)\, p_{0,1} - x\, p_{1,0} - \alpha\, p_{0,0} = 0 \end{aligned} \qquad (0.28)$$

дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің тоғыз сызықтық тәуелсіз $Z_j(x,y), \left(j = \overline{1,9}\right)$ дербес шешімі бар және жалпы шешім

$$Z(x,y) = \sum_{t=1}^{9} C_t Z_t(x,y) \qquad (0.29)$$

қосындысы түрінде табылады, мұндағы $p_{3,0} = Z_{xxx},\ p_{0,3} = Z_{yyy},\ p_{2,0} = Z_{xx},\ p_{0,2} = Z_{yy},\ p_{1,0} = Z_x,\ p_{0,1} = Z_y,\ p_{0,0} = Z(x,y) -$ ортақ белгісіз.

Мұндай нақты жүйелерді Кампе де Ферье әдісімен белгілі дербес шешімі бойынша құруға болады. Мысалы, (0.28) жүйе

$$Z_1(x,y)=\Phi(\alpha,\delta_1,\delta_1',\delta_2,\delta_2';x,y)$$

түріндегі белгілі дербес шешімі бойынша құрылған. Қалған сегіз шешім де осы функция арқылы өрнектеледі [47, 101-102 б.].

Үшінші бөлімде $\omega=2$ мәнінде алынатын біртекті емес үшінші ретті (0.1) жүйенің жалпы қасиеттері (0.19) біртекті жүйесі үшін дәлелденген.

2.3.1-ішкі бөлімшесінде $h=1$ жағдайы үшін теоремалар келтірілген. $k\geq 2$ жалпы жағдайда да дәлелдеулер осыларға ұқсас жолмен жүргізіледі. Бұл жағдайда дербес шешімдер $Z=Z(x^k,y^k)$, $(k\geq 2)$түрінде өрнектеледі.

2.3.2-ішкі бөлімшесінде $\omega=2$ мәнінде алынатын (0.1) біртекті емес жүйенің оң жағы екі айнымалылы жалпыланған қатар түрінде берілген жағдайда, анықталмаған коэффициенттер әдісін қолдану ерекшеліктері қарастырылған. Дербес шешім $(0{,}0)$ ерекше қисығының маңайында (0.21) жалпыланған қатар түрінде ізделінеді.

2.3.3-ішкі бөлімшесінде Кампе де Ферье әдісімен дербес шешімін пайдалану арқылы құрылған біріккен біртекті, біртекті емес және екі теңдеуді қосу арқылы алынған үшінші ретті біртекті емес дербес туындылы теңдеудің шешімдерін құру ерекшеліктері көрсетілген. Келтірілген теоремаларды дәлелдеуге Фробениус-Латышева және анықталмаған коэффициенттер әдістері қолданылған.

2.4-бөлімшесінде жай Клаузен жүйесі және оның шешімінің қасиеттері қарастырылған. Я. Горн әрқайсысы тек бір айнымалылы гипергеометриялық функциялар болатын екі гипергеометриялық функциялардың көбейтінділері де екінші ретті гипергеометриялық функцияларға жататынын анықтаған. Олар екі Клаузен теңдеуінен тұратын жүйенің де шешімдері болады. Мұндай жүйелер жай Клаузен текті жүйелер деп аталды.

Біртекті және біртекті емес жай Клаузен жүйесінің қасиеттері туралы бірнеше теоремалар дәлелденді.

0.7-теорема. Жай Клаузен текті

$$\begin{aligned}
&x^2(1-x)p_{3,0}+[1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x]xp_{2,0}+\\
&+[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x]p_{1,0}-\alpha_1\alpha_2\alpha_3p_{0,0}=0,\\
&y^2(1-y)p_{0,3}+[1+\beta_1'+\beta_2'-(3+\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3')y]yp_{0,2}+\\
&+[\beta_1'\beta_2'-(1+\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_1'\alpha_2'+\alpha_1'\alpha_3'+\alpha_2'\alpha_3')y]p_{0,1}-\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'p_{0,0}=0
\end{aligned} \tag{0.30}$$

жүйенің бір айнымалылы Клаузен функцияларының көбейтінділері түріндегі тоғыз сызықты тәуелсіз дербес шешімі бар және бір шешімі

$$Z_1(x,y)={}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1\alpha_1', & \alpha_2\alpha_2', & \alpha_3\alpha_3'\\ \beta_1\beta_1', & \beta_2\beta_2' & \end{matrix}\middle| x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_1')_n(\alpha_2)_m(\alpha_2')_n(\alpha_3)_m(\alpha_3')_n}{(\beta_1)_m(\beta_1')_n(\beta_2)_m(\beta_2')_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{0.31}$$

түріндегі екі айнымалылы Клаузен текті функция болады.

Дербес шешімдер Фробениус-Латшыева әдісімен табылады және (0.21) жалпыланған дәрежелік қатар түрінде $(0,0)$ ерекше қисығының маңайында ізделеді. Біртекті емес жай Клаузен текті жүйе жағдайы үшін теорема келтіріліп,

$$
\begin{aligned}
&x^2(1-x)Z_{xxx} + \left[1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x\right]xZ_{xx} + \\
&+\left[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)x\right]Z_x-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 Z = f_1(x,y), \\
&y^2(1-y)Z_{yyy} + \left[1+\beta'_1+\beta'_2-(3+\alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3)x\right]xZ_{yy} + \\
&+\left[\beta'_1\beta'_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)x\right]Z_y-\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3 Z = f_2(x,y)
\end{aligned}
$$

жай Клаузен текті жүйенің оң жағын таңдап алу арқылы оның

$$
K_{\rho,\sigma}(x,y)=x^\rho y^\sigma \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\rho-\alpha_1)_m(\rho-\alpha_2)_m(\rho-\alpha_3)_m(\sigma-\alpha'_1)_n(\sigma-\alpha'_2)_n(\sigma-\alpha'_3)_n x^m y^n}{(\rho)_m(\rho-1+\beta_1)_m(\rho-1+\beta_2)_m(\sigma)_n(\sigma-1+\beta'_1)_n(\sigma-1+\beta'_2)_n}
$$

түріндегі дербес шешімін анықтау ерекшеліктері дәлелденген.

(0.21) түріндегі дербес шешімнің белгісіз $A_{m,n},\ (m,n=0,1,2,...)$ коэффициенттері

$$
\begin{aligned}
&A_{0,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{0,0}^{(j)}, \quad (j=1,2) \\
&A_{1,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+A_{0,0}f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{1,0}^{(j)}, \\
&A_{0,1}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+A_{0,0}f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{0,1}^{(j)}, \\
&A_{2,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho+2,\sigma)+A_{1,0}f_{1,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+A_{0,0}f_{2,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{2,0}^{(j)}, \\
&A_{1,1}f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma+1)+A_{1,0}f_{0,1}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+A_{0,1}f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+A_{0,0}f_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{1,1}^{(j)}, \\
&A_{0,2}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+2)+A_{0,1}f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+A_{0,0}f_{0,2}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{0,2}^{(j)}, \\
&---
\end{aligned}
$$

рекурентті теңдеулер жүйелерінен анықталады, мұндағы $\alpha_{0,0}^{(j)},\ (j=1,2)$ коэффициенттерін таңдап алу біртекті емес жүйенің үйлесімділігін қамтамасыз етеді.

2.5-бөлімшесінде Клаузеннің негізгі жүйесінің шешімдерін құру ерекшеліктері мен олардың қасиеттері зерттелген. Кампе де Ферье әдісін пайдаланып құрылған [1, 115 б.], үшінші ретті дербес туындылы екі дифференциалдық теңдеуден тұратын

$$
\begin{aligned}
&x^2(1-x)p_{3,0}+xyp_{2,1}+[\gamma+\delta+1-(3+\beta_1+\beta_2+\beta_3)x]xp_{2,0}+\delta\, y\, p_{1,1}+ \\
&+[\gamma\delta-(1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)x]p_{1,0}-\beta_1\beta_2\beta_3 p_{0,0}=0, \\
&y^2(1-y)p_{0,3}+xyp_{1,2}+[\gamma+\delta'+1-(3+\beta'_1+\beta'_2+\beta'_3)y]yp_{0,2}+\delta' x\, p_{1,1}+ \\
&+[\gamma\delta'-(1+\beta'_1+\beta'_2+\beta'_3+\beta'_1\beta'_2+\beta'_2\beta'_3+\beta'_1\beta'_3)y]p_{0,1}-\beta'_1\beta'_2\beta'_3 p_{0,0}=0
\end{aligned}
\tag{0.32}
$$

түріндегі жалпыланған негізгі Клаузен жүйесі берілсін. Жүйенің шешімі $(0,0)$ ерекше қисығының маңайында қарастырылады. $(0,0)$ ерекше қисығы регуляр, өйткені, жоғары ретті туындылар жанындағы тұрақтылар $r_{3,0} \neq 0$ және $r_{0,3} \neq 0$. Сондықтан (0.21) түріндегі регуляр шешім бар болады.

Үйлесімділік шарты

$$F_1\left(\begin{matrix} \beta_1, & \beta_1^{'}, & \beta_2, & \beta_2^{'}, & \beta_3, & \beta_3^{'} \\ & \gamma, & & \delta, & & \delta^{'} \end{matrix}\middle| x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\beta_1, m)(\beta_1^{'}, n)(\beta_2, m)(\beta_2^{'}, n)(\beta_3, m)(\beta_3^{'}, n)}{(\gamma, m+n)(\delta, m)(\delta^{'}, n)(1, n)(1, m)} x^m y^n \quad (0.33)$$

Клаузен функциясын пайдаланып, екі теңдеуді қанағаттандыратын (0.32) жүйесі арқылы Кампе де Ферье әдісімен дәлелденеді. Ал, интегралдану шарты

$$\Delta_1 = 1 - a_{1,2} b_{2,1} = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_1^2 - (a_{2,1} + a_{1,2} b_{1,2})(b_{1,2} + b_{2,1} a_{2,1}) = 1^2 - \left[\frac{y}{x(1-x)} \frac{x}{y(1-y)}\right] = 1 - \frac{1}{(1-x)(1-y)} \neq 0$$

түріндегі шарттардың орындалуымен тексеріледі.

Бұл $(0,0)$ регуляр ерекше қисығының маңайында тоғыз сызықты тәуелсіз регуляр шешімі бар болатындығын көрсетеді.

0.8-теорема. Гипергеометриялық текті (0.32) негізгі Клаузен жүйесінің $(0,0)$ регуляр ерекше қисығының маңайында, үйлесімділік және интегралдану шарттары орындалған кезде тоғыз сызықты тәуелсіз дербес шешімі бар болады. Дербес шешімінің біреуі, (0.33) екі айнымалылы гипергеометриялық Клаузен функциясы түрінде анықталады.

Теореманы дәлелдеу Фробениус-Латышева әдісімен жүргізіледі. Негізгі шарттар тексерілгеннен кейін Фробениус характеристикалық функциясы құрылып, $(0,0)$ ерекше қисығы бойынша айқындауыш теңдеулер жүйесінің

$$f_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) = 0, \quad (j = 1,2)$$

тоғыз түбірі анықталады.

Олар (0.21) дербес шешімінің көрсеткіштерін анықтайды. Олардың $A_{m,n}, (m, n = 0,1,2,...)$ коэффициенттері (0.27) жүйесінен анықталады.

2.5.3-ішкі бөлімшесінде біртекті емес Клаузен жүйесінің шешімдерін құру анықталмаған коэффициенттер әдісімен жүргізіледі. Жүйенің оң жағы екі айнымалылы көпмүшелік түрінде таңдап алынған жағдай үшін дербес шешімін, жалпы шешімін және жүйенің екі теңдеулерін қосудан алынған үшінші ретті дербес туындылы теңдеудің шешімдерін құру туралы теоремалар дәлелденген. Жүйенің оң жағын қатар түрінде алмай, көпмүшелік түрінде алу шешімдердің бар болуына көз жеткізу үшін қолайлы. Ал, дербес шешімнің қатар түрінде құрылуының мысалы келесі теорема түрінде келтірілді. Яғни,

$$
\begin{aligned}
&x^2(1-x)p_{3,0}+xyp_{2,1}+[\gamma+\delta+1-(3+\beta_1+\beta_2+\beta_3)x]xp_{2,0}+\delta yp_{1,1}+\\
&+[\gamma\delta-(1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)x]p_{1,0}-\beta_1\beta_2\beta_3p_{0,0}=f_1(x,y),\\
&y^2(1-y)p_{0,3}+xyp_{1,2}+\left[\gamma+\delta^{'}+1-\left(3+\beta^{'}_1+\beta^{'}_2+\beta^{'}_3\right)y\right]yp_{0,2}+\delta^{'}xp_{1,1}+\\
&+\left[\gamma\delta-\left(1+\beta^{'}_1+\beta^{'}_2+\beta^{'}_3+\beta^{'}_1\beta^{'}_2+\beta^{'}_2\beta^{'}_3+\beta^{'}_1\beta^{'}_3\right)y\right]p_{0,1}-\beta^{'}_1\beta^{'}_2\beta^{'}_3p_{0,0}=f_2(x,y)
\end{aligned}
$$

біртекті емес Клаузен жүйесінің оң жағын таңдап алу арқылы

$$
\begin{aligned}
&K_{\rho,\sigma}(x,y)=x^{\rho}y^{\sigma}\times\\
&\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\rho-\beta_1)_m(\rho-\beta_2)_m(\rho-\beta_3)_m\left(\sigma-\beta^{'}_1\right)_n\left(\sigma-\beta^{'}_2\right)_n\left(\sigma-\beta^{'}_3\right)_n}{(\rho)_m(\rho-1+\delta)_m(\rho-1+\gamma)_m(\rho-\delta+\gamma)_m(\sigma)_n\left(\sigma-1+\beta^{'}_1\right)_n\left(\sigma-1+\beta^{'}_2\right)_n(\sigma-\delta+\gamma)_n}x^my^n
\end{aligned}
$$

түріндегі дербес шешімі жалпыланған гипергеометриялық қатар түрінде анықталатыны дәлелденген.

Одан әрі, Клаузен функциясының дифференциалдану қасиеттері қарастырылған.

Екі айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық (0.31) Клаузен функциясының туындылары мына түрде анықталады:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\beta_1(\beta_1+1)...(\beta_1+m-1)...\beta^{'}_3\left(\beta^{'}_3+1\right)...\left(\beta^{'}_3+n-1\right)}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+m+n-1)\delta(\delta+1)...(\delta+m-1)\delta^{'}...\left(\delta^{'}+n-1\right)}\times\\
&\times F\left(\left.\begin{matrix}\beta_1+m,\beta_2+m,\beta_3+m; & \beta^{'}_1+n, & \beta^{'}_2+n, & \beta^{'}_3+n\\ \delta+m, & \delta^{'}+n, & \gamma+m+n & \end{matrix}\right|x,y\right).
\end{aligned}
$$

2.5.4-ішкі бөлімшесінде біртекті емес Клаузен текті туындалған жүйенің шешімдерін құру, біртекті және біртекті емес туындалған гипергеометриялық Клаузен текті жүйенің дербес және жалпы шешімдерін құру ерекшеліктері зерттелген. Зерттеу Фробениус-Латышева әдісімен жүргізіледі. Сондай-ақ, үшінші ретті жалпыланған гипергеометриялық біртекті туындалған жүйе және оның шешімі туралы қысқаша мағлұматтар келтірілген.

0.9-теорема. (0.30) жүйеден шекке көшу арқылы алынған

$$
\begin{aligned}
&x^2p_{3,0}+xyp_{2,1}+(\gamma+\delta+1)xp_{2,0}+\delta yp_{1,1}+\gamma\delta p_{1,0}-p_{0,0}=0,\\
&y^2p_{0,3}+xyp_{1,2}+\left(\gamma+\delta^{'}+1\right)yp_{0,2}+\delta^{'}xp_{1,1}+\gamma\delta^{'}p_{0,1}-p_{0,0}=0
\end{aligned}
\tag{0.34}
$$

туындалған Клаузен жүйесінің дербес шешімі

$$
Z(x,y)=F\left(\left.\begin{matrix}-, & -\\ \delta,\delta^{'}, & \gamma\end{matrix}\right|x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\delta)_m(\delta^{'})_n(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{x^n}{n!}
$$

түріндегі жалпыланған гипергеометриялық функция болады.

Негізгі Клаузен жүйесінен айырмашылығы бұл жағдайда жүйенің интегралдану шарты орындалмайды. Сондықтан (0.34) біртекті жүйенің сызықты тәуелсіз шешімінің саны тоғызға тең болмайды.

Біртекті емес Клаузен жүйесінің оң жағын таңдап алу арқылы оның дербес шешімі

$$K_{\rho,\sigma}\left(\begin{matrix} -, & - \\ \delta,\delta', & \gamma \end{matrix}\middle| x,y\right) = x^{\rho+1}y^{\sigma+1}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{x^m y^n}{(\rho+1)_m(\rho+\delta)_m(\rho+\gamma)_m(\rho-\delta'+\gamma+1)_m}\times$$

$$\times\frac{1}{(\sigma+1)_n(\sigma+\delta')_n(\sigma+\gamma)_n(\sigma-\delta+\gamma+1)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

түрінде анықталатыны келтірілген.

Диссертацияның үшінші бөлімі толығымен екінші ретті дербес туындылы біртекті емес туындалған дифференциалдық теңдеулер жүйесінің қалыпты-регуляр шешімінің бар болуын зерттеуге арналған. Мұндай қалыпты-регуляр шешімдер Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы алынған біртекті туындалған жүйенің шешімдері болып табылады. Бұл жүйенің шешімдерін жаңа функциялар түрінде В.И. Художников анықтаған.

Диссертациялық жұмыста зерттелетін туындалған жүйенің В.И. Художников функциясы түріндегі шешімдерімен қатар қалыпты-регуляр шешімдері де бар болатындығы көрсетілген. Ол функциялар арасында байланыстар орнатылып, екі және үш теңдеуден тұратын теңдеулер жүйесі нақты мысал ретінде қарастырылған. Алынған нәтижелер n теңдеуден тұратын жүйелер үшін жалпыланған.

Бізді негізінен

$$F_B\left(\begin{matrix} (\alpha_n), & (\beta_n) \\ \gamma & \end{matrix}\middle| (z_n)\right) = \sum_{m_1,\dots m_n}\frac{(\alpha_1)_{m_1}\dots(\alpha_n)_{m_n}(\beta_1)_{m_1}\dots(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{z_n^{m_n}}{m_n!}$$

түріндегі Лауричелла функциясымен байланыстағы көп айнымалылы туындалған фукциялар қызықтырады, мұндағы $|z_k|<1, k=\overline{1,n}$. F_B функциясы

$$z_i(1-z_i)\frac{\partial^2 W}{\partial z_i^2}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n} z_j\frac{\partial^2 W}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-(\alpha_i+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial W}{\partial z_i}-\alpha_i\beta_i W=0, \qquad \left(i=\overline{1,n}\right) \qquad (0.35)$$

(F_B) Лауричелла жүйесінің дербес шешімі.

F_B Лауричелла функциясынан бірнеше рет шекке көшу арқылы В.И. Художников [58]

$$\Phi_{B,n}^{k,l}\left(\begin{matrix} (\alpha_k), & (\alpha_l'), & (\beta_k) \\ & \gamma & \end{matrix}\middle| (z_n)\right) = \sum_{i_1,\dots i_n}\frac{\Pi(\alpha_k)_{i_k}(\beta_k)_{i_k}}{(\gamma)_{\sum i_n}}\Pi(\alpha_1')_{i_{l+k}}\Pi\frac{(z_n)^{i_n}}{i_n!} \qquad (0.36)$$

түріндегі жаңа функцияны енгізген, мұнда

$$(a_n)=(a_1,...,a_n),(z_n)=(z_1,...,z_n),\ \Pi(\alpha_n)_{i_n}=\prod_{k=1}^{n}(a_k)_{i_k},\ \sum i_n=\sum_{k=1}^{n} i^k,\ \sum i_1,...,i_n=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}...\sum_{i_n=0}^{\infty}(...)$$

қысқаша белгілеулері пайдаланылған [59].

В.И. Художников енгізген (0.36) туындалған функциямен қатар, шекке көшу арқылы алынған

$$W(z_1,z_{2,...,}z_n)=\exp(\alpha_{1,0,...,0}z_1+\alpha_{0,1,...,0}z_2+...+\alpha_{0,...,1}z_n)\times$$
$$\times z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}...z_n^{\rho_n}\sum_{m_1,...m_n=0}^{\infty}A_{m_1,m_{2,...},...m_n}z_1^{m_1}z_2^{m_2}...z_n^{m_n},\quad (A_{0,...,0}\neq 0)$$

түріндегі қалыпты-регуляр шешімі енгізілген, мұндағы $\rho_t,(t=\overline{1,n})$, $A_{m_1,m_2,...m_n},(m_1,...,m_n=0,1,2,...),\quad \alpha_{1,0,...,0},\alpha_{0,1,0,...,0},...,\alpha_{0,...,0,1}-$ белгісіз тұрақтылар.

3.1.1-ішкі бөлімшесінде (F_B) Лауричелла жүйесінен бірнеше рет шекке көшу арқылы алынған

$$\begin{aligned}
&z_i(1-z_i)\frac{\partial^2W}{\partial z_i^2}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}z_j\frac{\partial^2W}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-(\alpha_i+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial W}{\partial z_i}-\alpha_i\beta_iW=0,\quad (i=\overline{1,k})\\
&\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2W}{\partial z_j\partial z_i}+(\gamma-z_i)\frac{\partial W}{\partial z_i}-\alpha'_{i-k}W=0,\quad (i=\overline{k+1,k+l})\\
&\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2W}{\partial z_j\partial z_i}+\gamma\frac{\partial W}{\partial z_i}-W=0,\quad (i=\overline{k+l+1,n})
\end{aligned}\tag{0.37}$$

түрлеріндегі туындалған гипергеометриялық жүйе келтірілген, мұнда $(a_n)=(a_1,a_2,\dots,a_n),\quad (z_n)=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ белгілеулері пайдаланылған.

(0.37) жүйенің 2-теңдеуі 1-теңдеуінен β параметрі бойынша $(n-k)$ рет, ал 3-теңдеуі 2-теңдеуінен $(n-k-1)$ рет шекке көшу арқылы алынады. Сонда (0.37) біріккен жүйесінің бастапқы k теңдеуі (0.35) жүйесінің бастапқы k теңдеулерімен бірдей болады. Келесі l теңдеулер (0.37) жүйенің 2-ші теңдеулерін құрайды, ал қалған $(n-k-l)$ теңдеулер 3-теңдеулер жүйелері түрінде алынады. Мұнда біріккен жүйенің әр теңдеуі өз кезегінде жүйе болатынын ескеру керек.

Келтірілген (0.37) біріккен жүйенің дербес жағдайларының қалыпты регуляр шешімінің бар болуы және олардың Художников функцияларымен байланысы екі теңдеуден тұратын $n=2$ жағдайы үшін 3.1.2-ішкі бөлімшесінен бастап зерттелген. Мұндағы негізгі теорема (Φ_2) Горн жүйесін қарастырумен байланысты.

0.10-теорема. (0.35) жүйесінен шекке көшу арқылы алынған

$$
\begin{aligned}
&z_1 W_{z_1 z_1} + z_2 W_{z_1 z_2} + (\gamma - z_1) W_{z_1} - \alpha_1 W = 0, \\
&z_2 W_{z_2 z_2} + z_1 W_{z_1 z_2} + (\gamma - z_2) W_{z_2} - \alpha_2 W = 0
\end{aligned} \tag{0.38}
$$

туындалған (Φ_2) Горн жүйесінің үш сызықты тәуелсіз шешімдері бар және шешімінің біреуі

$$
\Phi_{B,2}^{0,2}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2^{'}) \\ \gamma & \end{matrix}\middle| (z_2)\right) = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m_1} (\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\gamma)_{m_1 + m_2}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{z_2^{m_2}}{m_2!},
$$

Гумберт-Художников функциясы түрінде анықталады.

Қалыпты-регуляр шешім

$$
W(z_1, z_2) = \exp(\alpha_{1,0} z_1 + \alpha_{0,1} z_2) \cdot z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2} \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} A_{m_1, m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \quad (A_{0,0} \neq 0) \tag{0.39}
$$

түрінде ізделеді, мұндағы $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}; \rho_1, \rho_2, A_{m,n}, (m_1, m_2 = 0,1,2,...)$ – белгісіз тұрақтылар.

0.11-теорема. Егер туындалған (0.38) жүйесінен

$$
W(z_1, z_2) = \exp(\alpha_{1,0} z_1 + \alpha_{0,1} z_2) \cdot U(z_1, z_2), \tag{0.40}
$$

ауыстыруының көмегі арқылы алынған

$$
\begin{aligned}
&z_1 U_{z_1 z_1} + z_2 U_{z_2 z_2} + \{2\alpha_{1,0} z_1 + \alpha_{0,1} z_2 + \gamma - z_1\} U_{z_1} + \alpha_{1,0} z_2 U_{z_2} + \\
&+ \{(\alpha_{1,0}^2 - \alpha_{1,0}) z_1 + \alpha_{1,0} \alpha_{0,1} z_2 + \alpha_{1,0} \gamma - \alpha_1\} U = 0, \\
&z_2 U_{z_2 z_2} + z_1 U_{z_1 z_2} + \alpha_{0,1} z_1 U_{z_1} + \{2\alpha_{0,1} z_2 + \alpha_{1,0} z_1 + \gamma - z_2\} U_{z_2} + \\
&+ \{(\alpha_{0,1}^2 - \alpha_{0,1}) z_2 + \alpha_{1,0} \alpha_{0,1} z_1 + \alpha_{0,1} \gamma - \alpha_2^{'}\} U = 0
\end{aligned} \tag{0.41}
$$

көмекші жүйенің

$$
\alpha_{1,0}^2 - \alpha_{1,0} = 0, \quad \alpha_{0,1}^2 - \alpha_{0,1} = 0 \tag{0.42}
$$

шарттары орындалса, онда екі қалыпты-регуляр шешімдері бар болады:

$$
W_4(z_1, z_2) = e^{z_1} \Phi_2(\gamma - \alpha_1 - \alpha_2^{'}, \alpha_2^{'}; \gamma; -z_1, z_2 - z_1), \tag{0.43}
$$

$$
W_5(z_1, z_2) = e^{z_2} \Phi_2(\alpha_1, \gamma - \alpha_1 - \alpha_2^{'}; \gamma; -z_2, z_1 - z_2). \tag{0.44}
$$

Бұл шешімдерді құру үшін (0.39) қалыпты-регуляр шешімінің оң жақтарын екі көбейткіштердің көбейтіндісі түрінде қарастырылады. (0.42) характеристикалық теңдеулер жүйесінен төрт жұп мәні анықталады. Бұл төрт жұп мән, төрт тіркелген жүйелерді анықтайды. Олардың екеуінен (0.43) және (0.44) қалыпты-регуляр шешімдері табылады. (0.41) көмекші жүйенің ең болмағанда бір (0.39) түріндегі шешімі бар болуы үшін орындалуы қажетті шарттар леммалар түрінде тұжырымдалған. Табылған шешімдер үшін келесі қатынастар орын алады:

$$e^{-z_1}\Phi_2\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2^{'}) \\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)=\Phi_2\left(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'},\alpha_2^{'};\gamma;-z_1,z_2-z_1\right),$$

$$e^{-y}\Phi_2\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2^{'}) \\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)=\Phi_2\left(\alpha_1,\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\gamma;z_1-z_2,-z_2\right),$$

$$\Phi_2\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2^{'}) \\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)=e^{-z_1}\Phi_2(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\alpha_2^{'};\gamma;-z_1,z_2-z_1), \qquad (0.45)$$

$$\Phi_2\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2^{'}) \\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)=e^{-z_2}\Phi_2(\alpha_1,\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\alpha_2^{'};\gamma;z_1-z_2,-z_2). \qquad (0.46)$$

3.2-бөлімшесінде біртекті емес туындалған гипергеометриялық жүйенің қалыпты-регуляр шешімдерін құру мүмкіндіктері қарастырылып, бірнеше теоремалар келтірілген.

0.12-теорема. Оң жағы

$$f_1(z_1,z_2)=\alpha_{0,0}^{(1)}\exp(\alpha_{1,0}z_1+\alpha_{0,1}z_2)z_1^{\rho_1-1}z_2^{\rho_2},$$
$$f_2(z_1,z_2)=\alpha_{0,0}^{(2)}\exp(\alpha_{1,0}z_1+\alpha_{0,1}z_2)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2-1}$$

түрінде берілген (0.38) Горн жүйесінің қалыпты-регуляр шешімдері келесі түрлерде анықталады:

I) егер

$$(\alpha_{1,0}=0,\,\alpha_{0,1}=0)\; W_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\rho_1+\alpha_1)_{m_1}(\rho_2+\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2};$$

II) егер $(\alpha_{1,0}=1,\,\alpha_{0,1}=0)$

$$W_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)=\exp(z_1)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}(\rho_2+\alpha_1)_{m_1}(\rho_1+\rho_2+\gamma-\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2};$$

III) егер $(\alpha_{1,0}=0,\,\alpha_{0,1}=1)$

$$W_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)=\exp(z_2)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}(\rho_1+\alpha_1)_{m_1}(\rho_1+\rho_2+\gamma-\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2}.$$

3.3-бөлімшесінде қарастырылған теоремалар n айнымалылар жағдайына жалпылаған.

0.13-теорема. (F_B) Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы алынған n теңдеуден тұратын

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 W}{\partial z_1 \partial z_2} + (\gamma - z_i)\frac{\partial W}{\partial z_i} - \alpha_i W = 0, \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (0.47)$$

түріндегі жүйенің $(0,0,...,0)$ регуляр ерекше қисығының маңайында 2^n сызықты тәуелсіз шешімдері бар және олардың біреуі

$$\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix} (\alpha_n^{'}) \\ \gamma \end{matrix} \middle| (z_n) \right) = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(\alpha_1^{'})_{m_1} ... (\alpha_n^{'})_{m_n}}{(\gamma)_{m_1 + ... + m_n}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \qquad (0.48)$$

Гумберт-Художниковтың n айнымалылы функциясы.

(0.47) жүйесінің дербес шешімдері

$$W(z_1,..., z_n) = z_1^{\rho_1} ... z_n^{\rho_n} \sum_{m_1,...m_n=0}^{\infty} A_{m_1,...m_n} z_1^{m_1} ... z_n^{m_n}, \quad (A_{0,...0} \neq 0) \qquad (0.49)$$

жалпыланған қатар түрінде ізделінеді. (0.49) қатарындағы белгісіз тұрақты ρ_j, $(j = 1,..., n)$ келесі

$$f_{0,...0}^{(t)}(\rho_1, \rho_n) = \rho_t \left(\rho_t - 1 + \sum_{t=1, i \neq t}^{n} \rho_t + \gamma \right) = 0$$

айқындауыш теңдеулер жүйесінен анықталады. Келтірілген жүйенің 2^n түбірлері 2^n дербес шешімдерді анықтайды.

Бізді (0.48) түріндегі шешімдер мен қалыпты-регуляр шешімдер арасындағы байланыстар қызықтырады.

0.14-теорема. (0.47) жүйесінен

$$W(z_1,..., z_n) = \exp(\alpha_{\underbrace{1,0,...0}_{n}} z_1 + ... + \alpha_{\underbrace{0,...0,1}_{n}} z_n) \cdot U(z_1,..., z_n)$$

ауыстыруы көмегімен алынған көмекші жүйенің

$$\alpha_{1,0,...0}^2 - \alpha_{1,0,...0} = 0,..., \alpha_{0,...0,1}^2 - \alpha_{0,0,...0,1} = 0 \qquad (0.50)$$

қажеттілік шарты орындалған кезде n қалыпты-регуляр шешімдері табылады.

(0.50) қажеттілік шартының да 2^n түбірлері бар болады. Оның бастапқы $n+1$ түбірі ғана біріккен тіркелген жүйелерді анықтайды. Олардың біріккен жүйесінен $(\rho_1, \rho_2,..., \rho_n)$ түбіріне сәйкес

$$W_{n-1}(z_1, z_2,..., z_n) = \Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix} (\alpha_n^{'}) \\ \gamma \end{matrix} \middle| (z_n) \right)$$

Гумберт-Художников функциясы алынады. Одан кейін жалпы саны n қалыпты-регуляр шешімдер

$$\begin{aligned}
&W_{n-1}(z_1, z_2,..., z_n) = e^{z_1}\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\gamma - \alpha_1^{'}, -..., -\alpha_n^{'}, \alpha_2^{'},..., \alpha_n^{'}; \gamma; -z_1, z_2 - z_1,..., z_n - z_1\right),\\
&W_{n-2}(z_1, z_2,..., z_n) = e^{z_2}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'}, \gamma - \alpha_2^{'} - \alpha_1^{'} -, ..., -\alpha_n^{'}, \alpha_0^{'},..., \alpha_n^{'}; \gamma; z_1 - z_2, -z_2, z_3 - z_2,..., z_n - z_2),\\
&--,\\
&W_{n,n+1}(z_1, z_2,..., z_n) = e^{z_n}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'},..., \alpha_{n-1}^{'}, \gamma - \alpha_n^{'} - \alpha_1^{'}, -..., -\alpha_{n-1}^{'}; \gamma; z_1 - z_n,..., z_{n-1} - z_n, z_n)
\end{aligned}$$

түрінде табылады.

0.15-теорема. Келесі қатынастар орын алады:

$$\begin{aligned}
&e^{z_1}\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}(\alpha_n^{'})\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right) = \Phi_{B,n}^{0,n}\left(\gamma - \alpha_1^{'}, -..., -\alpha_n^{'}, \alpha_2^{'},..., \alpha_n^{'}; \gamma; -z_1, z_2 - z_1,..., z_n - z_1\right),\\
&e^{z_2}\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}(\alpha_n^{'})\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right) = \Phi_{B,n}^{0,n}\left(\alpha_1^{'}, \gamma - \alpha_2^{'} - \alpha_1^{'} -, ..., -\alpha_n^{'}, \alpha_3^{'},..., \alpha_n^{'}; \gamma; z_1 - z_2, -z_2, z_3,..., z_n - z_2\right),\\
&--,\\
&e^{z_n}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'},..., \alpha_{n-1}^{'}, \gamma - \alpha_n^{'} - \alpha_1^{'}, -..., -\alpha_{n-1}^{'}; \gamma; z_1 - z_n,..., z_{n-1} - z_n, z_n).
\end{aligned}$$

(0.45) және (0.46) қатынастырының n айнымалылар жағдайына жалпылануы

$$\begin{aligned}
&\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}(\alpha_n^{'})\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right) = e^{z_1}\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\gamma - \alpha_1^{'}, -..., -\alpha_n^{'}, \alpha_2^{'},..., \alpha_n^{'}; \gamma; -z_1, z_2 - z_1,..., z_n - z_1\right),\\
&\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}(\alpha_n^{'})\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right) = e^{z_2}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'}, \gamma - \alpha_2^{'} - \alpha_1^{'} -, ..., -\alpha_n^{'}, \alpha_3^{'},..., \alpha_n^{'}; \gamma; z_1 - z_2, -z_2, z_3,..., z_n - z_2),\\
&--,\\
&\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}(\alpha_n^{'})\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right) = e^{z_n}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'},..., \alpha_{n-1}^{'}, \gamma - \alpha_n^{'} - \alpha_1^{'}, -..., -\alpha_{n-1}^{'}; \gamma; z_1 - z_n,..., z_{n-1} - z_n, -z_n)
\end{aligned}$$

түрінде болады.

Художников функциясы мен қалыпты-регуляр шешімдер арасындағы байланыстар зерттелген. Мұндағы маңызды жағдай

$$\begin{aligned}
&z_1(1 - z_1)W_{z_1z_1} + z_2W_{z_1z_2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)_1]W_{z_1} - \alpha_1\beta_1W = 0,\\
&z_2W_{z_2z_2} + z_1W_{z_1z_2} + (\gamma - z_2)W_{z_2} - \alpha_2^{'}W = 0
\end{aligned} \tag{0.51}$$

Горн жүйесінің дербес шешімі

$$\Xi_1\left(\alpha_1, \alpha_2^{'}, \beta_1; \gamma; z_1, z_2\right) = \Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2^{'}), & (\beta_1)\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)$$

Гумберт функциясы екендігінде.

0.16-теорема. (0.47) туындалған жүйесінен (0.40) ауыстыруы көмегімен алынған

$$\begin{aligned}
&z_1(1-z_1)U_{z_1z_1}+z_2U_{z_1z_2}+\{(z_1-z_1^2)2\alpha_{1,0}+\alpha_{0,1}z_2+[\gamma-(\alpha_1+\beta_1+1)z_1]U_{Z_1}+\alpha_{1,0}z_2U_{z_2}+\\
&+\{\alpha_{1,0}^2z_1^2+\alpha_{1,0}^2z_1+\alpha_{1,0}\alpha_{0,1}z_2+[\gamma-(\alpha_1+\beta_1+1)z_1]\alpha_{1,0}-\alpha_1\beta_1\}U=0,\\
&z_2U_{z_2z_2}+z_1U_{z_1z_2}+\{2\alpha_{0,1}z_2+(\gamma-z_2)+z_1\alpha_{1,0}\}U_{z_2}+z_1\alpha_{0,1}U_{z_1}+\\
&+\{(\alpha_{1,0}^2-\alpha_{0,1})z_2+\alpha_{1,0}\alpha_{0,1}z_1+(\alpha_{0,1}\gamma-\alpha_2^{'})\}U=0
\end{aligned}$$

жүйенің

$$\alpha_{1,0}^2=0\,,\quad \alpha_{0,1}^2-\alpha_{0,1}=0,$$

$$f_{0,0}^{(t)}(\rho_1,\rho_2)\equiv\rho_1^{(t)}\left(\rho_1^{(t)}-1+\rho_2^{(t)}+\gamma\right)=0,\quad (t=1,2)$$

қажеттілік шарттары орындалған кезде

$$\begin{aligned}
W(z_1,z_2)=e^{z_2}(1&+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1-\frac{\gamma-\alpha_2^{'}}{\gamma}z_2+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}\frac{\left(\gamma+1-\alpha_2^{'}\right)}{\gamma+1}z_1z_2+\\
&+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{(\gamma-\alpha_2^{'})(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+...)
\end{aligned}$$

түріндегі бір ғана қалыпты-регуляр шешімі табылады.

Теореманың дәлелдеуі Фробениус-Латышева әдісімен 3.2-бөлімшесіндегі дәлелденген теоремалар сияқты жүргізіледі.

Анықталған қалыпты-регуляр шешім және Художников функциясының кейбір қасиеттері көрсетілген.

0.17-теорема. Қалыпты-регуляр шешім мен Художников функциясының кейбір қасиеттері үшін келесі

$$\begin{aligned}
&e^{z_2}\left(1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1-\frac{\gamma-\alpha_2^{'}}{\gamma}z_2-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+...\right)=\\
&=\Xi_1\left(\alpha_1,\alpha_2^{'},\beta_1;\gamma;z_1,z_2\right)=\Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2^{'}), & (\beta_1)\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right), \qquad (0.52)\\
&e^{-z_2}\Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2^{'}), & (\beta_1)\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)=\left\{1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1-\frac{\gamma-\alpha_2^{'}}{\gamma}z_2-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+...\right\}
\end{aligned}$$

қатынастар орын алады.

(0.52) теңдіктің сол жағын ашып жазып, түрлендіру арқылы оның оң жағын шығарып алуға болады.

Қарастырылған $n=2,\ k=1,\ l=1$ болғанда қалыпты-регуляр шешімнің бар болуы анық екендігін көруге болады.

Енді $n=3,\ k=1,\ l=2$ деп ұйғарайық. Жоғарыдағыдай пайымдаулар нәтижесінде үш теңдеуден тұратын жүйенің

$$
\begin{aligned}
W_{3,2}(z_1,z_2,z_3) &= e^{z_2}\Big(1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1-\frac{\gamma-\alpha_1'}{\gamma}z_2+\frac{\alpha_2'}{\gamma}z_3-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_1')}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\\
&+\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_2'}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_3-\frac{\alpha_2'(\gamma+1-\alpha_1')}{\gamma(\gamma+1)}z_2z_3-\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_2'(\gamma+2-\alpha_1')}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z_1z_2z_3+\\
&+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{(\gamma+1-\alpha_1')(\gamma-\alpha_1')}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+\ldots\Big),\\
W_{3,3}(z_1,z_2,z_3) &= e^{z_3}\Big(1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1+\frac{\alpha_1'}{\gamma}z_2-\frac{\gamma-\alpha_2'}{\gamma}z_1+\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_1'}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2-\\
&-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_2')}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_3-\frac{\alpha_1'(\gamma+1-\alpha_2')}{\gamma(\gamma+1)}z_2z_3-\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_1'(\gamma+1-\alpha_2')}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z_1z_2z_3+\\
&+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\ldots\Big)
\end{aligned}
$$

екі қалыпты-регуляр шешімдері табылады.

Жазуды қысқарту үшін жақша ішіндегі қатарларды $\Phi_n^{(j)},\ (j=2{,}3)$ арқылы белгілеп, шешім

$$W_{3,2}^{(j)}(z_1,z_2,z_3)=e^{z_j}\Phi_{B,3}^{(j)},\quad (j=2{,}3) \tag{0.53}$$

түрінде жазылады. (0.53) теңдігін пайдаланып, белгілеу арқылы енгізілген жаңа функция және қалыпты-регуляр функциялар арасындағы қатынастардың

$$
\begin{gathered}
\Phi_{B,3}^{1,2}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2'), & (\beta_1)\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_3)\right)=e^{z_j}\Phi_{B,3}^{(j)},\quad (j=2{,}3)\\
e^{-z_j}\Phi_{B,3}^{1,2}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha_2'), & (\beta_1)\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_3)\right)=\Phi_{B,3}^{(j)},\quad (j=2{,}3)
\end{gathered}
$$

түрінде орындалатындығына көз жеткізілді.

0.18-теорема. Жалпы саны n теңдеуден тұратын

$$
\begin{aligned}
&z_1(1-z_1)\frac{\partial^2 W}{\partial z_1^2}+\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2 W}{\partial z_j\partial z_1}+[\gamma-(\alpha_1+\beta_1+1)z_1]\frac{\partial W}{\partial z_1}-\alpha_1\beta_1 W=0,\quad (i=1)\\
&\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 W}{\partial z_j\partial z_1}+[\gamma-z_1]\frac{\partial W}{\partial z_1}-\alpha_{1-n}'W=0,\quad (i=2,k+n-1)
\end{aligned}
\tag{0.54}
$$

туындалған жүйеден (0.40) ауыстыруының көмегімен алынған көмекші жүйенің

$$\alpha_{1,0,\dots,0}=0,\alpha^2_{0,1,0,\dots,0}-\alpha_{0,1,0,\dots,0}=0,\dots,\alpha^2_{0,\dots,0,1}-\alpha_{0,\dots,0,1}=0$$

және

$$f^{(t)}_{0,\dots,0}(\rho_1,\dots,\rho_n)=\rho_t(\rho_t-1+\sum_{t=1,i\neq t}\rho_t+\gamma)=0,\quad (t=\overline{1,n})$$

түрлеріндегі қажеттіліктің қос шарты орындалған кезде $n-1$ қалыпты-регуляр шешімдері бар болады:

$$W_{n,j}(z_1,\dots,z_n)=e^{z_j}\Phi^{(j)}_{B,n},\quad (j=2,3,\dots,n). \tag{0.55}$$

(0.54) жүйесінің $(\alpha_{1,0,\dots,0}=0,\dots,\alpha_{0,0,\dots,1}=0)$ мәндерінде n регуляр шешімдері

$$W_{n,1}(z_1,\dots,z_n)=\Phi^{(1,j)}_{B,n}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha'_1), & (\beta_1)\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right),\quad (j=2,3,\dots,n) \tag{0.56}$$

түріндегі және $n-1$ қалыпты-регуляр шешімдері (0.55) түрінде табылады. Жоғарыда келтірілген пайымдауларды пайдаланып, аталған (0.55) және (0.56) шешімдердің бар болатындығына және олардың арасындағы

$$\begin{aligned}&\Phi^{1,j}_{B,3}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha'_j), & (\beta_1)\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_j}\Phi^{(j)}_{B,3},\quad (j=2,\dots,n)\\ &e^{-z_j}\Phi^{1,j}_{B,3}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha'_j), & (\beta_1)\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\Phi^{(j)}_{B,3},\quad (j=2,\dots,n)\end{aligned} \tag{0.57}$$

қатынастардың орын алатындығына көз жеткізілді.

Жоғарыда келтірілген мысалдарда Гумберттің екі және үш айнымалылы функциялары келтірілді. Соңғы теоремада Гумберттің n айнымалылы функциялары алынды. Олардың бәрі де Художников функциясының дербес жағдайлары болып табылады және

$$\begin{aligned}&\Phi^{1,n-1}_{B,n}\left(\begin{matrix}(\alpha_1), & (\alpha'_j), & (\beta_1)\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m_1}(\alpha'_1)_{m_2}\dots(\alpha'_{n-1})_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{z_n^{m_n}}{m_n!}=\\ &=\Xi^{1,n-1}_1(\alpha_1,\alpha'_1,\dots,\alpha'_{n-1};\gamma;z_1,\dots,z_n),\quad (j=2,3,\dots n)\end{aligned}$$

теңдігі тура болып табылады. Ал, олардың қалыпты-регуляр шешімдерімен байланысы (0.57) қатынастарымен беріліп тұр. Бұдан n теңдеуден тұратын туындалған жүйенің шешімдері үшін де Кумер формулаларының орынды екені көрінді.

1 ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕКТІ БІРТЕКТІ ЕМЕС ЖАЛПЫЛАНҒАН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІМДЕРІН ҚҰРУ

1.1 Жалпыланған гипергеометриялық Клаузен теңдеуі және оның шешімінің қасиеттері

Біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін құру мәселелері оң жағы арнайы функциялар болып келетін теңдеулерді зерттеген, әртүрлі авторлардың еңбектерінде қарастырылған. Әдетте, мәселенің негізгі зерттеу пәні шешімдері бір айнымалылы арнайы функциялар болатын екінші ретті жай дифференциалдық теңдеулер болып табылады.

Қолданыстарда теңдеулердің оң жағының түріне, яғни индекс пен дәреже көрсеткіштері арасындағы қатынастарға байланысты, Ломмель, Струве, Ангер және Вебер функциялары қарастырылады. Олар біртекті емес Бессель теңдеуінің дербес шешімдері [2, 77 б.].

Біртекті емес Бессель теңдеуінің дербес шешімі Ломмель функциясы түрінде берілген. Ал, Струве, Ангер және Вебер функциялары Ломмель функциясының дербес жағдайлары болып табылады. Олардың арасындағы байланыс және қасиеттері Ватсонның монографиясында зерттелген [7, 120 б.]. Айта кету керек, егер теңдеудің оң жағы белгілі болса, онда мәселе біртекті емес Бессель теңдеулерін интегралдауға саяды.

Осы және басқа гипергеометриялық текті біртекті емес теңдеулер А.В. Бэбистрдің монографиясында зерттелген [7, 414 б.]. Бұл монография осы сипаттағы зерттеулерге арналған жалғыз негізгі жұмыс болып табылады. Ю. И. Сикорский оң жағы қалыпты қатар түріндегі біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулерді анықталмаған коэффициенттер әдісімен көбірек зерттеді [60-62]. Соңғы кездері көпөлшемді туындалған теңдеулерді зерттеуге байланысты үшінші және одан жоғары ретті жалпыланған гипергеометриялық функциялардың қасиеттері жиі қолданыла бастады [5, 33-36 б.; 6, 1103-1114 б.]

Жалпыланған гипергеометриялық функцияның алғашқы мысалы – бес параметрлі Клаузен функциясы [1, 170 б.]. Бірақ Клаузен функциясын зерттеу бір айнымалылы Бессель функциясын зерттеу сияқты деңгейге жеткен жоқ. Әсіресе ғылым мен техниканың әртүрлі есептеріне қолдануға байланысты, біртекті емес Клаузен дифференциалдық теңдеуінің шешімдерін құру ерекшеліктерін зерттеу қалыс қалып келеді.

Бұл бөлімде регуляр және иррегуляр ерекше нүктелері бар гипергеометриялық текті жалпыланған дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін зерттеуге арналған. Жалпыланған дифференциалдық теңдеудің және одан шекке көшу арқылы алынған туындалған дифференциалдық теңдеудің шешімдерін құруға ерекше назар аударылады. Зерттеу анықталмаған коэффициенттер және Фробениус-Латышева әдісімен жүргізіледі [14, 148-162 б.]. Клаузеннің жалпыланған және туындалған гипергеометриялық функциясының жаңа қасиеттері анықталады [40, 33-38 б.].

1.1.1 Гипергеометриялық текті жалпыланған дифференциалдық теңдеудің шешімдерін құру

Математикалық физикада кездесетін барлық функциялар Гаусс гипергеометриялық функциясының дербес жағдайлары. Олар гипергеометриялық текті әртүрлі дифференциалдық теңдеулермен байланысты. Гаусс гипергеометриялық функцияларының теориясын Л. Эйлер, К.Ф. Гаусс, Б. Риман, Е. Куммер, А. Эрдейи, Ф. Трикоми және т. б. көптеген танымал математиктер құрған [63-67]. Сонымен қатар, бір және одан да көп айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық функциялардың теориясын П. Аппель, Кампе де Ферье, Я. Горн, Люси Дж. Слейтер, Бэйли, Е.В. Бернс, Г. Бэйтмен және басқа ғалымдар одан әрі зерттеді [68-71].

Жалпыланған гипергеометриялық функция деп $x-$тің өсу дәрежесіндегі

$$ {}_AF_B(a_1,a_2,...,a_A;b_1,b_2,...,b_B;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n....(a_A)_n}{(b_1)_n(b_2)_n...(b_B)_n n!}x^n \tag{1.1} $$

түрінде берілген кез келген дәрежелік қатарды атайды.

Бұл кез-келген жалпыланған гипергеометриялық функцияның канондық жазылу формасы. (1.1) жазылу формасымен қатар келесі жазылу формасы да пайдаланылады:

$$ {}_AF_B[(a);(b);x]\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n n!}x^n \tag{1.2} $$

мұндағы $b-$лардың барлығының да мәндері бүтін сан болмауы керек. Егер $a-$лардың ең болмағанда біреуі бүтін теріс сан болса, онда жалпыланған дәрежелік қатар көпмүшелікке айналады.

1.1-анықтама. Жалпыланған гипергеометриялық (1.1) функциясы

$$ x^B(\mu_{B+1}-\lambda_{B+1}x)\frac{d^{B+1}y}{dx^{B+1}}+...+(\mu_1-\lambda_1 x)\frac{dy}{dx}-\lambda_0 y=0 \tag{1.3} $$

жалпыланған гипергеометриялық текті теңдеуінің дербес шешімі болып табылады.

Жалпыланған гипергеометриялық функцияларды зерттеу Клаузен функциясын (1828) зерттеуден басталады [26, 40 б.].

B саны ${}_AF_B$ функциясының реті деп аталады, ал $B+1-A$ класы, егер $B=A-1$ (нөлдік класс) болса, онда функция толық деп аталады.

Клаузен функциясының реті $B=2$, сондықтан Клаузен функциясы ${}_3F_2(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,x)$ түрінде берілген.

Жалпыланған гипергеометриялық қатар $A<B+1$ болғанда бүкіл комплекс жазықтықта жинақты болады және x айнымалысының бүтін функциясын анықтайды.

Бұл жағдайда барлық ${}_AF_B$ функциялар (мұндағы $A < B+1$) толық функциядан B реттілікпен шекке көшу арқылы алынады:

$$ {}_{A-1}F_B(a_1, a_2, ..., a_{p-1}; b_1, b_2, ..., b_B; x) = \underset{\varepsilon \to 0}{Lim}\, {}_AF_B(a_1, a_2, ..., a_{p-1}; b_1, b_2, ..., b_B; \varepsilon x). $$

Осылайша алынған ${}_{A-1}F_B$ функциясы туындалған функция деп аталады. Мысалы, туындалған Клаузен функциясы келесі түрлердің

$$ \begin{aligned} {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, x) &= F\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 & \\ b_1, & b_2 & & , x \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, n)(a_2, n)(a_3, n)}{(b_1, n)(b_2, n)(1, n)} x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n (a_3)_n}{(b_1)_n (b_2)_n n!} x^n = 1 + \frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 1!} x + \frac{a_1(a_1+1) a_2(a_2+1) a_3(a_3+1)}{b_1(b_1+1) b_2(b_2+1) 2!} x^2 + ... \end{aligned} \tag{1.4} $$

бірінде берілуі мүмкін, мұндағы $(a,n) = (a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)...(a+n-1), \ (a)_0 = 1 -$ Похгаммер белгілеуі. Бұдан туындалған Клаузен функциясы

$$ F(\beta_1, \beta_2; x) = \underset{\varepsilon \to 0}{Lim}\, F\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}, & \frac{1}{\varepsilon}, & \frac{1}{\varepsilon} & \\ \beta_1, & \beta_2 & & , \varepsilon^3 x \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b_1)_n (b_2)_n n!} x^n $$

түрінде табылады.

Осы бөлімшеде үшінші ретті

$$ x^3(\mu_3 - \lambda_3 x^k)\frac{d^3y}{dx^3} + x^2(\mu_2 - \lambda_2 x^k)\frac{d^2y}{dx^2} + x(\mu_1 - \lambda_1 x^k)\frac{dy}{dx} + (\mu_0 - \lambda_0 x^k)y = 0 \tag{1.5} $$

дифференциалдық теңдеуі енгізіліп, оның кейінгі зерттеулерге қатысты кейбір қасиеттері көрсетілген.

Мысалы, $k = 1, \ \mu_0 = 0$ болғанда (1.5) теңдеуінен

$$ x^2(\mu_3 - \lambda_3 x)\frac{d^3y}{dx^3} + x(\mu_2 - \lambda_2 x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\mu_1 - \lambda_1 x)\frac{dy}{dx} - \lambda_0 y = 0 \tag{1.6} $$

үшінші ретті жалпыланған гипергеометриялық текті теңдеуі алынады, мұндағы $\mu_i, (i = 0,1,2,3)$ және $\lambda_i, (i = 0,1,2,3) -$ белгісіз тұрақтылар. Мұндай теңдеудің шешімі a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 бес параметрлі функциялар да болуы мүмкін.

Белгісіз λ_i мен $\mu_i, (i = 0,1,2,3)$ мәндерін тауып, (1.6) теңдеуіне қойғаннан кейін, шешімі (1.4) Клаузен функциясы болатын

$$x^2(1-x)\frac{d^3y}{dx^3}+[1+b_1+b_2-(3+a_1+a_2+a_3)x]x\frac{d^2y}{dx^2}+ \\ +[b_1b_2-(1+a_1+a_2+a_3+a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)x]\frac{dy}{dx}-a_1a_2a_3y=0 \tag{1.7}$$

түріндегі Клаузен теңдеуі алынады.

Клаузен функциясын анықтайтын Клаузен теңдеуінің Кампе де Ферье әдісімен қалай алынатындығы Аппельдің [1, 178 б.] монографиясында толық келтірілген.

Біз енгізген (1.5) теңдеуінің қасиеттері көп зерттелмеген. Әсіресе, $k \geq 2$ жағдайында шешімдердің классикалық ортогональ көпмүшеліктермен байланысы және оларды табудағы Клаузен функциясының рөлі белгісіз.

1.2-бөлімшесінде регуляр ерекше нүктелі біртекті емес жалпыланған дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін анықталмаған коэффициенттер әдісімен құру ерекшеліктері қарастырылған. Клаузен функциясының негізгі қасиеттері 1.2.1-ішкі бөлімшесінде келтірілген.

1.2 Регуляр және иррегуляр ерекше нүктелері бар біртекті емес жалпыланған дифференциалдық теңдеудің шешімдерін анықталмаған коэффициенттер әдісімен құру

Бір айнымалылы гипергеометриялық функциялар теориясының дамуы, жалпыланған гипергеометриялық функциялар теориясының дамуына ықпал етті. Олардың көптеген қасиеттерін орнату бағытындағы зерттеулер жүргізіле бастады [72-76].

1.2.1 Клаузен функциясының негізгі қасиеттері

Алдыңғы бөлімде бір айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық функция теориясының негіздері, гипергеометриялық текті екінші және үшінші ретті жалпыланған гипергеометриялық дифференциалдық теңдеулерді құру әдісі көрсетілген. Мұнда бізді үшінші ретті гипергеометриялық дифференциалдық теңдеу – Клаузеннің дифференциалдық теңдеуі және оның Клаузен функциясы түріндегі шешімінің қасиеттері қызықтырады. Клаузен функциясының қасиеттерінің қысқаша мазмұнына көшейік.

1.2-анықтама. Жалпыланған гипергеометриялық Клаузен функциясы деп

$${}_3F_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;x)=F\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2 & \end{pmatrix}, x \Bigg) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n(a_3)_n}{(b_1)_n(b_2)_n(b_3)_n n!}x^n \tag{1.8}$$

дәрежелік қатар түрінде берілген функцияны атайды [7, 48 б.], мұндағы $(a)_n=\frac{F(a+n)}{F(a)}=a(a+1)...(a+n-1),\ (a)_0=1-$ Похгаммер белгілеулері.

(1.8) Клаузен функциясы Клаузен теңдеуінің дербес шешімі болып табылады. Жалпыланған дәрежелік қатардың жинақтылық қасиетінен Клаузен функциясын анықтайтын (1.8) қатарының жинақтылық қасиеті туындайды.

Жалпыланған гипергеометриялық функцияның дербес жағдайы ретінде реті $B=2$ Клаузен функциясын келтіруге болады. Дербес шешімі осы Клаузен функциясы болатын Клаузен теңдеуінің $x=0$, $x=1$ ақырлы және $x=\infty$ ақырсыз үш ерекше нүктелері бар.

Енді жетілдірілген Фробениус-Латышева әдісімен анықталатын қасиеттеріне тоқталайық.

Біртекті (1.7) Клаузен теңдеуінің шешімінің бар болуы Фробениус-Латышева әдісі арқылы зерттеледі [14, 148-162 б.].

Ерекше нүктелердің жіктелуі А.Пуанкаре (1886) енгізген ранг және Л. Томе енгізген антиранг ұғымдары арқылы жүзеге асырылады.

Клаузен теңдеуінің ерекше нүктелерінің регуляр және иррегулярлығы

$$p=1+k, k_{\max}=\max\frac{\tau_l-\tau_0}{l}, \quad (l=1,2,3) \tag{1.9}$$

ранг ұғымы және

$$m=-1-\lambda, \lambda_{\min}=\min\frac{\sigma_j-\sigma_0}{j}, \quad (j=1,2,3) \tag{1.10}$$

антиранг ұғымы арқылы анықталады, мұндағы τ_l және $\sigma_j, (l, j=1,2,3)$ арқылы Клаузен теңдеуінің коэффициенттеріндегі x тәуелсіз айнымалысының ең үлкен және ең кіші мәндері белгіленген.

$x=0$ және $x=\infty$ ерекше нүктелері $p\le 0$ және $m\le 0$ жағдай да ғана ерекше регуляр нүктелер болып табылады.

1.1-тұжырым. Егер $x=0$ және $x=\infty$ ерекше нүктелері регуляр ерекше нүктелер болса, онда $x=0$ нүктесінің маңайындағы регуляр шешім

$$y(x)=x^{\rho}\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^m, \quad (C_0\neq 0) \tag{1.11}$$

түрінде, ал $x=\infty$ нүктесінің маңайындағы регуляр шешім

$$y(x)=x^{\rho}\sum_{m=0}^{\infty}A_m x^{-m}, \quad (A_0\neq 0) \tag{1.12}$$

түрінде табылады, мұндағы $\rho, C_m, A_m, (m=0,1,2,...)-$ белгісіз тұрақтылар.

(1.7) теңдеуден (1.9) және (1.10) формулалар көмегімен ранг $p=1+k_{\max}=1-1=0$ пен антиранг $m=-1-\lambda_{\min}=-1-(-1)=0$ анықталады.

Сондықтан, Клаузен теңдеуінің екі ерекше нүктесі де регуляр, $x=0$ мен $x=\infty$ ерекше нүктелерінің маңайында (1.11) және (1.12) шешімдерді құруға болады.

1.1-теорема. Егер жалпыланған гипергеометриялық (1.8) Клаузен функциясы (1.7) Клаузен теңдеуінің $x=0$ ерекше нүкте маңайындағы дербес регуляр шешімі болса, онда теңдеудің жалпы шешімі

$$\bar{y}(x) = A\ {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x) + B\, x^{1-b_1} F\begin{pmatrix} a_1+1-b_1, & a_2+1-b_1, & a_3+1-b_1 \\ 2-b_1, & b_2+1-b_1 & \end{pmatrix}, x \Bigg) + \tag{1.13}$$
$$+ C\, x^{1-b_2} F\begin{pmatrix} a_1+1-b_2, & a_2+1-b_2, & a_3+1-b_2 \\ b_1+1-b_2, & 2-b_2 & \end{pmatrix}, x \Bigg)$$

түрінде табылады, мұндағы $A, B, C -$ кез-келген тұрақтылар.

Дәлелдеу. Теорема Фробениус-Латышева әдісімен дәлелденеді. Біз $x = 0$ және $x = \infty$ ерекше нүктелерінің регулярлығын бұрын орнаттық. Шешімдерді $x = 0$ ерекше нүкте маңайында (1.11) түрінде құрайық. Ол үшін (1.7) теңдеуіне $y = x^{\rho}$ ауыстыруын жасап,

$$L\left[x^{\rho}\right] \equiv x^{\rho-1}\{f_0(\rho) + f_1(\rho)x\} \tag{1.14}$$

түріндегі Фробениус характеристикалық функциясы құрылады, мұндағы

$$f_0(\rho) = \rho(\rho-1)(\rho-2) + (1+b_1+b_2)\rho(\rho-1) + b_1 b_2 \rho,$$
$$f_1(\rho) = \rho(\rho-1)(\rho-2) + (3+a_1+a_2+a_3)\rho(\rho-1) + (1+a_1+a_2+a_3+a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)\rho -$$
$$-a_1 a_2 a_3.$$

Содан кейін (1.11) шешімінің белгісіз тұрақтылары $\rho, C_m, (m = 0,1,2,...)$ келесі рекурентті тізбектен анықталады:

$$\begin{aligned} & C_0 f_0(\rho) = 0, \\ & C_1 f_0(\rho+1) + C_0 f_1(\rho) = 0, \\ & C_1 f_0(\rho+2) + C_1 f_1(\rho+1) + C_0 f_2(\rho) = 0, \\ & ---------------------- \\ & C_k f_0(\rho+k) + C_{k-1} f_1(\rho+1) + ... + C_1 f_{k-1}(\rho) + C_0 f_k(\rho) = 0, \\ & --------------------------------. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Шынында да, $C_0 \neq 0$ болғанда $x = 0$ ерекше нүктеге қатысты айқындауыш теңдеуі

$$f_0(\rho) = \rho(\rho-1)(\rho-2) + (1+b_1+b_2)\rho(\rho-1) + b_1 b_2 \rho = 0 \tag{1.16}$$

үш түрлі накты түбірге ие: $\rho_1 = 0,\ \rho_2 = 1-b_1,\ \rho_3 = 1-b_2$. Осы түбірлерді ретімен (1.15) теңдеуге қойып, шешім көрсеткіші $\rho_i\ (i = 1,2,3)$ болатын жалпыланған дәрежелік қатар түрінде үш дербес шешімдерінің белгісіз C_k коэффициенттері анықталады:

$$y_1 = F(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x),$$
$$y_2 = x^{1-b_1} F\left(\left.\begin{matrix} a_1+1-b_1, & a_2+1-b_1, & a_3+1-b_1, \\ 2-b_1, & b_2+1-b_1 & \end{matrix}\right| x\right), \tag{1.17}$$
$$y_3 = x^{1-b_2} F\left(\left.\begin{matrix} a_1+1-b_2, & a_2+1-b_2, & a_3+1-b_2, \\ b_1+1-b_2, & 2-b_2 & \end{matrix}\right| x\right).$$

(1.7) Клаузен теңдеуінің шешімдері (1.17) түрінде, ал жалпы шешім (1.13) түрінде табылады, дәлелдеу керегі де осы болатын.

Фробениус-Латышева әдісінің қолданылуынан белгілі теоремалар [57, 37-44 б.] Клаузен теңдеуі шешімінің бар болуына байланысты бірқатар қасиеттерді ашуға мүмкіндік береді.

1.1-қасиет. Клаузен теңдеуінің (1.11) түріндегі регуляр шешімі ρ тұрақтысының $x=0$ ерекше нүктесі бойынша (1.16) айқындауыш теңдеуінің түбірі болғанда ғана бар болады.

1.2-қасиет. Клаузен теңдеуінің (1.12) түріндегі регуляр шешімі ρ тұрақтысының $x=\infty$ ерекше нүктесі бойынша айқындауыш $f_1(\rho)=0$ теңдеуінің түбірі болғанда ғана бар болады.

1.3-қасиет. (1.7) Клаузен теңдеуінің $x=0$ және $x=\infty$ ерекше нүктелерінің маңайындағы (1.11), (1.12) түрлеріндегі жинақты регуляр шешімдері $p \le 0$ және $m \le 0$ шарттары орындалғанда ғана бар болады.

1.2.2 Біртекті емес Клаузен теңдеуінің шешімдерін құру

Біртекті емес

$$x^2(1-x)\frac{d^3y}{dx^3} + [1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x]x\frac{d^2y}{dx^2} +$$
$$[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)x]\frac{dy}{dx} - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 y = f(x)$$

Клаузен теңдеуінің шешімдері теңдеудің оң жағындағы $f(x)$ функциясының берілу ерекшеліктеріне байланысты зерттеледі.

Жай дифференциалдық теңдеудің оң жағы

$$f(x) = x^\rho \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j, \quad (\alpha_0 \ne 0)$$

болған жағдай [77-79] жұмыстарда зерттелген. Бұл жағдайда дербес шешім

$$Y(x) = x^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^j, \quad (j = 0,1,2,\ldots)$$

түрінде ізделінеді және анықталмаған коэффициенттер әдісін қолдану тиімді. Мұнда шешім жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ізделінеді. Ол үшін

$$x^{\lambda}\left\{A_0 f_0(\lambda)+\left[A_1 f_0(\lambda+1)+A_0 f_1(\lambda)\right]x+\left[A_2 f_0(\lambda+2)+A_1 f_1(\lambda+1)+A_0 f_2(\lambda)\right]x^2+\ldots\right\}=x^{\rho}\sum_{j=0}^{\infty}a_j x^j$$

Фробениус характеристикалық функциясы құрылып, Фробениус-Латышева әдісін қолдану ерекшеліктеріне сүйенеміз.

Егер ранг $p\le 0$ және антиранг $m\le 0$ бір мезгілде орындалса, онда 1.1-тұжырым бойынша $x=0,\ x=\infty$ ерекше нүктелері регуляр.

1.2-теорема. Егер біртекті емес Клаузен теңдеуі

$$\begin{aligned}L[y]&=x^2(1-x)\frac{d^3y}{dx^3}+\left[1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x\right]x\frac{d^2y}{dx^2}+\\&+\left[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)x\right]\frac{dy}{dx}-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, y=x^{\rho}\end{aligned}\tag{1.18}$$

түрінде берілсе, онда оның жалпы шешімі Клаузеннің (1.7) біртекті теңдеуінің $\overline{y}(x)$ жалпы шешімі мен (1.18) біртекті емес теңдеуінің $Y(x)$ дербес шешімінің қосындысынан тұрады:

$$\begin{aligned}y(x)&=\overline{y}(x)+Y(x)=A\ {}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3\\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}\right| x\right)+\\&+B\,x^{1-\beta_1}\ {}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1\\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1 & \end{matrix}\right| x\right)+\\&+C\,x^{1-\beta_2}\ {}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, & \alpha_2+1-\beta_2, & \alpha_3+1-\beta_2\\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2 & \end{matrix}\right| x\right)+\\&+\frac{x^{\rho}}{\rho(\rho-1+\beta_1)(\rho-1+\beta_2)}\ {}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\rho-\alpha_1, & \rho-\alpha_2, & \rho-\alpha_3\\ \rho-1+\beta_1, & \rho-1+\beta_2 & \end{matrix}\right| x\right),\end{aligned}\tag{1.19}$$

мұндағы $\rho-$ тұрақты.

Дәлелдеу. Сәйкес (1.7) біртекті теңдеудің $\overline{y}(x)$ жалпы шешімі белгілі. $A_0\ne 0$ болғанда $x=0$ ерекше нүкте маңайында айқындауыш теңдеудің үш нақты түбірі бар: $\lambda_1=0, \lambda_1=1-\beta_1, \lambda_2=1-\beta_2$. Бұл түбірлер біртекті Клаузен теңдеуінің жалпыланған дәрежелік қатар түріндегі сызықты тәуелсіз дербес шешімінің көрсеткіштері болып табылады:

$$
\begin{aligned}
&y_1(x)={}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3\\ \beta_1, & \beta_2, & \end{matrix}\middle| x\right),\\
&y_2(x)=x^{1-\beta_1}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1\\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1, & \end{matrix}\middle| x\right),\\
&y_3(x)=x^{1-\beta_2}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, & \alpha_2+1-\beta_2, & \alpha_3+1-\beta_2\\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2, & \end{matrix}\middle| x\right).
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

(1.20) Клаузен теңдеуінің сызықты тәуелсіз шешімдерінің жүйесін құрайды. Бізге $\lambda=\rho$ болғанда (1.18) біртекті емес теңдеуінің дербес шешімін құру керек. Осы мақсатта (1.18) теңдеудің сол жағына $y=x^{\lambda}$ ауыстыруларын жасап, (1.18) теңдеудің

$$
L\left[x^{\lambda}\right]\equiv x^{\lambda-1}\left\{f_0(\lambda)+f_1(\lambda)x\right\}=x^{\rho}
$$

Фробениус характеристикалық функциясы алынады, мұндағы

$$
\begin{aligned}
&f_0(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+(1+\beta_1+\beta_2)\lambda(\lambda-1)+\beta_1\beta_2\lambda,\\
&f_1(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\lambda(\lambda-1)+\\
&+(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\rho-\alpha_1\alpha_2\alpha_3.
\end{aligned}
$$

$Y(x)$ дербес шешімінің $A_j,\ (j=0,1,2,...)$ белгісіз тұрақты коэффициенттері $\lambda=\rho$ болғанда

$$
\begin{aligned}
&A_0 f_0(\rho)=\alpha_0,\\
&A_1 f_0(\rho+1)+A_0 f_1(\rho)=\alpha_1,\\
&A_2 f_0(\rho+2)+A_1 f_1(\rho+1)+A_0 f_2(\rho)=\alpha_2,\\
&-----------------------------\\
&A_k f_0(\rho+k)+A_{k-1} f_1(\rho+k-1)+...+A_0 f_k(\rho)=\alpha_k,\\
&-----------------------------
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

жүйесінен анықталады. Егер x^{ρ} дәрежесінің коэффициенті $\alpha_0=1$ тең болса, онда A_0 коэффициенті келтірілген жүйенің бірінші теңдеуінен анықталады:

$$
A_0=\frac{1}{\rho(\rho-1+\beta_1)\cdot(\rho-1+\beta_2)}.
$$

α_0-ден басқа барлық $\alpha_l,\ (l=1,2,...)$ коэффициенттері нөлге тең болғандықтан, (1.18) біртекті емес теңдеудің дербес шешімі

$$Y(x)=\frac{x^{\rho}}{\rho(\rho-1+\beta_1)(\rho-1+\beta_2)}\{1+\frac{(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)(\rho-\alpha_3)}{(\rho+1)(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)}x+$$
$$+\frac{(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)(\rho-\alpha_3)(\rho+1-\alpha_1)(\rho+1-\alpha_2)(\rho+1-\alpha_3)}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)(\rho+\beta_3)(\rho+1+\beta_1)(\rho+1+\beta_2)(\rho+1+\beta_3)}x^2+\ldots\}=$$
$$=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho-\alpha_1)_n(\rho-\alpha_2)_n(\rho-\alpha_3)_n}{(\rho)_n(\rho^{-1}+\beta_1)_n(\rho^{-1}+\beta_2)_n}x^n=$$
$$=\frac{x^{\rho}}{\rho(\rho-1+\beta_1)(\rho-1+\beta_2)^3}F_2\left(\begin{matrix}\rho-\alpha_1, & \rho-\alpha_2, & \rho-\alpha_3\\ \rho-1+\beta_1, & \rho-1+\beta_2 & \end{matrix}\middle| x\right)$$

түрінде табылады.

Сондықтан, $x=0$ ерекше нүктесі маңайындағы біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі біртекті теңдеудің $\overline{y}(x)$ жалпы шешімінің және (1.18) біртекті емес теңдеудің $Y(x)$ дербес шешімінің (1.19) қосындысы түрінде анықталған. Дәледеу керегі де осы болатын.

А.В. Бэбистер біртекті емес теңдеудің дербес шешімін құру үшін қолданылған әдісті Фробениус әдісі деп атады. Бұл әдіс тек екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін құру үшін қолданылды. Ал, Клаузен теңдеуіне бұл әдіс алғаш рет жалпыланып отыр.

1.2.3 Клаузен теңдеуінің шешімін шексіздіктегі регуляр ерекше нүкте маңайында құру

Клаузен теңдеуінің $x=0$, $x=1$ және $x=\infty$ барлық ерекше нүктелері регулярлы. $x=1$ ерекше нүктесі маңайындағы зерттеулерді $x-1=t$ түрлендіруі арқылы алдыңғы жағдайға келтіруге болады. Әрі қарай $x=\infty$ ерекше нүктесінің маңайында шешім құру және олардың қасиеттері зерттелді.

1.3-теорема. Егер (1.7) жалпыланған біртекті Клаузен теңдеуінің $x=\infty$ регуляр ерекше нүктесінің маңайында $y_j(x)$, $(j=1,2,3)$ үш сызықты тәуелсіз дербес шешімі бар және оның жалпы шешімі

$$\overline{y}(x)=\sum_{j=1}^{3}C_jy_j(x)=C_1x^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\alpha_1)_n[-(\alpha_1+\beta_1)]_n[-(\alpha_1+\beta_2)]_n}{n![-(\alpha_1-\alpha_2)]_n[-(\alpha_1-\alpha_3)]_nx^n}+$$
$$+C_2x^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\alpha_2)_n[-(\alpha_2+\beta_1)]_n[-(\alpha_2+\beta_2)]_n}{n![-(\alpha_2-\alpha_1)]_n[-(\alpha_2-\alpha_3)]_nx^n}+ \qquad (1.22)$$
$$+C_3x^{\alpha_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\alpha_3)_n[-(\alpha_3+\beta_1)]_n[-(\alpha_3+\beta_2)]_n}{n![-(\alpha_3-\alpha_1)]_n[-(\alpha_3-\alpha_2)]_nx^n}$$

қосындысы түрінде табылады.

Дәлелдеу. $y_j(x)$ дербес шешімдер жүйесін құру үшін Фробениус-Латышева әдісі қолданылады. Осы мақсатта Фробениус характеристикалық функциясы келесі түрде жазылды:

$$L[x^{\lambda}] \equiv x^{\lambda}\left\{\varphi_0(\lambda) + \frac{\varphi_1(\lambda)}{x}\right\}, \qquad (1.23)$$

мұндағы $\varphi_0(\lambda) = f_1(\lambda)$, ал, $\varphi_1(\lambda) = f_0(\lambda)$.

Енді, (1.23)-тен алынған

$$\begin{aligned}\varphi_0(\lambda) = f_1(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + (3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\lambda(\lambda-1) + \\ +(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)\rho - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3) = 0\end{aligned} \qquad (1.24)$$

түріндегі теңдеу $x = \infty$ ерекше нүктесіне қатысты Клаузен теңдеуінің айқындауыш теңдеуі болып табылады.

Шешім тәуелсіз x айнымалысының кему реті бойынша жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ізделінеді:

$$y(x) = x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{-n}, \quad (C_0 \neq 0). \qquad (1.25)$$

Белгісіз тұрақты $C_n, (n = 0,1,...)$ келесі қайталанатын рекурентті жүйеден анықталады:

$$\begin{aligned}&C_0\varphi_0(\lambda) = 0, \quad (C_0 \neq 0)\\ &C_1\varphi_0(\lambda-1) + C_0\varphi_1(\lambda) = 0,\\ &C_2\varphi_0(\lambda-2) + C_1\varphi_1(\lambda-1) + C_0\varphi_2(\lambda) = 0,\\ &C_3\varphi_0(\lambda-3) + C_2\varphi_1(\lambda-2) + C_1\varphi_2(\lambda-1) + C_0\varphi_3(\lambda) = 0,\\ &-----------------------------.\end{aligned} \qquad (1.26)$$

(1.26) жүйесінің бірінші теңдеуінен

$$C_0\varphi_0(\lambda) = C_0(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3) = 0$$

$C_0 \neq 0$ болғанда $x = \infty$ ерекше нүктеге қатысты (1.24) айқындауыш теңдеуінің үш түбірі табылады: $\lambda_1 = \alpha_1,\ \lambda_2 = \alpha_2,\ \lambda_3 = \alpha_3$. Табылған түбірлерді (1.26) жүйеге қойып, (1.25) жалпыланған дәрежелік қатардың $C_n^j, (j = 1,2,3)$ белгісіз тұрақтыларының мәндері анықталады. Нәтижесінде (1.25) қатарынан үш сызықты тәуелсіз дербес шешімдер

$$\begin{aligned}y_1(x) &= x^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\alpha_1)_n[-(\alpha_1+\beta_1)]_n[-(\alpha_1+\beta_2)]_n}{n![-(\alpha_1-\alpha_2)]_n[-(\alpha_1-\alpha_3)]_n x^n},\\ y_2(x) &= x^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\alpha_2)_n[-(\alpha_2+\beta_1)]_n[-(\alpha_2+\beta_2)]_n}{n![-(\alpha_2-\alpha_1)]_n[-(\alpha_2-\alpha_3)]_n x^n},\\ y_3(x) &= x^{\alpha_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\alpha_3)_n[-(\alpha_3+\beta_1)]_n[-(\alpha_3+\beta_2)]_n}{n![-(\alpha_3-\alpha_1)]_n[-(\alpha_3-\alpha_2)]_n x^n}\end{aligned} \qquad (1.27)$$

түрінде анықталады, мұнда $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)=(-1)^n(-\alpha)_n$ белгілеулері қолданылған.

Үш $y_j(x), (j=1,2,3)$ шешімнің қосындысы біртекті Клаузен теңдеуінің жалпы шешімін береді. Теорема дәлелденді.

(1.27) шешімдер (1.7) Клаузен теңдеуінің $x=\infty$ ерекше нүкте маңайындағы шешімінің негізгі жүйесін құрайды.

1.4-теорема. Біртекті емес (1.18) Клаузен теңдеуінің $x=\infty$ ерекше нүкте маңайындағы дербес шешімі

$$Y(x)=x^{\rho-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\rho)_n[-(\rho+\beta_1)]_n[-(\rho+\beta_2)]_n}{n![-(\rho-\alpha_1)]_n[-(\rho-\alpha_2)]_n[-(\rho-\alpha_3)]_n x^n} \tag{1.28}$$

түрінде табылады, мұнда $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)=(-1)^n(-\alpha)_n$ белгілеулері қолданылған.

Дәлелдеу. Теореманы дәлелдеуде алдыңғы 1.3-теореманың мәліметтеріне сүйенуге болады. Біртекті емес (1.18) Клаузен теңдеуінің шешімі де (1.25) қатары түрінде ізделеді. Айырмашылығы белгісіз $C_n, (n=0,1,...)$ коэффициенттері келесі

$$\begin{array}{l} C_0\varphi_0(\lambda)=\alpha_0, \quad (C_0\neq 0) \\ C_1\varphi_0(\lambda-1)+C_0\varphi_1(\lambda)=\alpha_1, \\ C_2\varphi_0(\lambda-2)+C_1\varphi_1(\lambda-1)+C_0\varphi_2(\lambda)=\alpha_2, \\ C_3\varphi_0(\lambda-3)+C_2\varphi_1(\lambda-2)+C_1\varphi_2(\lambda-1)+C_0\varphi_3(\lambda)=\alpha_3, \\ ------------------------------ \end{array} \tag{1.29}$$

рекурентті теңдеулер жүйесінен, $x^{\rho-1}$ жағдайында

$$C_0=\frac{1}{(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)(\rho-\alpha_3)}$$

коэффициенті ретінде (1.24) айқындауыш теңдеуді пайдаланып анықталады. Барлық келесі $\alpha_l, (l=1,2,...)$ коэффициенттері нөлге тең болғандықтан, (1.18) біртекті емес теңдеудің (1.28) дербес шешімінің $C_l, (l=1,2,...)$ коэффициенттері біртекті жағдайда анықталып, дербес шешім

$$
\begin{aligned}
Y(x)&=\frac{x^{\rho-1}}{(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)(\rho-\alpha_3)}\{1+\frac{\rho(\rho+\beta_1-1)(\rho+\beta_2-1)}{(\rho-1-\alpha_1)(\rho-1-\alpha_2)(\rho-1-\alpha_3)x}+\\
&+\frac{\rho(\rho-1)(\rho+\beta_1-1)(\rho+\beta_1-2)(\rho+\beta_2-1)(\rho+\beta_2-2)}{(\rho-1-\alpha_1)(\rho-2-\alpha_1)(\rho-1-\alpha_2)(\rho-2-\alpha_2)(\rho-1-\alpha_3)(\rho-2-\alpha_3)x^2}+\ldots\}=\\
&=x^{\rho-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\rho)_n[-(\rho+\beta_1-1)]_n[-(\rho+\beta_2-1)]_n}{n![-(\rho-\alpha_1)]_n[-(\rho-\alpha_2)]_n[-(\rho-\alpha_3)]_n x^n}=\\
&=\frac{x^{\rho}}{(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)(\rho-\alpha_3)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-\rho, & 1-\rho-\beta_1, & 1-\rho-\beta_2\\ \rho-\alpha_1, & \rho-\alpha_2,\rho-\alpha_3 & \end{matrix}\middle| x\right)
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

түрінде табылады, мұнда $\rho(\rho-1)(\rho-2)\ldots(\rho-n+1)=(-1)^n(-\rho)_n$ белгілеулері қолданылған.

1.3 және 1.4-теоремалардан біртекті емес (1.18) Клаузен теңдеуінің жалпы шешімі туралы келесі теореманы тұжырымдауға болады.

1.5-теорема. Біртекті емес жалпыланған (1.18) Клаузен теңдеуінің $x=\infty$ регуляр ерекше нүктесінің маңайындағы жалпы шешімі (1.7) біртекті теңдеуінің (1.22) түріндегі $\bar{y}(x)$ жалпы шешімі мен (1.30) түріндегі $Y(x)$ дербес шешімінің қосындысынан тұрады:

$$
\begin{aligned}
y(x)&=\bar{y}(x)+Y(x)=C_1x^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\alpha_1)_n[-(\alpha_1+\beta_1)]_n[-(\alpha_1+\beta_2)]_n}{n![-(\alpha_1-\alpha_2)]_n[-(\alpha_1-\alpha_3)]_n x^n}+\\
&+C_2x^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\alpha_2)_n[-(\alpha_2+\beta_1)]_n[-(\alpha_2+\beta_2)]_n}{n![-(\alpha_2-\alpha_1)]_n[-(\alpha_2-\alpha_3)]_n x^n}+\\
&+C_3x^{\alpha_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\alpha_3)_n[-(\alpha_3+\beta_1)]_n[-(\alpha_3+\beta_2)]_n}{n![-(\alpha_3-\alpha_1)]_n[-(\alpha_3-\alpha_2)]_n x^n}+\\
&+x^{\rho-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(-\rho)_n[-(\rho+\beta_1-1)]_n[-(\rho+\beta_2-1)]_n}{n![-(\rho-\alpha_1)]_n[-(\rho-\alpha_2)]_n[-(\rho-\alpha_3)]_n x^n}
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

мұнда

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)=(-1)^n(-\alpha)_n,\\
&\rho(\rho-1)(\rho-2)\ldots(\rho-n+1)=(-1)^n(-\rho)C_n
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

белгілеулері пайдаланылды.

Теореманың дәлелдеуі 1.3 және 1.4-теоремалардың дәлелдеулерінде келтірілген.

(1.8) Клаузен функциясының дифференциалдану қасиетіне тоқталайық.

Жалпыланған гипергеометриялық (1.8) Клаузен функциясының $m-$ші ретті туындысы

$$
\frac{d^m F}{dx^m}=\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+m-1)\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_2+m-1)\alpha_3(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_3+m-1)}{\beta_1(\beta_1+1)\ldots(\beta_1+m-1)\beta_2(\beta_2+1)\ldots(\beta_2+m-1)}\times
$$
$$
\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+m, & \alpha_2+m, & \alpha_3+m\\ \beta_1+m, & \beta_2+m & \end{matrix}\middle|x\right)=\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_m(\alpha_3)_m}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+m, & \alpha_2+m, & \alpha_3+m\\ \beta_1+m, & \beta_2+m & \end{matrix}\middle|x\right) \qquad (1.33)
$$

түрінде болады.

Бұдан қалауымызша $m-$нің әр түрлі мәндеріндегі төменгі ретті туындыларын шығарып алуға болады. Яғни, (1.33)-тен әртүрлі реттегі туындыларды шығарып алуға болады. Мысалы, $m=1$ болғанда

$$
\frac{dF}{dx}=\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\beta_1\beta_2}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+1, & \alpha_2+1, & \alpha_3+1\\ \beta_1+1, & \beta_2+1 & \end{matrix}\middle|x\right)
$$

бірінші ретті туындысы алынады. Осы әдіспен $y_i(x),\ \ (i=2{,}3)$ шешімінің де туындылары табылады:

$$
y_2(x)=x^{1-\beta_1}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1\\ 2-\beta_1, & 2-\beta_2 & \end{matrix}\middle|x\right),
$$

және

$$
y_3(x)=x^{1-\beta_2}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, & \alpha_2+1-\beta_2, & \alpha_3+1-\beta_2\\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2 & \end{matrix}\middle|x\right).
$$

Олардың туындыларын анықтау үшін төмендегі жалпы формула қолданылды:

$$
\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\sigma}\,{}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_p\\ \rho_q\end{matrix}\middle|x\right)\right]=(\sigma-m+1)_m\,x^{\sigma-m}\,{}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix}\sigma+1 & \alpha_p\\ \sigma+1-m & \rho_q\end{matrix}\middle|x\right).
$$

$A=3,\quad B=2$ жағдайында $m-$ші (1.31) және (1.32) дербес шешімінің туындылары

$$
\frac{d^m y_2}{dx^m}=\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{1-\beta_1}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1\\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1 & \end{matrix}\middle|x\right)\right]=(2-\beta_1-m)_m\,x^{1-\beta_1-m}\times
$$
$$
\times{}_4F_3\left(\begin{matrix}2-\beta_1, & \alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1\\ 2-\beta_1-m, & \beta_2+1-\beta_1, & & \end{matrix}\middle|x\right),
$$

$$
\frac{d^m y_3}{dx^m}=\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{1-\beta_2}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, & \alpha_2+1-\beta_2, & \alpha_3+1-\beta_2\\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2 & \end{matrix}\middle|x\right)\right]=(2-\beta_2-m)_m\,x^{1-\beta_2-m}\times
$$
$$
\times{}_4F_3\left(\begin{matrix}2-\beta_2, & \alpha_1+1-\beta_2, & \alpha_2+1-\beta_2, & \alpha_3+1-\beta_2\\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2-m & & \end{matrix}\middle|x\right)
$$

түрлерінде ұсынылады [80-90].

1.3 Біртекті емес туындалған Клаузен теңдеуінің шешімі

Біртекті туындалған Клаузен теңдеуінің шешіміне тоқталайық.

1.1.1-ішкі бөлімшесінде, $A < B+1$ болғанда ${}_AF_B$ толық функциясынан шекке көшу арқылы

$$ {}_{A-1}F_B(\alpha_1,...,\alpha_{A-1};\beta_1,...,\beta_B;x) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\, {}_AF_B\left(\alpha_1,...,\alpha_{A-1},\frac{1}{\varepsilon};\beta_1,...,\beta_B;\varepsilon x\right) $$

туындалған функция алынатындығы атап өтілді. Бұл жағдайда ${}_{A-1}F_B$ функциясы ${}_AF_B$ –дан туындалған функция деп аталады.

1.3-анықтама. Жалпыланған

$$ F\left(\begin{matrix} - & \\ \beta_1, & \beta_2 \end{matrix}\middle| x\right) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\, F\left(\begin{matrix} \frac{1}{\varepsilon}, & \frac{1}{\varepsilon}, & \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon^3 x \\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta_1,n)(\beta_2,n)(1,n)} x^n \tag{1.34} $$

гипергеометриялық функция жалпыланған гипергеометриялық Клаузен функциясынан шекке көшу арқылы алынған туындалған гипергеометриялық Клаузен функциясы деп аталады.

1.6-теорема. Егер (1.34) туындалған гипергеометриялық Клаузен функциясы

$$ x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (1+\beta_1+\beta_2)x\frac{d^2y}{dx^2} + \beta_1\beta_2\frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{1.35} $$

туындалған Клаузен теңдеуінің дербес шешімі болып табылса, онда бұл теңдеудің жалпы шешімі

$$ \overline{y} = AF\left(\begin{matrix} -, & - \\ \beta_1, & \beta_2 \end{matrix}, x\right) + Bx^{1-\beta_1} F\left(\begin{matrix} -, & - \\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1 \end{matrix}, x\right) + Cx^{1-\beta_2} F\left(\begin{matrix} -, & - \\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2 \end{matrix}, x\right) $$

түрінде табылады, мұндағы $A, B, C -$ кез-келген тұрақтылар.

Дәлелдеу. Теореманы дәлелдеу үшін Фробениус-Латышева әдісі қолданылады [14, 148-162 б.]. Алдымен $x=0$ және $x=\infty$ ерекше нүктелерінің регулярлығы мен иррегулярлығы айқындалады. Егер (1.3) жалпыланған гипергеометриялық теңдеуде $B=1$ деп қабылдасақ, онда үшінші ретті теңдеу алынады:

$$ x^2(\mu_3-\lambda_3 x)\frac{d^3y}{dx^3} + x(\mu_2-\lambda_2 x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\mu_1-\lambda_1 x)\frac{dy}{dx} - \lambda_0 y = 0. $$

1.1-бөлімшесінде келтірілген ережелердің негізінде, $x=0$ ерекше нүкте ерекше регуляр, ал $x=\infty$ ерекше иррегуляр. Сондықтан, $x=0$ ерекше нүктенің маңайында шешім (1.5) түрінде, яғни жалпыланған дәрежелік қатар түрінде құрылуы керек. Жалпыланған дәрежелік қатардың белгісіз тұрақтыларын анықтау үшін (1.6) теңдеуінде $y = x^{\rho}$ арқылы алмастыра отырып, Фробениус характеристикалық функциясы құрылды:

$$L\left[x^{\rho}\right] \equiv x^{\rho-1}\left[f_0(\rho) + f_1(\rho)x\right],$$

мұндағы

$$f_0(\rho) = \rho(\rho-1)(\rho-2) + (1+\beta_1+\beta_2)\rho(\rho-1) + \beta_1\beta_2\rho,$$
$$f_1(\rho) = -1.$$

Сонда, $\rho_i, C_m, (m = 0,1,...)$ белгісіз тұрақтылар келесі рекурренттік жүйесінен анықталады:

$$\begin{array}{l} C_0 f_0(\rho) = 0, \\ f_1(\rho)C_0 + f_0(\rho+1)C_1 = 0, \\ f_2(\rho)C_0 + f_1(\rho+1)C_1 + f_0(\rho+2)C_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_k(\rho)C_0 + f_{k-1}(\rho+1)C_1 + f_0(\rho+k)C_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Шындығында, $C_0 \neq 0,$ жағдайында айқындауыш теңдеуінің

$$f_0(\rho) = \rho(\rho - 1 + \beta_1)(\rho - 1 + \beta_2) = 0$$

үш нақты түбірі бар: $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1-\beta_1, \rho_3 = 1-\beta_2.$ C_k коэффициенттерін есептегеннен кейін, $\rho_i, (i = 1,2,3)$ шешімдері бар жалпыланған дәрежелік қатар түріндегі үш дербес шешімдері табылады:

$$y_1 = F\begin{pmatrix} -, & - \\ \beta_1, & \beta_2 \end{pmatrix}, x\Bigg) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n n!} x^n,$$

$$y_2 = x^{1-\beta_1} F\begin{pmatrix} -, & - & \\ 2-\beta_1, & \beta_2+1 & , x \end{pmatrix},$$

$$y_3 = x^{1-\beta_2} F\begin{pmatrix} -, & - & \\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2 & , x \end{pmatrix}.$$

Дәлелдеу керегі де осы болатын.

Енді біртекті емес туындалған Клаузен теңдеуінің шешімдерін құруға көшеміз.

Біртекті емес

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (1+\beta_1+\beta_2)x\frac{d^2y}{dx^2} + \beta_1\beta_2\frac{dy}{dx} - y = f(x) \tag{1.36}$$

туындалған Клаузен теңдеуін қарастырайық, мұндағы $f(x)$ функциясы

$$f(x)=x^{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j x^j, \quad (\alpha_0\neq 0) \tag{1.37}$$

жалпыланған дәрежелік қатары болсын.

Туындалған Клаузен теңдеуі оқшауланған $x=0$ ерекше нүктесі бар теңдеуге жатады. Оң жағындағы $f(x)$ функциясының берілу түріне байланысты (1.36) теңдеуінің шешімдерін тұрғызу мүмкіндіктерін зерттеу талап етіледі.

Оқшауланған бір ерекше $x=0$ нүктесі бар теңдеулердің оң жағы (1.37) түрінде берілгенде, біртекті емес теңдеудің дербес шешімін

$$y=x^{\rho}\sum_{j=0}^{\infty}A_j x^j \tag{1.38}$$

қатары түрінде іздеген және белгісіз коэффициенттерді анықтау үшін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданған тиімді [14, 133 б.].

Сонда (1.38) қатарын (1.36) теңдеуіне қою арқылы келесі қатынас алынады:

$$x^{\rho-1}\{A_0f_0(\rho)+[A_1f_0(\rho+1)+A_0f_1(\rho)]x+[A_2f_0(\rho+2)+A_1f_1(\rho+1)+A_0f_2(\rho)]x^2+...\}=x^{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j x^j.$$

$A_j,\ (j=0,1,...)$ коэффициенттері келесі

$$\begin{array}{l} A_0f_0(\rho)=\alpha_0, \\ A_1f_0(\rho+1)+A_0f_1(\rho)=\alpha_1, \\ A_2f_0(\rho+2)+A_1f_1(\rho+1)+A_0f_2(\rho)=\alpha_2, \\ \text{-----------------------------} \\ A_kf_0(\rho+k)+A_{k-1}f_1(\rho+k-1)+...+A_0f_k(\rho)=\alpha_k, \\ \text{-----------------------------} \end{array} \tag{1.39}$$

рекурентті жүйені қанағаттандырған жағдайда ғана, ол (1.36) теңдеудің формальды дербес шешімі болады.

1.7-теорема. Біртекті емес

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(1+\beta_1+\beta_2)\,x\frac{d^2y}{dx^2}+\beta_1\beta_2\frac{dy}{dx}-y=x^{\rho} \tag{1.40}$$

туындалған гипергеометриялық теңдеудің дербес шешімі

$$Y(x)=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\rho)_n\,(\rho-1+\beta_1)_n\,(\rho-1+\beta_2)_n}x^n=x^{\rho}F\left(\begin{matrix}-\\ \rho,\quad \rho-1+\beta_1,\quad \rho-1+\beta_2\end{matrix}\middle|x\right) \qquad (1.41)$$

түрінде табылады.

Дәлелдеу. Дәлелдеу үшін Фробениус-Латышева әдісі пайдаланылады [14, 148-162 б.]. Осы мақсатта (1.40) теңдеуге $y=x^{\lambda}$ ауыстыруын енгізе отырып, Фробениус характеристикалық функциясы құрылады:

$$L[x^{\lambda}]\equiv x^{\lambda-1}\{[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+(1+\beta_1+\beta_2)\lambda(\lambda-1)+\beta_1\beta_2\lambda]-x\}=x^{\rho}. \qquad (1.42)$$

Бұдан, $x=0$ ерекше нүктеге қатысты айқындауыш теңдеу

$$f_0(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+(1+\beta_1+\beta_2)\lambda(\lambda-1)+\beta_1\beta_2\lambda=0$$

түрінде анықталады және $\lambda_1=0, \lambda_2=1-\beta_1, \lambda_3=1-\beta_2$ үш түбірі бар болады. Олай болса, айқындауыш теңдеу

$$f_0(\lambda)=\lambda(\lambda-1+\beta_1)(\lambda-1+\beta_2)=0$$

түрінде құрылады.

(1.42) қатынастан $\lambda-1=\rho$ немесе $\lambda=\rho+1$ деген қорытынды жасалынды. Сондықтан $x=0$ ерекше нүктесіне қатысты айқындауыш теңдеуін

$$f_0(\rho)=(\rho+1)(\lambda+\beta_1)(\lambda+\beta_2)=0$$

түрінде жазуға болады .

Біртекті емес (1.40) теңдеудің шешімі (1.41) жалпыланған дәрежелік қатары түрінде ізделінеді. $A_i, (i=0,1,2,...)$ белгісіз коэффициенттерді $\alpha_0\neq 0,$ болған жағдайда (1.39) рекуррентті жүйенің бірінші қатынасынан бастап анықтауға болады:

$$A_0=\frac{1}{(\rho+1)(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)}, \quad (\alpha_0=1).$$

Одан әрі, $A_i, (i=0,1,2,...)$ коэффициенттерін анықтай отырып, келесі қатар құрылды:

$$Y(x)=\{\frac{x^{\rho+1}}{(\rho+1)(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)}+\frac{x^{\rho+2}}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+\beta_1)(\rho+1+\beta_1)(\rho+\beta_2)(\rho+1+\beta_2)}+$$
$$+\frac{x^{\rho+3}}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)(\rho+\beta_1)(\rho+1+\beta_1)(\rho+2+\beta_1)(\rho+\beta_2)(\rho+1+\beta_2)(\rho+2+\beta_2)}+...\}=$$
$$=\frac{x^{\rho+1}}{(\rho+1)(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)}\{1+\frac{x}{(\rho+1)(\rho+1+\beta_1)(\rho+1+\beta_2)}+ \qquad (1.43)$$
$$+\frac{x^2}{(\rho+2)(\rho+1)(\rho+1+\beta_1)(\rho+2+\beta_1)(\rho+1+\beta_2)(\rho+2+\beta_2)}+...\}=$$
$$=x^{\rho+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\rho+1)_n\,(\rho+\beta_1)_n\,(\rho+\beta_2)_n}x^n,$$

мұнда

$$(\rho+1)_n=(\rho+1)(\rho+2)...(\rho+n),$$
$$(\rho+\beta_1)_n=(\rho+\beta_1)(\rho+1+\beta_1)...(\rho+\beta_1+n)$$

белгілеулері қолданылған.

Алынған (1.43) қатар туындалған гипергеометриялық (1.40) теңдеудің дербес шешімін береді. Дәлелдеу керегі де осы болатын.

1.6 және 1.7-теоремалар негізінде төмендегі жалпы теореманы тұжырымдауға болады.

1.8-теорема. Біртекті емес туындалған (1.40) Клаузен теңдеуінің жалпы шешімі біртекті туындалған (1.10) Клаузен теңдеуінің жалпы шешімі мен (1.41) дербес шешімінің қосындысынан тұрады:

$$y(x)=\bar{y}(x)+K_{\rho=\lambda}\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1, & \beta_2\end{matrix}\middle| x\right)=AF\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1, & \beta_2\end{matrix}\middle| x\right)+B\,x^{1-\beta_1}\times$$
$$\times F\left(\begin{matrix}-, & - \\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1\end{matrix}\middle| x\right)+C\,x^{1-\beta_2}\,F\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2\end{matrix}\middle| x\right)+$$
$$+x^{\rho+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\rho+1)_n\,(\rho+\beta_1)_n\,(\rho+\beta_2)_n}x^n,$$

мұндағы $A,B,C-$ кез-келген тұрақтылар.

Теореманың дәлелдеуі 1.6 және 1.7-теоремалардың дәлелдеулерінде келтірілген.

Жалпыланған гипергеометриялық Клаузен функциясының дифференциалдану қасиеті.

Жалпыланған гипергеометриялық (1.8) Клаузен функциясында

- бірінші ретті туынды:

$$\frac{\partial F\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1, & \beta_2\end{matrix}\middle| x\right)}{\partial x}=\{\frac{1}{\beta_1\beta_2}+\frac{1}{\beta_1(\beta_1+1)\beta_2(\beta_2+1)}x+$$

$$+\frac{1}{\beta_1(\beta_1+1)(\beta_1+2)\beta_2(\beta_2+1)(\beta_2+2)}x^2+...\}=$$

$$=\frac{1}{\beta_1\beta_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta_1+1)_n(\beta_2+1)_n}\frac{x^n}{n}=\frac{1}{\beta_1\beta_2}F\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1+1, & \beta_2+1\end{matrix}\middle| x\right),$$

- жоғары ретті туынды:

$$\frac{\partial^2 F\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1, & \beta_2\end{matrix}\middle| x\right)}{\partial x^2}=\frac{1}{\beta_1(\beta_1+1)\beta_2(\beta_2+1)}F\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1+2, & \beta_2+2\end{matrix}\middle| x\right),$$

$$\frac{\partial^n F\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1, & \beta_2\end{matrix}\middle| x\right)}{\partial x^n}=\frac{1}{\beta_1(\beta_1+1)...(\beta_1+n-1)\beta_2(\beta_2+1)...(\beta_2+n-1)}F\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1+n, & \beta_2+n\end{matrix}\middle| x\right)$$

түрлерінде анықталады.

Сол сияқты екінші және үшінші шешімдердің туындыларын да табуға болады:

$$y_2(x)=x^{1-\beta_1}F\left(\begin{matrix}-, & - \\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1\end{matrix}\middle| x\right) \tag{1.44}$$

$$y_3(x)=x^{1-\beta_2}F\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2\end{matrix}\middle| x\right). \tag{1.45}$$

Олардың туындыларын анықтау үшін төмендегі жалпы формула қолданылды [88, 169 бет]:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\sigma}\ {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_p \\ \beta_q\end{matrix}\middle| x\right)\right]=(\sigma-m+1)_m\, x^{\sigma-m}\ {}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix}\sigma+1, & \alpha_p \\ \sigma+1-m, & \beta_q\end{matrix}\middle| x\right). \tag{1.46}$$

(1.44) және (1.45) дербес шешімдердің $m-$ші ретті туындысы

$$\frac{d^m y_2}{dx^m}=\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{1-\beta_1}\ {}_0F_2\left(\begin{matrix}-, & - \\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1\end{matrix}\middle| x\right)\right]=(2-\beta_1-m)_m\, x^{1-\beta_1-m}\ {}_0F_3\left(\begin{matrix}2-\beta_1, & - \\ 2-\beta_1-m, & \beta_2+1-\beta_1\end{matrix}\middle| x\right),$$

$$\frac{d^m y_1}{dx^m}=\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{1-\beta_2}\ {}_0F_2\left(\begin{matrix}-, & - \\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2\end{matrix}\middle| x\right)\right]=(2-\beta_2-m)_m\, x^{1-\beta_2-m}\ {}_0F_3\left(\begin{matrix}2-\beta_2, & - \\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2-m\end{matrix}\middle| x\right)$$

түрлерінде анықталады.

2 ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ЕКІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДЕН ТҰРАТЫН БІРТЕКТІ ЕМЕС ЖҮЙЕНІҢ ШЕШІМДЕРІН ҚҰРУ

2.1 Біртекті емес гипергеометриялық текті жүйелердің шешімдерін құру

Бөлім екінші және үшінші ретті екі дербес туындылы дифференциалдық теңдеуден тұратын

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^h\right)x^j y^k p_{j,k} &= f_1(x,y) \\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^h\right)x^j y^k p_{j,k} &= f_2(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

$$p_{j,k}=\frac{\partial^{j+k}Z(x,y)}{\partial x^j \partial y^k}, \qquad (j\ge 0, k\ge 0),$$

$$p_{0,0}(x,y)=Z(x,y), \quad (j=0,k=0)$$

біртекті емес жүйені зерттеуге арналған, мұндағы $p_{0,0}(x,y)=Z(x,y)$, $(j=0,k=0)$ (2.1) жүйесінің екі теңдеулері үшін ортақ белгісіз; $p_{j,k}$ арқылы $Z(x,y)$ белгісізінің әртүрлі реттегі дербес туындылары белгіленген, демек, $j,k-$ теріс емес бүтін сандар, $h-$ натурал сан, $r_{j,k},\alpha_{j,k},t_{j,k},\beta_{j,k},\ (j,k=0,1,2)-$ тұрақты коэффициенттер; $f_i(x,y),\ (i=1,2)-$ аналитикалық функция немесе екі айнымалылы көпмүшелік.

Жүйе реті ω белгісіне байланысты. Егер $f_i(x,y)=0$ және $\omega=1$ болса, онда

$$\begin{aligned} &x^2\left(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x^h\right)p_{2,0}+xy\left(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x^h\right)p_{1,1}+x\left(r_{1,0}-\alpha_{1,0}x^h\right)p_{1,0}+y\left(r_{0,1}-\alpha_{0,1}x^h\right)p_{0,1}+ \\ &+\left(r_{0,0}-\alpha_{0,0}x^h\right)p_{0,0}=0, \\ &y^2\left(t_{0,2}-\beta_{0,2}y^h\right)p_{0,2}+xy\left(t_{1,1}-\beta_{1,1}y^h\right)p_{1,1}+x\left(t_{1,0}-\beta_{1,0}y^h\right)\cdot p_{1,0}+y\left(t_{0,1}-\beta_{0,1}y^h\right)p_{0,1}+ \\ &+\left(t_{0,0}-\beta_{0,0}y^h\right)p_{0,0}=0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

екінші ретті жүйе алынады, мұндағы $p_{0,0}(x,y)=Z(x,y)-$ ортақ белгісіз, $r_{j,k},\alpha_{j,k},t_{j,k},\beta_{j,k},\ (j,k=0,1,2)-$ тұрақтылар; (2.1) жүйенің коэфициенттері екі айнымалылы көпмүшеліктер.

$h=1$ жағдайы жақсы зерттелген. Я. Горн белгілі 34 екі айнымалылы гипергеометриялық функцияның біртекті (2.2) жүйесінің дербес жағдайларының шешімдері болатынын дәлелдеген [4, 124-135 б.].

F_1-F_4 Аппель функциялары да (2.2) жүйенің дербес жағдайларының шешімдері болып табылады.

$h=2$ болғанда, шешімдері екі айнымалылы ортогональ көпмүшелік болатын жүйелер алынады. Осылайша, біз енгізген (2.2) жүйенің шешімдері қырықтан астам екі айнымалылы арнайы функциялар болып табылады. Бұл байланысты орнату екі айнымалылы гипергеометриялық функциялардың мәндерін жуықтап есептеу кезінде маңызды. Осы бағыттағы зерттеу жұмыстары американдық ғалым О.И. Маричевтің еңбектерінде кездеседі [78, 108 б.].

Мұндай жүйелерді зерттегенде ең алдымен үйлесімділік пен интегралдану шарттары орнатылуы қажет. Осы шарттар орындалғанда ғана біртекті (2.2) жүйеде төрт шешімге дейін бар болады.

(2.1) жүйені зерттеу екі кезеңнен тұрады. Біріншіден, біз екінші ретті біртекті жүйенің шешімдерін құрумен айналысамыз. Алда шешімдері екі айнымалылы ортогональ көпмүшелік болатын біртекті жүйелер туралы қысқаша ақпарат беріледі. Екінші кезеңде гипергеометриялық текті екінші ретті біртекті емес жүйенің дербес шешімін құру мүмкіндігі қарастырылады. Одан әрі, үшінші ретті теңдеулерден тұратын жүйенің шешімін құру ерекшеліктері зерттеледі.

2.1.1 Шешімдері екі айнымалылы ортогональ көпмүшелік болатын біртекті емес жүйелер

Бұл бөлімшеде екінші ретті дербес туындылы екі дифференциалдық теңдеуден тұратын

$$\begin{aligned} &x^2 g_0 p_{2,0} + xyg_1 p_{1,1} + xg_3 p_{1,0} + yg_4 p_{0,1} + g_5 p_{0,0} = g_6(x,y), \\ &y^2 q_0 p_{0,2} + xyq_1 p_{1,1} + xq_3 p_{1,0} + yq_4 p_{0,1} + q_5 p_{0,0} = q_6(x,y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

жүйе зерттеледі. Жүйенің коэфициенттері

$$g_i(x,y) = r_{j,k} - \alpha_{j,k} x^k, \quad q_i(x,y) = t_{j,k} - \beta_{j,k} y^k \tag{2.4}$$

түрінде, мұндағы $g_6(x,y)$ және $q_6(x,y)-$екі айнымалылы аналитикалық функциялар, $p_{0,0} = Z(x,y)-$ортақ белгісіз, $r_{j,k}, \alpha_{j,k}, t_{j,k}, \beta_{j,k}, \ (j,k = \overline{0,2};\ i = \overline{1,5}) -$ тұрақтылар.

Сәйкесінше біртекті жүйе гипергеометриялық текті немесе оларға келтіретін біртекті емес (2.3) жүйенің екі айнымалылы ортогональ көпмүшелік түріндегі шешімдерін табу мүмкіндіктерін зерттеу талап етіледі.

(2.3) жүйенің бірқатар дербес жағдайлары зерттелген [7, 102-138 б.; 11, 102-127 б.].

2.1-теорема. [28, 10 б.] Біртекті емес (2.3) жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{aligned} &x^2\left(r_{2,0} - \alpha_{2,0}x^h\right)p_{2,0} - xy\left(r_{1,1} - \alpha_{1,1}x^h\right)p_{1,1} + x\left(r_{1,0} - \alpha_{1,0}x^h\right)p_{1,0} + y\left(r_{0,1} - \alpha_{0,1}x^h\right)p_{0,1} + \\ &+ \left(r_{0,0} - \alpha_{0,0}x^h\right)p_{0,0} = 0, \\ &y^2\left(t_{0,2} - \beta_{0,2}y^h\right)p_{0,2} - xy\left(t_{1,1} - \beta_{1,1}y^h\right)p_{1,1} + x\left(t_{1,0} - \beta_{1,0}y^h\right)p_{1,0} + y\left(t_{0,1} - \beta_{0,1}y^h\right)p_{0,1} + \\ &+ \left(t_{0,0} - \beta_{0,0}y^h\right)p_{0,0} = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

біртекті жүйенің

$$\overline{Z} = \sum_{j=1}^{4} C_j Z_j(x,y)$$

жалпы шешімі мен біртекті емес (2.3) жүйенің $Z_0(x,y)$ дербес шешімінің қосындыларынан тұрады:

$$Z(x,y) = \overline{Z}(x,y) + Z_0(x,y) = \sum_{j=1}^{4} C_j Z_j(x,y) + Z_0(x,y). \tag{2.6}$$

Біртекті (2.5) жүйенің жалпы теориясына сәйкес үйлесімділік шарты [11, 115 б.] және

$$1 - \frac{xy\left(r_{1,1} - \alpha_{1,1}x^h\right)}{x^2\left(r_{2,0} - \alpha_{2,0}x^h\right)} \frac{xy\left(t_{1,1} - \beta_{1,1}y^h\right)}{y^2\left(t_{0,2} - \beta_{0,2}y^h\right)} \neq 0 \tag{2.7}$$

интегралдану шарты орындалғанда, оның төрт сызықты тәуелсіз дербес шешімдері бар болуы мүмкін.

Коэффициенттері (2.4) түріндегі біртекті емес (2.3) жүйенің қасиеттері аз зерттелген. Әсіресе, шешімдері көп айнымалылы ортогональ көпмүшеліктер болатын біртекті емес жүйелер аз қарастырылған. Гипергеометриялық түрге сәйкес біртекті жүйенің, екі айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық функцияларымен байланысы бұрыннан белгілі екендігін екере отырып, Ш.Эрмиттің мысалы негізінде оның біртекті емес жүйесінің шешімдерін құруға көшейік.

2.2-теорема. Біртекті емес

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)p_{2,0} - xyp_{1,1} + (n-2)xp_{1,0} - (m+1)yp_{0,1} + (m+n)(m+1)p_{0,0} = g(x,y),\\
&(1-y^2)p_{0,2} - xyp_{1,1} - (n+1)xp_{1,0} + (m-2)yp_{0,1} + (m+n)(n+1)p_{0,0} = q(x,y)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Эрмит жүйесінің оң жағы

$$g(x,y) = (m+n)(m+1) + \frac{(n-2)+(m+n)(m+1)}{n+1}x + (m+n-1)y + \frac{n-m-4+(m+n)(m+1)}{m+1}xy,$$

$$q(x,y) = (m+n)(n+1) + (m+n-1)x + \frac{(m-2)+(m+n)(n+1)}{m+1}y + \frac{m-n-4+(m+n)(n+1)}{(n+1)(m+1)}xy$$

түрінде берілсе, онда (2.8) жүйенің жалпы шешімі, біртекті жүйенің жалпы шешімі мен біртекті емес (2.8) жүйенің $Z_0(x,y)$ дербес шешімінің қосындысынан тұрады.

Дәлелдеу. Сәйкесінше біртекті жүйенің жалпы шешімінің

$$Z(x,y)=C_{1,1}F_2\left(-\frac{m+n}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2};x^2,y^2\right)+$$
$$+C_{1,2}yF_2\left(-\frac{m+n-1}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n+2}{2};\frac{1}{2},\frac{3}{2};x^2,y^2\right)+$$
$$+C_{1,3}xF_2\left(-\frac{m+n-1}{2},\frac{m+2}{2},\frac{n+1}{2};\frac{3}{2},\frac{1}{2};x^2,y^2\right)+ \tag{2.9}$$
$$+C_{1,4}xyF_2\left(-\frac{m+n-2}{2},\frac{m+2}{2},\frac{n+2}{2};\frac{3}{2},\frac{3}{2};x^2,y^2\right)$$

түрінде болатындығы белгілі. Мұны көрсету үшін $x^2=u,\ \ y^2=v$ түрлендіруін қолданып гипергеометриялық текті жүйені аламыз, әрі қарай Фробениус-Латышева әдісін қолданып, Ш.Эрмиттің қарастырған мысалындағыдай шешімдерді құрамыз [1, 125 б.]. Нәтижесінде шешімдері Аппельдің F_2 гипергеометииялық функциясы арқылы өрнектелетін жүйе алдық және жалпы шешім (2.9) түрінде құрылды. Ол

$$u(1-u)p_{2,0}-uvp_{1,1}+\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}+1\right)u\right]p_{1,0}-\frac{m+1}{2}vp_{0,1}-\frac{m+n}{2}\frac{m+1}{2}p_{0,0}=0,$$
$$v(1-v)p_{0,2}-uvp_{1,1}+\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{2}+1\right)v\right]p_{0,1}-\frac{n+1}{2}up_{1,0}-\frac{m+n}{2}\frac{n+1}{2}p_{0,0}=0$$

біртекті жүйеден анықталды.

(2.8) жүйенің дербес шешімін құру үшін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданамыз. Оң жақ бөлігінің $g(x,y)$ және $q(x,y)$ берілуіне байланысты

$$Z_0(x,y)=A_{0,0}+A_{1,0}x+A_{0,1}y+A_{1,1}xy \tag{2.10}$$

көпмүшелік түріндегі дербес шешім ізделінеді.

(2.10) көпмүшелігін біртекті емес (2.8) жүйеге қойып $A_{j,k},\ (j,k=\overline{0,1})$ белгісіз коэффициентері анықталады. Нәтижесінде дербес шешім

$$Z_0(x,y)=1+\frac{1}{n+1}x+\frac{1}{m+1}y-\frac{1}{(m+1)(n+1)}xy \tag{2.11}$$

көпмүшелігі түрінде табылады.

Сондықтан, сәйкес біртекті жүйенің (2.9) жалпы шешімін ескере отырып, біртекті емес (2.8) жүйенің жалпы шешімі

$$Z(x,y)=\overline{Z}(x,y)+Z_0(x,y)=C_{1,1}\,F_2\left(-\frac{m+n}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2};x^2,y^2\right)+$$
$$+C_{1,2}\,y\,F_2\left(-\frac{m+n-1}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n+2}{2};\frac{1}{2},\frac{3}{2};x^2,y^2\right)+$$
$$+C_{1,3}\,x\,F_2\left(-\frac{m+n-1}{2},\frac{m+2}{2},\frac{n+1}{2};\frac{3}{2},\frac{1}{2};x^2,y^2\right)+$$
$$+C_{1,4}\,x\,y\,F_2\left(-\frac{m+n-2}{2},\frac{m+2}{2},\frac{n+2}{2};\frac{3}{2},\frac{3}{2};x^2,y^2\right)+$$
$$+1+\frac{1}{n+1}x+\frac{1}{m+1}y+\frac{1}{(m+1)(n+1)}xy$$

түрінде анықталады. Теорема дәлелденді.

Біртекті емес жүйенің шешімін құрумен қатар, оның екі теңдеуін қосу арқылы алынған

$$\left(1-x^2\right)p_{2,0}-2xyp_{1,1}+\left(1-y^2\right)p_{0,2}-3\left(xp_{1,0}+yp_{0,1}\right)+(m+n)(m+n+2)p_{0,0}=g(x,y)+q(x,y)\quad(2.12)$$

екінші ретті біртекті емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің де дербес шешімі (2.11) түрінде анықталады. Анықталмаған коэффициенттер әдісімен (2.11) көпмүшеліктің біртекті емес (2.12) теңдеудің дербес шешімі екендігіне көз жеткізу оңай.

Келесі бөлімде жоғарыда келтірілген екінші ретті жүйенің белгілі қасиеттері үшінші ретті екі теңдеуден тұратын жалпы жүйелерге жалпыланады, сонымен қатар үшінші ретті гипергеометриялық текті жүйенің ерекшеліктері орнатылады.

2.2 Үшінші ретті дербес туындылы екі дифференциалдық теңдеудің шешімі

Алдыңғы 2.1-бөлімшесінде (2.1) екінші ретті екі біртекті емес дербес дифференциалдық теңдеулердің шешімдері туралы қысқаша ақпарат берілді. Жалпы (2.1) жүйеден

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^h\right)x^jy^kp_{j,k}=0\\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^h\right)x^jy^kp_{j,k}=0\end{aligned}\right\}\quad(2.13)$$

біртекті жүйе алынады, мұндағы $p_{0,0}(x,y)=Z(x,y),\,(j=0,k=0)-$ (2.13) жүйесінің екі теңдеуінің ортақ белгісізі; $\omega=1$ болғанда $p_{j,k}$ арқылы $Z(x,y)$ белгісізінің әртүрлі реттегі дербес туындылары белгіленген.

$\omega=2$ болғанда, (2.13) жүйеден үшінші ретті жүйе алынады. $h=0,$ $h=1,\,h\geq 2$ әртүрлі мәндеріне сай алынатын жүйенің шешімдерін құру мүмкіндіктерін қарастыру маңызды. $h=1$ болғанда Кампе де Ферье жүйесіне сәйкес жүйе алынады [1, 115 б.].

Үшінші ретті дербес туындылы екі дифференциалдық теңдеуден тұратын

$$\begin{aligned} &x^3 g^{(0)} p_{3,0} + x^2 y g^{(1)} p_{2,1} + x^2 g^{(2)} p_{2,0} + xyg^{(3)} p_{1,1} + xg^{(4)} p_{1,0} + yg^{(5)} p_{0,1} + g^{(6)} p_{0,0} = 0, \\ &y^3 q^{(0)} p_{0,3} + xy^2 q^{(1)} p_{1,2} + y^2 q^{(2)} p_{0,2} + xyq^{(3)} p_{1,1} + xq^{(4)} p_{1,0} + yq^{(5)} p_{0,1} + q^{(6)} p_{0,0} = 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

біртекті жүйенің шешімдерін құру ерекшеліктерін қарастырайық, мұнда, $p_{j,k}$ арқылы $z(x,y)$ белгісізінің әртүрлі реттегі дербес туындылары белгіленген; $p_{0,0}(x,y)=z(x,y),\ (j=0,\ k=0)-$ ортақ белгісіз және коэффициенттері

$$\begin{aligned} &g^{(i)} = g^{(i)}(x,y) = a_{0,0}^{(i)} - a_{1,0}^{(i)} x, \\ &q^{(i)} = q^{(i)}(x,y) = b_{0,0}^{(i)} - b_{0,1}^{(i)} y, \quad (i=\overline{0,6}) \end{aligned} \tag{2.15}$$

түріндегі функциялар.

(2.14) теңдеулер жүйесінің регуляр және иррегуляр ерекшеліктерінің классификациясын жасау және әрбір ерекше нүктелер маңайындағы сәйкес шешімдердің түрлерін орнату керек. Әрбір ерекше нүктелер маңайларындағы сызықты тәуелсіз шешімдердің жалпы сандары анықталуы тиіс.

2.2.1 Ортақ шешімінің бар болу шарттары

(2.14) теңдеулер жүйесінің шешімдері бар болуы үшін бірқатар шарттар орындалуы керек, олардың негізгілеріне тоқталайық:

1. Үйлесімділік шарты орындалуы міндетті. Жалпы жағдайда бұл шартты тексеру күрделі. Сондықтан шарт нақты жүйелер үшін орнатылады және шешімдері екі айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық функциялар болатын жүйелерде Кампе де Ферье [19, 155 б.] әдісі қолданылады.

2. Интегралдану шарты

$$1 - \frac{g^{(1)}}{g^{(0)}} \cdot \frac{q^{(1)}}{q^{(0)}} \neq 0. \tag{2.16}$$

3. Белгісіз функция $p_{0,0} = Z(x,y)$ екі айнымалылыға тәуелді, сондықтан, шешімдерді жалпыланған, қалыпты және қалыпты-регуляр қатарлар түрінде іздеген дұрыс.

4. Егер (2.14) жүйесінің жоғары ретті туындыларының жанындағы $p_{3,0}$ және $p_{0,3}$ коэффициенттері $x^3 g^{(0)}(x,y) \equiv 1$ және $y^3 g^{(0)}(x,y) \equiv 1$ болса, онда шешімді екі айнымалылы қарапайым қатар түрінде іздеуге болады, өйткені ерекшеліктері жоқ. Одан кейін, (2.14) жүйесінің сызықты тәуелсіз дербес шешімінің саны анықталуы керек.

5. Жүйенің ерекше қисықтары $p_{3,0} = Z_{xxx}$ және $p_{0,3} = Z_{yyy}$ бас туындыларының жанындағы коэффициенттерді

$$x^3(a_{0,0}^{(0)} - a_{1,0}^{(0)}x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{a_{0,0}^{(0)}}{a_{1,0}^{(0)}}$$

$$y^3(b_{0,0}^{(0)} - b_{0,1}^{(0)}y) = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{b_{0,0}^{(0)}}{b_{0,1}^{(0)}}$$

нөльге теңеу арқылы анықталады. Олардан келесі қос мәндер жасақталады: $(0,0), \left(0, b_{0,0}^{(0)}/b_{0,1}^{(0)}\right), \left(a_{0,0}^{(0)}/a_{0,1}^{(0)}, 0\right), \left(a_{0,0}^{(0)}/a_{0,1}^{(0)}, b_{0,0}^{(0)}/b_{0,1}^{(0)}\right)$ – ақырлы ерекшеліктер; $(0,\infty), (\infty,0), \left(\infty, b_{0,0}^{(0)}/b_{0,1}^{(0)}\right), \left(a_{0,0}^{(0)}/a_{0,1}^{(0)}, \infty\right)$ – ақырсыз шексіздіктегі ерекшеліктер. Әдетте шешімдерді құру кезінде $(0,0)$ және (∞,∞) түріндегі екі ерекше қисығы маңайы қарастырылады. Регуляр және иррегуляр ерекшеліктерді классификациялау үшін бұрын келтірілген қарапайым ережелер қолданылады:

2.1-ереже. Егер (2.14) теңдеулер жүйесіндегі коэффициенттер $a_{0,0}^{(0)} \neq 0, b_{0,0}^{(0)} \neq 0$ болса, онда $(0,0)$ ерекше қисығы регуляр ерекше қисық болады да, $a_{0,0}^{(0)} = 0, b_{0,0}^{(0)} = 0$ орындалса ирррегуляр ерекше қисық болады.

2.2-ереже. Егер (2.14) теңдеулер жүйесіндегі коэффициенттер $a_{1,0}^{(0)} \neq 0, b_{0,1}^{(0)} \neq 0$ болса, онда (∞,∞) ерекше қисығы регуляр ерекше қисық болады да, $a_{1,0}^{(0)} = 0, b_{0,1}^{(0)} = 0$ орындалса ирррегуляр ерекше қисық болады[14, 22-95 б.].

2.2.2 Фробениус-Латышева әдісі бойынша шешімді құру ерекшеліктері

Фробениус-Латышева әдісі ерекше қисықтар маңайындағы жүйенің шешімдерінің түрін алдын ала анықтауға мүмкіндік береді.

Сонымен, $(0,0)$ ерекше қисығы регуляр болғанда шешім

$$Z(x,y) = x^\rho y^\sigma \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} x^m y^n \tag{2.17}$$

екі айнымалылы жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ізделінеді, мұндағы ρ, σ және $A_{m,n}$, $(m,n = 0,1,2,3,...)$ – тұрақты белгісіздер.

Егер $(0,0)$ ерекше қисығы иррегуляр болса, онда шешім

$$Z(x,y) = \exp Q(x,y) x^\rho y^\sigma \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} x^m y^n, \qquad \left(A_{0,0} \neq 0\right) \tag{2.18}$$

түрінде ізделінеді, мұндағы $Q(x,y)$ – екі айнымалылы,

$$Q(x,y) = \frac{x^p \alpha_{p,0}}{p} + \frac{y^p \alpha_{0,p}}{p} + ... + \alpha_{1,1}xy + \alpha_{1,0}x + \alpha_{0,1}y$$

коэффициенттері $\alpha_{p,0},\alpha_{0,p},...,\alpha_{1,1},\alpha_{1,0},\alpha_{0,1}$ түріндегі анықталмаған параметрлі көпмүшелік.

Сәйкесінше, (∞,∞) регуляр ерекше қисығы маңайындағы шешім

$$Z(x,y)=x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}B_{m,n}x^{-m}y^{-n}, \quad \left(B_{0,0}\neq 0\right) \tag{2.19}$$

түрінде, ал иррегуляр ерекше қисығы маңайындағы шешім

$$Z(x,y)=\exp Q(x,y)x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}B_{m,n}x^{-m}y^{-n}, \quad \left(B_{0,0}\neq 0\right) \tag{2.20}$$

түрінде ізделінеді, мұндағы ρ,σ және $B_{m,n}$, $(m,n=0,1,2,3,...)$ – тұрақты белгісіздер.

$Q(x,y)$ – көпмүшелігі (2.18), (2.20) қатарлары үшін ортақ болып табылады. Оның дәрежесі

$$p=1+k, \quad k=\max_{(1\le s\le n)}\frac{\beta_s-\beta_0}{s}$$

жай дифференциалдық теңдеулерді зерттеу үшін А. Пуанкаре енгізген ранг мәнімен анықталады, ал β_0,β_s – коэффициенттердің ең үлкен дәреже көрсеткіштері [57, 48-59 б.].

Фробениус-Латышева әдісін қолдануды, Фробениус характеристикалық функциялар жүйесін құрудан бастаймыз.

2.1-анықтама. Коэффициенттері (2.15) түріндегі (2.14) жүйеден $Z=x^{\rho}y^{\sigma}$ ауыстыруы арқылы алынған

$$\begin{aligned} L_1\left[x^{\rho}y^{\sigma}\right]&\equiv x^{\rho}y^{\sigma}\left[f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma)+f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma)x\right],\\ L_2\left[x^{\rho}y^{\sigma}\right]&\equiv x^{\rho}y^{\sigma}\left[f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma)+f_{0,1}^{(2)}(\rho,\sigma)y\right] \end{aligned} \tag{2.21}$$

жүйе Фробениус характеристикалық функциялар жүйесі деп аталады, мұнда

$$\begin{aligned} f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma)&=a_{0,0}^{(0)}\rho(\rho-1)(\rho-2)+a_{0,0}^{(1)}\rho(\rho-1)\sigma+a_{0,0}^{(2)}\rho(\rho-1)+a_{0,0}^{(3)}\rho\sigma+a_{0,0}^{(4)}\rho+a_{0,0}^{(5)}\sigma+a_{0,0}^{(6)},\\ f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma)&=b_{0,0}^{(0)}\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+b_{0,0}^{(1)}\rho\sigma(\sigma-1)+b_{0,0}^{(2)}\sigma(\sigma-1)+b_{0,0}^{(3)}\rho\sigma+b_{0,0}^{(4)}\rho+b_{0,0}^{(5)}\sigma+b_{0,0}^{(6)},\\ f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma)&=a_{1,0}^{(0)}\rho(\rho-1)(\rho-2)+a_{1,0}^{(1)}\rho(\rho-1)\sigma+a_{1,0}^{(2)}\rho(\rho-1)+a_{1,0}^{(3)}\rho\sigma+a_{1,0}^{(4)}\rho+a_{1,0}^{(5)}\sigma+a_{1,0}^{(6)},\\ f_{0,1}^{(2)}(\rho,\sigma)&=b_{0,1}^{(0)}\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+b_{0,1}^{(1)}\rho\sigma(\sigma-1)+b_{0,1}^{(2)}\sigma(\sigma-1)+b_{0,1}^{(3)}\rho\sigma+b_{0,1}^{(4)}\rho+b_{0,1}^{(5)}\sigma+b_{0,1}^{(6)} \end{aligned}$$

белгілеулері енгізілген. (2.21) жүйеден $(0,0)$ және (∞,∞) ерекшеліктеріне қатысты айқындауыш теңдеулер жүйелері анықталады.

2.2-анықтама. $(0,0)$ ерекше нүктесіне қатысты айқындауыш теңдеулер жүйесі деп

$$f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=0, \quad (j=1,2) \tag{2.22}$$

түріндегі (2.17) және (2.18) қатарлардың көрсеткіштері (ρ_t, σ_t) жұбы түрінде анықталатын жүйені айтады.

2.3-анықтама. (∞,∞) ерекше нүктесіне қатысты айқындауыш теңдеулер жүйесі деп

$$\begin{aligned} &f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma)=0, \\ &f_{0,1}^{(2)}(\rho,\sigma)=0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

түріндегі (2.19) және (2.20) қатарлардың көрсеткіштері ішінен (ρ_t, σ_t) жұбы түрінде анықталатын жүйені айтады.

Бұл жұптарда t индексін анықтау маңызды, себебі осындай жұптардың саны бізге (2.17) қорытынды нәтижесінің жақыннан қарағандағы ерекшеліктерінің тәуелсіз сызықтық дербес шешімдердің санын білуге көмектеседі.

2.1-лемма. Коэффициенттері (2.15) түріндегі (2.14) жүйенің $(0,0)$ ерекше нүкте маңайындағы (2.17) түріндегі шешімі болуы үшін (2.22) теңдік орын алуы қажет.

2.2-лемма. Коэффициенттері (2.15) түріндегі (2.14) жүйенің (∞,∞) ерекше нүкте маңайындағы (2.19) түріндегі шешімі болуы үшін (2.23) теңдік орын алуы қажет.

(2.22) және (2.23) айқындауыш теңдеулер жүйесінің қанша түбірлері бар екенін анықтайық. Ол үшін (2.22) жүйені (2.21) жүйенің алғашқы екі функциясын қолданып, ашып жазамыз.

$f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma)=0$ айқындауыш теңдеуінен

$$\sigma=\frac{a_{0,0}^{(0)}\rho(\rho-1)(\rho-2)+a_{0,0}^{(2)}\rho(\rho-1)+a_{0,0}^{4}\rho+a_{1,0}^{(6)}}{a_{0,0}^{(1)}\rho(\rho-1)+a_{0,0}^{(3)}\rho+a_{0,0}^{(5)}}$$

мәнін анықтап, оны (2.22) жүйенің екінші $f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma)=0$ теңдеуіне қойып, $\rho-$ны жойғаннан кейін $\sigma-$ға қатысты тоғызыншы дәрежелі теңдеу алынады. Тек жай түбірлер болса, онда алынған теңдеуден $\sigma_t, \left(t=\overline{1,9}\right)$ тоғыз түбір анықталады. Дәл осылай тоғыз $\rho_t, \left(t=\overline{1,9}\right)$ жай түбірлерін анықтауға болады. Табылған түбірлерден (2.22) жүйенің түбірлерінің тоғыз (ρ_t,σ_t) $\left(t=\overline{1,9}\right)$ жұбы анықталады, бұл бізге (2.22) жүйенің тоғыз сызықтық тәуелсіз дербес шешімдерін $(0,0)$ ерекше қисығы маңайында құруға мүмкіндік береді. Сондықтан да келтірілген нәтижелерді пайдалана отырып, келесі тұжырымдардың орынды екендігін көреміз.

2.1-тұжырым. Егер коэффициенттері (2.15) түріндегі (2.14) үйлесімді жүйесінде $a_{0,0}^{(0)} \neq 0, b_{0,0}^{(0)} \neq 0$ және (2.16) интегралдану шарты орындалса, онда (2.14) жүйенің $(0,0)$ ерекше нүкте маңайында

$$Z_t(x,y) = x^{\rho_t} y^{\sigma_t} \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}^{(t)} x^m y^n, \quad A_{0,0}^{(t)} \neq 0, \quad \left(t = \overline{1,9}\right) \tag{2.24}$$

тоғыз сызықтық тәуелсіз регуляр дербес шешімі бар болады, мұндағы $(\rho_t, \sigma_t), A_{m,n}^{(t)}, \left(t = \overline{1,9}, \quad m,n = 0,1,2,...\right)$– белгісіз тұрақтылар.

Дәл осылайша (2.14) жүйенің (∞,∞) ерекше қисығы маңайында тоғыз сызықтық тәуелсіз регуляр дербес шешімі бар болатындығына көз жеткізуге болады.

2.2-тұжырым. Егер коэффициенттері (2.15) түріндегі (2.14) үйлесімді жүйесінде $a_{1,0}^{(0)} \neq 0, b_{0,1}^{(0)} \neq 0$ және (2.16) интегралдану шарты орындалса, онда (2.14) жүйенің (∞,∞) ерекше нүкте маңайында

$$Z_t(\rho,\sigma) = x^{\rho_t} y^{\sigma_t} \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}^{(t)} x^{-m} y^{-n}, \quad B_{0,0}^{(t)} \neq 0, \quad \left(t = \overline{1,9}\right)$$

тоғыз сызықтық тәуелсіз регуляр дербес шешімі бар болады, мұндағы $(\rho_t, \sigma_t), B_{m,n}^{(t)}, \quad (t = \overline{1,9}, \quad m,n = 0,1,2,...)$ – белгісіз тұрақтылар.

2.1 және 2.2-тұжырымдардағы $a_{0,0}^{(0)} \neq 0, b_{0,0}^{(0)} \neq 0$ және $a_{1,0}^{(0)} \neq 0, b_{0,1}^{(0)} \neq 0$ шарттары маңызды, өйткені ρ және σ үшін тоғызыншы дәрежелі теңдеу, олар нөлден өзгеше болғанда ғана алынады. Сондықтан, $(0,0)$ және (∞,∞) ерекше регуляр қисық маңайында тоғыз регулярлы сызықтық тәуелсіз дербес шешімі бар. Сонда жалпы шешім келесі қосынды түрінде ұсынылады:

$$Z(x,y) = \sum_{t=1}^{9} C_t Z_t(x,y) \tag{2.25}$$

(2.24) қатарының белгісіз коэффициенттері $A_{m,n}^{(t)}, (m,n = 0,1,2,...)$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{\mu-m,\nu-n}^{(t)} f_{m,n}^{(j)}(\rho+\mu-m, \sigma+\nu-n) = 0$$

рекурентті жүйесінен анықталады, мұндағы $\mu,\nu = 0,1,2,...,;\ j = 1,2;\ t = \overline{1,9}$.

2.2.3 Жалпыланған гипергеометриялық текті жүйенің шешімін құрудың нақты мысалы

Екі айнымалылы барлық гипергеометриялық функциялар екінші ретті екі дербес дифференциалдық теңдеуден тұратын жүйені қанағаттандырады. Бұндай жүйенің коэффициенттері x және y айнымалыларының көпмүшеліктері. Аталған коэффициенттерді есептеуге болады. Егер гипергеометриялық функциялар екі айнымалылы

$$F(x,y)=\sum_{m,n}a_{m,n}x^m y^n$$

дәрежелік қатарымен анықталса, онда коэффициенттер келесі қатынастарды қанағаттандырады

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}}=\frac{P(m,n)}{R(m,n)},\quad \frac{a_{m,n+1}}{am,n}=\frac{Q(m,n)}{S(m,n)}$$

мұндағы $P, R, Q, S-$ белгілі көпмүшелер.

Бұл тәсілді қолдану екі екінші ретті теңдеуден және екі айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық қатарларынан тұратын жүйелер арасындағы байланыстарды зерттеуді жандандыруға мүмкіндік берді. Дегенменде, үшінші және төртінші ретті екі теңдеуден және жалпыланған гипергеометриялық қатардан тұратын жүйелер арасындағы байланыс тиісті деңгейде зерттелмеген. Үйлесімділігіне қол жеткізуге мүмкіндік беретін, үшінші және төртінші ретті мұндай жүйенің құрылу әдістемесі [7, 414 б.; 19, 102 б.; 20, 292 б.] еңбектерінде келтірілген, сондай-ақ, Кампе де Ферьенің зерттеу жұмыстарына да назар аударған жөн [1, 155-169 б.].

2.3-теорема. Біртекті үшінші ретті

$$\begin{aligned}&x^2p_{3,0}+(\delta_1+\delta_2+1)xp_{2,0}+(\delta_1\delta_2-x)p_{1,0}-yp_{0,1}-\alpha\, p_{0,0}=0,\\&y^2p_{0,3}+(\delta_1^{'}+\delta_2^{'}+1)yp_{0,2}+(\delta_1\delta_2-y)p_{0,1}-xp_{1,0}-\alpha\, p_{0,0}=0\end{aligned}\qquad(2.26)$$

дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің тоғыз сызықтық тәуелсіз $Z_j(x,y),\ \left(j=\overline{1,9}\right)$ дербес шешімі бар және жалпы шешім (2.25) қосындысы түрінде табылады, мұндағы $p_{3,0}=Z_{xxx},\ p_{0,3}=Z_{yyy},\ p_{2,0}=Z_{xx},\ p_{0,2}=Z_{yy},\ p_{1,0}=Z_x,\ p_{0,1}=Z_y,\ p_{0,0}=Z(x,y)-$ортақ белгісіз.

Дәлелдеу. Дәлелдеу үшін Фробениус-Латышева әдісін пайдаланамыз. Ол (2.26) жүйесінің қосымша қасиеттерін ашуға мүмкіндік береді. Кампе де Ферье әдісін қолдану (2.26) жүйесінің екі теңдеуінің үйлесімділігін қамтамасыз етеді. $g^{(1)}=q^{(1)}\equiv 0$ болғандықтан, (2.16) интегралдану шарты да орындалады. 2.1-ережесі негізінде, $(0,0)$ ерекшелігі регулярлы, ал $a_{1,0}^{(0)}=0, b_{0,1}^{(0)}=0$ болғандықтан, 2.2-ережесі негізінде, (∞,∞) ерекшелігі иррегулярлы. Енді $(0,0)$ ерекше қисығы маңайындағы регулярлы (2.17) түріндегі шешімдерді құрумен айналысамыз.

Осы мақсатта, Фробениус характеристикалық функциясы жүйелерінен, $(0{,}0)$ ерекше қисығы маңайында (2.22) айқындауыш теңдеулер

$$\left.\begin{aligned} f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma) &= \rho(\rho-1+\delta_1)(\rho-1+\delta_2)=0 \\ f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma) &= \sigma(\sigma-1+\delta_1)(\sigma-1+\delta_2)=0 \end{aligned}\right\}$$

жүйесін құрып, оның тоғыз жұп $(\rho_t,\sigma_t,\ t=\overline{1{,}9})$ түбірлері анықталды:

$1.\,(\rho_1=0,\sigma_1=0),\ 2.\,(\rho_2=1-\delta_{,1}\ \sigma_1=0),\ 3.\,(\rho_1=0,\sigma_2=1-\delta_1^{'}),\ 4.\,(\rho_3=1-\delta_2,\sigma_1=0),$
$5.\,(\rho_1=0,\sigma_3=1-\delta_2^{'}), 6.\,(\rho_2=1-\delta_1,\sigma_2=1-\delta_1^{'}), 7.\,(\rho_2=1-\delta_1,\sigma_3=1-\delta_2^{'}),$
$8.\,(\rho_3=1-\delta_2,\sigma_2=1-\delta_1^{'}),\ 9.\ (\rho_3=1-\delta_2,\sigma_3=1-\delta_2^{'}).$

Сонда 2.3-теорема негізінде, (2.26) жүйенің $(0{,}0)$ ерекше қисығы маңайында анықталған жұп көрсеткіштерге сәйкес келетін тоғыз сызықтық тәуелсіз регуляр дербес шешімдері бар болады:

$$\begin{aligned}
&Z_1(x,y)=\Phi(\alpha,\delta_{1,}\delta_1^{'},\delta_2,\delta_2^{'};x,y),\\
&Z_2(x,y)=x^{1-\delta_1}\Phi(\alpha+1-\delta_{1,};2-\delta_1^{'},\delta_1^{'},\delta_2+1-\delta_1,\delta_2^{'};x,y),\\
&Z_3(x,y)=y^{1-\delta_1^{'}}\Phi(\alpha+1-\delta_{1,}^{'},\delta_1;2-\delta_1^{'},\delta_2,\delta_2^{'}+1-\delta_1^{'};x,y),\\
&Z_4(x,y)=x^{1-\delta_2}\Phi(\alpha+1-\delta_2;\delta_1+1-\delta\ ,\delta_1^{'},2-\delta_2^{'};x,y),\\
&Z_5(x,y)=y^{1-\delta_2^{'}}\Phi(\alpha+1-\delta_2^{'},\delta_1;\delta_1^{'}+1-\delta_2^{'},2-\delta_2^{'};x,y),\\
&Z_6(x,y)=x^{1-\delta_1}y^{1-\delta_1^{'}}\Phi(\alpha+2-\delta_1,\delta_1^{'};2-\delta_1,2-\delta_1^{'},\delta_1^{'},\delta_2+1-\delta_1,\delta_2^{'}+1-\delta_1^{'};x,y),\\
&Z_7(x,y)=x^{1-\delta_1}y^{1-\delta_2^{'}}\Phi(\alpha+2-\delta_1-\delta_2^{'};2-\delta_1,2-\delta_1\cdot\delta_1^{'},\delta_1^{'}+1-\delta_2^{'},\delta_2+1-\delta_1,2-\delta_1^{'};x,y),\\
&Z_8(x,y)=x^{1-\delta_2}y^{1-\delta_2^{'}}\Phi(\alpha+2-\delta_2-\delta_1,\delta_1+1-\delta_2,2-\delta_1^{'}2-\delta_2,\delta_2^{'}+1-\delta_1^{'};x,y),\\
&Z_9(x,y)=x^{1-\delta_2}y^{1-\delta_2^{'}}\Phi(\alpha+2-\delta_2-\delta_2^{'},\delta_1+1-\delta_2,\delta_1+1-\delta_2\delta_1^{'}+1-\delta_2^{'},2-\delta_2,2-\delta_2^{'};x,y).
\end{aligned}\tag{2.27}$$

Зерттелген (2.26) жүйе мен оның шешімінің кейбір қасиеттерін атап өтейік.

2.1-қасиет. [14, 464 б.] монографияда (2.26) жүйенің регуляр және иррегуляр ерекшеліктері жіктелмеген. (2.26) жүйесінде $a_{1,0}^{(0)}=0$ және $b_{0,1}^{(0)}=0$ болғандықтан, 2.2-ережесінің негізінде, (∞,∞) ерекшелігі иррегуляр және (2.26) жүйе (2.20) Томе қалыпты қатары түріндегі шешімге ие болуы керек. Бірақ бұл жағдайда айқындауыш теңдеулер жүйесі келесі түрде

$$\begin{aligned} f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma) &= -(\rho+\sigma+2)=0,\\ f_{0,1}^{(2)}(\rho,\sigma) &= -(\rho+\sigma+2)=0 \end{aligned}$$

жазылады, яғни айқындауыш теңдеулер жүйесінің екі теңдеуіде бірдей. Бұл жағдайда (2.20) Томе қалыпты қатары түріндегі шешім болмайды.

2.2-қасиет. (2.26) жүйенің бірінші $Z_1(x,y)$ дербес шешімінің алғашқы туындылары келесі түрде анықталады:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x}=\frac{\partial\Phi\left[\alpha,\delta_1,\delta_1^{'},\delta_2,\delta_2^{'};x,y\right]}{\partial x}=\frac{\alpha}{\delta_1\delta_2}\Phi\left[\alpha+1,\delta_1+1,\delta_1^{'};1+\delta_2,\delta_2^{'};x,y\right],$$
$$\frac{\partial Z_1}{\partial y}=\frac{\partial\Phi\left[\alpha,\delta_1,\delta_1^{'},\delta_2,\delta_2^{'};x,y\right]}{\partial y}=\frac{\alpha}{\delta_1^{'}\delta_2^{'}}\Phi\left[\alpha+1,\delta_1,\delta_1^{'}+1,\delta_2,\delta_2^{'}+1;x,y\right],$$
$$\frac{\partial Z_1}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\Phi\left[\alpha,\delta_1,\delta_1^{'},\delta_2,\delta_2^{'};x,y\right]}{\partial x\partial y}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\delta_1\delta_2\delta_1^{'}\delta_2^{'}}\Phi\left[\alpha+2,\delta_1+1,\delta_1^{'}+1,\delta_2+1,\delta_2^{'}+1;x,y\right].$$

2.3-қасиет. $Z_1(x,y)$ алғашқы шешімі $\alpha,\delta_1,\delta_2,\delta_1^{'},\delta_2^{'}$ бес параметрге тәуелді екі айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық қатары [17, 165 б.]:

$$Z_1(x,y)={}_1\Phi_4\left[\begin{matrix}\alpha & & & \\ \delta_1, & \delta_1^{'}, & \delta_2, & \delta_2^{'}\end{matrix};x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}}{(\delta_1)_m(\delta_1^{'})_n(\delta_2)_m(\delta_2^{'})_n}\frac{x^m}{m!}\frac{x^n}{n!}.$$

Осылайша (2.27)-нің қалған шешімінің де ұқсас қасиеттерге ие екендігін тексеруге болады, яғни (2.27) берілген функциялардың барлығы жалпыланған гипергеометриялық функциялар [17, 294 б.; 21, 105 б.].

2.3 Үшінші ретті гипергеометриялық текті біртекті емес жүйенің шешімін құру

Үшінші ретті дербес туындылы екі дифференциалдық теңдеуден тұратын

$$\begin{aligned}&x^3g^{(0)}Z_{xxx}+x^2yg^{(1)}Z_{xxy}+x^2g^{(2)}Z_{xx}+xyg^{(3)}Z_{xy}+xg^{(4)}Z_x+yg^{(5)}Z_y+g^{(6)}Z=g^{(7)}(x,y),\\&y^3q^{(0)}Z_{yyy}+xy^2q^{(1)}Z_{xyy}+y^2q^{(2)}Z_{yy}+xyq^{(3)}Z_{xy}+xq^{(4)}Z_x+yq^{(5)}Z_y+q^{(6)}Z=q^{(7)}(x,y)\end{aligned}\qquad(2.28)$$

біртекті емес $(0{,}0)$ ерекше қисығы маңайында регулярлы жүйе қарастырылады, мұндағы $Z=Z(x,y)$ – ортақ белгісіз, коэффициенттері

$$\begin{aligned}&g^{(i)}=g^{(i)}(x,y)=a_{0,0}^{(i)}-a_{1,0}^{(i)}x^k,\\&q^{(i)}=q^{(i)}(x,y)=b_{0,0}^{(i)}-b_{0,1}^{(i)}y^k,\quad(i=\overline{0,6})\end{aligned}\qquad(2.29)$$

түрінде берілген, ал оң жағы $g^{(7)}(x,y)$ және $q^{(7)}(x,y)$ аналитикалық функциялар немесе екі айнымалылы көпмүшеліктер.

(2.29) түріндегі коэффициенттерімен берілген біртекті емес (2.28) жүйесінің жалпы шешімін құрып, оның біртекті емес (2.28) жүйенің дербес шешімі мен сәйкес біртекті жүйенің жалпы шешімінің қосындысы екенін көрсету керек.

2.3.1 Регуляр ерекше нүктелер маңайындағы біртекті жүйелердің шешімдері

Біртекті емес (2.28) жүйесіне сәйкес

$$\begin{aligned} &x^3 g^{(0)} Z_{xxx} + x^2 y g^{(1)} Z_{xxy} + x^2 g^{(2)} Z_{xx} + xy g^{(3)} Z_{xy} + x g^{(4)} Z_x + y g^{(5)} Z_y + g^{(6)} Z = 0, \\ &y^3 q^{(0)} Z_{yyy} + x y^2 q^{(1)} Z_{xyy} + y^2 q^{(2)} Z_{yy} + xy q^{(3)} Z_{xy} + x q^{(4)} Z_x + y q^{(5)} Z_y + q^{(6)} Z = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

біртекті жүйенің регулярлы шешімдерін құрудың ерекшеліктері толық зерттелмеген, мұндағы $Z = Z(x, y) -$ ортақ белгісіз.

Бұл жүйе үшін регуляр $(0,0)$ және (∞,∞) ерекше қисығы маңайындағы шешімдерді құруға тән ортақ әдісті орнату және сызықты тәуелсіз шешімдер санын анықтау қажет. Сондай-ақ регуляр және иррегуляр ерекшеліктерінің классификациясын, үйлесімділігі мен интегралдану шарттарын орнату керек болады.

(2.1) және (2.30) жүйелер тек реттіліктерімен ерекшеленеді. Сондықтан (2.30) үшінші ретті жүйенің шешімін тұрғызу үшін, (2.1) екінші ретті жүйені зерттеуде жетілдірілген Фробениус-Латышева әдісін [14, 148-162 б.] қолданған жөн. Бұл әдісті қолдану бірқатар шарттардың орындалуын талап етеді:

1. (2.30) жүйе біріккен әрі интегралдану шарты да (2.16) түрінде берілген деп ұйғарайық. Дегенмен, бұл ұғымдар қосымша нақтылауды қажет етеді.

2. $k = 1$ болғанда ерекше қисықтар Z_{xxx} және Z_{yyy} бас туындылар жанындағы коэффициенттерді нөлге теңеумен айқындалады: $(0,0)$, $\left(a_{0,0}^{(0)} / a_{0,1}^{(0)}, 0 \right)$, $\left(a_{0,0}^{(0)} / a_{0,1}^{(0)}, b_{0,0}^{(0)} / b_{0,1}^{(0)} \right)$, $(0,\infty)$, $(\infty,0)$, $\left(\infty, b_{00}^{(0)} / b_{01}^{(0)} \right)$, $\left(a_{0,0}^{(0)} / a_{0,1}^{(0)}, \infty \right)$. Бұрынғыша, шешім құру барысында, $(0,0)$ және (∞,∞) екі жұп ерекшеліктері қарастырылады.

3. Қарастырылып отырған жағдайда коэффициенттері (2.29) түріндегі жүйелер түрлендірулер арқылы алдыңғы жағдайға келтіріледі.

4. $(0,0)$ ерекше қисығы маңайындағы шешім

$$Z(x, y) = x^{\rho} y^{\sigma} \sum_{m,n-0}^{\infty} A_{m,n} x^m y^n, \quad \left(A_{0,0} \neq 0\right) \quad (2.31)$$

түрінде, ал (∞,∞) ерекше қисығы маңайындағы шешім

$$Z(x, y) = x^{\rho} y^{\sigma} \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n} x^{-m} y^{-n}, \quad \left(B_{0,0} \neq 0\right) \quad (2.32)$$

түрінде ізделеді, мұндағы $\rho, \sigma, A_{m,n}, B_{m,n}, (m, n = 0,1,2,3,...) -$ белгісіз тұрақтылар.

Фробениус-Латышева әдісін қолдану характеристикалық функциялар жүйесін құру мен $(0,0)$ ерекше қисығы маңайында

$$\begin{aligned}&f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma)=a_{0,0}^{(0)}\rho(\rho-1)(\rho-2)+a_{0,0}^{(1)}\rho(\rho-1)\sigma+a_{0,0}^{(2)}\rho(\rho-1)+\\&+a_{0,0}^{(3)}\rho\sigma+a_{0,0}^{(4)}\rho+a_{0,0}^{(5)}\sigma+a_{0,0}^{(6)}=0,\\&f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma)=b_{0,0}^{(0)}\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+b_{0,0}^{(1)}\sigma(\sigma-1)\rho+b_{0,0}^{(2)}\sigma(\sigma-1)+\\&+b_{0,0}^{(3)}\rho\sigma+b_{0,0}^{(4)}\rho+b_{0,0}^{(5)}\sigma+b_{0,0}^{(6)}=0\end{aligned}\tag{2.33}$$

және (∞,∞) ерекше қисығы маңайында:

$$\begin{aligned}&f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma)=a_{1,0}^{(0)}\rho(\rho-1)(\rho-2)+a_{1,0}^{(1)}\rho(\rho-1)\sigma+a_{1,0}^{(2)}\rho(\rho-1)+\\&+a_{1,0}^{(3)}\rho\sigma+a_{1,0}^{(4)}\rho+a_{1,0}^{(5)}\sigma+a_{1,0}^{(6)}=0,\\&f_{0,1}^{(2)}(\rho,\sigma)=b_{0,1}^{(0)}\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+b_{0,1}^{(1)}\rho\sigma(\sigma-1)+b_{0,1}^{(2)}\sigma(\sigma-1)+\\&+b_{0,1}^{(3)}\rho\sigma+b_{0,1}^{(4)}\rho+b_{0,1}^{(5)}\sigma+b_{0,1}^{(6)}=0\end{aligned}\tag{2.34}$$

айқындауыш теңдеулер жүйелерін анықтаудан басталады.

(2.33)-тен (2.31) шешімінің, ал (2.34)-тен (2.32) шешімінің (ρ_t,σ_t) түріндегі көрсеткіштері анықталады. Бұл жерде t индексін анықтау маңызды, себебі бұндай жұптардың саны, $(0,0)$ және (∞,∞) ерекшеліктерінің маңайындағы (2.30) жүйесінің сызықты тәуелсіз дербес шешімінің санын анықтауға мүмкіндік береді.

Коэффициенттері (2.29) түріндегі (2.30) жүйеде $a_{0,0}^{(0)}\neq 0, b_{0,0}^{(0)}\neq 0, h=1$ және үйлесімділік шарттары қанағаттанатын болсын. Сонда (2.30) жүйесі үшін $(0,0)$ ерекше қисығы маңайында тоғыз сызықты тәуелсіз (2.31) түріндегі дербес регуляр шешімдер бар болатындығы туралы 2.1-тұжырымға ұқсас тұжырым орын алады.

Сәйкесінше, (2.28) және (2.29) жүйесінде $a_{1,0}^{(0)}\neq 0, b_{0,1}^{(0)}\neq 0, h=1$және үйлесімділік пен (2.16) интегралдану шарттары орындалсын. Сонда (2.30) жүйесі үшін (∞,∞) ерекше қисығы маңайында тоғыз сызықты тәуелсіз дербес регуляр шешімдер бар болатындығы туралы 2.2-тұжырымға ұқсас тұжырым орын алады.

2.3.2 Біртекті емес жүйенің екі айнымалылы жалпыланған дәрежелік қатар түріндегі формальды шешімдері

2.4-теорема. Біртекті емес (2.28) жүйенің жалпы шешімі сәйкес біртекті (2.30) жүйенің $\overline{Z}(x,y)$ жалпы шешімі мен біртекті емес (2.28) жүйенің $Z_0(x,y)$ дербес шешімі қосындысы

$$Z(x,y)=\overline{Z}(x,y)+Z_0(x,y)=\sum_{t=1}^{9}C_tZ_t(x,y)+Z_0(x,y)$$

түрінде анықталады.

Дәлелдеу. Біртекті жүйенің жалпы шешімі белгілі. $(0,0)$ ерекше қисығы маңайындағы дербес шешімді құру үшін екі айнымалылы қатарларға жалпыланған анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданамыз. Осы мақсатта $Z_0(x,y)$ дербес шешімі анықталатын (2.31) түріндегі қатар біртекті емес (2.28) жүйеге қойылады және Фробениус характеристикалық функциялар жүйесі құрылады:

$$
\begin{aligned}
&x^{\rho}y^{\sigma}\{C_{0,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)+\left[C_{1,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+C_{0,0}f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma)\right]x+\\
&\left[C_{0,1}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+C_{0,0}f_{0,1}^{(J)}(\rho,\sigma)\right]y+\\
&+\left[C_{1,1}f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma+1)+C_{1,0}f_{0,1}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+C_{0,1}f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+C_{0,0}f_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma)\right]xy+\dots\}\equiv f_j(x,y)
\end{aligned}
$$

мұндағы $f_1(x,y)=g^{(7)}(x,y),\ f_2(x,y)=q^{(7)}(x,y),$ ал $f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma),\ (j=1,2)-$ (2.33) түріндегі $(0,0)$ ерекше қисығы маңайындағы айқындауыш теңдеулер жүйесін айқындайды. Кейінгі талқылаулар $f_j(x,y),\ (j=1,2)$ екі айнымалылы функцияларының берілу формасына байланысты. Олар келесі түрде берілген деп ұйғарайық:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y)&=g^{(7)}(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{m,n}x^m y^n, \quad (a_{0,0}\neq 0)\\
f_2(x,y)&=q^{(7)}(x,y)=x^{\gamma}y^{\delta}\sum_{m,n=0}^{\infty}b_{m,n}x^m y^n, \quad (b_{0,0}\neq 0).
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Сонда дербес шешім

$$Z_0(x,y)=x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}C_{m,n}x^m y^n, \qquad (C_{0,0}\neq 0) \tag{2.36}$$

қатар түрінде ізделеді. (2.36) дербес формалды шешім болуы үшін $C_{m,n},(m,n=0,1,2,\dots)$ анықталмаған коэффициенттері келесі рекурренттік жүйені қанағаттандыруы міндетті:

$$
\begin{aligned}
&C_{0,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{0,0}^{(j)}\\
&C_{1,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+C_{0,0}f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{1,0}^{(j)}\\
&C_{0,1}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+C_{0,0}f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{0,1}^{(j)}\\
&C_{1,1}f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma+1)+C_{1,0}f_{0,1}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+C_{0,1}f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+C_{0,0}f_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{1,1}^{(j)}\\
&C_{2,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho+2,\sigma)+C_{1,0}f_{1,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+C_{0,0}f_{2,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{2,0}^{(j)}\\
&C_{0,2}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+2)+C_{0,1}f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+C_{0,0}f_{0,2}^{(j)}(\rho,\sigma)=\alpha_{0,2}^{(j)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Демек (2.36) қатардың $C_{m,n},(m,n=0,1,2,\dots)$ коэффициенттері рекурренттік жүйеден анықталады. $j=1$ және $j=2$ болғанда екі жүйеге бөлінеді. $j=1$ үшін

(2.37)-дің оң жағында $\alpha_{m,n}^{(1)} = a_{m,n}$, ал $j = 2$ үшін $\alpha_{m,n}^{(2)}$ коэффициенті $b_{m,n}(m,n = 0,1,...)$ арқылы анықталады, мұндағы $a_{m,n}$ және $b_{m,n}$ коэффициенттері $g^{(7)}(x,y)$ және $q^{(7)}(x,y)$ жалпыланған дәрежелік қатарлардың коэффициенттері. $j = 1$ және $j = 2$ үшін анықталған $C_{m,n},(m,n = 0,1,2,...)$ коэффициенттері рекурентті жүйенің екі тізбектерінде бірдей болуы керек.

(2.37) рекурренттік жүйесінен $C_{m,n},(m,n = 0,1,2,...)$ коэффициенттері $(\alpha + k_1, \beta + k_1)$ және $(\gamma + k_2, \delta + k_2)$ тең болған екі жағдайда ғана анықталады, мұндағы $k_j,(j = 1,2)$ (2.30) біртекті жүйе шешімінің дәреже көрсеткіштері болмайтын, кез келген натурал сандар. Жоғарыда келтірілген шарттарда $(0,0)$ ерекшелігі регулярлы болғанда (2.28) түріндегі коэффициенттері бар біртекті емес (2.29) жүйенің дербес $Z_0(x,y)$ шешімін құруға болады.Теорема дәлелденді.

2.1-ескерту. Егер $(\alpha + k_1, \beta + k_1)$ және $(\gamma + k_2, \delta + k_2)$, біртекті жүйенің шешімінің көрсеткіштері болса, онда біз күрделі «резонанстық» жағдайды аламыз, мұндағы $k_j,(j = 1,2)$ кез-келген натурал сандар. Бұл жағдай қосымша зерттеуді қажет етеді.

2.2-ескерту. Егер (2.29) коэффициенттерінде, $k = 1$ тұрақты болса, онда $f_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma)$ бастап, $f_{2,0}^{(j)}(\rho,\sigma)$, $f_{0,2}^{(j)}(\rho,\sigma)$, $f_{3,0}^{(j)}(\rho,\sigma),...$ барлық өрнектер нөлге тең болады.

2.3-ескерту. (2.6) түрлендіруі $k = 1$ жағдайын бұдан да қарапайым түрге әкелетін болады.

Сондықтан жоғарыда келтірілген тұжырымдарға сүйене отырып, біз келесі тұжырым орын алады деп қорытынды шығара аламыз.

2.3-лемма. Коэффициенттері (2.29) түріндегі, (2.28) үшінші ретті екі теңдеуден тұратын біртекті емес жүйе берілсін, мұндағы $g^{(7)}(x,y)$ және $q^{(7)}(x,y)$ $(x = 0,\ y = 0)$ регуляр ерекше қисығы маңайында екі айнымалылы аналитикалық функциялар. Егер $(\alpha + k_1, \beta + k_1)$ және $(\gamma + k_2, \delta + k_2)$ (2.30) біртекті жүйесінің шешімінің дәреже көрсеткіштеріне, $k_j,(j = 1,2)$ тұрақтысының ешқандай мәндеріне сәйкес келмесе, онда (2.28) жүйесінің дербес шешімі берілген жүйенің (2.35) оң жағының түрімен бірдей болады.

2.3.3 Гипергеометриялық текті жүйені құру және оның шешімінің қасиеттерін зерттеу

Кампе де Ферье

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(\rho_{j,k} - \alpha_{j,k}x)x^j y^k p_{j,k} = 0 \\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(\sigma_{j,k} - \beta_{j,k}y)x^j y^k p_{j,k} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

жүйесін пайдалана отырып, екі теңдеуден тұратын үшінші және төртінші ретті жүйелерді құру әдісін тапты [2, 155-162 б.].

Бұл әдіс (2.30) гипергеометриялық текті жүйенің екі теңдеуінің үйлесімділігін қамтамасыз етеді. Мұндай жүйенің шешімдері екі айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық функциялар болып табылады. (2.38) жүйенің дербес жағдайын қарастырып, оның шешімінің қасиеттерін зерттейік.

2.5-теорема. Екі үшінші ретті теңдеуден тұратын

$$\begin{aligned}&x^2 Z_{xxx} + xyZ_{xxy} + (\gamma+\delta+1)xZ_{xx} + \delta y Z_{xy} + \gamma\delta Z_x - Z = 0,\\ &y^2 Z_{yyy} + xyZ_{xyy} + (\gamma+\delta'+1)yZ_{yy} + \delta' xZ_{xy} + \gamma\delta' Z_y - Z = 0\end{aligned} \tag{2.39}$$

дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің тоғыз сызықты тәуелсіз дербес шешімі бар:

$$\begin{aligned}
&Z_1(x,y) = F(-;\delta,\delta',\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(\delta)_m (\delta')_n (\gamma)_{m+n}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},\\
&Z_2(x,y) = y^{1-\delta'} \times\\
&\times\left\{1 + \frac{x}{\delta(\gamma+1-\delta')} + \frac{y}{(2-\delta)(\gamma+1-\delta')} + \frac{xy}{\delta(2-\delta')(\gamma+1-\delta')(\gamma+2-\delta')} + \ldots\right\},\\
&Z_3(x,y) = x^{1-\delta} \times\\
&\times\left\{1 + \frac{x}{(2-\delta)(\gamma+1-\delta)} + \frac{y}{\delta(\gamma+1-\delta)} + \frac{xy}{\delta'(2-\delta)(\gamma+1-\delta)(\gamma+2-\delta)} + \ldots\right\},\\
&Z_4(x,y) = y^{1-\gamma} \times\\
&\times\left\{1 + \frac{x}{\delta} + \frac{y}{(2-\gamma)(\delta'+1-\gamma)} + \frac{xy}{2\delta(2-\gamma)(\delta'+1-\gamma)} + \frac{x^2}{2^2\delta(\delta+1)} + \ldots\right\},\\
&Z_5(x,y) = x^{1-\delta} y^{1-\delta'} \{1 + \frac{x}{(2-\delta)(\gamma+2-\delta-\delta')} + \frac{y}{(2-\delta')(\gamma+2-\delta-\delta')} +\\
&+ \frac{xy}{(2-\delta)(2-\delta')(\gamma+2-\delta-\delta')(\gamma+3-\delta-\delta')} + \ldots\},\\
&Z_6(x,y) = x^{1-\delta} y^{1-\gamma} \times\\
&\times\left\{1 + \frac{x}{(2-\delta)^2} + \frac{y}{(2-\delta)(\delta'+1-\gamma)} + \frac{xy}{(2-\delta)^2(3-\delta)(2-\gamma)(1+\gamma-\delta')} + \ldots\right\}, \qquad (2.40)\\
&Z_7(x,y) = x^{1-\gamma}\left\{1 + \frac{x}{(2-\gamma)(\delta+1-\gamma)} + \frac{y}{\delta'} + \frac{xy}{2\delta'(2-\gamma)(1+\delta-\gamma)} + \ldots\right\},
\end{aligned}$$

$$Z_8(x,y)=x^{1-\gamma}y^{1-\delta'}\{1+\frac{x}{(2-\gamma)(2-\delta')(\delta+1-\gamma)}+\frac{y}{(2-\delta')^2}+$$

$$+\frac{xy}{(2-\delta')^2(2-\gamma)(\delta+1-\gamma)(3-\delta')}+...\},$$

$$Z_9(x,y)=x^{1-\gamma}y^{1-\gamma}\{1+\frac{x}{(2-\gamma)^2(1+\delta-\gamma)}+\frac{y}{(2-\gamma)^2(1+\delta-\gamma)}+$$

$$+\frac{xy}{(2-\gamma)^3(3-\gamma)(1+\delta-\gamma)(1+\delta'-\gamma)}+...\}.$$

Дәлелдеу. Берілген нақты жүйе (2.38) жүйесінің дербес жағдайы. 2.3.1-ішкі бөлімшесінің нәтижелеріне сүйеніп, Фробениус-Латышева әдісімен (2.39) жүйесінің дербес шешімдерін құрайық.

$(0,0)$ ерекше нүктесіне салыстырмалы айқындауыш теңдеулер жүйесінің

$$f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)=\rho(\rho-1)(\rho-2)+\rho(\rho-1)\sigma+(\gamma+\delta+1)\rho(\rho-1)+\delta\rho\sigma+\gamma\delta=0,$$
$$f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)=\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+\rho\sigma(\sigma-1)+(\gamma+\delta'+1)\sigma(\sigma-1)+\delta'\rho\sigma+\gamma\delta'=0$$

түбірлерінің тоғыз жұбы келесі түрде анықталады:

1. $(\rho_1=0,\sigma_1=0)$; 2. $(\rho_1=0,\sigma_2=1-\delta')$; 3. $(\rho_2=1-\delta,\sigma_1=0)$;
4. $(\rho_1=0,\sigma_3=1-\gamma)$; 5. $(\rho_2=1-\delta,\sigma_2=1-\delta')$; 6. $(\rho_2=1-\delta,\sigma_3=1-\gamma)$;
7. $(\rho_3=1-\gamma,\sigma_1=0)$; 8. $(\rho_3=1-\gamma,\sigma_2=1-\delta')$; 9. $(\rho_3=1-\gamma,\sigma_3=1-\gamma)$.

(2.56) рекурентті жүйесін пайдалана отырып, (2.36) дәрежелік қатарының белгісіз коэффициенттері, табылған $(\rho_t,\sigma_t),\ (t=\overline{1,9})$ түбірлерінің жұптарын қою арқылы анықталады. Осылайша (2.40) тоғыз дербес сызықты тәуелсіз дербес шешімдер алынады. Теорема дәлелденді.

(2.39) біртекті жүйесінен алынған

$$\begin{aligned}&x^2Z_{xxx}+xyZ_{xxy}+(\gamma+\delta+1)xZ_{xx}+\delta yZ_{xy}+\gamma\delta Z_x-Z=g^{(7)}(x,y),\\&y^2Z_{yyy}+xyZ_{xyy}+(\gamma+\delta'+1)yZ_{yy}+\delta'xZ_{xy}+\gamma\delta'Z_y-Z=q^{(7)}(x,y)\end{aligned}\qquad(2.41)$$

біртекті емес жүйесінің оң жағы

$$\begin{aligned}&g^{(7)}(x,y)=\gamma^2\delta\delta'+\frac{1}{\gamma\delta}x+\frac{1}{\gamma\delta'}y,\\&q^{(7)}(x,y)=\gamma^2\delta\delta'+\frac{1}{\gamma\delta}x+\frac{1}{\gamma\delta'}y\end{aligned}\qquad(2.42)$$

түрінде берілсін.

Біртекті емес (2.41) жүйесінің кез келген дербес шешімін анықталмаған коэффициенттер әдісін пайдаланып құру ерекшеліктерін көрсетейік.

2.6-теорема. Оң жақ бөлігі (2.42) түрінде берілген (2.41) біртекті емес жүйесінің жалпы шешімі (2.39) біртекті жүйесінің $\overline{Z}(x,y)$ жалпы шешімі мен (2.41) біртекті емес жүйенің $Z_0(x,y)$ дербес шешімінің қосындысы түрінде табылады.

Дәлелдеу. Шынында да, біртекті (2.39) жүйесіне сәйкес келетін (2.8) $Z_j(x,y),\quad (j=\overline{1,9})$ жалпы шешімі тоғыз дербес сызықты тәуелсіз шешімдерінің қосындысы ретінде анықталады:

$$\overline{Z}(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}C_j\,Z_j(x,y),\quad (j=\overline{1,9}).$$

Оң жағы (2.42) түріндегі біртекті емес (2.41) жүйенің $Z_0(x,y)$ дербес шешімін 2.3.2- ішкі бөлімшесінде сипатталған анықталмаған коэффициенттер әдісін пайдалана отырып тұрғызу қалды. Оң жағының берілу ерекшеліктерін ескеріп, дербес шешім

$$Z_0(x,y)=C_{0,0}+C_{1,0}x+C_{0,1}y \tag{2.43}$$

көпмүшелік түрінде ізделеді.

(2.43) көпмүшелігін (2.41) жүйесіне қойып, $C_{0.0}=-(\gamma^2\cdot\delta\cdot\delta'+1)$, $C_{1,0}=-\dfrac{1}{\gamma\delta},\ C_{0,1}=-\dfrac{1}{\gamma\delta'}$ белгісіз коэффициенттерін анықтап, оң жағы (2.42) түрінде берілген (2.41) біртекті емес жүйенің дербес шешімі табылады:

$$Z_0(x,y)=-(\gamma^2\delta\delta'+1)-\frac{x}{\gamma\delta}-\frac{y}{\gamma\delta'}. \tag{2.44}$$

Сондықтан, оң жағы (2.42) түрінде берілген біртекті емес (2.41) жүйенің жалпы шешімі

$$Z(x,y)=\overline{Z}(x,y)+Z_0(x,y)=\sum_{j=1}^{9}C_j\,Z_j(x,y)-(\gamma^2\delta\delta'+1)-\frac{x}{\gamma\delta}-\frac{y}{\gamma\delta'} \tag{2.45}$$

түрінде табылады, мұндағы $Z_j(x,y),\quad (j=\overline{1,9})-(2.40)$ біртекті жүйенің дербес шешімдері. Теорема дәленді.

Біртекті емес жүйенің (2.44) дербес шешімі (2.41) жүйенің екі теңдеулерінің қосындысын да қанағаттандыратынына көз жеткіз оңай.

Біртекті емес жүйенің (2.44) дербес шешімі, біртекті емес (2.41) жүйенің екі теңдеуін қосу арқылы алынған үшінші ретті

$$\begin{gathered}x^2Z_{xxx}+xyZ_{xxy}+y^2Z_{yyy}+xyZ_{xyy}+(\gamma+\delta+1)xZ_{xx}+(\gamma+\delta'+1)yZ_{yy}+\\+(\delta y+\delta' x)Z_{xy}+\gamma\delta Z_x+\gamma\delta' Z_y-2Z=2(\gamma^2\delta\delta'+\frac{x}{\gamma\delta}+\frac{y}{\gamma\delta'})\end{gathered} \tag{2.46}$$

дербес туындылы дифференциалдық теңдеуінің де шешімі болады.

Біртекті емес жүйенің (2.45) жалпы шешімі біртекті емес (2.41) жүйенің екі теңдеуін қосу арқылы алынған (2.46) үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің де шешімі болатындығын көрсетуге болады.

Осылайша, үшінші ретті екі теңдеуден тұратын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің аз зерттелген біртекті емес жүйесінің шешімдерін құру мүмкіндіктері зерттелді.

1. Сәйкес біртекті (2.30) жүйенің шешімін құру үшін Фробениус-Латышева әдісі қолданылды. Біртекті жүйенің тәуелсіз сызықты шешімінің саны туралы 2.3 және 2.5-теоремалар дәлелденді. Фробениус-Латышева әдісі бойынша шешімдерді құрудың негізгі кезеңдері келтірілді.

2. (2.29) түріндегі коэффициенттері бар біртекті емес (2.28) жүйенің жалпы шешімін құру туралы теорема тұжырымдалды. Осы мақсатта мұндай жүйелер үшін бірінші рет анықталмаған коэффициенттер әдісі қолданылды.

3. Нақты мысал қарастырылды, мұнда біртекті жүйе Кампе де Ферье әдісімен құрылады [21, 155-169 б.]. (2.40) түрдегі тоғыз сызықты тәуелсіз шешім Фробениус-Латышева әдісімен алынған. Оң жағы (2.42) түрде болатын (2.41) жүйесінің жалпы шешімін құру үшін анықталмаған коэффициенттер әдісі қолданылды.

4. Сондай-ақ анықталмаған коэффициенттер әдісін қолдану зерттелетін нақты (2.41) жүйемен байланысты, үшінші ретті (2.46) біртекті емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешімдерін алуға мүмкіндік беретіні көрсетілді.

5. Біртекті (2.39) жүйенің бірінші дербес шешімі екі айнымалылы туындалған Клаузен текті гипергеометриялық қатар түріне жатады:

$$\begin{aligned} F(-;\delta,\delta',\gamma;x,y) &= 1+\frac{1}{\delta\gamma}x+\frac{1}{\delta'\gamma}y+\frac{xy}{\delta\delta'\gamma(\gamma+1)}+\frac{1}{\delta(\delta+1)\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+ \\ &+\frac{1}{\delta'(\delta'+1)\gamma(\gamma+1)}\frac{y^2}{2!}+\ldots \end{aligned} \tag{2.47}$$

Бұл қатардың көптеген қасиеттері әлі толық зерттелмеген күйінде.

Дифференциалдық қасиеті.

(2.47) қатарының бастапқы жоғары ретті туындылары келесі түрде табылады:

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}F(-;\delta,\delta',\gamma;x,y)=\dfrac{1}{\delta\,\gamma}F(-;\delta+1,\delta',\gamma+1;x,y),$

2. $\dfrac{\partial}{\partial y}F(-;\delta,\delta',\gamma;x,y)=\dfrac{1}{\delta'\,\gamma}F(-;\delta,\delta'+1,\gamma+1;x,y),$

3. $\dfrac{\partial^2 F(-;\delta,\delta',\gamma;x,y)}{\partial x^2}=\dfrac{F(-;\delta+2,\delta',\gamma+2;x,y)}{\delta(\delta+1)\gamma(\gamma+1)},$

4. $\dfrac{\partial^2 F(-;\delta,\delta',\gamma;x,y)}{\partial y^2}=\dfrac{F(-;\delta,\delta'+2,\gamma+2;x,y)}{\delta'(\delta'+1)\gamma(\gamma+1)},$

5. $\dfrac{\partial^2 F(-;\delta,\delta',\gamma;x,y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{F(-;\delta+1,\delta'+1,\gamma+2;x,y)}{\delta\delta'\gamma(\gamma+1)}$,

6. $\dfrac{\partial^{m_1} F(-;\delta,\delta',\gamma;x,y)}{\partial x^{m_1}}=\dfrac{F(-;\delta+m_1,\delta',\gamma+m_1;x,y)}{\delta(\delta+1)...(\delta+m_1)\gamma(\gamma+1)...(\gamma+2)}$,

7. $\dfrac{\partial^{m_2} F(-;\delta,\delta'+1,\gamma+m_2;x,y)}{\partial y^{m_2}}=\dfrac{F(-;\delta,\delta'+m_2,\gamma+m_2;x,y)}{\delta'(\delta'+1)...(\delta'+m_2)\gamma(\gamma+1)...(\gamma+m_2)}$,

8. $\dfrac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}}F(-;\delta,\delta',\gamma;x,y)=\dfrac{F(-;\delta+m_1,\delta'+m_2,\gamma+m_1+m_2;x,y)}{\delta(\delta+1)...(\delta+m_1)\delta'(\delta'+1)...(\delta'+m_2)\gamma(\gamma+1)...(\gamma+m_1+m_2)}$.

$(\rho_1=0,\sigma_1=0)$ көрсеткішіне сәйкес бір шешімнің дифференциалдық қасиетін келтірумен шектелінеді. Сол сияқты (2.40)-ғы қалған қатарлардың дифференциалдық қасиеттерінде көрсетуге болады. Бұл дифференциалдық қасиеттерді шығару одан әрі қосу және көбейту теоремасын, туындалған жалпыланған гипергеометриялық қатарлармен байланысты басқа да қасиеттерді дәлелдеуге ықпал етеді.

2.4 Жай Клаузен жүйесі және оның шешімінің қасиеттері

Диссертациялық жұмыстың 1.2.1-ішкі бөлімшесінде Клаузеннің біртекті жалпыланған гипергеометриялық теңдеуінің шешімінің бар болу мүмкіндіктері зерттелді, Клаузен функцияның негізгі қасиеттері нақтыланды.

Сондай-ақ, Клаузен функциясының x және y тәуелсіз айнымалылары бойынша әртүрлі көбейтінділерін зерттеулерге де белгілі бір қызығушылық туындауда.

Мұндай көбейтінділер екі Клаузен теңдеуінен тұратын жүйенің шешімдері болып табылады.

Горн екінші ретті гипергеометриялық қатарларды зерттеді. Ол бір айнымалылы қатарлар арқылы немесе әрқайсысы бір айнымалыға тәуелді екі гипергеометриялық қатардың көбейтінділері арқылы көрсетілген кейбір қатарлардан басқа, екінші ретті 34 әртүрлі жинақты қатарлар бар екенін анықтады [4, 282 б.].

Екі жалпыланған Клаузен дифференциалдық теңдеулерінен тұратын Клаузен текті жүйелерді қарастыруға көшейік. Мұндай жүйені жай Клаузен текті жүйе деп атаймыз. Әр түрлі регулярлы және иррегулярлы ерекшеліктерді ескере отырып, осы жүйелерді жан-жақты зерттеу маңызды.

2.4.1 Шешімдері Клаузен функциясының көбейтінділері түріндегі жай Клаузен текті жүйе

2.7-теорема. Жай Клаузен текті

$$\begin{aligned}&x^2(1-x)p_{3,0}+[1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x]xp_{2,0}+\\&+[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x]p_{1,0}-\alpha_1\alpha_2\alpha_3p_{0,0}=0,\\&y^2(1-y)p_{0,3}+[1+\beta_1'+\beta_2'-(3+\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3')y]yp_{0,2}+\\&+[\beta_1'\beta_2'-(1+\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_1'\alpha_2'+\alpha_1'\alpha_3'+\alpha_2'\alpha_3')y]p_{0,1}-\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'p_{0,0}=0\end{aligned}\tag{2.48}$$

жүйенің Клаузен функциясының әртүрлі көбейтінділері түрінде тоғыз сызықты тәуелсіз дербес шешімі бар және олардың бірі

$$Z_1(x,y) = F\left(\begin{matrix}\alpha_1\alpha_1^{'}, & \alpha_2\alpha_2^{'}, & \alpha_3\alpha_3^{'} \\ \beta_1\beta_1^{'}, & \beta_2\beta_2^{'} & \end{matrix}\middle| x,y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m(\alpha_1^{'})_n(\alpha_2)_m(\alpha_2^{'})_n(\alpha_3)_m(\alpha_3^{'})_n}{(\beta_1)_m(\beta_1^{'})_n(\beta_2)_m(\beta_2^{'})_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \qquad (2.49)$$

түріндегі Клаузен текті функция.

Дәлелдеу. (2.48) жүйе екі бірлескен қарапайым дифференциалдық теңдеуден тұрады. Оларды ортақ белгісіз $p_{0,0}(x,y) = Z(x,y)$ біріктіреді. Фробениус-Латышева әдісін қарапайым жағдайдағыдай қолдана отырып, жүйенің шешімі екі айнымалылы жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ізделеді

$$Z(x,y) = x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}x^m y^n, \qquad (C_{0,0} \neq 0) \qquad (2.50)$$

$\rho, \sigma, C_{m,n}, (m,n = 0,1,2,...)$ – белгісіз тұрақтылар. (2.48) жүйеге $Z(x,y) = x^{\rho}y^{\sigma}$ ауыстыруын қолданып Фробениус характеристикалық функциялар жүйесін анықтайық.

(2.50) қатарының дәреже көрсеткіштері $(0,0)$ ерекше қисығына қатысты айқындауыш теңдеулер жүйесінен

$$\left.\begin{aligned} f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma) &= \rho(\rho - 1 + \beta_1)(\rho - 1 + \beta_2) = 0 \\ f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma) &= \sigma(\sigma - 1 + \beta_1^{'})(\sigma - 1 + \beta_2^{'}) = 0 \end{aligned}\right\}$$

түбірлердің келесі

$$\begin{gathered}(\rho_1,\sigma_1) = (0,0), (\rho_1 = 0, \sigma_2 = 1-\beta_1), (\rho_1 = 0, \sigma_2 = 1-\beta_2), (\rho_2 = 1-\beta_1, \sigma_1 = 0), \\ (\rho_2 = 1-\beta_1, \sigma_2 = 1-\beta_1^{'}), (\rho_2 = 1-\beta_1, \sigma_3 = 1-\beta_2^{'}), (\rho_3 = 1-\beta_2, \sigma_1 = 0), \\ (\rho_3 = 1-\beta_2, \sigma_2 = 1-\beta_1^{'}), (\rho_3 = 1-\beta_2, \sigma_3 = 1-\beta_2^{'})\end{gathered} \qquad (2.51)$$

жұптары анықталады. Олар (2.50) қатардың дәреже көрсеткіштерін анықтайды, ал $C_{m,n}, (m,n = 0,1,2,...)$ – белгісіз коэффициенттері

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{\mu-m,\nu-n} f_{m,n}^{(j)}(\rho + \mu - m, \sigma + \nu - n) = 0, \quad (m,n = 0,1,2,...;\ j = 1,2;\ \mu,\nu = 0,1,2,...)$$

рекурренттік жүйесінен анықталады.

Осылайша тоғыз сызықтық тәуелсіз дербес шешімдер алынады:

$$Z_1(x,y) = {}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2;x)\,{}_3F_2(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3';\beta_1',\beta_2';y) = F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1\alpha_1', & \alpha_2\alpha_2', & \alpha_3\alpha_3' \\ \beta_1\beta_1', & \beta_2\beta_2' & \end{matrix}\right| x,y\right) =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m(\alpha_1')_n(\alpha_2)_m(\alpha_2')_n(\alpha_3)_m(\alpha_3')_n}{(\beta_1)_m(\beta_1')_n(\beta_2)_m(\beta_2')_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

$$Z_2(x,y) = F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}\right| x\right) y^{1-\beta_1'} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1'+1-\beta_1', & \alpha_2'+1-\beta_1', & \alpha_3'+1-\beta_1' \\ 2-\beta_1', & \beta_2'+1-\beta_1' & \end{matrix}\right| y\right), \tag{2.52}$$

$$Z_3(x,y) = F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}\right| x\right) y^{1-\beta_2'} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1'+1-\beta_2', & \alpha_2'+1-\beta_2', & \alpha_3'+1-\beta_2' \\ \beta_1'+1-\beta_2', & 2-\beta_2' & \end{matrix}\right| y\right), \tag{2.53}$$

$$Z_4(x,y) = x^{1-\beta_1} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1 \\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1 & \end{matrix}\right| x\right) F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1', & \alpha_2', & \alpha_3' \\ \beta_1', & \beta_2' & \end{matrix}\right| y\right), \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} Z_5(x,y) &= x^{1-\beta_1} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1 \\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1 & \end{matrix}\right| x\right) \times \\ &\times y^{1-\beta_1'} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1'+1-\beta_1', & \alpha_2'+1-\beta_1', & \alpha_3'+1-\beta_1' \\ 2-\beta_1', & \beta_2'+1-\beta_1' & \end{matrix}\right| y\right), \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} Z_6(x,y) &= x^{1-\beta_1} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1 \\ 2-\beta_1, & \beta_2+1-\beta_1 & \end{matrix}\right| x\right) \times \\ &\times y^{1-\beta_2'} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1'+1-\beta_2', & \alpha_2'+1-\beta_2', & \alpha_3'+1-\beta_2' \\ \beta_1'+1-\beta_2', & 2-\beta_2' & \end{matrix}\right| y\right), \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$Z_7(x,y) = x^{1-\beta_2} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, & \alpha_2+1-\beta_2, & \alpha_3+1-\beta_2, \\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2, & \end{matrix}\right| x\right) F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1', & \alpha_2', & \alpha_3', \\ \beta_1', & \beta_2', & \end{matrix}\right| y\right), \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned} Z_8(x,y) &= x^{1-\beta_2} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, & \alpha_2+1-\beta_2, & \alpha_3+1-\beta_2, \\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2, & \end{matrix}\right| x\right) \times \\ &\times y^{1-\beta_1'} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1'+1-\beta_1', & \alpha_2'+1-\beta_1', & \alpha_3'+1-\beta_1', \\ 2-\beta_1', & \beta_2'+1-\beta_1', & \end{matrix}\right| y\right), \end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} Z_9(x,y) &= x^{1-\beta_2} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, & \alpha_2+1-\beta_2, & \alpha_3+1-\beta_2, \\ \beta_1+1-\beta_2, & 2-\beta_2, & \end{matrix}\right| x\right) \times \\ &\times y^{1-\beta_2'} F\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1'+1-\beta_2', & \alpha_2'+1-\beta_2', & \alpha_3'+1-\beta_2', \\ \beta_1'+1-\beta_2', & 2-\beta_2', & \end{matrix}\right| y\right). \end{aligned} \tag{2.59}$$

(2.48) Клаузен текті жүйенің жалпы шешімі келесі қосынды түрінде беріледі

$$\overline{Z}(x,y) = \sum_{i=1}^{9} C_i Z_i(x,y) \tag{2.60}$$

мұндағы $C_i, \left(i=\overline{1,9}\right)$– кез-келген тұрақтылар, $Z_i(x,y), \left(i=\overline{1,9}\right)$– (2.49), (2.52)-(2.59) түрлеріндегі тоғыз сызықтық тәуелсіз дербес шешімдер.

2.4.2. Жай Клаузен текті біртекті емес жүйенің дербес шешімдері

2.8-теорема. Жай Клаузен текті

$$
\begin{aligned}
&x^2(1-x)Z_{xxx}+\left[1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x\right]xZ_{xx}+\\
&+\left[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)x\right]Z_x-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 Z=f_1(x,y),\\
&y^2(1-y)Z_{yyy}+\left[1+\beta'_1+\beta'_2-(3+\alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3)y\right]yZ_{yy}+\\
&+\left[\beta'_1\beta'_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)y\right]Z_y-\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3 Z=f_2(x,y)
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

біртекті емес жүйенің оң жағы

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y)&=x^\rho y^\sigma\,\frac{1}{\sigma(\sigma-1+\beta'_1)(\sigma-1+\beta'_2)},\\
f_2(x,y)&=x^\rho y^\sigma\,\frac{1}{\rho(\rho-1+\beta_1)(\rho-1+\beta_2)}
\end{aligned}
$$

функциялары арқылы өрнектелсе, онда (2.61) жүйесінің дербес шешімі

$$
K_{\rho,\sigma}(x,y)=x^\rho y^\sigma\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\rho-\alpha_1)_m(\rho-\alpha_2)_m(\rho-\alpha_3)_m(\sigma-\alpha'_1)_n(\sigma-\alpha'_2)_n(\sigma-\alpha'_3)_n x^m y^n}{(\rho)_m(\rho-1+\beta_1)_m(\rho-1+\beta_2)_m(\sigma)_n(\sigma-1+\beta'_1)_n(\sigma-1+\beta'_2)_n}
$$

түрінде табылады.

Дәлелдеу. Алдымен қарастырылып отырған (2.61) жүйенің Фробениус характеристикалық функциялар жүйесін $Z(x,y)=x^\rho y^\sigma$ ауыстыруы арқылы құрамыз:

$$
\begin{aligned}
L_1\left[x^\rho y^\sigma\right]&\equiv x^{\rho-1}y^\sigma\left[f^{(1)}_{0,0}(\rho,\sigma)+f^{(1)}_{1,0}(\rho,\sigma)x\right],\\
L_2\left[x^\rho y^\sigma\right]&\equiv x^{\rho}y^{\sigma-1}\left[f^{(2)}_{0,0}(\rho,\sigma)+f^{(2)}_{0,1}(\rho,\sigma)y\right]
\end{aligned}
$$

мұндағы

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}_{0,0}(\rho,\sigma)&=\rho(\rho-1)(\rho-2)+(1+\beta_1+\beta_2)\rho(\rho-1)+\beta_1\beta_2\rho,\\
f^{(2)}_{0,0}(\rho,\sigma)&=\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+(1+\beta'_1+\beta'_2)\sigma(\sigma-1)+\beta'_1\beta'_2\sigma,\\
f^{(1)}_{1,0}(\rho,\sigma)&=-(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_3)(\rho-\alpha_3),\\
f^{(1)}_{0,1}(\rho,\sigma)&=-(\sigma-\alpha'_1)(\sigma-\alpha'_3)(\sigma-\alpha'_3)
\end{aligned}
$$

ал,

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}_{0,0}(\rho,\sigma)&=\rho(\rho-1+\beta_1)(\rho-1+\beta_2)=0,\\
f^{(2)}_{0,0}(\rho,\sigma)&=\sigma(\sigma-1+\beta'_1)(\sigma-1+\beta'_2)=0
\end{aligned}
$$

$(0,0)$ ерекше нүктесіне қатысты айқындауыш теңдеулер жүйесін құрайды. Айқындауыш теңдеулер жүйесінен (2.51) түріндегі тоғыз түбір жұптары анықталады. Олар (2.52)-(2.59) шешімінің дәреже көрсеткіштері болып табылады және (2.48) біртекті жүйенің (2.60) жалпы шешімін анықтайды.

Біртекті емес жүйенің (2.50) шешімі екі айнымалылы жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ізделеді. Біртекті жүйенің шешімінен айырмашылығы, бұл жағдайда $A_{m,n}, (m,n = 0,1,2,...)$ белгісіз тұрақтылар келесі рекурренттік жүйесінен анықталады

$$
\begin{aligned}
&A_{0,0} f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{0,0}^{(j)}, \quad (j=1,2)\\
&A_{1,0} f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + A_{0,0} f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{1,0}^{(j)},\\
&A_{0,1} f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + A_{0,0} f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{0,1}^{(j)},\\
&A_{2,0} f_{0,0}^{(j)}(\rho+2,\sigma) + A_{1,0} f_{1,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + A_{0,0} f_{2,0}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{2,0}^{(j)},\\
&A_{1,1} f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma+1) + A_{1,0} f_{0,1}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + A_{0,1} f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + A_{0,0} f_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{1,1}^{(j)},\\
&A_{0,2} f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+2) + A_{0,1} f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + A_{0,0} f_{0,2}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{0,2}^{(j)},\\
&---
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

$A_{0,0}$ тұрақтысын (2.62) рекурренттік жүйесінің бірінші теңдеуінен $j=1,2$ мәндерінде анықтаймыз:

$$
\alpha_{0,0}^{(1)} = \frac{1}{\sigma(\sigma-1+\beta_1^{'})(\sigma-1+\beta_2^{'})} \quad \text{және} \quad \alpha_{0,0}^{(2)} = \frac{1}{\rho(\rho-1+\beta_1)(\rho-1+\beta_2)}
$$

сондықтан,

$$
A_{0,0} = \frac{1}{\sigma(\sigma-1+\beta_1^{'})(\sigma-1+\beta_2^{'})} \frac{1}{\rho(\rho-1+\beta_1)(\rho-1+\beta_2)}.
$$

Әрі қарай, коэффициенттер (2.62) жүйеден $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}, \alpha_{1,1}, \alpha_{2,0}, ...$ нөлге тең мәндерінде $A_{1,0}, A_{0,1}, A_{2,0}, A_{1,1}, A_{0,2},...$ коэффициенттері анықталады. Дербес шешім мына түрде табылады:

$$
\begin{aligned}
&K_{\upsilon,\sigma}(x,y) = \frac{x^\rho y^\sigma}{\rho(\rho-1+\beta_1)(\rho-1+\beta_2)\sigma(\sigma-1+\beta_1^{'})(\sigma-1+\beta_2^{'})} \times\\
&\times \{1 + \frac{(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)(\rho-\alpha_3)}{(\rho+1)(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)} x + \frac{(\sigma-\alpha_1^{'})(\sigma-\alpha_2^{'})(\sigma-\alpha_3^{'})}{(\sigma+1)(\sigma+\beta_1^{'})(\sigma+\beta_2^{'})} y +\\
&+ \frac{(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)(\rho-\alpha_3)(\sigma-\alpha_1^{'})(\sigma-\alpha_2^{'})(\sigma-\alpha_3^{'})}{(\rho+1)(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)(\sigma+1)(\sigma+\beta_1^{'})(\sigma+\beta_2^{'})} xy + ...\} =\\
&= x^\rho y^\sigma \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\rho-\alpha_1)_m(\rho-\alpha_2)_m(\rho-\alpha_3)_m(\sigma-\alpha_1^{'})_n(\sigma-\alpha_2^{'})_n(\sigma-\alpha_3^{'})_n}{(\rho)_m(\rho+\beta_1)_m(\rho+\beta_2)_m(\sigma)_n(\sigma+\beta_1^{'})_n(\sigma+\beta_2^{'})_n} x^m y^n.
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Жоғарыда келтірілген теоремалар негізінде, жай Клаузен текті біртекті емес (2.61) жүйенің жалпы шешімі туралы келесі теореманы тұжырымдауға болады.

2.3-тұжырым. Жай Клаузен текті біртекті емес (2.61) жүйенің жалпы шешімі (2.48) біртекті жүйенің $\overline{Z}(x,y)$ жалпы шешімі мен (2.61) біртекті емес жүйенің (2.63) дербес шешімінің қосындысы түрінде анықталады:

$$Z(x,y)=\overline{Z}(x,y)+Y(x,y)=\sum_{i=1}^{9}C_i Z_i(x,y)+$$
$$+x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\rho-\alpha_1)_m(\rho-\alpha_2)_m(\rho-\alpha_3)_m\left(\sigma-\alpha_1^{'}\right)_n\left(\sigma-\alpha_2^{'}\right)_n\left(\sigma-\alpha_3^{'}\right)_n}{(\rho)_m(\rho-1+\beta_1)_m(\rho-1+\beta_2)_m(\sigma)_n\left(\sigma-1+\beta_1^{'}\right)_n\left(\sigma-1+\beta_2^{'}\right)_n}x^m y^n$$

мұндағы $C_i,\,(i=1,2,3)-$ кез-келген тұрақты.

Бұл тұжырымға ұқсас тұжырымды (∞,∞) ерекше қисығы маңайындағы дербес шешімдерді құруға қатысты да дәлелдеуге болады.

Келесі тұжырым дифференциалдану қасиетіне байланысты.

2.4-тұжырым. Клаузеннің тәуелсіз x және y айнымалылары бойынша жалпыланған гипергеометриялық функцияларының көбейтінділерінің бірінші ретті туындылары:

- x тәуелсіз айнымалысы бойынша:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3\\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}\right|x\right){}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1^{'}, & \alpha_2^{'}, & \alpha_3^{'}\\ \beta_1^{'}, & \beta_2^{'} & \end{matrix}\right|y\right)\right]=$$
$$=\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\beta_1\beta_2}\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1+1, & \alpha_2+1, & \alpha_3+1\\ \beta_1+1, & \beta_2+1 & \end{matrix}\right|x\right){}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1^{'}, & \alpha_2^{'}, & \alpha_3^{'}\\ \beta_1^{'}, & \beta_2^{'} & \end{matrix}\right|y\right)=$$
$$=\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\beta_1\beta_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1+1)_n\left(\alpha_1^{'}\right)_n(\alpha_2+1)_n\left(\alpha_2^{'}\right)_n(\alpha_3+1)_n\left(\alpha_3^{'}\right)_n}{(\beta_1+1)_m\left(\beta_1^{'}\right)_n(\beta_2+1)_m\left(\beta_2^{'}\right)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

- y тәуелсіз айнымалысы бойынша:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3\\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}\right|x\right){}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1^{'}, & \alpha_2^{'}, & \alpha_3^{'}\\ \beta_1^{'}, & \beta_2^{'} & \end{matrix}\right|y\right)\right]=$$
$$=\frac{\alpha_1^{'}\alpha_2^{'}\alpha_3^{'}}{\beta_1^{'}\beta_2^{'}}\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3\\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}\right|x\right){}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1^{'}+1, & \alpha_2^{'}+1, & \alpha_3^{'}+1\\ \beta_1^{'}+1, & \beta_2^{'}+1 & \end{matrix}\right|y\right)=$$
$$=\frac{\alpha_1^{'}\alpha_2^{'}\alpha_3^{'}}{\beta_1^{'}\beta_2^{'}}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m\left(\alpha_1^{'}+1\right)_n(\alpha_2)_m\left(\alpha_2^{'}+1\right)_n(\alpha_3)_m\left(\alpha_3^{'}+1\right)_n}{(\beta_1)_m\left(\beta_1^{'}+1\right)_n(\beta_2)_m\left(\beta_2^{'}+1\right)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

түрлерінде анықталады.

1.3-бөлімшесінде келтірілген жалпы формуланы жай (2.61) Клаузен жүйесінің (2.52)-(2.59) шешімінің туындыларын табу үшін де қолдануға болады. Мұнда формуланың тағы бір жаңа қасиеті ашылады.

Шынында да, егер $\sigma+1-n$ теріс бүтін сан немесе нөл болса, (1.46) қатынасын келесі үш түрдің біріндегі ыңғайлы түрмен жазуға болады [14, 169-б.]:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\sigma}\ {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_p\\ \rho_q\end{matrix}\middle| x\right)\right]=\frac{(\alpha_p)_{n-\sigma}n!}{(\rho_q)_{n-\sigma}(n-\sigma)!}\ {}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix}\alpha_p+n-\sigma, & n+1\\ \rho_q+n-\sigma, & n+1-\sigma\end{matrix}\middle| x\right),$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\sigma+n-1}\ {}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}\sigma, & \alpha_p\\ \rho_q & \end{matrix}\middle| x\right)\right]=(\sigma)_n x^{\sigma-1}\ {}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}\sigma+n, & \alpha_p\\ \rho_q & \end{matrix}\middle| x\right),$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\sigma-1}\ {}_pF_{q+1}\left(\begin{matrix}\alpha_p & \\ \sigma, & \rho_q\end{matrix}\middle| x\right)\right]=(\sigma-n)_n x^{\sigma-1-n}\ {}_pF_{q+1}\left(\begin{matrix}\alpha_p & \\ \sigma-n, & \rho_q\end{matrix}\middle| x\right).$$

Мысалы, егер $\sigma=1-\beta_1$ және $\sigma+1-n=1-\beta_1+1-n=2-\beta_1-n<0$ болса, онда $m-$ші көбейтіндінің туындысын

$$\frac{d^m}{dy^m}\left[y^{1-\beta_1}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1\\ 2-\beta_1, & \beta_1+1-\beta_2 & \end{matrix}\middle| x\right)\right]$$

$\sigma=1-\beta_1,\ p=3,\ q=2$ болғанда анықтауға болады.

Демек, $Z_2(x,y)$ дербес шешімінің $m-$ші туындысы келесі түрде беріледі

$$\frac{d^m Z_2(x,y)}{dy^m}=\frac{d^m}{dy^m}\left[{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3\\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}\middle| x\right)\right]y^{1-\beta_1}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1\\ 2-\beta_1, & \beta_1+1-\beta_2 & \end{matrix}\middle| y\right)=$$

$$=(1-\beta_1)_m y^{-\beta_1}\ {}_4F_2\left(\begin{matrix}1-\beta_1+m, & \alpha_1+1-\beta_1, & \alpha_2+1-\beta_1, & \alpha_3+1-\beta_1\\ 2-\beta_1, & \beta_1+1-\beta_2 & & \end{matrix}\middle| y\right){}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3\\ \beta_1, & \beta_2 & \end{matrix}\middle| x\right).$$

Регуляр және иррегуляр ерекшеліктерді ескере отырып, Клаузеннің негізгі жүйесін зерттеуге көшейік. Бұл жалпыланған регуляр және туындалған Клаузен жүйелерін жан-жақты зерттеуге мүмкіндік береді.

2.5 Үшінші ретті екі теңдеуден тұратын біртекті емес жүйенің шешімін құру

Үшінші ретті екі дербес туындылы дифференциалдық теңдеуден тұратын

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^h)x^j y^k p_{j,k}=g(x,y)\\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^h)x^j y^k p_{j,k}=q(x,y)\end{aligned}\right\}\qquad(2.64)$$

біртекті емес регуляр жүйенің (0,0) ерекше қисық маңайындағы шешімдерін құру мүмкіндіктерін қарастырайық, мұндағы $p_{0,0}(x,y)=Z(x,y),(j=0,k=0)-$ (2.64) жүйенің екі теңдеуі үшін ортақ белгісіз; $p_{j,k}$ арқылы $Z(x,y)$ функциясының дербес туындыларының әртүрлі реттілігі белгіленген. Жүйе теңдеулерінің реті $\omega-$ның мәнімен анықталады.

Егер біртекті жүйе гипергеометриялық текті немесе оларға келтірілетін болса, онда берілген біртекті емес жүйенің бірқатар ерекше жағдайларының шешімдерін құру мүмкіндігін зерттеу қажет.

2.5.1 Гипергеометриялық текті біртекті жүйенің шешімдерін құру ерекшеліктері

Қарапайым жағдайдағыдай, алдымен $g(x,y)\equiv 0, q(x,y)\equiv 0$ болғанда (2.64) біртекті емес жүйеден алынған сәйкес біртекті жүйенің

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^h)x^jy^kp_{j,k}&=0\\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^h)x^jy^kp_{j,k}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(2.65)$$

шешімін құру ерекшеліктерін зерделейік.

Мұндай зерттеулер (2.65) біртекті жүйенің әртүрлі реттері үшін гипергеометриялық текті жүйелерді орнату, ерекшеліктер маңайында шешімдерді құрудың жалпы әдісін және сызықты тәуелсіз дербес шешімдердің санын анықтауды, регулярлы және иррегулярлы ерекшеліктерді жіктеуді, үйлесімділік пен интегралдық шарттарын анықтауды қажет етеді. Осы зерттеулердің негізінде, (2.64) біртекті емес жүйенің жалпы шешімін құрудың ерекшеліктерін анықтау керек. (2.64) біртекті емес жүйенің жалпы шешімі біртекті емес жүйенің екі теңдеуін қосу арқылы алынған бір теңдеудің шешімі болатынын да көрсету қажет.

(2.65) біртекті жүйенің айрықша ерекшеліктері келесі үшінші ретті

$$\begin{aligned}&x^3(r_{3,0}-\alpha_{3,0}x^h)p_{3,0}+x^2y(r_{2,1}-\alpha_{2,1}x^h)p_{2,1}+x^2(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x^h)p_{2,0}+\\&+xy(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x^h)p_{1,1}+x(r_{1,0}-\alpha_{1,0}x^h)p_{1,0}+y(r_{0,1}-\alpha_{0,1}x^h)p_{0,1}+(r_{0,0}-\alpha_{0,0}x^h)p_{0,0}=0,\\&y^3(t_{0,3}-\beta_{0,3}y^h)p_{0,3}+xy^2(t_{1,2}-\beta_{1,2}y^h)p_{1,2}+y^2(t_{0,2}-\beta_{0,2}y^h)p_{0,2}+\\&+xy(t_{1,1}-\beta_{1,1}y^h)p_{1,1}+x(t_{1,0}-\beta_{1,0}y^h)p_{1,0}+y(t_{0,1}-\beta_{0,1}y^h)p_{0,1}+(t_{0,0}\mp\beta_{0,0}y^h)p_{0,0}=0\end{aligned}\qquad(2.66)$$

нақты жүйенің мысалында ашылады, мұндағы $p_{0,0}=Z(x,y)-$ жалпы белгісіз, $r_{j,k},\alpha_{j,k},t_{j,k},\beta_{j,k},(j,k=\overline{0,3})-$ белгісіз тұрақтылар.

(2.66) үшінші ретті жүйенің шешімін құру үшін Фробениус-Латышева [14, 148-162 б.] әдісі қолданылады. (2.66) жүйенің бірқатар қызықты жағдайларына тоқталамыз.

Эйлер текті жүйе. Біртекті (2.66) жүйеде $h=0$ болғанда Эйлер текті жүйе алынады, онда жақшадағы өрнектер $r_{j,k}-\alpha_{j,k}=a_{j,k}$; $t_{j,k}-\beta_{j,k}=b_{j,k}, (j,k=\overline{0,3})$ тұрақтыларына айналады.

Бұл жағдайда үшінші ретті дербес туындылы екі дифференциалдық теңдеуден тұратын регулярлы (2.66) жүйенің $h=0,$ $r_{j,k}-\alpha_{j,k}=a_{j,k}$; $t_{j,k}-\beta_{j,k}=b_{j,k}, (j,k=\overline{0,3})$ жағдайында

$$Z_l(x,y)=x^{\rho_l}\,y^{\sigma_l}, \quad (l=\overline{1,9}) \tag{2.67}$$

тоғыз сызықты тәуелсіз дербес шешімі бар болатындығына оңай көз жеткізуге болады.

$(\rho_l,\sigma_l), (l=\overline{1,9})$ дәреже көрсеткіштері $(0,0)$ регуляр ерекшелікке қатысты айқындауыш теңдеулер жүйесінің қарапайым түбірлері.

Фробениус-Латышева әдісіне сәйкес, ең басында Фробениус характеристикалық функциялар жүйесі (2.66)-дағы белгісіз орнына $Z=x^{\rho}y^{\sigma}$ ауыстыруы арқылы құрылады

$$L_j[x^{\rho}y^{\sigma}]\equiv x^{\rho}y^{\sigma}f_j(\rho,\sigma), \quad (j=1,2)$$

мұнда

$$\begin{aligned} f_1(\rho,\sigma)&\equiv a_{3,0}\rho(\rho-1)(\rho-2)+a_{2,1}\rho(\rho-1)\sigma+a_{2,0}\rho(\rho-1)+a_{1,1}\rho\sigma+a_{1,0}\rho+a_{0,1}\sigma+a_{0,0}=0\\ f_2(\rho,\sigma)&\equiv b_{0,3}\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+b_{1,2}\rho(\sigma-1)\sigma+b_{0,2}\sigma(\sigma-1)+b_{1,1}\rho\sigma+b_{1,0}\rho+b_{0,1}\sigma+b_{0,0}=0 \end{aligned} \tag{2.68}$$

$(0,0)$ ерекше нүктесіне қатысты айқындауыш теңдеулер жүйесі белгіленген. Мұндағы ρ немесе σ белгісіздердің бірін жою арқылы ρ немесе σ белгісіздері бойынша тоғызыншы дәрежелі алгебралық теңдеу алуға болады. Теңдеудің түбірлері әр түрлі болса, онда (2.68) жүйесінің $(\rho_t,\sigma_t), (t=\overline{1,9})$ тоғыз жұп қарапайым түбірі болады. Сондықтан, Эйлер жүйесінің (2.67) түріндегі тоғыз сызықты тәуелсіз дербес шешімдері бар болады және жалпы шешімі келесі қосынды

$$Z(x,y)=\sum_{t=1}^{9}C_tZ_t(x,y) \tag{2.69}$$

түрінде анықталады, мұндағы $Z_t(x,y), (t=\overline{1,9})-$ (2.67) түріндегі дербес шешімдер.

Мұндай жүйенің жалпы теориясы негізінде (2.69) жалпы шешім тоғыз C_t кез-келген тұрақтыларға тәуелді. Эйлер текті жүйе коэфициенттері тұрақты жүйенің мысалы. Оны қарастыру алдағы уақытта үшінші ретті жүйенің шешімін жалпы жағдайда құру мүмкіндіктерін зерттеуде оң ықпал жасайды.

Кампе де Ферье текті гипергеометриялық жүйе жағдайы. $h=1$ болса, онда (2.66) жүйеден Кампе де Ферьенің зерттеген

$$\begin{aligned}&x^3(r_{3,0}-\alpha_{3,0}x)p_{3,0}+x^2y(r_{2,1}-\alpha_{2,1}x)p_{2,1}+x^2(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x)p_{2,0}+\\&+xy(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x)p_{1,1}+x(r_{1,0}-\alpha_{1,0}x)p_{1,0}+y(r_{0,1}-\alpha_{0,1}x)p_{0,1}+(r_{0,0}\mp\alpha_{0,0}x)p_{0,0}=0,\\&y^3(t_{0,3}-\beta_{0,3}y)p_{0,3}+xy^2(t_{1,2}-\beta_{1,2}y)p_{1,2}+y^2(t_{0,2}-\beta_{0,2}y)p_{0,2}+\\&+xy(t_{1,1}-\beta_{1,1}y)p_{1,1}+x(t_{1,0}-\beta_{1,0}y)p_{1,0}+y(t_{0,1}-\beta_{0,1}y)p_{0,1}+(t_{0,0}-\beta_{0,0}y)p_{0,0}=0\end{aligned}\tag{2.70}$$

жүйесі алынады [15, 102 б.; 17, 294 б.], мұндағы $p_{0,0}=Z(x,y)-$жалпы белгісіз, $r_{j,k},\alpha_{j,k},t_{j,k},\beta_{j,k},(j,k=\overline{0,3})-$ тұрақтылар.

Жүйенің шешімі бар болуы үшін белгілі бір шарттар орындалуы қажет.

1. (2.70) жүйенің ерекше қисықтары p_{30} және p_{03} жоғары ретті туындылары жанындағы коэффициенттерді нөлге теңестіру арқылы анықталады:

$$\left.\begin{aligned}x^3(r_{3,0}-\alpha_{3,0}x)=0,\\y^3(t_{0,3}-\beta_{0,3}y)=0,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&x=0,\quad x=r_{3,0}/\alpha_{3,0}\\&y=0,\quad y=t_{0,3}/\beta_{0,3}.\end{aligned}$$

Бұдан $x=\infty$ және $y=\infty$ шексіздіктегі ерекше қисықтарды есепке ала отырып, ерекше қисықтар жұптары құрылады:

$$(0,0);(0,t_{0,3}/\beta_{0,3});(r_{3,0}/\alpha_{3,0},0);(r_{3,0}/\alpha_{3,0},t_{0,3}/\beta_{0,3});(0,\infty);(r_{3,0}/\alpha_{3,0},\infty);(\infty,0);(\infty,t_{0,3}/\beta_{0,3});(\infty,\infty).$$

2. Қарапайым ережелер арқылы регуляр және иррегуляр ерекше қисықтардың классификациясы [14, 159-234 б.] жасалады.

3. Үйлесімділік пен интегралдану шарттары анықталуы керек. Жалпы жағдайда үйлесімділік шарттарын анықтау белгілі бір қиындықтар тудырады. Гипергеометриялық текті жүйелерді зерттеу кезінде аталған шарттардың орындалуы гипергеометриялық текті жүйенің шешімі болып табылатын қатардың коэффициенттерін бір мәнді анықтауды қамтамасыз ететіндігі.

Кампе де Ферье жүйесі жағдайында [1, 115 б.] $\omega=1$ болған кезде, бір ғана шарт

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&-a_{1,1}\\-b_{1,1,}&1\end{vmatrix}=1-a_{1,1}b_{1,1}\neq0,$$

орындалады, мұндағы

$$a_{1,1}=-\frac{y(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x)}{x(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x)},\ b_{1,1}=-\frac{x(\delta_{1,1}-\beta_{1,1}y)}{y(\delta_{0,2}-\beta_{0,2}y)}.$$

Қарастырылып отырған жағдайда бір айқындауыш орнына екі айқындауыш

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -a_{1,\omega} \\ -b_{\omega,1} & 1 \end{vmatrix} = 1 - a_{1,\omega} b_{\omega,1}, \tag{2.71}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a_{1,\omega} & -a_{2,\omega-1} \\ -a_{\omega,1} & 1 & 0 & -a_{1,\omega} \\ -b_{\omega,1} & 0 & 1 & -b_{1,\omega} \\ -b_{\omega-1,2} & -b_{\omega,1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_1^2 - (a_{2,\omega-1} + a_{1,\omega} b_{1,\omega})(b_{\omega-1,2} + b_{\omega,1} a_{\omega,1}), \tag{2.72}$$

қарастырылуы керек, яғни $\omega = 2$ болғанда коэффициенттердің $a_{1,2}, a_{2,1}, b_{1,2}, b_{2,1}$ мәндері ескерілуі қажет. Сондықтан (2.71) және (2.72) интегралдану шарттары

$$\Delta_1 = 1 - a_{1,2} b_{2,1} \neq 0 - \text{бірінші шарт},$$

$$\Delta_2 = \Delta_1^2 - (a_{2,1} + a_{1,2} b_{1,2})(b_{1,2} + b_{2,1} a_{2,1}) \neq 0$$

түрлерінде орындалуы міндетті.

4. $r_{0,0} = 0, r_{0,1} = 0, t_{1,0} = 0, t_{0,0} = 0$ болғанда (2.70) жүйеден

$$\begin{aligned} & x^2 (r_{3,0} - \alpha_{3,0} x) p_{3,0} + xy(r_{2,1} - \alpha_{2,1} x) p_{2,1} + x(r_{2,0} - \alpha_{2,0} x) p_{2,0} + \\ & + y(r_{1,1} - \alpha_{1,1} x) p_{1,1} + (r_{1,0} - \alpha_{1,0} x) p_{1,0} - \alpha_{0,1} y \cdot p_{0,1} \mp \alpha_{0,0} p_{0,0} = 0, \\ & y^2 (t_{0,3} - \beta_{0,3} y) p_{0,3} + xy(t_{1,2} - \beta_{1,2} y) p_{1,2} + y(t_{0,2} - \beta_{0,2} y) p_{0,2} + \\ & + x(t_{1,1} - \beta_{1,1} y) p_{1,1} \mp x\beta_{1,0} p_{1,0} + y(t_{0,1} - \beta_{0,1} y) p_{0,1} - \beta_{0,0} p_{0,0} = 0 \end{aligned}$$

Кампе де Ферье текті нақты жүйесі алынады.

2.5.2 Негізгі Клаузен жүйесінің шешімін құру ерекшеліктері

Негізгі Клаузен жүйесінің шешімін құруға Фробениус-Латышева әдісін қолдану ерекшеліктерін көрсетейік. Кампе де Ферье әдісімен [1, 115 б.] негізгі Клаузен жүйесі

$$\begin{aligned} & x^2(1-x) p_{3,0} + xy p_{2,1} + [\gamma + \delta + 1 - (3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) x] x p_{2,0} + \delta y p_{1,1} + \\ & + [\gamma\delta - (1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3) x] p_{1,0} - \beta_1\beta_2\beta_3 p_{0,0} = 0, \\ & y^2(1-y) p_{0,3} + xy p_{1,2} + [\gamma + \delta' + 1 - (3 + \beta_1' + \beta_2' + \beta_3') y] y p_{0,2} + \delta' x p_{1,1} + \\ & + [\gamma\delta' - (1 + \beta_1' + \beta_2' + \beta_3' + \beta_1'\beta_2' + \beta_2'\beta_3' + \beta_1'\beta_3') y] p_{0,1} - \beta_1'\beta_2'\beta_3' p_{0,0} = 0 \end{aligned} \tag{2.73}$$

түрінде алынған деп ұйғарайық.

2.5.1-ішкі бөлімшесіне сәйкес, алдымен $p_{3,0} = Z_{xxx}$ және $p_{0,3} = Z_{yyy}$ жоғары ретті туындылары жанындағы коэффициенттерді нөлге теңестіру арқылы ерекше қисықтардың жұптары анықталады: $(0,0); (0,1); (1,0); (1,1);$

$(0,\infty);(1,\infty);(\infty,0);(\infty,1);(\infty,\infty)$. Мұнда $(0,0)$ маңайында шешім құрумен шектелінеді. Ерекше қисық $(0,0)$ регуляр, өйткені $r_{3,0}\neq 0$ және $r_{0,3}\neq 0$. Сондықтан Клаузеннің (2.73) негізгі жүйесінің

$$Z(x,y)=x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{m,n}x^{m}y^{n} \tag{2.74}$$

түріндегі регуляр шешімі бар, мұндағы ρ,σ және $A_{m,n},(m,n=0,1,2,...)$ – белгісіз коэффициенттер.

Үйлесімділік шарты жүйенің Кампе де Ферье әдісімен құрылуымен қамтамасыз етіледі [1, 115б.]. Интегралданудың (2.71) және (2.72) шарттарының орындалуын тексерейік. Коэффициенттер

$a_{2,1}=\dfrac{y}{x(1-x)},a_{1,2}=0,b_{1,2}=\dfrac{x}{y(1-y)},b_{2,1}=0,$ демек айқындауыштар:

$$\begin{aligned}&\Delta_1=1-a_{1,2}b_{2,1}=1\neq 0,\\&\Delta_2=\Delta_1^2-\left(a_{2,1}+a_{1,2}b_{1,2})(b_{1,2}+b_{2,1}a_{2,1}\right)=1^2-\left[\frac{y}{x(1-x)}\frac{x}{y(1-y)}\right]=1-\frac{1}{(1-x)(1-y)}\neq 0.\end{aligned} \tag{2.75}$$

Сондықтан, $(0,0)$ ерекше нүктесіне маңайында тоғыз сызықты тәуелсіз (2.74) дербес шешімдері болуы керек.

2.9-теорема. Гипергеометриялық текті (2.73) негізгі Клаузен жүйесінің $(0,0)$ регуляр ерекше нүкте маңайында (2.75) интегралдану шарты орындалған кезде тоғыз сызықты тәуелсіз дербес шешімі бар және олардың біреуі

$$F_1=F_1\left(\begin{matrix}\beta_1, & \beta_1', & \beta_2, & \beta_2', & \beta_3, & \beta_3'\\ & \gamma, & & \delta, & & \delta'\end{matrix}\middle| x,y\right) \tag{2.76}$$

екі айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық Клаузен функциясы.

Дәлелдеу. Негізгі деректерді нақтылағаннан кейін, яғни жүйенің арнайы қисықтарын, үйлесімділік пен интегралдану шарттары орындалғаннан кейін, Фробениус-Латышева әдісі қолданылады. Сол мақсатта $p_{0,0}=Z(x,y)=x^{\rho}y^{\sigma}$ жалпы белгісіздің орнына қою арқылы Фробениустың характеристикалық функцияларының жүйесі құрылады:

$$L_1[x^{\rho}y^{\sigma}]\equiv x^{\rho}y^{\sigma}[f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma)+f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma)x],$$
$$L_2[x^{\rho}y^{\sigma}]\equiv x^{\rho}y^{\sigma}[f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma)+f_{0,1}^{(2)}(\rho,\sigma)y]$$

мұндағы

$$\begin{aligned}&f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma)=\rho(\rho-1)(\rho-2)+\rho(\rho-1)\sigma+(\gamma+\delta+1)\rho(\rho-1)+\delta\sigma\rho+\gamma\delta\rho,\\&f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma)=\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+\rho\sigma(\sigma-1)+(\gamma+\delta'+1)\sigma(\sigma-1)+\delta'\sigma\rho+\gamma\delta'\sigma\end{aligned} \tag{2.77}$$

$$f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma)=-\rho(\rho-1)(\rho-2)-[(3+\beta_1+\beta_2+\beta_3)\rho(\rho-1)+(1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_1\beta_2+$$
$$+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)\rho+\beta_1\beta_2\beta_3],$$
$$f_{0,1}^{(2)}(\rho,\sigma)=-\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)-[(3+\beta'_1+\beta'_2+\beta'_3)\sigma(\sigma-1)+(1+\beta'_1+\beta'_2+\beta'_3+\beta'_1\beta'_2+$$
$$+\beta'_2\beta'_3+\beta'_1\beta'_3)\sigma+\beta'_1\beta'_2\beta'_3].$$

(2.77)-ден $(0,0)$ ерекше қисығына қатысты айқындауыш теңдеулер жүйесі құрылады:

$$f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=0,\quad (j=1,2). \tag{2.78}$$

$(0,0)$ ерекше нүктесіне қатысты (2.78) айқындауыш теңдеулер жүйесінің түбірлерінің келесі тоғыз жұбы табылады:

$$\begin{aligned}&(\rho_1=0,\sigma_1=0),(\rho_1=0,\sigma_2=1-\delta'_1),(\rho_1=0,\sigma_3=1-\delta'_2),(\rho_2=1-\delta_1,\sigma_1=0),\\&(\rho_2=1-\delta_1,\sigma_2=1-\delta'_1),(\rho_2=1-\delta_1,\sigma_3=1-\delta'_2),(\rho_3=1-\delta_2,\sigma_1=0),\\&(\rho_3=1-\delta_2,\sigma_2=1-\delta'_1),(\rho_3=1-\delta_2,\sigma_3=1-\delta'_2).\end{aligned} \tag{2.79}$$

Олар (2.74) қатарлардың дәреже көрсеткіштері. Бұл әртүрлі $(\rho_t,\sigma_t),(t=\overline{1,9})$ жұптарға (2.74) қатарлардың тоғыз сызықты тәуелсіз дербес шешімдері сәйкес келеді. Енді дербес шешімдердің бірі (2.76) гипергеометриялық Клаузен функциясы екенін көрсетейік. Қатардың $A_{m,n},(m,n=0,1,2,...)$ коэффициенттері келесі

$$\begin{aligned}&A_{0,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=0,\quad (j=1,2)\\&A_{1,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+A_{0,0}f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=0,\\&A_{0,1}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+A_{0,0}f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma)=0,\\&A_{1,1}f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma+1)+A_{1,0}f_{0,1}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+A_{0,1}f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+A_{0,0}f_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma)=0,\\&A_{2,0}f_{0,0}^{(j)}(\rho+2,\sigma)+A_{1,0}f_{1,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma)+A_{0,0}f_{2,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=0,\\&A_{0,2}f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+2)+A_{0,1}f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma+1)+A_{0,0}f_{0,2}^{(j)}(\rho,\sigma)=0,\\&-----------------------------\end{aligned}$$

рекуррентті жүйенің көмегімен анықталады.

Шынында да, $A_{0,0}\neq 0$ болғанда рекурентті жүйе тізбегінің бірінші жолында (2.78) $f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=0$ айқындауыш теңдеулер жүйесі алынады. Оның түбірлерінің жұптары (2.79) ретінде анықталады. Бірінші дербес шешім $(\rho_1=0,\sigma_1=0)$ көрсеткішіне сәйкес келеді, яғни $\rho_1=0$ және $\sigma_1=0$ мәндерді рекуррентті тізбектер жүйесіне қойып, қатардың белгісіз коэффициенттері анықталады:

$$A_{1,0}=\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\gamma\delta},\ A_{0,1}=\frac{\beta'_1\beta'_2\beta'_3}{\gamma\delta'},\ A_{1,1}=\frac{\beta_1\beta_2\beta_3\beta'_1\beta'_2\beta'_3}{\gamma(\gamma+1)\delta\delta'},\ A_{2,0}=\frac{\beta_1(\beta_1+1)\beta_2(\beta_2+1)\beta_3(\beta_3+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)\delta'},$$

$$A_{0,2}=\frac{\beta'_1(\beta'_1+1)\beta'_2(\beta'_2+1)\beta'_3(\beta'_3+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta\delta'(\delta'+1)},...$$

яғни (2.76) қатар келесі түрде жазылады:

$$F_1=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\beta'_1)_n(\beta'_2)_n(\beta'_3)_n}{(\gamma)_{m+n}(\delta)_m(\delta')_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

$A_{m,n},\ (m,n=0,1,2,...)$ белгісіз коэффициенттерді анықтаған кезде рекуррентті жүйелер тізбегі $j=1, j=2$ мәндерінде екі жүйеге бөлінеді. Алайда, олардың әрқайсысынан табылған $A^{(1)}_{m,n}$ және $A^{(2)}_{m,n},\ (m,n=0,1,...)$ коэффициенттері бірдей болуы керек.

Сол сияқты, (2.79) жүйесінің басқа дәреже көрсеткіштерге сәйкес келетін қалған сегіз сызықты тәуелсіз дербес шешімдер құрылады. Олардың арасында еселік көрсеткіштер жоқ. Сондықтан Клаузен жүйесінде логарифмдік шешімдер жоқ. Дербес шешімдер келесі түрде беріледі:

$$Z_2(x,y)=y^{1-\delta'}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(1-\delta'+\beta'_1)_n(1-\delta'+\beta'_2)_n(1-\delta'+\beta'_3)_n}{(\delta)_m(2-\delta')_n(1-\delta'+\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

$$Z_3(x,y)=x^{1-\delta}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(1-\delta+\beta_1)_m(1-\delta+\beta_2)_m(1-\delta+\beta_3)_m(\beta'_1)_n(\beta'_2)_n(\beta'_3)_n}{(2-\delta)_m(1-\delta+\gamma)_{m+n}(\delta')_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

$$Z_4(x,y)=x^{1-\delta}y^{1-\delta'}\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(1-\delta+\beta_1)_m(1-\delta+\beta_2)_m(1-\delta+\beta_3)_m(1-\delta'+\beta'_1)_n(1-\delta'+\beta'_2)_n(1-\delta'+\beta'_3)_n}{(2-\delta)_m(2-\delta-\delta'+\gamma)_{m+n}(2-\delta')_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

$$Z_5(x,y)=y^{1-\gamma}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(1-\delta'+\beta'_1)_n(1-\delta'+\beta'_2)_n(1-\delta'+\beta'_3)_n}{(\delta)_m(2-\gamma)_m(1-\gamma+\delta')_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

$$Z_6(x,y)=x^{1-\gamma}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(1-\gamma+\beta_1)_m(1-\gamma+\beta_2)_m(1-\gamma+\beta_3)_m(\beta'_1)_n(\beta'_2)_n(\beta'_3)_n}{(2-\gamma)_m(1-\gamma+\delta)_m(\delta')_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

$$Z_7(x,y)=x^{1-\gamma}y^{1-\gamma}\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(1-\gamma+\beta_1)_m(1-\gamma+\beta_2)_m(1-\gamma+\beta_3)_m}{(2-\gamma)_m(2-\gamma)_n(1+\delta-\gamma)_m(2-\delta)_n}\frac{(1-\gamma+\beta'_1)_n(1-\gamma+\beta'_2)_n(1-\gamma+\beta'_3)_n}{(2-\delta')_m(1+\delta'-\gamma)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

$$Z_8(x,y)=x^{1-\delta}y^{\delta-\gamma}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(1-\delta+\beta_1)_m(1-\delta+\beta_2)_m}{(2-\delta)_m(\delta-\gamma+1)_n}\times$$

$$\times\frac{(1-\delta+\beta_3)_m(\delta-\gamma+\beta'_1)_n(\delta-\gamma+\beta'_2)_n(\delta-\gamma+\beta'_3)_n}{(\delta-\gamma-\delta')_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

$$Z_9(x,y)=x^{\delta'-\gamma}y^{1-\delta'}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(1-\delta'+\beta_1'\right)_n\left(1-\delta'+\beta_2'\right)_n}{\left(2-\delta'\right)_n\left(\delta'-\gamma+1\right)_m}\times$$
$$\times\frac{\left(1-\delta'+\beta_3'\right)_n\left(\delta'-\gamma+\beta_1\right)_m\left(\delta'-\gamma+\beta_2\right)_m\left(\delta'-\gamma+\beta_3\right)_m}{\left(\delta'-\gamma-\delta\right)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

Теорема дәлелденді.

Негізгі Клаузен жүйесінің жалпы шешімі келесі қосынды

$$Z(x,y)=\sum_{t=1}^{9}C_tZ_t(x,y)$$

түрінде беріледі, мұндағы $Z_t(x,y),\ (t=\overline{1,9})-$ сызықты тәуелсіз дербес шешімдер, $C_t,\ (t=\overline{1,9})-$ кез-келген тұрақтыларға байланысты болады.

2.5.3 Біртекті емес негізгі Клаузен жүйесінің шешімдерін құру әдістері мен қасиеттері

Үшінші ретті біртекті гипергеометриялық жүйенің негізгі мысалы Клаузен жүйесі. Фробениус-Латышева әдісін қолданып, оның шешімдерін құру ерекшеліктері 2.5.2-ішкі бөлімшесінде келтірілді. Әйтседе осы уақытқа дейін екі теңдеуден тұратын Клаузеннің біртекті емес негізгі гипергеометриялық жүйесінің және туындалған жалпыланған гипергеометриялық жүйенің шешімдерін құру ерекшеліктері зерттелмеген күйде.

Біртекті емес негізгі Клаузен жүйесінің шешімдерін құрудың анықталмаған коэффициенттері әдісі. Клаузеннің біртекті емес гипергеометриялық жүйесінің шешімдерін анықталмаған коэффициенттер әдісімен құру мүмкіндіктеріне тоқталайық.

2.10-теорема. Біртекті емес

$$\begin{aligned}&x^2(1-x)p_{3,0}+xyp_{2,1}+(\gamma+\delta+1-b_{2,0})xp_{2,0}+b_{1,1}yp_{1,1}+(\gamma\delta-b_{1,0})p_{1,0}-b_{0,0}p_{0,0}=g(x,y),\\&y^2(1-y)p_{0,3}+xyp_{1,2}+(\gamma+\delta'+1-b_{0,2})yp_{0,2}+b_{1,1}'xp_{1,1}+(\gamma\delta'-b_{0,1})p_{0,1}-b_{0,0}'p_{0,0}=q(x,y)\end{aligned}\tag{2.80}$$

гипергеометриялық негізгі Клаузен жүйесінің оң жағы

$$\begin{aligned}&g(x,y)=b_{0,0}-\frac{2(b_{0,0})^2}{\gamma\delta-b_{1,0}}x+\frac{(\gamma\delta'-b_{0,1})(b_{1,1}+\gamma\delta-b_{1,0})-2(b_{0,0})^2(b_{0,0}')^2}{b_{0,0}(b_{0,0}')(\gamma\delta'-b_{0,1})}y-\frac{1}{b_{0,0}'}xy,\\&q(x,y)=b_{0,0}'+\frac{(\gamma\delta-b_{1,0})(b_{1,1}'+\gamma\delta'-b_{0,1}')-2(b_{0,0}^2)(b_{0,0}')^2}{b_{0,0}b_{0,0}'(\gamma\delta-b_{1,0})}x-\frac{2(b_{0,0}')^2}{\gamma\delta'-b_{0,1}}y-\frac{1}{b_{0,.0}}xy\end{aligned}\tag{2.81}$$

көпмүшелері арқылы берілсе, онда жүйенің дербес шешімі

$$Z_0(x,y)=1+\frac{2b_{0,0}}{\gamma\delta-b_{1,0}}x+\frac{2b'_{0,0}}{\gamma\delta'-b_{0,1}}y-\frac{1}{b_{0,0}b'_{0,0}}xy \tag{2.82}$$

түрінде табылады, мұнда қысқа жазу үшін келесі белгілеулер енгізілген:

$$b_{0,0}=\beta_1\beta_2\beta_3; b_{1,1}=\delta; b'_{0,0}=\beta'_1\beta'_2\beta'_3; b'_{1,1}=\delta'; b_{1,0}=1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3,$$
$$b_{2,0}=3+\beta_1+\beta_2+\beta_3; b_{0,2}=3+\beta'_1+\beta'_2+\beta'_3; b_{0,1}=1+\beta'_1+\beta'_2+\beta'_3+\beta'_1\beta_2+\beta'_2\beta_3+\beta_1\beta'_3.$$

Дәлелдеу. Оң жақ бөліктің көпмүшеліктер арқылы берілуіне сәйкес, (2.81) жүйенің шешімі

$$Z_0(x,y)=A_{0,0}+A_{1,0}x+A_{0,1}y+A_{1,1}xy \tag{2.83}$$

көпмүшелігі түрінде ізделінеді. (2.83)-ші көпмүшелікті біртекті емес (2.80) Клаузен жүйесіне қойып, (2.83) көпмүшеліктің белгісіз коэффициенттері анықталмаған коэффициенттер әдісімен, келесі

$$b_{1,1}yA_{1,1}+(\gamma\delta-b_{1,0})(A_{1,0}+A_{1,1}y)-b_{0,0}(A_{0,0}A_{1,0}x+A_{0,1}y+A_{1,1}xy)=b_{0,0}-\frac{2(b_{0.0})^2}{\gamma\delta-b_{1,0}}x+$$
$$+\frac{(\gamma\delta'-b_{0,1})(b_{1,1}+\gamma\delta-b_{1,0})-2(b_{0,0})^2(b'_{0,0})^2}{b_{0,0}(b'_{0,0})(\gamma\delta'-b_{0,1})}y-\frac{1}{b'_{0,0}}xy,$$
$$b'_{1,1}xA_{1,1}+(\gamma\delta'-b_{0,1})(A_{0,1}+A_{1,1}x)-b'_{0,0}(A_{0,0}A_{1,0}x+A_{0,1}y+A_{1,1}xy)=b'_{0,0}+$$
$$+\frac{(\gamma\delta-b_{1,0})(b'_{1,1}+\gamma\delta'-b'_{0,1})-2(b_{0,0})^2(b'_{0,0})^2}{b_{0,0}b'_{0,0}(\gamma\delta-b_{1,0})}x-\frac{2(b'_{0,0})^2}{\gamma\delta'-b_{0,1}}y-\frac{1}{b_{0,.0}}xy$$

жүйеден x және y тәуелсіз айнымалыларының бірдей дәрежелері жанындағы коэффициенттерді теңестіру арқылы анықталады:

$$A_{0,0}=1,\ A_{1,0}=\frac{2\beta_1\beta_2\beta_3}{\gamma\delta-b_{1,0}},\ A_{0,1}=\frac{2\beta'_1\beta'_2\beta'_3}{\gamma\delta'-b_{0,1}},\ A_{1,1}=-\frac{1}{\beta_1\beta_2\beta_3\beta'_1\beta'_2\beta'_3}$$

мұнда (2.82) дербес шешімі жоғарыдағы белгілеулерді ескеріп табылған. Теорема дәлелденді.

Біртекті емес үшінші ретті жүйелердің теориясына сәйкес келесі тұжырымдар орын алады.

2.5-тұжырым. Біртекті емес (2.80) жүйенің жалпы шешімі сәйкес біртекті Клаузен жүйесінің $\overline{Z}(x,y)$ жалпы шешімі мен біртекті емес жүйенің $Z_0(x,y)$ дербес шешімінің қосындысы, яғни

$$Z(x,y)=\overline{Z}(x,y)+Z_0(x,y)=\sum_{i=1}^{9}C_i\,Z_i(x,y)+1+\frac{2b_{0,0}}{\gamma\delta-b_{1,0}}x+\frac{2b'_{0,0}}{\gamma\delta'-b_{0,1}}y-\frac{1}{b_{0,0}b'_{0,0}}xy$$

түрінде табылады.

2.6-тұжырым. Біртекті емес (2.80) Клаузен жүйесінің дербес шешімі, жүйенің екі теңдеуін қосу арқылы алынған

$$
\begin{aligned}
&x^2(1-x)p_{3,0}+xyp_{2,1}+xyp_{1,2}+y^2(1-y)p_{0,3}+(\gamma+\delta+1-b_{2,0})xp_{2,0}+\\
&+(\gamma+\delta'+1-b_{0,2})yp_{0,2}+(b_{1,1}y+b'_{1,1}x)p_{1,1}+(\gamma\delta-b_{1,0})p_{1,0}+\\
&+(\gamma\delta'-b_{0,1})p_{0,1}-(b_{0,0}+b'_{0,0})p_{0,0}=g(x,y)+q(x,y)
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

біртекті емес үшінші ретті дифференциалдық теңдеудің де шешімі болады, мұндағы $g(x,y)$ және $q(x,y)-$ біртекті емес (2.80) Клаузен жүйесінің оң жақ бөліктері.

Бұл тұжырымның дұрыстығына (2.82) дербес шешімді (2.84) теңдеуге тікелей қою арқылы көз жеткізуге болады.

2.11-теорема. Оң жақ бөлігі

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y)&=\frac{x^\rho y^\sigma}{\sigma(\sigma-1+\delta')(\sigma-1+\gamma)(\sigma-\delta+\gamma)},\\
f_2(x,y)&=\frac{x^\rho y^\sigma}{\rho(\rho-1+\delta)(\rho-1+\gamma)(\rho-\delta'+\gamma)}
\end{aligned}
$$

түрінде берілген, гипергеометриялық текті

$$
\begin{aligned}
&x^2(1-x)p_{3,0}+xyp_{2,1}+[\gamma+\delta+1-(3+\beta_1+\beta_2+\beta_3)x]xp_{2,0}+\delta yp_{1,1}+\\
&+[\gamma\delta-(1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)x]p_{1,0}-\beta_1\beta_2\beta_3p_{0,0}=f_1(x,y),\\
&y^2(1-y)p_{0,3}+xyp_{1,2}+[\gamma+\delta'+1-(3+\beta'_1+\beta'_2+\beta'_3)y]yp_{0,2}+\delta'xp_{1,1}+\\
&+[\gamma\delta-(1+\beta'_1+\beta'_2+\beta'_3+\beta'_1\beta'_2+\beta'_2\beta'_3+\beta'_1\beta'_3)y]p_{0,1}-\beta'_1\beta'_2\beta'_3p_{0,0}=f_2(x,y)
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

біртекті емес Клаузен жүйесінің дербес шешімі:

$$
\begin{aligned}
&K_{\rho,\sigma}(x,y)=x^\rho y^\sigma\times\\
&\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\rho-\beta_1)_m(\rho-\beta_2)_m(\rho-\beta_3)_m(\sigma-\beta'_1)_n(\sigma-\beta'_2)_n(\sigma-\beta'_3)_n}{(\rho)_m(\rho-1+\delta)_m(\rho-1+\gamma)_m(\rho-\delta+\gamma)_m(\sigma)_n(\sigma-1+\beta'_1)_n(\sigma-1+\beta'_2)_n(\sigma-\delta+\gamma)_n}x^my^n
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

түрінде табылады.

Дәлелдеу. Клаузеннің біртекті жүйесінің Фробениус характеристикалық жүйесін және (2.85) жүйенің оң жағын ескере отырып, гипергеометриялық текті біртекті емес (2.85) Клаузен жүйесінің Фробениус характеристикалық функциялар жүйесін құрайық:

$$L_1\left[x^{\rho}y^{\sigma}\right]\equiv x^{\rho-1}y^{\sigma}\left[f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma)+f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma)x\right]=\frac{x^{\rho_1}y^{\sigma_1}}{\sigma\left(\sigma-1+\delta^{'}\right)(\sigma-1+\gamma)(\sigma-\delta+\gamma)},$$

$$L_2\left[x^{\rho}y^{\sigma}\right]\equiv x^{\rho}y^{\sigma-1}\left[f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma)+f_{0,1}^{(1)}(\rho,\sigma)y\right]=\frac{x^{\rho_1}y^{\sigma_1}}{\rho(\rho-1+\delta)(\rho-1+\gamma)\left(\rho-\delta^{'}+\gamma\right)}$$

мұндағы

$$f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma)=\rho(\rho-1+\delta)(\rho-1+\gamma)\left(\rho-\delta^{'}+\gamma\right),$$
$$f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma)=\sigma\left(\sigma-1+\delta^{'}\right)(\sigma-1+\gamma)(\sigma-\delta+\gamma),$$
$$f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma)=(\rho-\beta_1)(\rho-\beta_2)(\rho-\beta_3),$$
$$f_{0,1}^{(2)}(\rho,\sigma)=\left(\sigma-\beta_1^{'}\right)\left(\sigma-\beta_2^{'}\right)\left(\sigma-\beta_3^{'}\right).$$

$f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)=0$ жүйесі (2.97) айқындауыш теңдеулер жүйесін анықтайды.

Біртекті емес теңдеудің шешімі қатар түрінде іздеделеді, $A_{m,n},\ (m,n=0,1,2,...)$ коэффициенттері рекуррентті тізбектер жүйесінен жай Клаузен текті жүйедегі сияқты анықталады.

Нәтижесінде біртекті емес Клаузен теңдеуінің нақты шешімі (2.86) түрінде табылады.

Клаузен функциясының дербес қасиеттеріне тоқталайық.

Дифференциалдану қасиеті.

Екі айнымалылы Клаузеннің жалпыланған негізгі гипергеометриялық функциясының x және y тәуелсіз айнымалылар бойынша бірінші ретті туындылары:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\gamma\delta}F\left(\begin{matrix}\beta_1+1,\beta_2+1,\beta_3+1; & \beta_1^{'}, & \beta_2^{'}, & \beta_3^{'}\\ \delta+1, & \delta^{'}, & \gamma+1 & \end{matrix}\middle|x,y\right), \tag{2.87}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\beta_1^{'}\beta_2^{'}\beta_3^{'}}{\gamma\delta^{'}}F\left(\begin{matrix}\beta_1,\beta_2,\beta_3; & \beta_1^{'}+1, & \beta_2^{'}+1, & \beta_3^{'}+1\\ \delta, & \delta^{'}+1, & \gamma+1 & \end{matrix}\middle|x,y\right) \tag{2.88}$$

және жоғары ретті туындылары:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_1^{'}\beta_2^{'}\beta_3^{'}}{\gamma(\gamma+1)\delta\delta^{'}}F\left(\begin{matrix}\beta_1+1,\beta_2+1,\beta_3+1; & \beta_1^{'}+1, & \beta_2^{'}+1, & \beta_3^{'}+1\\ \delta+1, & \delta^{'}+1, & \gamma+2 & \end{matrix}\middle|x,y\right), \tag{2.89}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\beta_1(\beta_1+1)\beta_2(\beta_2+1)\beta_3(\beta_3+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)}F\left(\begin{matrix}\beta_1+2,\beta_2+2,\beta_3+2; & \beta_1^{'}, & \beta_2^{'}, & \beta_3^{'}\\ \delta+2, & \delta^{'}, & \gamma+2 & \end{matrix}\middle|x,y\right), \tag{2.90}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\beta_1^{'}\left(\beta_1^{'}+1\right)\beta_2^{'}\left(\beta_2^{'}+1\right)\beta_3^{'}\left(\beta_3^{'}+1\right)}{\gamma(\gamma+1)\delta^{'}\left(\delta^{'}+1\right)}F\left(\begin{matrix}\beta_1,\beta_2,\beta_3; & \beta_1^{'}+2, & \beta_2^{'}+2, & \beta_3^{'}+2\\ \delta, & \delta^{'}+2, & \gamma+2 & \end{matrix}\middle|x,y\right), \tag{2.91}$$

$$\frac{\partial^m F}{\partial x^m}=\frac{\beta_1(\beta_1+1)..(\beta_1+m-1)\beta_2(\beta_2+1)..(\beta_2+m-1)\beta_3(\beta_3+1)..(\beta_3+m-1)}{\gamma(\gamma+1)..(\gamma+m-1)\delta(\delta+1)..(\delta+m-1)}\times$$
$$\times F\left(\begin{matrix}\beta_1+m,\beta_2+m,\beta_3+m; & \beta_1', & \beta_2', & \beta_3' \\ \delta+m, & \delta', & \gamma+m & \end{matrix}\middle| x,y\right), \tag{2.92}$$

$$\frac{\partial^n F}{\partial y^n}=\frac{\beta_1'(\beta_1'+1)..(\beta_1'+n-1)\beta_2'(\beta_2'+1)..(\beta_2'+n-1)\beta_3'(\beta_3'+1)..(\beta_3'+n-1)}{\gamma(\gamma+1)..(\gamma+n-1)\delta'(\delta'+1)..(\delta'+n-1)}\times$$
$$\times F\left(\begin{matrix}\beta_1,\beta_2,\beta_3; & \beta_1'+n, & \beta_2'+n, & \beta_3'+n \\ \delta, & \delta'+n, & \gamma+n & \end{matrix}\middle| x,y\right), \tag{2.93}$$

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}=\frac{\beta_1(\beta_1+1)..(\beta_1+m-1)..\beta_3'(\beta_3'+1)..(\beta_3'+n-1)}{\gamma(\gamma+1)..(\gamma+m+n-1)\delta(\delta+1)..(\delta+m-1)\delta'...(\delta'+n-1)}\times$$
$$\times F\left(\begin{matrix}\beta_1+m,\beta_2+m,\beta_3+m; & \beta_1'+n, & \beta_2'+n, & \beta_3'+n \\ \delta+m, & \delta'+n, & \gamma+m+n & \end{matrix}\middle| x,y\right) \tag{2.94}$$

түрлерінде табылады. (2.87)-(2.93) барлық формулаларды (2.94) жалпы формуладан m мен n әр түрлі мәндерінде шығарып алуға болады.

2.5.4 Клаузен текті біртекті емес туындалған жүйенің шешімдерін құру

Бірінші бөлімде (1.7) Клаузен функциясынан шекке көшу арқылы (1.8) туындалған жалпыланған гипергеометриялық функция анықталды. Кейінгі кезде мұндай теңдеулер мен Клаузен текті жүйенің шешімдерін зерттеу олардың қасиеттерін көп өлшемді туындалған теңдеулерді зерттеу кезінде қолдануға байланысты өзекті бола бастады.

Мысалы, $Lu=y^m U_{xxx}-U_{yyy}=0, m=const>0,$ бір туындалған сызықты дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін тапқан кезде, $x=0$ ерекше нүктесінің маңайында Клаузен теңдеуі шешімінің қасиеттері қолданылады [96].

Туындалған Клаузен функциясы шекке көшу арқылы Клаузен функцияларынан алынатындығы көрсетілген. Енді туындалған үшінші ретті екі дифференциалдық теңдеуден тұратын негізгі Клаузен текті жүйенің жалпы және дербес шешімін құру ерекшеліктерін көрсету маңызды.

Біртекті емес негізгі Клаузен гипергеометриялық жүйесінің нақты шешімі.

2.12-теорема. Негізгі Клаузен жүйесінен шекке көшу арқылы алынған біртекті

$$\begin{aligned} &x^2 p_{3,0}+x\,y\,p_{2,1}+(\gamma+\delta+1)x\,p_{2,0}+\delta\,y\,p_{1,1}+\gamma\,\delta\,p_{1,0}-p_{0,0}=0,\\ &y^2 p_{0,3}+x\,y\,p_{1,2}+(\gamma+\delta'+1)y\,p_{0,2}+\delta' x p_{1,1}+\gamma\,\delta'\,p_{0,1}-p_{0,0}=0\end{aligned} \tag{2.95}$$

жүйенің дербес шешімі

$$Z(x,y)=F\left(\begin{matrix}-, & -, & - \\ \delta, & \delta', & \gamma\end{matrix}\middle| x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\delta)_m(\delta')_n(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

туындалған гипергеометриялық Клаузен функциясы болып табылады.

Дәлелдеу. Бұл жүйенің жалпы шешімі Фробениус-Латышева әдісімен құрылады [14, 148-162 б.]. Туындалған гипергеометриялық жүйенің шешімін құру кезінде үйлесімділік пен интегралдану шарттары ескерілуі қажет.

(2.95) жүйе үшін екінші үйлесімділік шарты орындалмайды:

$$\Delta_1 = 1 - a_{1,2}b_{2,1} = 1 - 0\cdot 0 = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_1^2 - \left(a_{2,1} + a_{1,2}b_{1,2}\right)\left(b_{1,2} + a_{2,1}b_{2,1}\right) = \Delta_1^2 - \left(\frac{xy}{x^2} + 0\right)\left(\frac{xy}{y^2} + 0\right) = 1^2 - 1 = 0.$$

Сондықтан, мұндай жүйенің жалпы теориясына сәйкес [97], жұмыста көрсетілген тоғыз шешімнен басқа дербес шешімдердің болуы мүмкін.

Бұл шешімдердің дәреже көрсеткіштері $(0,0)$ ерекше нүктесіне қатысты

$$f_{0,0}^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_1^{(1)}(\lambda_2 - 1 + \delta)(\lambda_3 - 1 + \gamma)(\lambda_1^{(4)} - \delta' + \gamma) = 0,$$
$$f_{0,0}^{(2)}(\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_2^{(1)}(\lambda_2^{(2)} - 1 + \delta')(\lambda_2^{(3)} - 1 + \gamma)(\lambda_2^{(4)} - \delta + \gamma) = 0$$

айқындауыш теңдеулер жүйесінің түбірлері ретінде анықталады.

Біртекті емес туындалған негізгі Клаузен гипергеометриялық жүйесінің дербес шешімін құру.

2.13-теорема. Оң жақ бөлігі

$$f_1(x,y) = \frac{x^\rho y^\sigma}{(\sigma+1)(\sigma+\delta')(\sigma+\gamma)(\sigma-\delta+\gamma+1)},$$
$$f_2(x,y) = \frac{x^\rho y^\sigma}{(\rho+1)(\rho+\delta)(\rho+\gamma)(\rho-\delta'+\gamma+1)}$$

түрінде берілген,

$$\begin{aligned} &x^2 p_{3,0} + xyp_{2,1} + \left(\gamma+\delta+1\right)xp_{2,0} + \delta yp_{1,1} + \gamma\delta p_{1,0} - p_{0,0} = f_1(x,y),\\ &y^2 p_{0,3} + xyp_{1,2} + \left(\gamma+\delta'+1\right)yp_{0,2} + \delta' xp_{1,1} + \gamma\delta' p_{0,1} - p_{0,0} = f_2(x,y) \end{aligned} \qquad (2.96)$$

біртекті емес туындалған гипергеометриялық Клаузен жүйесінің дербес шешімі

$$K_{\rho,\sigma}\left(\begin{matrix} - \\ \delta,\delta', \quad \gamma \end{matrix}\middle| x,y\right) = x^{\rho+1}y^{\sigma+1}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{x^m y^n}{(\rho+1)_m(\rho+\delta)_m(\rho+\gamma)_m(\rho-\delta'+\gamma+1)_m}\times$$
$$\times\frac{1}{(\sigma+1)_n(\sigma+\delta')_n(\sigma+\gamma)_n(\sigma-\delta+\gamma+1)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

түрінде табылады.

Дәлелдеу. (2.96) туындалған гипергеометриялық Клаузен жүйесінің Фробениус характеристикалық функциялар жүйесін құрайық:

$$L_1[x^{\lambda_1}, y^{\lambda_2}] \equiv x^{\lambda_1 - 1} y^{\lambda_2}\left[f_{0,0}^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2) + f_{1,0}^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2)x\right] = \frac{x^{\rho+1} y^{\sigma+1}}{(\sigma+1)(\sigma+\delta^{'})(\sigma+\gamma)(\sigma-\delta+\gamma+1)},$$

$$L_2[x^{\lambda_1}, y^{\lambda_2}] \equiv x^{\lambda_1} y^{\lambda_2 - 1}\left[f_{0,0}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) + f_{0,1}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)y\right] = \frac{x^{\rho+1} y^{\sigma+1}}{(\rho+1)(\rho+\delta)(\rho+\gamma)(\rho-\delta^{'}+\gamma+1)}.$$

Жүйенің шешімі екі айнымалылы жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ізделеді. Қатардың $C_{m,n}, (m,n = 0,1,2,...)$ белгісіз коэффициенттері рекуррентті тізбектер жүйесінен анықталады. $C_{0,0}$ белгісіз тұрақтысы рекуррентті тізбектер жүйесінің бірінші теңдеуінен

$$\alpha_{0,0}^{(1)} = \frac{1}{(\sigma+1)(\sigma+\delta^{'})(\sigma+\gamma)(\sigma-\delta+\gamma+1)} \quad \text{және} \quad \alpha_{0,0}^{(2)} = \frac{1}{(\rho+1)(\rho+\delta)(\rho+\gamma)(\rho-\delta^{'}+\gamma+1)}$$

мәндерін ескере отырып анықталады.

Фробениус характеристикалық функциялар жүйесінен $\lambda_1 = \rho+1$ және $\lambda_1 = \sigma+1$ мәндерін ескеріп, айқындауыш теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv (\rho+1)(\rho+\delta)(\rho+\gamma)(\rho+1-\delta^{'}+\gamma) = 0,$$
$$f_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma) \equiv (\sigma+1)(\sigma+\delta^{'})(\sigma+\gamma)(\sigma+1-\delta+\gamma) = 0.$$

Сондықтан, рекуррентті теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуінен $C_{0,0}$ келесі түрде анықталады:

$$C_{0,0} = \frac{1}{(\rho+1)(\rho+\delta)(\rho+\gamma)(\rho+1-\delta^{'}+\gamma)(\sigma+1)(\sigma+\delta^{'})(\sigma+\gamma)(\sigma+1-\delta+\gamma)}$$

$\alpha_l = 0, (l = 1,2,...)$ мәндерін ескере отырып, $C_{1,0}, C_{0,1}, \dots, C_{m,n},...$ белгісіз коэффициенттері де табылады. Нәтижесінде дербес шешім келесі қатар түрінде ұсынылады:

$$K_{\rho,\sigma}\left(\begin{matrix} - & \\ \delta,\delta', & \gamma \end{matrix}\middle| x,y\right)=$$

$$=\frac{x^{\rho+1}y^{\sigma+1}}{(\rho+1)(\rho+\delta)(\rho+\gamma)(\rho+1-\delta'+\gamma)(\sigma+1)(\sigma+\delta')(\sigma+\gamma)(\sigma+1-\delta+\gamma)}\times$$

$$\times\{1+\frac{1}{(\rho+2)(\rho+1+\delta)(\rho+1+\gamma)(\rho+2-\delta'+\gamma)}x+\frac{1}{(\sigma+2)(\sigma+1+\delta')(\sigma+1+\gamma)(\sigma+2-\delta+\gamma)}y+$$

$$+\frac{x\,y}{(\rho+2)(\rho+1+\delta)(\rho+1+\gamma)(\rho+2-\delta'+\gamma)(\sigma+2)(\sigma+1+\delta')(\sigma+1+\gamma)(\sigma+2-\delta+\gamma)}+\ldots\}=$$

$$=x^{\rho+1}y^{\sigma+1}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\rho+1)_m(\rho+\delta)_m(\rho+\gamma)_m(\rho+1-\delta'+\gamma)_m(\sigma+1)_n(\sigma+\delta')_n(\sigma+\gamma)_n(\sigma+1-\delta+\gamma)_n}.$$

Дәлелдеу керегіде осы еді.

3 БІРТЕКТІ ЕМЕС ЕКІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ҚАЛЫПТЫ-РЕГУЛЯР ШЕШІМДЕРІ

3.1 Лауричелла жүйесінен алынған туындалған гипергеометриялық жүйелердің қалыпты-регуляр шешімдері

Бұл бөлім (F_B) Лауричелла жүйесінен алынған туындалған жүйелердің қалыпты-регуляр шешімдерін зерттеуге арналған. Қалыпты-регуляр шешімдердің В.И. Художниковтың жаңа функциясымен байланысы қарастырылды. Екінші ретті дербес туындылы екі және үш дифференциалдық теңдеулерден тұратын жүйелердің қалыпты-регуляр шешімдерін құру мүмкіндігінің ерекшеліктері зерттелді. Әрі қарай, бұл нәтижелер n теңдеуден тұратын туындалған жүйелерге жалпыланған. Художниковтың функциясы мен қалыпты-регуляр шешімдері арасындағы кейбір қасиеттер дәлелденді. Нақты мысалда (Φ_2) Гумберттің екі айнымалылы функциясы түріндегі шешімдері бар біртекті емес туындалған жүйенің шешімін құрудағы қалыпты-регуляр шешімдердің рөлі көрсетілген [98].

Осы бөлімнің материалдары Scopus мәліметтер базасында индекстелген журналда жарияланды [35, 2309–2321 б.].

Француз математигі П. Аппель 1880 жылы әрқайсысы $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ Гаусс қатарына ұқсас екі айнымалылы F_1-F_4 төрт гипергеометриялық қатарын анықтады [1, 55 б.]. Я. Горн тізімінде екі айнымалылы 34 гипергеометриялық қатары бар, оның 20-сы екі айнымалылы туындалған гипергеометриялық қатарлар. Екі айнымалылы туындалған гипергеометриялық қатарларды М.П. Гумберт (1920-21жж.), Я. Горн (1931ж.) және Борнгассер (1933ж.) Аппельдің төрт гипергеометриялық қатарынан шекке көшу арқылы енгізді. Я. Горн екі айнымалылы гипергеометриялық қатарлардың ұқсастығын зерттеп, оларды қанағаттандыратын дербес шешімдерде дифференциалдық теңдеулер жүйесін құрды. Лауричелла (1893ж.) Аппельдің F_1-F_4 функцияларын n айнымалылар жағдайына жалпылап, жаңа F_A, F_B, F_C, F_D функцияларын енгізді. Лауричелла қатарларының дербес жағдайлары гиперсфералық гармоникалық зерттеулерде кездеседі [99-109].

Бұл бөлімде бізді F_B Лауричелла функциясымен байланысты көп айнымалылы туындалған функциялар қызықтырады.

Лауричелланың n айнымалылы функциясы

$$F_B\left(\begin{matrix}(\alpha_n), & (\beta_n)\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{m_1,\dots m_n}\frac{(\alpha_1)_{m_1}\dots(\alpha_n)_{m_n}(\beta_1)_{m_1}\dots(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{z_n^{m_n}}{m_n!} \tag{3.1}$$

$|z_k|<1, k=\overline{1,n}$, келесі

$$z_i(1-z_i)\frac{\partial^2 W}{\partial z_i^2}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n} z_j\frac{\partial^2 W}{\partial z_j\partial z_i}+\left[\gamma-(\alpha_i+\beta_i+1)z_i\right]\frac{\partial W}{\partial z_i}-\alpha_i\beta_i W=0,\quad \left(i=\overline{1,n}\right) \tag{3.2}$$

жүйенің дербес шешімі болып табылады, мұнда $(\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),(z_n)=(z_1,z_{2,...,}z_n)$ белгілеулері қолданылған.

F_B функциясынан бірнеше рет шекке көшу арқылы алынған туындалған функцияларды В. И. Художников анықтап, $\Phi_{B,n}^{k,l}$ арқылы белгілеген, мұндағы $0\le k,l\le n, n-1\le k+n\le n$, $n-$айнымалылар саны [58, 836 б.]. $\Phi_{B,n}^{k,l}$ шешімімен қатар, (3.2) жүйесінің қалыпты-регуляр шешімдері

$$W(z_1,z_{2,...,}z_n)=\exp(\alpha_{1,0,...,0}z_1+\alpha_{0,1,...,0}z_2+...+\alpha_{0,...0,1}z_n)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}...z_n^{\rho_n}\times$$
$$\times\sum_{m_1,...m_n=0}^{\infty}A_{m_1,m_2,...,m_n}z_1^{m_1}z_2^{m_2}...z_n^{m_n},\quad A_{0,...,0}\neq 0 \tag{3.3}$$

бар болады, мұндағы $\rho_t\,(t=\overline{1,n}),$ $A_{m_1,m_2,...m_n},(m_1,...,m_n=0,1,2,...),$ $\alpha_{1,0,...,0},\alpha_{0,1,0,...,0},...,\alpha_{0,...,0,1}-$ белгісіз тұрақтылар [35, 2309-2321 б.].

Бұл бөлімнің мақсаты (3.2) Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы алынған туындалған гипергеометриялық жүйелердің қалыпты-регуляр шешімінің бар болу мүмкіндігін зерттеу. Олардың кейбір қасиеттерін және $\Phi_{B,n}^{k,l}$ Художников функциясымен байланысын, сондай-ақ біртекті емес (F_B) Лауричелла жүйесінің жекелеген дербес жағдайларының шешімдерін құру ерекшеліктерін зерттеу болып табылады.

Лауричелла жүйесінен алынған туындалған гипергеометриялық жүйелерге тоқталайық.

Зерттеу нысаны жалпыланған (F_B)Лауричелла жүйесінен алынған

$$z_i(1-z_i)\frac{\partial^2W}{\partial z_i^2}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\partial^2W}{\partial z_i\partial z_j}+[\gamma-(\alpha_i+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial W}{\partial z_i}-\alpha_i\beta_iW=0,\quad \left(i=\overline{1,k}\right)$$

$$\text{(3.4)}\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2W}{\partial z_j\partial z_i}+(\gamma-z_i)\frac{\partial W}{\partial z_i}-\alpha'_{i-k}W=0,\quad \left(i=\overline{k+1,k+l}\right)$$

$$\text{(3.5)}\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2W}{\partial z_j\partial z_i}+\gamma\frac{\partial W}{\partial z_i}-W=0,\quad \left(i=\overline{k+l+1,n}\right) \tag{3.6}$$

туындалған гипергеометриялық жүйелердің бірқатар ерекше жағдайлары, мұндағы (3.5) теңдеуі (3.2) теңдеуінен β параметрі бойынша $(n-k)$ рет шекке көшу арқылы, ал (3.6) теңдеуі $(n-k-l)$ рет α бойынша шекке көшу арқылы алынады. Нәтижесінде (3.4)-(3.6) біріккен жүйе алынады, онда k бірінші теңдеулер (3.2) жүйенің k бірінші теңдеулерімен сәйкес келеді, келесі l теңдеулер (3.5) түрінде болады, ал қалған $(n-k-l)$ теңдеулер (3.6) түрінде ұсынылады. В.И. Художников (3.4)-(3.6) біріккен жүйені зерттей отырып

$$\Phi_{B,n}^{k,l}\left(\begin{matrix}(\alpha_k), & (\alpha'_l), & (\beta_k) \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{i_1,\dots,i_n}\frac{\Pi(\alpha_k)_{i_k}(\beta_k)_{i_k}}{(\gamma)_{\sum i_n}}\Pi(\alpha'_1)_{i_{l+k}}\Pi\frac{(z_n)^{i_n}}{i_n!} \tag{3.7}$$

жаңа туындалған функцияны енгізді, мұнда келесі қысқартулар мен белгілеулер қолданылды:

$$\Pi(\alpha_n)_{i_n}=\prod_{k=1}^{n}(a_k)_{i_k},\ \sum i_n=\sum_{k=1}^{n}i^k,\ \sum i_1,\dots,i_n=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\dots\sum_{i_n=0}^{\infty}(\dots).$$

(3.7) туындалған функциясы (3.4)-(3.6) біріккен жүйенің дербес шешімі болып табылады. (3.7) қатар $|z_i|<1,\ i=\overline{1,k}$ облысында жинақты [31, 577-584 б.].

В.И. Художников (3.7) туындалған функциясының кейбір қасиеттерін зерттеді, интегралдық түрін келтірді және осы функцияны қамтитын ядролары бар Вольтерраның интегралдық теңдеулерін қарастырды. Алайда, осы уақытқа дейін (3.3) түріндегі қалыпты-регуляр шешім және олардың В.И. Художников енгізген $\Phi_{B,n}^{k,l}$ функцияларымен байланысы зерттелмеген. Мұндай зерттеулер маңызды болып табылады, өйткені $(\infty,\infty,\dots,\infty)$ иррегуляр ерекше қисығы маңайында (3.3) түріндегі шешімдері зерттелмеген күйінде қалған. Әлі күнге дейін зерттелмеген біртекті емес шешімдерді құру ерекшеліктері ерекше қызығушылық тудыруда.

3.1.1 Туындалған (Φ_2) жүйесінің қалыпты-регуляр шешімдері және оның қасиеттері

3.1-анықтама. (3.7) жүйеден алынған екі айнымалылы туындалған гипергеометриялық функциялар

$$\begin{aligned}&\Xi_1(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha'_2, & \beta_1\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|x,y\right),\quad \Xi_2(\alpha_1,\beta_1;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{0,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma & \end{matrix}\middle|x,y\right),\\ &\Phi_2(\alpha_1,\alpha_2;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{0,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha'_2\\ \gamma & \end{matrix}\middle|x,y\right),\quad \Phi_3(\alpha_1;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{0,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1\\ \gamma\end{matrix}\middle|x,y\right)\end{aligned} \tag{3.8}$$

Гумберттің туындалған функциялары деп аталады [8, 1134-1141 б.].

Олар Аппельдің F_3 функцияларынан алынған және жақсы зерттелген [1, 58 б.]. F_3 Аппель функциясы (F_B) Лауричелланың (3.2) жүйесінің дербес жағдайы болып табылады. Сондықтан, одан шекке көшу арқылы екі айнымалылы туындалған (3.8) гипергеометриялық функциялар болып табылатын жүйелер алынады. Алайда, (3.4)-(3.6) үш теңдеудің қос-қостан алынып, екі теңдеуден тұратын әртүрлі құрылған жүйелері.

Енді, (3.5) жүйесінің екі теңдеуден тұратын туындалған жеке жағдайының қалыпты-регуляр шешімдерін құрумен айналысамыз.

3.1-теорема. [1, 103-110 б.] (3.2) жүйесінен шекке көшу арқылы алынған туындалған

$$
\begin{aligned}
&z_1 W_{z_1 z_1} + z_2 W_{z_2 z_2} + (\gamma - z_1) W_{z_1} - \alpha_1 W = 0,\\
&z_2 W_{z_2 z_2} + z_1 W_{z_2 z_2} + (\gamma - z_2) W_{z_2} - \alpha_2 W = 0
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

жүйесінің үш сызықты-тәуелсіз $W_t, (t = 1,2,3)$ шешімдері бар және ол шешімдердің біреуі келесі Гумберт-Художников функциясы түрінде табылады:

$$
\Phi^{0,2}_{B,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha'_2\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right) = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m_1} (\alpha'_2)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1 + m_2}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{z_2^{m_2}}{m_2!}. \tag{3.10}
$$

Шынында да, [1, 103-110 б.] монографияда (3.9) жүйенің үш сызықтық-тәуелсіз дербес шешімі бар екендігі көрсетілген:

$$
\begin{aligned}
&W_1(z_1, z_2) = \Phi_2\left(\alpha_1, \alpha'_2; \gamma; z_1, z_2\right) = \Phi^{0,2}_{B,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha'_2\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right),\\
&W_2(z_1, z_2) = z_2^{1-\gamma} \Phi_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha'_2 + 1 - \gamma\\ 2 - \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right),\\
&W_3(z_1, z_2) = z_1^{1-\gamma} \Phi_2\left(\begin{matrix}\alpha_1 + 1 - \gamma, & \alpha'_2\\ 2 - \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right).
\end{aligned}
$$

Шешімдерді Фробениус-Латышева әдісімен құруға болады. Бірінші дербес шешім Гумберт - Художников функциясы.

Келесі теорема (3.9) жүйенің (3.10) түріндегі шешімімен қатар

$$
W(z_1, z_2) = \exp(\alpha_{1,0} z_1 + \alpha_{0,1} z_2) z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2} \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} A_{m_1, m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \qquad (A_{1,0} \neq 0) \tag{3.11}
$$

қалыпты-регуляр түрдегі шешімдері болатынын дәлелдейді, мұндағы $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}; \rho_1, \rho_2, A_{m_1, m_2}, (m_1, m_2 = 0,1,2,...) -$ белгісіз тұрақтылар.

3.2-теорема. Туындалған (3.9) жүйесінен

$$
W(z_1, z_2) = \exp(\alpha_{1,0} z_1 + \alpha_{0,1} z_2) \cdot U(z_1, z_2) \tag{3.12}
$$

түрлендіруі көмегі арқылы алынған

$$
\begin{aligned}
&z_1 U_{z_1 z_1} + z_2 U_{z_2 z_2} + \{2\alpha_{1,0} z_1 + \alpha_{0,1} z_2 + \gamma - z_1\} U_{z_1} + \alpha_{1,0} z_2 U_{z_2} +\\
&+ \{(\alpha_{1,0}^2 - \alpha_{1,0}) z_1 + \alpha_{1,0} \alpha_{0,1} z_2 + \alpha_{1,0} \gamma - \alpha_1\} U = 0,\\
&z_2 U_{z_2 z_2} + z_1 U_{z_1 z_2} + \alpha_{0,1} z_1 U_{z_1} + \{2\alpha_{0,1} z_2 + \alpha_{1,0} z_1 + \gamma - z_2\} U_{z_2} +\\
&+ \{(\alpha_{0,1}^2 - 1) z_2 + \alpha_{1,0} \alpha_{0,1} z_1 + \alpha_{0,1} \gamma - \alpha'_2\} U = 0
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

көмекші жүйенің

$$\alpha_{1,0}^2-\alpha_{1,0}=0,\quad \alpha_{0,1}^2-\alpha_{0,1}=0 \tag{3.14}$$

шарттары орындалған кезде (3.11) түріндегі екі қалыпты-регуляр шешімдері бар:

$$W_4(z_1,z_2)=e^{z_1}\Phi_2(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\gamma;-z_1,z_2-z_1), \tag{3.15}$$

$$W_5(z_1,z_2)=e^{z_2}\Phi_2(\alpha_1,\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\gamma;-z_2,z_1-z_2). \tag{3.16}$$

Дәлелдеу. Түрлендіруді пайдалану (3.14) қалыпты-регуляр шешімнің оң жағын (3.11) екі қосалқы көбейткіштердің көбейтіндісі ретінде қарастыруға мүмкіндік береді [14, 29 б.].

1) $\exp(\alpha_{1,0}z_1+\alpha_{0,1}z_2)-$ $\alpha_{1,0}$ және $\alpha_{0,1}$ анықталмаған коэффициенттері бар айқындауыш көбейткіш. Олар (3.14) характеристикалық теңдеулер жүйесінен анықталады: I. $(\alpha_{1,0}=0,\alpha_{0,1}=0)$; II. $(\alpha_{1,0}=1,\alpha_{0,1}=0)$; III. $(\alpha_{1,0}=0,\alpha_{0,1}=1)$; IV. $(\alpha_{1,0}=1,\alpha_{0,1}=1)$. Бұл бізге (3.11) түрдегі қалыпты-регуляр шешімінің болуының алғашқы қажетті шартын береді.

3.1-лемма. (3.13) көмекші жүйесінің ең болмағанда бір (3.11) түріндегі шешімі бар болуы үшін (3.14) шартының орындалуы қажетті.

Шындығында, (3.14) шарты орындалғаннан кейін жоғарыда аталған төрт жағдайды қолдана отырып, I-IV төрт жүйе аламыз. Олар біріккен жүйелер деп аталады.

I. $(\alpha_{1,0}=0,\alpha_{0,1}=0)$ кезінде бірінші тіркестірілген жүйе бастапқы (3.9) жүйеге сәйкес келеді. Оның дербес шешімдері бар болатындығы 3.1–теоремадан белгілі.

Келесі екі жағдайларда: II. $(\alpha_{1,0}=1,\alpha_{0,1}=0)$ және III. $(\alpha_{1,0}=0,\alpha_{0,1}=1)$ сәйкесінше екі тіркестірілген жүйені аламыз:

$$\begin{aligned} &z_1U_{z_1z_1}+z_2U_{z_1z_2}+(z_1+\gamma)U_{z_1}+z_2U_{z_2}+(\gamma-\alpha_1)U=0,\\ &z_2U_{z_2z_2}+z_1U_{z_1z_2}+(\gamma+z_1-z_2)U_{z_2}-\alpha_2^{'}U=0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

және

$$\begin{aligned} &z_1U_{z_1z_1}+z_2U_{z_1z_2}+(z_2-z_1+\gamma)U_{z_1}-\alpha_1U=0,\\ &z_2U_{z_2z_2}+z_1U_{z_1z_2}+(z_2+\gamma)U_{z_2}-(\gamma-\alpha_2^{'})U=0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.17) және (3.18) жүйелердің шешімдері (3.11) қалыпты-регуляр шешімнің екінші көбейткіші ретінде ізделінеді.

2)

$$z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}A_{m_1,m_2}z_1^{m_1}z_2^{m_2},\quad (A_{0,0}\neq 0) \tag{3.19}$$

мұндағы $\rho_1, \rho_2, A_{m_1,m_2}, (m_1, m_2 = 0,1,2,...)$ – Фробениус-Латышеваның әдісімен анықталатын белгісіз тұрақтылар.

Екінші қажетті шарт дәл осы белгісіз тұрақтыларды анықтаумен байланысты.

3.2-лемма. (3.13) көмекші жүйесінің (3.11) түріндегі шешімі бар болуы үшін ең болмағанда бір (ρ_1, ρ_2) жұп мәні $(0,0)$ ерекше нүктесіне салыстырмалы айқындауыш теңдеулер жүйесінің

$$\begin{aligned} f_{0,0}^{(1)}(\rho_1, \rho_2) = \rho_1(\rho_1 - 1 + \rho_2 + \gamma) = 0, \\ f_{0,0}^{(2)}(\rho_1, \rho_2) = \rho_2(\rho_2 - 1 + \rho_1 + \gamma) = 0 \end{aligned} \qquad (3.20)$$

түріндегі түбірі болуы қажетті.

(3.20) жүйесінің төрт жұп (ρ_1, ρ_2) түбірі бар. Сондықтан 3.1 және 3.2 лемма шарттары орындалса, (3.17) және (3.18) жүйелерінің төрт сызықтық-тәуелсіз дербес шешімдер болуы мүмкін. Осылайша, (3.11) қалыпты-регуляр шешімнің түрі белгіленеді. Алайда, (3.17)-(3.18) жүйелердегі интегралдық шарты орындалмағандықтан, олар екі айнымалылы (3.19) жалпыланған дәрежелік қатар түрінде бір ғана шешімге ие болады. Сондықтан (3.13) көмекші жүйеде екі қалыпты-регуляр (3.15) және (3.16) шешімдер бар. Дәлелдеу керегі де осы еді.

3) (3.20) айқындауыш теңдеулер жүйесі (3.17) және (3.18) екі жүйеге бірдей. (3.14) характеристикалық теңдеулер жүйесінің $(\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{0,1} = 1)$ шешіміне сәйкес мәнінде үйлесімсіз жүйе алынады және жүйенің шешімін құру мүмкін болмайды.

Туындалған гипергеометриялық (3.9) жүйеден алынған (3.15) және (3.16) қалыпты-регуляр шешімдердің кейбір қасиеттерін қарастырайық.

3.3-теорема. Шешімдер арасында

$$e^{-z_1}\Phi_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'} \\ \gamma & \end{matrix}\right|(z_2)\right) = \Phi_2\left(\gamma - \alpha_1 - \alpha_2^{'}, \alpha_2^{'}; \gamma; -z_1, z_2 - z_1\right) \qquad (3.21)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеу. Дәлелдеу үшін Эрдейидің

$$\Phi_2\left(\gamma - \alpha_1 - \alpha_2^{'}, \gamma; -z_1, z_2 - z_1\right) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{\left(\gamma - \alpha_1 - \alpha_2^{'}\right)_{m_1}(\alpha_2^{'})_{m_2}(-z_1)^{m_1}(z_2 - z_1)^{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2}\, m_1!\, m_2!} \qquad (3.22)$$

формуласын пайдаланамыз.

(3.21) теңдіктің сол жағын берілген функциялардың қатарға жіктелуін пайдаланып ашамыз. Сонда

$$e^{-z_1}\Phi_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)=\left(1+\frac{(-z_1)}{1!}+\frac{(-z_1)^2}{2!}+...+\frac{(-z_1)^n}{n!}+...\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{\alpha_1}{\gamma}z_1+\frac{\alpha_2^{'}}{\gamma}z_2+\frac{\alpha_1\alpha_2^{'}}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1z_2}{1!}+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{\alpha_2^{'}(\alpha_2^{'}+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+...\right)=$$

$$=\left\{1-\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma}z_1+\frac{\alpha_2^{'}}{\gamma}z_2-\frac{(\gamma+1-\alpha_1)\alpha_2^{'}z_1z_2}{\gamma(\gamma+1)1!}+\frac{(\gamma-\alpha_1)(\gamma+1-\alpha_1)z_1^2}{\gamma(\gamma+1)2!}+\frac{\alpha_2^{'}(\alpha_2^{'}+1)z_2^2}{\gamma(\gamma+1)2!}+...\right\}=$$

$$=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'})_{m_1}(\alpha_2^{'})_{m_2}(-z_1)^{m_1}(-z_2-z_1)^{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2}m_1!m_2!}=\Phi_2(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\alpha_2^{'};\gamma;-z_1,z_2-z_1).$$

Дәлелдеу керегі де осы болатын.

Төмендегі формуланы қолдана отырып,

$$\Phi_2(\alpha_1,\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\gamma;z_1-z_2,-z_1)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m_1}(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'})_{m_2}(z_1-z_2)_{m_1}(-z_2)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2}m_1!m_2!}$$

келесі 3.4 және 3.5-теоремалар дәлелдеусіз келтіріледі.

3.4-теорема. Шешімдер арасында

$$e^{-z_2}\Phi_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)=\Phi_2\left(\alpha_1,\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\gamma;z_1-z_2,-z_2\right) \tag{3.23}$$

теңдігі орын алады.

3.3 және 3.4-теоремалар Куммердің бірінші теоремасының баламалары екеніне көз жеткізу қиын емес [27, 1-5 б.]:

$$e^{-x}{}_1F_1[a;b;x]={}_1F_1[b-a;b;-x].$$

Сондай-ақ келесі қасиеттер де орынды.

3.5-теорема. Шешімдер арасында

$$\Phi_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)=e^{z_1}\Phi_2(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\alpha_2^{'};\gamma;-z_1,z_2-z_1), \tag{3.24}$$

$$\Phi_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)=e^{z_2}\Phi_2(\alpha_1,\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'};\alpha_2^{'};\gamma;z_1-z_2,-z_2) \tag{3.25}$$

теңдіктері орын алады.

Бұл қасиеттер қалыпты-регуляр шешімдердің $\Phi_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right)$ туындалған гипергеометриялық функциясынан $\exp(z_1)$ және $\exp(z_2)$ айқындауыш көбейткештерді бөліп шығару арқылы алынатындығын көрсетеді.

3.2 Біртекті емес туындалған гипергеометриялық жүйелердің қалыпты-регуляр шешімдері

Біртекті емес жүйелердің қалыпты-регуляр шешімдерін құру әлі де аз зерттелген. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер теориясында Бессель, Ломмель, Струве сияқты көптеген белгілі функциялар қолданылады [110-114]. Олар қарапайым дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдері ретінде пайда болады. Сондықтан, біз зерттейтін жүйелерде біртекті емес жүйелердің дербес шешімдерін құру да өзекті мәселе болып табылады, өйткені бұл гиперсфералық гармоникалық зерттеулерде және басқа қосымшаларда кездесетін Лауричелла қатарларының ерекше жағдайлары [115].

3.6-теорема. Оң жақ бөлігі

$$\begin{aligned} f_1(z_1,z_2) &= \alpha_{0,0}^{(1)}\exp(\alpha_{1,0}z_1+\alpha_{0,1}z_2)z_1^{\rho_1-1}z_2^{\rho_2}, \\ f_2(z_1,z_2) &= \alpha_{0,0}^{(2)}\exp(\alpha_{1,0}z_1+\alpha_{0,1}z_2)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2-1} \end{aligned} \tag{3.26}$$

түрінде берілген біртекті емес (3.9) Горн гипергеометриялық жүйесінің, 3.1 және 3.2 леммаларының қажетті шарттары орындалған кезде:

I). $(\alpha_{1,0}=0, \alpha_{0,1}=0)$ болғанда:

$$W_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2) = z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\rho_1+\alpha_1)_{m_1}(\rho_2+\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2}, \tag{3.27}$$

II). $(\alpha_{1,0}=1, \alpha_{0,1}=0)$ болғанда:

$$W_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2) = \exp(z_1)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}(\rho_2+\alpha_1)_{m_1}(\rho_1+\rho_2+\gamma-\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2}, \tag{3.28}$$

III). $(\alpha_{1,0}=0, \alpha_{0,1}=1)$ болғанда:

$$W_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2) = \exp(z_2)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}(\rho_1+\alpha_1)_{m_1}(\rho_1+\rho_2+\gamma-\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2}, \tag{3.29}$$

қалыпты-регуляр қатарлар түріндегі дербес шешімдері бар.

Дәлелдеу. (3.26)-ның оң жақ бөлігінде $\alpha_{0,0}^{(t)}, (t=1,2)$ мәндері $(0,0)$ ерекше нүктесіне қатысты айқындауыш теңдеулер жүйесінің түбірлеріне байланысты таңдалады және (3.27)-(3.29) дербес шешімдер қатарларының коэффициенттерін табудың үйлесімділігін қамтамасыз етеді. Мұнда да (3.14) түрлендіруі маңызды рөл атқарады, өйткені түрлендіруден кейін біз (3.26)-ның оң жағымен берілген көмекші жүйені аламыз. $\exp(\alpha_{1,0}z_1+\alpha_{0,1}z_2)\neq 0$ қысқартудан кейін біз айқындауыш көбейткішсіз үш біркелкі емес (3.9), (3.18)-(3.19) жүйелері алынады.

1. $\alpha_{1,0}=0, \alpha_{0,1}=0$ болғанда біртекті емес

$$
\begin{aligned}
&z_1 U_{z_1 z_1}+z_2 U_{z_1 z_2}+(\gamma-z_1) U_{z_1}-\alpha_1 U=\alpha_{0,0}^{(1)} z_1^{\rho_1-1} z_2^{\rho_2}, \\
&z_2 U_{z_2 z_2}+z_1 U_{z_1 z_2}+(\gamma-z_2) U_{z_2}-\alpha_2^{'} U=\alpha_{0,0}^{(2)} z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2-1}
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

жүйе алынады.

Жүйенің шешімі екі айнымалылы жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ізделінеді:

$$
U(z_1, z_2)=z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} A_{m_1, m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \quad \left(A_{0,0} \neq 0\right) \tag{3.31}
$$

мұндағы $\lambda_t (t=1,2), A_{m_1,m_2}, (m_1, m_2=0,1,2,\ldots)$ – белгісіз тұрақтылар. Олар

$$
\begin{aligned}
&A_{0,0} f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1, \lambda_2)=\alpha_{0,0}^{(t)}, A_{0,0} \neq 0 \\
&A_{1,0} f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1+1, \lambda_2)+A_{0,0} f_{1,0}^{(t)}(\lambda_1, \lambda_2)=\alpha_{1,0}^{(t)}, \\
&A_{0,1} f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1, \lambda_2+1)+A_{0,0} f_{0,1}^{(t)}(\lambda_1, \lambda_2)=\alpha_{0,1}^{(t)}, \\
&A_{1,1} f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1+1, \lambda_2+1)+A_{1,0} f_{0,1}^{(t)}(\lambda_1+1, \lambda_2)+A_{0,1} f_{1,0}^{(t)}(\lambda_1, \lambda_2+1)+A_{0,0} f_{1,1}^{(t)}(\lambda_1, \lambda_2)=\alpha_{1,1}^{(t)}, \\
&A_{2,0} f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1+2, \lambda_2)+A_{1,0} f_{1,0}^{(t)}(\lambda_1+1, \lambda_2)+A_{0,0} f_{2,0}^{(t)}(\lambda_1, \lambda_2)=\alpha_{2,0}^{(t)}, \\
&-------------------------------- \\
&--------------------------------
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

рекурренттік тізбектер жүйесінен анықталады.

Алдымен (0,0) ерекше нүктесіне қатысты теңдеулерді анықтайтын жүйенің түбір жұптары анықталады: $f_{0,0}^{(t)}(\lambda_1, \lambda_2)=0, (t=1,2)$. Осы түбірлерді есепке ала отырып $\lambda_1^{(1)}=0, \lambda_1^{(2)}=1-\gamma, \lambda_2^{(1)}=0, \lambda_2^{(2)}=1-\gamma$ рекуррентті тізбектердің бірінші жүйесі келесі түрде жазылады:

$$
\begin{aligned}
&A_{0,0}^{(1)} f_{0,0}^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2)=A_{0,0}^{(1)} \lambda_1(\lambda_1-1+\gamma)=\alpha_{0,0}^{(1)}, \\
&A_{0,0}^{(2)} f_{0,0}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)=A_{0,0}^{(2)} \lambda_2(\lambda_2-1+\gamma)=\alpha_{0,0}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

Бұл жүйе $A_{0,0}^{(1)}=A_{0,0}^{(2)}=A_{0,0}$ бастапқы коэффициенттің бірыңғай мәнін анықтауға болатындай етіп $\alpha_{0,0}^{(t)}, (t=1,2)$ таңдау үшін маңызды. Мұндай мәндер

$$
\alpha_{0,0}^{(1)}=\frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-1+\gamma)} \quad \text{және} \quad \alpha_{0,0}^{(2)}=\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-1+\gamma)}
$$

арқылы анықталады.

Таңдалған мәндерді ескерсек, $A_{0,0}$ біріккен мәні

$$A_{0,0} = \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1 - 1 + \gamma)\lambda_2(\lambda_2 - 1 + \gamma)} \qquad (3.34)$$

түрін қабылдайды. $A_{0,0}$ коэффициентінің белгілі болуы $\alpha_{1,0}^{(t)}, \alpha_{0,1}^{(t)}, \alpha_{1,1}^{(t)}, ...$ нөлге тең болған кезде (3.31) қатарының қалған A_{m_1,m_2} коэффициенттерін біртіндеп анықтауға мүмкіндік береді. (3.30) жүйеден Фробениустың характеристикалық функциясын құру арқылы $\lambda_1 - 1 = \rho_1 - 1,$ $\lambda_2 - 1 = \rho_2 - 1$ теңдіктерінің орын алатындығын, яғни $\lambda_1 = \rho_1,$ $\lambda_2 = \rho_2$ болатындығына көз жеткізуге болады. Келтірілген өзгерістерді ескере отырып, $A_{m_1,m_2}, (m_1, m_2 = 0,1,2,...)$ белгісіз коэффициенттерді біртіндеп анықтау арқылы, (3.31) біртекті емес жүйенің дербес шешімі екі айнымалылы

$$U(z_1,z_2) = \frac{z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2}}{\left[\rho_1(\rho_1 - 1 + \gamma)\right]\cdot\left[\rho_2(\rho_2 - 1 + \gamma)\right]}\{1 + \frac{(\rho_1 + \alpha_1)z_1}{(\rho_1 + 1)(\rho_1 + \gamma)} + \frac{(\rho_2 + \alpha_2^{'})z_2}{(\rho_2 + 1)(\rho_2 + \gamma)} +$$

$$+ \frac{(\rho_1 + \alpha_1)(\rho_2 + \alpha_2^{'})z_2 z_1}{(\rho_1 + 1)(\rho_2 + 1)(\rho_2 + \gamma)(\rho_1 + \gamma)} + \frac{(\rho_1 + \alpha_1)(\rho_1 + 1 + \alpha_1)}{(\rho_1 + 1)(\rho_1 + 2)(\rho_1 + \gamma)(\rho_1 + 1 + \gamma)} z_1^2 + ...\} =$$

$$= z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2} \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(\rho_1 + \alpha_1)_{m_1}(\rho_2 + \alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1 + \gamma - 1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2 + \gamma - 1)_{m_2+1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

қатар ретінде анықталады.

Белгісіз коэффициенттер $\alpha_{1,0} = 0$ және $\alpha_{0,1} = 0$ болғандықтан, (3.14) $W(z_1,z_2) = U(z_1,z_2)$ теңдігі орындалады, яғни (3.27) шешімі алынады.

2. 3.2.-теоремада орнатылғандай, $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{0,1} = 0$ болғанда оң жақ бөлігі (3.26) түрінде берілген (3.17) тіркелген жүйені аламыз. Айқындауыш $\exp(z_1) \neq 0$ көбейткішке қысқартқаннан кейін, біртекті емес жүйенің

$$\begin{aligned} &z_1 U_{z_1 z_1} + z_2 U_{z_1 z_2} + (z_1 + \gamma) U_{z_1} + z_2 U_{z_2} + (\gamma - \alpha_1) U = \exp(z_1) z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2}, \\ &z_2 U_{z_2 z_2} + z_1 U_{z_1 z_2} + (\gamma + z_1 - z_2) U_{z_2} - \alpha_2^{'} U = \exp(z_1) z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2 - 1} \end{aligned} \qquad (3.35)$$

дербес шешімін құру қажет болады.

Келесі тұжырым орынды [57, 115-125 б.].

3.3-лемма. Бастапқы жүйе мен одан (3.12) түрлендіруі арқылы алынған жүйенің (0,0) ерекше нүктесіне қатысты айқындауыш теңдеулер жүйелері бірдей болады.

Сондықтан, $A_{0,0}$ коэффициентінің (3.34) анықталған түрі өзгеріссіз қалады. Алайда, Фробениустың характеристикалық $f_{1,0}^{(t)}(\rho_1, \rho_2)$ және $f_{0,1}^{(t)}(\rho_1, \rho_2)$, $(t = 1,2)$ өрнектері басқаша алынады. Осыны ескере отырып, (3.35) тіркестірілген жүйенің (3.31) шешімі, (3.32) рекуррентті тізбектер жүйесінен келесі түрде табылады:

$$U(z_1,z_2)=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}(\rho_1+\rho_2+\gamma-\alpha_1)_{m_1}(\rho_2+\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2}.$$

Нәтижесінде (3.12) түрлендіруін ескере отырып, (3.11) қалыпты-регуляр шешім

$$W(z_1,z_2)=\exp(z_1)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}(\rho_1+\rho_2+\gamma-\alpha_1)_{m_1}(\rho_2+\alpha_2^{'})_{m_2}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2}$$

түрінде анықталады, яғни (3.28) қалыпты-регуляр шешім алынады.

3. Үшінші жағдайда, $\alpha_{1,0}=0, \alpha_{0,1}=1$ болғанда біз оң жақ бөлігі (3.26) түрінде берілген (3.18) тіркелген жүйені аламыз. Айқындауыш $\exp(z_2)\neq 0$ көбейткішке қысқартқаннан кейін, біртекті емес

$$\begin{aligned} &z_1U_{z_1z_1}+z_2U_{z_1z_2}+(z_2-z_1+\gamma)U_{z_1}+z_2U_{z_2}+\alpha_1U=\exp(z_2)z_1^{\rho_1-1}z_2^{\rho_2},\\ &z_2U_{z_2z_2}+z_1U_{z_1z_2}+z_1U_{z_1}+(z_2+\gamma)U_{z_2}+(\gamma-\alpha_2^{'})U=\exp(z_2)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2-1} \end{aligned} \tag{3.36}$$

жүйенің дербес шешімін құру қажет болады.

Алдыңғы жағдайлардағыдай біртекті емес (3.36) жүйенің дербес шешімі келесі түрде анықталды:

$$U(z_1,z_2)=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2}(\rho_1+\rho_2+\gamma-\alpha_2^{'})_{m_2}(\rho_1+\alpha_1)_{m_1}}{(\rho_1)_{m_1+1}(\rho_1+\gamma-1)_{m_1+1}(\rho_2)_{m_2+1}(\rho_2+\gamma-1)_{m_2+1}}z_1^{m_1}z_2^{m_2}.$$

Тіркелген (3.18) жүйенің табылған шешімі ескеріліп, $\alpha_{1,0}=0, \alpha_{0,1}=1$ жағдай үшін (3.29) қалыпты-регуляр шешім алынатындығына көз жеткізілді.

3.1-ескерту. Біз Горнның оң жақ бөлігі (3.26) түрінде берілген (3.9) біртекті емес жүйесінің қалыпты-регуляр шешімдерін құру мүмкіндіктерін көрсеттік. Алайда, $\exp(\alpha_{1,0}z_1+\alpha_{0,1}z_2)$ айқындауыш көбейткішінде бірінші дәрежелі көпмүшелік $Q_1(z_1,z_2)=\alpha_{1,0}z_1+\alpha_{0,1}z_2$ тек (∞,∞) иррегуляр ерекшелігі бар туындалған жүйелерде ғана болады.

3.2-ескерту. Жалпы жағдайда (3.26) жүйенің оң жақ бөлігі келесі түрде

$$\begin{aligned} &f_1(z_1,z_2)=\alpha_{0,0}^{(1)}\exp Q(z_1,z_2)z_1^{\rho_1-1}z_2^{\rho_2},\\ &f_2(z_1,z_2)=\alpha_{0,0}^{(2)}\exp Q(z_1,z_2)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2-1} \end{aligned} \tag{3.37}$$

берілуі мүмкін, мұндағы $Q(z_1,z_2)$ екі айнымалылы

$$Q(z_1,z_2)=\frac{\alpha_{p,0}}{p}z_1^p+\frac{\alpha_{0,p}}{p}z_2^p+...+\alpha_{1,1}z_1z_2+\alpha_{1,0}z_2+\alpha_{1,0}z_1 \tag{3.38}$$

көпмүшелік. Бұл жағдайдағы белгісіз коэффициенттерді анықтау әдістемесі [14, 135 б.] монографияда берілген.

3.3-ескерту. (3.9) жүйенің оң жағы (3.37) түрінде берілгенде, қалыпты-регуляр шешім

$$W_1(z_1,z_2)=\exp Q(z_1,z_2)z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}A_{m_1,m_2}z_1^{m_1}z_2^{m_2}, \quad \left(A_{0,0}\neq 0\right)$$

түрінде іздеделеді, мұндағы $Q(z_1,z_2)$ екі айнымалылы (3.38) түріндегі көпмүшелік.

3.3 n теңдеуден тұратын туындалған жүйенің қалыпты-регуляр шешімінің қасиеттері

Алдыңғы бөлімде келтірілген 3.1-3.5 теоремаларды n айнымалылар жағдайына жалпылауға болады.

3.7-теорема. (F_B) Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы алынған n теңдеуден тұратын

$$\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2 W}{\partial z_j\partial z_i}+(\gamma-z_i)\frac{\partial W}{\partial z_i}-\alpha_i W=0, \quad (i=\overline{1,n}) \tag{3.39}$$

жүйенің $(0,0,...,0)$ регуляр ерекше қисығының маңайында 2^n сызықты тәуелсіз шешімдері бар және олардың біреуі n айнымалылы

$$\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n^{'}\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{m_1,...m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1^{'})_{m_1}...(\alpha_n^{'})_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+..+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \tag{3.40}$$

Гумберт-Художников функциясы.

Дәлелдеу. (3.39) жүйесінің дербес шешімдері

$$W(z_1,...,z_n)=z_1^{\rho_1}...z_n^{\rho_n}\sum_{m_1,...m_n=0}^{\infty}A_{m_1,...m_n}z_1^{m_1}...z_n^{m_n}, \ \left(A_{0,...0}\neq 0\right) \tag{3.41}$$

жалпыланған қатар түрінде ізделеді. (3.41) қатарындағы белгісіз $\rho_j, \left(j=1,...,n\right)$

$$f_{0,...0}^{(t)}(\rho_1,\rho_n)=\rho_t(\rho_t-1+\sum_{t=1,i\neq t}^{n}\rho_t+\gamma)=0 \tag{3.42}$$

айқындауыш теңдеулер жүйесінен анықталады. Бұл жүйенің 2^n түбірі бар: $(\rho_1=0,...\rho_n=0)$; $(\rho_1=1-\gamma,...\rho_2=0,...,\rho_n=0)$, … , $(\rho_1=1-\gamma,...\rho_2=1-\gamma,...,\rho_n=1-\gamma)$. Олар (3.39) жүйенің 2^n регуляр $W_{n_1},(z_1,...,z_n)$ шешімінің көрсеткіштері, яғни

(3.41) қатары түріндегі 2^n дербес шешімдерді анықтайды. Қатардың $A_{m_1,\dots m_n}\ (m_1,\dots,m_n = 0,1,2,\dots)$ белгісіз коэффициенттері (3.32) рекуррентті тізбектер жүйесінен анықталады. Осы ретпен құрылған шешім n айнымалылардың 2^n сызықты-тәуелсіз шешімдерін анықтайды, олардың біреуі n айнымалылы (3.40) туындалған гипергеометриялық Гумберт-Художников функциясы.

Бізді бұл шешімнің (3.39) жүйенің қалыпты-регуляр шешімдерімен байланысы қызықтырады.

3.8-теорема. (3.39) жүйесінен

$$W(z_1,\dots,z_n) = \exp(\alpha_{\underbrace{1,0,\dots,0}_{n}} z_1 + \dots + \alpha_{\underbrace{0,\dots,0,1}_{n}} z_n)\cdot U(z_1,\dots,z_n) \tag{3.43}$$

ауыстыруы көмегімен алынған көмекші жүйенің қажеттілік

$$\alpha^2_{1,0,\dots,0} - \alpha_{1,0,\dots,0} = 0,\ \dots,\ \alpha^2_{0,\dots,0,1} - \alpha_{0,0,\dots,0,1} = 0 \tag{3.44}$$

шарттары орындалған кезде n қалыпты-регуляр шешімдері бар болады.

Дәлелдеу. (3.44) қажеттілік шартының (элементтері 0 мен 1-ден тұратын) 2^n түбірлері бар: $(\alpha_{1,0,\dots,0} = 0, \alpha_{0,1,0,\dots,0} = 0, \dots, \alpha_{0,0,\dots,0,1} = 0)$, $(\alpha_{1,0,\dots,0} = 1, \alpha_{0,1,0,\dots,0} = 0, \dots, \alpha_{0,\dots,0,1} = 0)$, $\dots$, $(\alpha_{1,0,\dots,0} = 1, \alpha_{0,1,0,\dots,0} = 1, \dots, \alpha_{0,0,\dots,0,1} = 1)$. Оның бастапқы $n+1$ түбірі ғана біріккен тіркелген жүйелерді анықтайды. 3.1-теорема негізінде, олардың біріккен жүйесінен $(\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n)$ түбіріне сәйкес

$$W_{n-1}(z_1,z_2,\dots,z_n) = \Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha'_n \\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right) \tag{3.45}$$

Гумберт-Художников функциясы алынады. Одан кейін жалпы саны n қалыпты-регуляр шешімдер

$$\begin{aligned}
&W_{n-1}(z_1,z_2,\dots,z_n) = e^{z_1}\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\gamma-\alpha'_1,-\dots,-\alpha'_n,\alpha'_2,\dots,\alpha'_n;\gamma;-z_1,z_2-z_1,\dots,z_n-z_1\right),\\
&W_{n-2}(z_1,z_2,\dots,z_n) =\\
&= e^{z_2}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha'_1,\gamma-\alpha'_2-\alpha'_1-,\dots,-\alpha'_n,\alpha'_0,\dots,\alpha'_n;\gamma;z_1-z_2,-z_2,z_3-z_2,\dots,z_n-z_2),\\
&-------------------------------------,\\
&W_{n,n+1}(z_1,z_2,\dots,z_n) = e^{z_n}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha'_1,\dots,\alpha'_{n-1},\gamma-\alpha'_n-\alpha'_1,-\dots,-\alpha'_{n-1};\gamma;z_1-z_n,\dots,z_{n-1}-z_n,z_n)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

табылады. Дәлелдеу керегі де осы болатын.

Қалыпты-регуляр шешімдердің қасиеттерін қарастыруға көшейік.

3.9-теорема. Қалыпты-регуляр шешімдер үшін

$$
\begin{aligned}
&e^{-z_1}\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha'_n\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\gamma-\alpha'_1,-\dots,-\alpha'_n,\alpha'_2,\dots,\alpha'_n;\gamma;-z_1,z_2-z_1,\dots,z_n-z_1\right),\\
&e^{-z_2}\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha'_n\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha'_1,\gamma-\alpha'_2-\alpha'_1-,\dots,-\alpha'_n,\alpha'_3,\dots,\alpha'_n;\gamma;z_1-z_2,-z_2,z_3,\dots,z_n-z_2),\\
&---,\\
&e^{-z_n}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha'_1,\dots,\alpha'_{n-1},\gamma-\alpha'_n-\alpha'_1,-\dots,-\alpha'_{n-1};\gamma;z_1-z_n,\dots,z_{n-1}-z_n,z_n)
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

және

$$
\begin{aligned}
&\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha'_n\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_1}\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\gamma-\alpha'_1,-\dots,-\alpha'_n,\alpha'_2,\dots,\alpha'_n;\gamma;-z_1,z_2-z_1,\dots,z_n-z_1\right),\\
&\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha'_n\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_2}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha'_1,\gamma-\alpha'_2-\alpha'_1-,\dots,-\alpha'_n,\alpha'_3,\dots,\alpha'_n;\gamma;z_1-z_2,-z_2,z_3,\dots,z_n-z_2),\\
&---,\\
&\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha'_n\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_n}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha'_1,\dots,\alpha'_{n-1},\gamma-\alpha'_n-\alpha'_1,-\dots,-\alpha'_{n-1};\gamma;z_1-z_n,\dots,z_{n-1}-z_n,-z_n),
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

қасиеттері орын алады.

Олардың дәлелдеуі 3.3-теореманың дәлелдеуіне ұқсас.

Лауричелланың (3.2) жалпыланған жүйесінен алынған туындалған жүйелер (3.4)-(3.6) үш теңдеуден тұрады. Әрбір теңдеу, өз кезегінде, белгілі бір теңдеулерден тұратын жүйелер болып табылады. Олардың әрқайсысының шешімінің өзіндік ерекшеліктері бар. Мысалы, (3.4) жүйесінің шешімдері: Гаусс, (F_1-F_4) Аппель функциялары, Горн тізіміндегі гипергеометриялық функциялар. (3.5) жүйесінің шешімдері: Куммер функциялары, туындалған гипергеометриялық функциялар. (3.6) жүйесінің шешімдері: бір және көп айнымалылы Бессель функцияларына келтіретін туындалған функциялар болып табылады.

В.И. Художников енгізген жаңа (3.7) функция (3.4)-(3.6) жүйелері үшін ортақ дербес шешім. Диссертациялық жұмыс В.И. Художниковтың зерттеулерін толықтырады, өйткені осы уақытқа дейін зерттелмеген, жаңа қалыпты-регуляр шешімінің бар болуы мүмкіндігі және олардың $\Phi^{k,l}_{B,n}$ Художников функциясымен байланысы жан-жақты қарастырылған.

Зерттеуге қолданылған Фробениус-Латышева әдісі регуляр және иррегуляр арнайы қисықтарды ескере отырып, туындалған жүйелерді жан-жақты қарастыруға мүмкіндік береді [14, 148-162 б.].

3.4 Художников функциясы мен дербес жағдайдағы қалыпты-регуляр шешімдер арасындағы байланыс

Алдыңғы бөлімде (3.4)-(3.6) жалпы туындалған гипергеометриялық жүйеден (3.5) туындалған жүйесі бөлініп шығарылып, оның қалыпты-регуляр шешімінің бар болу мүмкіндіктері зерттелді.

Туындалған (3.5)-ші жүйенің дербес шешімі $\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n' \\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)$ түрінде анықталды. Бұл $\Phi_{B,n}^{k,l}\left(\begin{matrix}\alpha_k, & \alpha_l', & \beta_k \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)$ Художников функциясының дербес жағдайы болып табылады және қалыпты-регуляр шешімдердің бар болуының барлық жағдайларын толық қамтымайды. Сондықтан (3.2) жүйенің (3.4) және (3.5) теңдеулерін бірге қарастыруға көшейік.

Осы жағдайдың маңызды мысалы

$$\begin{aligned} &z_1(1-z_1)W_{z_1z_1}+z_2W_{z_1z_2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z_1]W_{z_1}-\alpha_1\beta_1W=0, \\ &z_2W_{z_2z_2}+z_1W_{z_1z_2}+(\gamma-z_2)W_{z_2}-\alpha_2'W=0 \end{aligned} \tag{3.49}$$

туындалған Горн жүйесі.

(3.49) жүйенің регуляр ерекше нүкте маңайында үш сызықтық-тәуелсіз дербес шешімге ие екендігі белгілі, олардың бірі:

$$\Xi_1(\alpha_1,\alpha_2',\beta_1;\gamma;z_1,z_2)=\Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2', & \beta_1 \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right) \tag{3.50}$$

екі айнымалылы туындалған Гумберт функциясы. (3.50)-ші функция Художников функциясының $n=2,\ \ k=1,\ \ l=1$ мәндеріне сай алынған дербес жағдайлары. (3.49)-дан көрініп тұрғандай, жүйенің бірінші теңдеуі (3.4), ал екіншісі (3.4) теңдеуінен шекке көшу арқылы алынған (3.5) туындалған теңдеуінің дербес жағдайы [26, 27, 116]. Қалыпты-регуляр шешімнің бар болуы екінші туындалған теңдеу арқылы қамтамасыз етіледі. Мұны біз болашақта көрсететін боламыз. (3.49) жүйенің шешімі Фробениус-Латышева әдісін қолданып

$$W(z_1,z_2)=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}A_{m_1,m_2}z_1^{m_1}z_2^{m_2},\quad \left(A_{0,\dots,0}\neq 0\right) \tag{3.51}$$

екі айнымалылы жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ізделеді, мұндағы $\rho_t\,(t=1,2),\ A_{m_1,m_2},\ (m_1,m_2=0,1,2,...)$ – белгісіз тұрақтылар,

$(0,0)$ ерекше нүктесіне қатысты айқындауыш теңдеулер жүйесі

$$f_{0,0}^{(t)}(\rho_1,\rho_2)\equiv\rho_1^{(t)}(\rho_1^{(t)}-1+\rho_2^{(t)}+\gamma)=0,\quad (t=1,2) \tag{3.52}$$

түрінде беріледі. Оның 2^2 екі жұп түбірі бар: II. $(\rho_1^{(1)} = 0, \rho_2^{(2)} = 1-\gamma)$, III. $(\rho_1^{(2)} = 1-\gamma, \rho_2^{(2)} = 0)$, IV. $(\rho_1^{(1)} = 1-\gamma, \rho_2^{(2)} = 1-\gamma)$.

(3.50) шешімі I. $(\rho_1^{(1)} = 0, \rho_2^{(1)} = 0)$, көрсеткішіне сәйкес келеді. Алдағы уақытта бізді осы шешімнің (3.49) жүйенің жаңадан құрылған қалыпты-регуляр шешімдерімен байланысы қызықтырады.

3.10-теорема. Біртекті (3.49) жүйеден

$$W(z_1, z_2) = \exp(\alpha_{1,0} z_1 + \alpha_{0,1} z_2) \cdot U(z_1, z_2) \qquad (3.53)$$

түрлендіруі арқылы алынған

$$\begin{aligned}
&z_1(1-z_1)U_{z_1 z_1} + z_2 U_{z_1 z_2} + \{(z_1 - z_1^2)2\alpha_{1,0} + \alpha_{0,1} z_2 + [\gamma - (\alpha_1 + \beta_1 + 1)z_1]U_{z_1} + \alpha_{1,0} z_2 U_{z_2} + \\
&\{\alpha_{1,0}^2 z_1^2 + \alpha_{1,0}^2 z_1 + \alpha_{1,0}\alpha_{0,1} z_2 + [\gamma - (\alpha_1 + \beta_1 + 1)z_1]\alpha_{1,0} - \alpha_1 \beta_1\}U = 0, \\
&z_2 U_{z_2 z_2} + z_1 U_{z_1 z_2} + \{2\alpha_{0,1} z_2 + (\gamma - z_2) + z_1 \alpha_{1,0}\}U_{z_2} + z_1 \alpha_{0,1} U_{z_1} + \\
&+\{(\alpha_{1,0}^2 - \alpha_{0,1})z_2 + \alpha_{1,0}\alpha_{0,1} z_1 + (\alpha_{0,1}\gamma - \alpha_2^{'})\}U = 0
\end{aligned} \qquad (3.54)$$

көмекші жүйенің

$$\alpha_{1,0}^2 = 0, \quad \alpha_{0,1}^2 - \alpha_{0,1} = 0 \qquad (3.55)$$

екі қажетті шарттары және (3.52) теңдік орындалған кезде

$$\begin{aligned}
W(z_1, z_2) = e^{z_2}(1 + &\frac{\alpha_1 \beta_1}{\gamma} z_1 - \frac{\gamma - \alpha_2^{'}}{\gamma} z_2 + \frac{\alpha_1 \beta_1}{\gamma} \frac{(\gamma + 1 - \alpha_2^{'})}{\gamma + 1} z_1 z_2 + \\
&+ \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)\beta_1(\beta_1 + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{z_1^2}{2!} + \frac{(\gamma - \alpha_2^{'})(\gamma + 1 - \alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{z_2^2}{2!} + \ldots)
\end{aligned} \qquad (3.56)$$

бір ғана қалыпты-регуляр шешімі бар, мұндағы $\alpha_{1,0}$ және $\alpha_{0,1}$ – белгісіз тұрақтылар.

Дәлелдеу. Бірінші, (3.55) қажетті шарты (3.53) жүйедегі $U(x, y)$ белгісіз функциясы жанындағы z_1 және z_2 тәуелсіз айнымалылардың жоғары дәрежелерінің коэффициенттерін нөлге теңестіру арқылы алынады. (3.55) жүйенің екі жұп түбірі бар: I. $(\alpha_{1,0} = 0, \alpha_{0,1} = 0)$ және II. $(\alpha_{1,0} = 0, \alpha_{0,1} = 1)$. Олар тіркестірілген екі жүйені анықтайды.

I. $(\alpha_{1,0} = 0, \alpha_{0,1} = 0)$ болғанда біз (3.49) Горн жүйесін аламыз. Оның үш сызықтық-тәуелсіз дербес шешімі бар. Дербес шешімдердің біреуі Гумберт функциясы:

$$W_1(z_1, z_2) = \Xi_1(\alpha_1, \alpha_2^{'}, \beta_1; \gamma; z_1, z_2) = \Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1 \\ & \gamma & \end{matrix}\middle| (z_2)\right).$$

Бұл шешімдерді құру үшін Фробениус-Латышева әдісін қолдануға болады [12, 180-194 б.].

II. $(\alpha_{1,0}=0, \alpha_{0,1}=1)$ болғанда (3.55)-тен

$$
\begin{aligned}
&z_1(1-z_1)U_{z_1z_1}+z_2U_{z_1z_2}+[z_2+\gamma-(\alpha_1+\beta_1+1)z_1]U_{z_1}-\alpha_1\beta_1U=0,\\
&z_2U_{z_2z_2}+z_1U_{z_1z_2}+(z_2+\gamma)U_{z_2}+z_1U_{z_1}+(\gamma-\alpha_2^{'})U=0
\end{aligned}
$$

жүйесі алынады.

Жүйенің шешімі Фробениус-Латышева әдісімен анықталады. $U(z_1,z_2)$ белгісізі екі айнымалылы (3.51) жалпыланған дәрежелік қатары ретінде ізделінеді, сондықтан (3.53) түрлендіруді ескере отырып, (3.54) көмекші жүйенің шешімі (3.56) түрінде табылады. Дәлелдеу керегі де осы болатын. Құрылған қалыпты-регуляр шешімнің кейбір қасиеттеріне тоқталайық.

3.11-теорема. Художников функциясы мен қалыпты-регуляр шешімдер арасында

$$
\begin{aligned}
&e^{z_2}\left(1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1-\frac{\gamma-\alpha_2^{'}}{\gamma}z_2-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+...\right)=\\
&=\Xi_1\left(\alpha_1,\alpha_2^{'},\beta_1;\gamma;z_1,z_2\right)=\Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|\left(z_2\right)\right),
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

$$
e^{-z_2}\Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|\left(z_2\right)\right)=\left\{1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1-\frac{\gamma-\alpha_2^{'}}{\gamma}z_2-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+...\right\}
\tag{3.58}
$$

теңдіктері орындалады.

Дәлелдеу. (3.57) теңдікті дәлелдейік. e^{z_2} функциясының қатарға жіктелуін пайдаланып, теңдеудің сол жағын түрлендірсек:

$$e^{z_2}\left(1+\frac{\alpha_1\beta_1 z_1}{\gamma}-\frac{\gamma-\alpha_2^{'}z_2}{\gamma}-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_2^{'})z_1z_2}{\gamma(\gamma+1)}\right)+$$

$$+e^{z_2}\left(\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\beta_1(\beta_1+1)z_1^2}{\gamma(\gamma+1)2!}+\frac{(\gamma-\alpha_2^{'})(\gamma+1-\alpha_2^{'})z_2^2}{\gamma(\gamma+1)2!}+...\right)=$$

$$=\left(1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+...+\frac{z_2^n}{n!}+...\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1-\frac{\gamma-\alpha_2^{'}}{\gamma}z_2-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+...\right)=$$

$$=\left\{1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}\frac{z_1}{1!}+\left[\frac{1}{1}-\frac{\gamma-\alpha_2^{'}}{\gamma}\right]z_2+\left[\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}\right]z_1z_2+...\right\}=$$

$$\left\{1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}\frac{z_1}{1!}+\frac{\alpha_2^{'}}{\gamma}z_2+\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_2^{'}}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{\alpha_2^{'}\left(\alpha_2^{'}+1\right)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+...\right\}=$$

$$=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m_1}(\alpha_2)_{m_2}(\beta_1)_{m_1}}{(\gamma)_{m_1+m_2}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}=\mathrm{E}_1^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2^{'},\beta_1;\gamma;z_1z_2)=\Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_2)\right).$$

Нәтижесінде, бастапқы қалыпты-регуляр шешімнен Художников функциясы алынады.

(3.58) теңдік те осылай дәлелденеді. Бұдан $n=2,\ k=1,\ l=1$ болған кезде қалыпты-регуляр шешімнің бар болуы екінші туындалған теңдеу арқылы қамтамасыз етілгеніне көз жеткіздік.

$n=3,\ k=1,\ l=2$ болсын делік. Сонда (3.4) жүйесінен бір теңдеу, ал (3.5) жүйесінен шекке көшу арқылы екі теңдеу алынады. Бұл жағдайда қажетті шарттар

$$\alpha_{1,0,0}^2=0,\ \alpha_{0,1,0}^2-\alpha_{0,1,0}=0,\ \alpha_{0,0,1}^2-\alpha_{0,0,1}=0$$

және (3.11) теңдік орындалады, сондықтан зерттелетін жүйеден I. $(\alpha_{1,0,0}=0,\alpha_{0,1,0}=0,\alpha_{0,0,1}=0)$, II. $(\alpha_{1,0,0}=0,\alpha_{0,1,0}=1,\alpha_{0,0,1}=0)$, III. $(\alpha_{1,0,0}=0,\alpha_{0,1,0}=0,\alpha_{0,0,1}=1)$ үштік мәндері анықталып, оларға сәйкес үш тіркестірілген жүйелер алынады. II. $(\alpha_{1,0,0}=0,\alpha_{0,1,0}=1,\alpha_{0,0,1}=0)$ үштік мәніне сәйкес алынған жүйенің

$$W_{3,1}(z_1,z_2,z_3)=\Phi_{B,3}^{1,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_3)\right)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m_1}(\alpha_1^{'})_{m_2}(\beta_1)_{m_1}(\alpha_2^{'})_{m_3}}{(\gamma)_{m_1+m_2}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}$$

үш айнымалыға тәуелді Художников функциясы түріндегі шешімі бар.

(3.50) теңдікті ескерсек, төмендегі

$$\Xi_1^{(3)}(\alpha_1,\alpha_1^{'},\alpha_2^{'},\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)=\Phi_{B,3}^{1,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_3)\right)$$

теңдігінің орындалатындығына көз жеткізуге болады.

3.1-бөлімшесіндегі сияқты, Фробениус-Латышева әдісін қолдана отырып, зерттелетін жүйеден II. $(\alpha_{1,0,0}=0, \alpha_{0,1,0}=1, \alpha_{0,0,1}=0)$ және III. $(\alpha_{1,0,0}=0, \alpha_{0,1,0}=0, \alpha_{0,0,1}=1)$ үштік мәндерінде алынған тіркестірілген жүйелердің бір-бірден қалыпты-регуляр шешімі бар болады:

$$\begin{aligned}
W_{3,2}(z_1,z_2,z_3) &= e^{z_2}\Big(1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1-\frac{\gamma-\alpha_1^{'}}{\gamma}z_2+\frac{\alpha_2^{'}}{\gamma}z_3-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_1^{'})}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\\
&+\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_2^{'}}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_3-\frac{\alpha_2^{'}(\gamma+1-\alpha_1^{'})}{\gamma(\gamma+1)}z_2z_3-\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_2^{'}(\gamma+2-\alpha_1^{'})}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z_1z_2z_3+\\
&+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\frac{(\gamma+1-\alpha_1^{'})(\gamma-\alpha_1^{'})}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_2^2}{2!}+\ldots\Big)\\
W_{3,3}(z_1,z_2,z_3) &= e^{z_3}\Big(1+\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}z_1+\frac{\alpha_1^{'}}{\gamma}z_2-\frac{\gamma-\alpha_2^{'}}{\gamma}z_1+\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{'}}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2-\\
&-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_3-\frac{\alpha_1^{'}(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)}z_2z_3-\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{'}(\gamma+1-\alpha_2^{'})}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z_1z_2z_3+\\
&+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\beta_1(\beta_1+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z_1^2}{2!}+\ldots\Big).
\end{aligned}\tag{3.59}$$

Жазуды қысқату мақсатында (3.59)-дың оң жағындағы жақшалардағы қатарларды $\Phi_{B,3}^{(j)}, (j=2,3)$ арқылы белгілейік. Сонда оларды біріктіріп, келесі теңдік түрінде жаза аламыз:

$$W_{3,2}^{(j)}(z_1,z_2,z_3)=e^{z_j}\Phi_{B,3}^{(j)}, \quad (j=2,3).$$

Осы теңдіктің және жоғарыда келтірілген пайымдаулардың негізінде, біз енгізілген жаңа $\Phi_{B,3}^{1,2}$ функциясы мен жаңадан құрылған (3.59) қалыпты-регуляр шешімдер арасындағы

$$\Phi_{B,3}^{1,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_3)\right)=e^{z_j}\Phi_{B,3}^{(j)}, \quad (j=2,3)$$

$$e^{-z_j}\Phi_{B,3}^{1,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1\\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_3)\right)=\Phi_{B,3}^{(j)}, \quad (j=2,3)$$

қатынастарының орынды екендігі туралы қорытынды жасаймыз. Келтірілген қатынастар бір айнымалының функциясы жағдайындағы Куммердің бірінші теоремасының көп айнымалылар жағдайына жалпылануы [117].

Енді n теңдеу берілген жалпы жағдайға тоқталайық. Мұнда (3.4) жүйесінен тек бір теңдеу, ал (3.5) жүйесінен $n-1$ теңдеу алынады, яғни $k=1,\ l=n-1$. Келтірілген дербес жағдай үшін жалпы теореманы тұжырымдайық.

3.12-теорема. Жалпы саны n теңдеуден тұратын

$$\begin{aligned} & z_1(1-z_1)\frac{\partial^2 W}{\partial z_1^2}+\sum_{j=1}^{n} z_j\frac{\partial^2 W}{\partial z_j \partial z_1}+[\gamma-(\alpha_1+\beta_1+1)z_1]\frac{\partial W}{\partial z_1}-\alpha_1\beta_1 W=0, \quad (i=1) \\ & \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 W}{\partial z_j \partial z_1}+[\gamma-z_1]\frac{\partial W}{\partial z_1}-\alpha_{1-n}^{'}W=0, \quad (i=2,k+n-1) \end{aligned} \tag{3.60}$$

туындалған жүйесінен

$$W(z_1,z_{2,...,}z_n)=\exp(\alpha_{1,0,...,0}z_1+...+\alpha_{0,...,1}z_n)\cdot U(z_1,z_{2,...,}z_n)$$

түрлендіруінің көмегімен алынған көмекші жүйенің

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,0,...,0}=0,\alpha_{0,1,0,...,0}^2-\alpha_{0,1,0,...,0}=0,...,\alpha_{0,...,0,1}^2-\alpha_{0,...,0,1}=0 \\ & f_{0,...,0}^{(t)}(\rho_1,...,\rho_n)=\rho_t(\rho_t-1+\sum_{t=1,i\neq t}\rho_t+\gamma)=0, \quad (t=\overline{1,n}) \end{aligned}$$

қажеттіліктің қос шарты орындалған кезде

$$W_{n,j}(z_1,...,z_n)=e^{z_j}\Phi_{B,n}^{(j)}, \quad (j=2,3,...,n) \tag{3.61}$$

$n-1$ қалыпты-регуляр шешімдері бар, мұндағы $\alpha_{1,0},...,_0,...,\alpha_0,...,_{0,1}$ – белгісіз тұрақтылар.

Дәлелдеу. (3.60) жүйесінің $\left(\alpha_{1,0,...,0}=0,...,\alpha_{0,0,...,1}=0\right)$ мәндерінде n регуляр шешімдері

$$W_{n,1}(z_1,...,z_n)=\Phi_{B,n}^{(1,j)}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_1^{'}, & \beta_1 \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right), \quad (j=2,3,...,n) \tag{3.62}$$

және $n-1$ қалыпты-регуляр (3.61) шешімдері бар. Жоғарыда келтірілген пайымдауларды пайдаланып, аталған (3.61) және (3.62) шешімінің бар болатындығына және олардың араларында келесі қатынастардың

$$\begin{aligned} & \Phi_{B,3}^{1,j}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_j^{'}, & \beta_1 \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_j}\Phi_{B,3}^{(j)}, \quad (j=2,...,n) \\ & e^{-z_j}\Phi_{B,3}^{1,j}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_j^{'}, & \beta_1 \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\Phi_{B,3}^{(j)}, \quad (j=2,...,n) \end{aligned} \tag{3.63}$$

орын алатындығына көз жеткізуге болады.

Жоғарыда келтірілген мысалдарда екі және үш айнымалылы Гумберт функциялары келтірілді. Соңғы 3.12-теоремада n айнымалылы Гумберт функциялары алынды. Сол сияқты, қарастырылған (3.60) жүйенің дербес шешімінің бірі n айнымалылы Гумберт функциясы болып табылатындығына және бұл Художников функциясының дербес жағдайы екендігіне көз жеткізуге болады:

$$\Phi_{B,n}^{1,n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_j^{'}, & \beta_1 \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{m_1,\dots m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m_1}(\alpha_1^{'})_{m_2}\dots(\alpha_{n-1}^{'})_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{z_n^{m_n}}{m_n!}=$$
$$=\Xi_1^{1,n-1}(\alpha_1,\alpha_1^{'},\dots,\alpha_{n-1}^{'};\gamma;z_1,\dots,z_n),\quad (j=2,3,\dots n).$$

Ал, олардың қалыпты-регуляр шешімдерімен байланысы (3.63) қатынастарымен беріліп тұр. Бұдан n теңдеуден тұратын туындалған жүйелердің шешімдері үшін де Кумер формулаларының орынды екені көрінеді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста жоғары ретті біртекті емес жалпыланған гипергеометриялық теңдеулер мен біріккен дербес туындылы біртекті емес туындалған дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің шешімінің бар болуының тиімді әдістерін құру мүмкіндіктері зерттелген.

Зерттеу бағытында келесі нәтижелер:

- анықталмаған коэффициенттер әдісі арқылы біртекті емес жалпыланған дифференциалдық теңдеулер мен дербес туындылы теңдеулер жүйесінің шешімдері құрылды;
- біртекті Клаузен теңдеуінің $x = 0$ және $x = \infty$ нүктелерінің маңайындағы жалпы шешімдері құрылды;
- біртекті емес үшінші ретті жалпыланған Клаузен теңдеуі мен одан шекке көшу арқылы алынған туындалған Клаузен теңдеуінің шешімдерін теңдіктің оң жағының берілуіне сәйкес құру ерекшеліктері орнатылды;
- үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің регуляр, иррегуляр ерекшеліктерінің классификациясы жасалды және оларға сәйкес қалыпты, қалыпты-регуляр шешімдердің түрлері нақтыланып, олардың бар болуының қажеті шарттары табылды;
- жалпыланған гипергеометриялық біртекті және біртекті емес Клаузен жүйелерінің дербес және жалпы шешімінің бар болуының ерекшеліктері орнатылып, олардың қасиеттері зерттелді;
- біртекті емес жай, негізгі және туындалған Клаузен жүйелерінің жалпыланған гипергеометриялық функциялар түріндегі шешімдері құрылды;
- екінші және үшінші ретті екі теңдеуден тұратын жүйелерден шекке көшу арқылы алынған туындалған жүйелердің қалыпты-регуляр шешімінің бар болуы қасиеттері зерттеліп, (F_B) Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы алынған біртекті туындалған жүйелердің шешімдері туындалған гипергеометриялық n теңдеуден тұратын жүйелер үшін жалпыланды;
- туындалған (F_B) жүйесінің В.И. Художников енгізген көп өлшемді $\Phi_{B,n}^{k,l}$ функциясымен көп өлшемді қалыпты-регуляр функциялар арасындағы байланыстар орнатылды.

Қойылған міндеттерді шешу толықтығын дәлелдеу. Жоғары ретті біртекті емес жалпыланған гипергеометриялық теңдеу мен біріккен дербес туындылы біртекті емес туындалған дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің шешімінің бар болуының тиімді әдістерін құру мүмкіндіктері анықталмаған коэффициенттер және Фробениус-Латышева әдістерімен зерттелді. Зерттеуге Клаузеннің жай жалпыланған гипергеометриялық жүйесі енгізіліп, оның біртекті және біртекті емес жүйелерінің көпөлшемді жалпыланған гипергеометриялық шешімдері орнатылып, қасиеттері қарастырылды. Клаузеннің негізгі және туындалған біртекті немесе біртекті емес жүйелерінің дербес жалпы шешімінің бар болу мүмкіндіктері толық зерттелді.

(F_B) туындалған Лауричелла жүйесінің көпөлшемді қалыпты-регуляр шешімінің бар болу мүмкіндіктері анықталып, жаңадан енгізілген Художников $\Phi_{B,n}^{k,l}$ функциясымен байланысы орнатылды.

Нәтижелерін нақты қолдану бойынша толықтығын бағалау. Зерттеу нәтижелері теориялық сипатта және математикалық физиканың, радиоэлектрониканың, антенналар теориясының, көпөлшемді туындалған теңдеулер теориясының қасиеттерін зерттеуде қолданыс табады.

Сонымен қатар физика-математика және инженер мамандықтарының студенттері, магистранттары мен докторанттары үшін элективті курстар ұйымдастыруда қолданылуға ұсынылады.

Осы саладағы ең жақсы жетістіктермен салыстырғанда орындалған жұмыстың ғылыми деңгейін бағалау. Орындалған ғылыми жұмыстың нәтижелері ҚР ҒЖБССҚК ұсынған журналдарда, халықаралық конференциялар материалдарында және Scopus мәліметтер базасында индекстелген журналдарда жарияланды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite. – Paris:Gauthier-Villars, 1926. - 434 p.

2 Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функции / пер. со 2-го англ. изд. В.С. Бермана; под ред. Г. Шилова. – Москва:ИЛ, 1949. - Ч. I, II. - 972 с.

3 Watson G.N. Theory of Bessel functions. – Cambridge:University Press, 1922. - 811 p.

4 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.– М.:Наука, 1974. Ч. II. - 295 с.

5 Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.:Наука, 1971. - 287 с.

6 Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. Об одном методе нахождения частных решений неоднородных уравнений Бесселя и Лежандра // Мат. Физика. - 1977. - Вып. 9. - С. 152-159.

7 Babister A.W. Trancendental function satisfying nonhomogeneous linear differential equations. – London:New York, 1967. - 414 p.

8 Hasanov A., Yuldashev T.K. Analytic Continuation Formulas for the Hypergeometric Functions in Three Variables of Second Order // Lobachevskii J. of Mathematics. - 2022. - №43 (5). - P. 1134-1141.

9 Салахитдинов М.С. Гипергеометрические функции и их приложения к исследованию краевых и спектральных задач для уравнений в частных производных с сингулярными особенностями // Второй Международный Российско-Узбекский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Эльбрус. - 2012. - 239 с.

10 Hasanov A., Ryskan A., Choi J. Decomposition Formulas for Second-Order Quadruple Gaussian Hypergeometric Series by Means of Operators H (α, β) and H (α, β) // Montes Taurus J. Pure Appl. Math. - 2022. -№4(3). -P. 41-60.

11 Wilczynski E.J. Projective differential geometry of Curves and Ruled surfaces. – Leipzig:Leubner, 1966. - 120 p.

12 Wilczynski E.J. On a Certain Completery Integrable system of Linear. Partial Differential Equations // Amer. Journal of Math. -1994. - №3(36). - P. 180-194.

13 Латышева К.Я., Терещенко Н.И. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения. Метод Фробениуса-Латышевой. – Киев:Изд. Института математики АН УССР, 1970. - 394 с.

14 Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – Актобе:ИП Жандилдаева С.Т., 2015. - 464 с.

15 Sternberg W. Uber dis asymptotiche Integration von Differential gleichungen // Marh. Ann. - 1920. - P. 119-186.

16 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Факториал Пресс, 2005. - 636 с.

17 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М:Наука, 1965. - Ч.I.- 294 с.

18 Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.:ИЛ, 1948. - 260 с.

19 Кампе де Ферье, Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т. Функции математической физики. Справочное руководство. – М.:ГИФМЛ, 1963. - 102 с.

20 Slater L.J., Lit D. Generalized Hypergeometric functions. – Cambridge: University Press, 1966. - 292 p.

21 Ойнаров Р. Таңдамалы ғылыми еңбектер жинағы. Сборник избранных научных трудов. Collection of selected scientific papers. – Астана: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2017. - 700 с.

22 Kampe de Feriet J. Surles systems dequations aux derives partielles des des fonctions hypergeometriques Les plus generals // Comptes rendus, 1921. - T. CLXXII. - 1634 p.

23 Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.:Наука, 1979. - 415 с.

24 Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.:Наука, 1988. - 384 с.

25 Borngusser L. Uber hypergeometrishe Functionen zweier VeranderLichen. – Darmstsdt:Pfeffer Balzer, 1933. - 55 p.

26 Slater L.J., Lit D. Confluent hypergeometric series. – Cambridge: University Press, 1960. - 249 p.

27 Слейтер Л.Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. –М.: Вычислительный центр, 1966. - 249 с.

28 Талипова М.Ж. Построение нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка: автореферат канд ...диссер. ф.-м. наук:01.01.02. – Алматы, 2007. - 20 с.

29 Тасмамбетов Ж.Н, Талипова М.Ж. Нахождение нормально-регулярных решений неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Изв. НАН РК. - 2003. - №3. - С. 47-55.

30 Ergashev T.G., Tulakova Z.R. The Neumann Problem for a Multidimensional Elliptic Equation with Several Singular Coefficients in an Infinite Domain // Lobachevskii J. of Mathematics. - 2022. - №43 (1). - P. 199-206.

31 Рыскан А.Р. Формулы разложения с операторами Н гипергеометрических рядов Гаусса от четырех переменных второго порядка // Вестник КазНПУ. Серия «Физико-математические науки. - 2020. -№ 3(71), С.-79-84.

32 Ergashev T.G., Komilova N.J. Generalized Solution of the Cauchy Problem for Hyperbolic Equation with Two Lines of Degeneracy of the Second Kind // Lobachevskii J. of Mathematics. - 2022. - №43(3).- P. 556-565.

33 Hasanov A., Ruzhansky M. Hypergeometric Expansions of Solutions of the Degenerating Model Parabolic Equations of the Third Order // Lobachevskii J. of Mathematics. - 2020. - №41(1). - P. 27-31.

34 Ubayeva Zh.K., Tasmambetov Zh.N., Rajabov N. Features of Constructing a Solution Heterogeneous Equation and Clausen-Type Systems // Mathematical Modelling of Engineering Problems. - 2022. - №4. - P.906-918. (Процентиль-64 %)

35 Ubayeva Zh.K., Tasmambetov Zh.N. Exceptions of formulating the normal-regular solutions of confluent hypergeometric systems obtained from the Lauricella system // Lobachevskii journal of mathematics. - 2022. - Vol. 43, №8. - P. 2309–2321. (Процентиль-56 %)

36 Tasmambetov Zh.N., Rajabov N., Ubayeva Zh.K. The coordinated solution of two differential equations in private derivatives of the third order // New of the national Academy of Sciences of the Republic of physic-mathematical series. - 2019. - Vol. 4, - №326. - P. 83-91.

37 Tasmambetov Zh.N., Ubayeva Zh.K. Solution of inhomogeneous systems for differential equations in private derivatives of the third order // Bulletin of the Karaganda University. - 2020. - Vol. 98, №2. - P. 153-164.

38 Раджабов Н.Р., Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Особенности решения систем типа Клаузена // Вестник национальной инженерной Академии РК.- 2022. - №3(85). - С. 137-147.

39 Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Об особенностях построения нормально-регулярных решений вырожденных систем // Вестник Актюбинского регионального университета им.К.Жубанова. - 2022. - № 2(67). - С.135-142.

40 Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. О свойствах функций Клаузена // XLVI Международная научная конференция. – Москва:Евразийское Научное Объединение, 2018. - №12(46). - С. 33-38.

41 Сартабанов Ж.А., Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. О решений неоднородного вырожденного обобщенного уравнения Клаузена // Материалы VIII международной научной конференции: Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. – Актобе, 2018. - С. 103-110.

42 Ubayeva Zh.K. Solution regular system consisting of two differential equations of the third order // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященный 80-летнему юбилею академика НАН РК С.Н.Харина. – Алматы, 2019. - С.104-105.

43 Убаева Ж.К. Построение решений неоднородного уравнения Клаузена // XV Международной научно-практической конференции студентов, магистрантов, PhD докторантов «Молодежь, наука и инновации». – Актобе, 2019. – С. 38-40

44 Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Логарифмические решения системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка вида // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки РК. – Алматы, 2020. - С. 104-105.

45 Убаева Ж.К. Об особенностях построения нормально-регулярного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных

производных третьего порядка // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященной 75-летию академика НАН РК Т.Ш.Кальменова. – Алматы, 2021. - С. 167-168.

46 Убаева Ж.К., Талипова М.Ж., Жахина Р.У. О решениях в виде ортогональных многочленов двух переменных одной специальной системы // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки. – Алматы, 2023. - С. 167-168.

47 Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Решение неоднородных систем состоящих из двух дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Международной научной конференции «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики». – Караганда, 2019. - С. 101-102.

48 Tasmambetov Zh.N., Ubayeva Zh.K. Design of heterogeneous systems solution of differential equation in partial derivative of third order hypergeometric type // International Conference «Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra» dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. – Nur-Sultan, 2019. - P. 149-150.

49 Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Построение решений вырожденного неоднородного уравнения и обобщенных вырожденных гипергеометрических систем Клаузена // Международная научная конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики». – Нур-Султан, 2021. - С. 151-153.

50 Раджабов Н.Р., Убаева Ж.К., Исенова А.А. Исследование переопределенной линейной системы трех уравнений с постоянными коэффициентами содержащей гиперболическое уравнение второго порядка с сверхсингулярными линиями // Международная научная конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики». – Нур-Султан, 2021. - С. 134-136.

51 Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Построение решений неоднородных систем типа Клаузена вблизи особенности на бесконечности // VI Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик Эльбрус, 2019. - С. 179.

52 Убаева Ж.К. Нормально-регулярные решения вырожденных неоднородных гипергеометрических систем // IX международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе, 2022. - С. 299-309.

53 Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Об особенностях построения нормально-регулярных решений вырожденных систем // IX международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе, 2022. - С. 293-299.

54 Убаева Ж.К., Талипова М.Ж., Жахина Р.У. О решениях в виде ортогональных многочленов двух переменных одной специальной системы //

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки. – Алматы, 2023. - С. 167-168.
55 Ubayeva Zh.K., Talipova M.Zh, Zhakhina R.U., Baiganova A.M. Construction of hypergeometric type inhomogeneous second-order system solutions // Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023). – Turkestan, 2023. - P.134.
56 Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Нормально-регулярные решения одной неоднородной системы Гумберта // Международный научный семинар «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе, 2023. - С.82-88.
57 Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С. Нормально-регулярные решения и их приложения. – Киев:Вища школа, 1974. - 135 с.
58 Художников В.И. Две новые вырожденные гипергеометрические функции многих переменных и интегральные уравнения с ними // Дифф.уравнения. - 2003. -Том 39, №6. - С.835-843.
59 Lauricella G., Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili. Rend // Circ. Matem. - 1897. -T.7. - P. 111-158.
60 Тасмамбетов Ж.Н. Изучение особенности построения решений вырожденной системы в виде функции Бесселя многих переменных // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки. – Алматы, 2023. - С. 167-168.
61 Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. О неоднородных линейных дифференциальных уравнениях в регулярном случае // Математическая физика. Республиканский межведомственный сборник. – Киев, 1972. - С. 133-137.
62 Сикорский Ю.И. Нормальные решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: автореф. … канд.ф.-м. наук: 01.01.02. – Киев, 1972. - 12 с.
63 Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения, – М.:ИЛ., 1962. - 351 с.
64 Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М.: ИЛ, 1957. - 443 с.
65 Beytmen G., Erdeyli A. Higher Transcendental Functions. Part I. Hypergeometric functions. The functions of the Lezhanders. –M.:Science, 1965. - 294 p.
66 Erdelyi A. Same confluent Hypergeometric Functions of two variables // Proc. Roy. Sos Edinburgh. -1940. - V.60.- P. 344-361.
67 Erdelyi A. Same confluent Hypergeometric Functions of two variables // Acta. Math. - 1950. - V.83. - P. 130-163.
68 Kampe de Feriet J. Quelques proprietis des fonctions hypergeometriques dordre superieur a deux variables // Comptes rendus. -1921. - T. CLXXIII. - 489 p.
69 Kampe de Feriet J. Les fonctions hypergeometriques dordre superieur a deux variables // Comptes rendus. - 1921. - T. CLXXIII. - 401 p.
70 Горн В. Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными. –М:ГОНТИ, 1938. - 271 с.
71 Горн В. Дифференциальные уравнения. – М.:ГТТИЛ. 1933. - 480 с.

72 Lucy Joan Seater. Generalized hypergeometric functions. – Cambridge: University Press, 1966. - 272 p.

73 Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multiple Gaussian hypergeometric series, Ellis Harwood Limited. – Chichester, 1985. - 426 p.

74 Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.:Наука, 1968. - 344 с.

75 Horn J. Hypergeometrische Funktionen zweier veranderlichen // Math.Ann., 1931. - P. 381-407.

76 Horn J. Uber die Convergenz der hypergeometrischen Reihen Zweierund drieier Veranderliechen // Math. Ann. -1889. - V.34. - P. 544-600.

77 Сікорский Ю.Г., Терещенко М.І. Про побудову частинних розвязьків лініиних неоднородідних диференціальних рівнять в околі іррегулярноі особливоі тоски // - Київ.УМЖ. - 1971. -Вип.6. - С. 807-811.

78 Маричев О.И., Прудников А.П., Брычков Ю.А. Интегралы и ряды: Дополнительные главы. – М.:Наука, 1986. -514 с.

79 Суетин П.К. Ряды по многочленам Фабера. – М.:Наука, 1984. - 336 с.

80 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ОНТИ, 1939. - 719 с.

81 Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.:ГИТТЛ, 1950. - 435 с.

82 Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. – М.:Мир, 1970. Вып.III., - 344 с.

83 Добровольский В.А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. – Киев:Вища школа, 1974. - 371 с.

84 Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.:Высшая школа,1965.-423 с.

85 Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.:Наука, 1978. - 384 с.

86 Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.:Наука, 1981. - 448 с.

87 Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.:Наука, 1984. - 344 с.

88 Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.:Мир, 1980. - 608 с.

89 Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И.Стиган. – М.:Наука, 1979. - 830 с.

90 Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. –М.:ГИТТЛ, 1953. - 468 с.

91 Латышева К.Я. Нахождение конечных решений для линейных дифференциальных уравнений специального вида // Наукові записки. -1953. - Вип.VI, №7. – 120 р.

92 Тасмамбетов Ж.Н. Многочлены Лежандра двух переменных как решения приведенной системы в частных производных // Материалы десятой Международной – азиатской школы – семинара «Проблемы оптимизации сложных систем». – Иссык-Куль, 2014. – Ч. I. - С. 655-661.

93 Тасмамбетов Ж.Н. Об одной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Украинский математический журнал. - 1992. -Т. 44, №3. - С. 427-430.

94 Berdyshev A.S., Ryskan A. The Neumann and Dirichlet problems for one four-dimensional degenerate elliptic equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 41, 2020 - No. 6, P. 1051–1066.

95 Тасмамбетов Ж.Н., Об иррегулярных особых кривых систем типа Уиттекера // Вестник Сам.гос.тех. университета. - 2013. - №4(11). - С. 25-33.

96 Issenova A., Tasmambetov Zh., Rajabov N. On general properties of degenerate systems of second order partial differential equations of hypergeometric type // European journal of pure and applied mathematics. - 2021. - Vol. 14, №.3. - P. 1024-1043.

97 Талипова М.Ж., Тасмамбетов Ж.Н. О нахождении частных решений одной неоднородной системы в частных производных второго порядка // Вестник АГУ им. К.Жубанова. - 2000. - №2. - С.27-30.

98 Humbert P. The confluent Hypergeometric Functions of two variables // Proc. Roy. Sos. Edin. - 1920. - V.10. - P. 73-96.

99 Янушаускас А.И. Двойные ряды ортогональных многочленов // Литов. мат. сб. -1983. -Т. 23, №2, - С. 213-216.

100 Horn J. Uber das verhalten der Integrale Lineere Differenzen und Differentialgleichungen fur gobe der veranderliechen // Journal fur Math. -1910. - V.138. - P.159-191.

101 Ince E.L. Proc. Roy. Soc.– Edinburgh, 1942. - P. 195-209.

102 Bailey WN. Generalized hypergeometric series // Cambridge Mathematical Tract. Cambridge University Press. -1935. - №32. - P. 121-138.

103 Luke Y.L. Mathematical funktions and their approximations.– London: Academic Rpess Jue., 1975. - 608 p.

104 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. An algorithm for solving a control problem for a differential Equation with a parameter // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. - 2018. – V.5, № 321. - P. 25-32.

105 Тасмамбетов Ж.Н. О применении специальных функций двух переменных к изучению ортогональных многочленов двух переменных // Вестник СамГТУ. - 2015. - Т.19, №4. - С. 710-719.

106 Rabia A., Abdullah Altin, Bayram Çekim. On a two – variable analogue of the Bessel functions // Journal of Inequalities and Special functions. ISSN: 2217-4303, URL: http://WWW. Ilirias. Com. - 2012. - V.3(4). - P.13-23.

107 Зелкин Е.Г. Преобразование дифференциальных уравнений в частных производных с неразделяющимися переменными в систему двух дифференциальных уравнений // Диф. уравнения, Рус. Деп. в ВИНИТИ. 30.10.90, №5552 - В90. -1990. - 15 с.

108 Зелкин Е.Г. Системы двух дифференциальных уравнений второго порядка и дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа // Диф. уравнения. - 1983. - Т.19, №4. - С.700-703

109 Куренский М.К. Дифференциальные уравнения. – Ленинград: Артиллерийской академии РККА им. Дзержинского, 1933. - Ч.I. -315 с.

110 Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. – М.:Мир, 1969. - Вып.I., II. - 423 с.

111 Матвеев Н. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.:Высшая школа, 1967. - 564 с.

112 Пиаджио Г. Интегрирование дифференциальных уравнений. – М.: ЛГТТИ, 1933. - 347 с.

113 Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.:ИЛ, 1953. - Т.I, II. - 386 с.

114 Бернштейн С.Н. Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа // Собрание сочинений. Изд-во АН СССР. -1960. - Т. 3, - С.34-47.

115 Миллер У. Симметрия и разделение переменных. – М.:Мир, 1981. - 342 с.

116 Appel P. Sur les polynomes de deux variables analogues aux polynomes de Jacobi // Archiv der Mathematik und Physik. -1881. - B. 66. - P. 238-245.

117 Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. – М.:Наука, 1976. - 319 с.