Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ӘОЖ 517.925/.926; 004.8.032.26 Қолжазба құқығында

НУГАЕВА ЗАХИРА ТУРЕБАЕВНА

Дифференциалдық теңдеулер мен гибридтік жүйелердің болжанбайтын шешімдері және олардың нейрондық желілердегі қолданыстары

6D060100 – Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
ф.-м.ғ.к.
Тлеубергенова М.А.

Шетелдік ғылыми кеңесші:
ф.-м.ғ.д., профессор
Ахмет М.У.
(Түркия)

Қазақстан Республикасы
Ақтөбе, 2021

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда келесі стандарттарға сілтемелер жасалды:

МС 7.1-2003 – Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар және жобалау ережелері.

МС 7.32-2001 (2006 жылғы өзгерістермен) – Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және рәсімдеу ережелері.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

ИДТ	– импульсті дифференциалдық теңдеулер
БТА	– бөлікті-тұрақты аргумент
ЖБТАДТ	– жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер
ХНЖ	– Хопфилдтік нейрондық желілер
ХҚИНЖ	– Хопфилдтік құрылымды импульсті нейрондық желілер
ү.б.ф.	– үзілісті болжанбайтын функция
I	– p-өлшемді бірлік матрица
$\left[\widehat{a,b}\right]$	– кез келген a, b сандары үшін $a < b$ болғанда $[a, b]$ интервалы, ал $b < a$ болғанда $[b, a]$ интервалы

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Диссертация импульсті дифференциалдық теңдеулер (ИДТ) мен жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулердің (ЖБТАДТ) болжанбайтын шешімдерін және дифференциалдық теңдеулер мен гибридтік теңдеулер арқылы сипатталатын Хопфилдтік нейрондық желілердің (ХНЖ) болжанбайтын тербелістерін зерттеуге арналған.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Диссертацияның өзектілігі жаратылыстану мәселелерін шешуде дифференциалдық теңдеулердің кеңінен қолданылуымен және қазіргі ғылымның барлық саласында нейрондық желілердің пайдаланылуымен байланысты. Диссертация М.У. Ахмет пен М.О. Фен енгізген болжанбайтын функциялардың тұжырымдамаларына негізделген [1-4]. Диссертацияда ИДТ мен ЖБТАДТ-дің болжанбайтын үзілісті және үзіліссіз, орнықты шешімдерінің бар болатындығы дәлелденеді және ХНЖ-дегі болжанбайтын тербелістер зерттеледі.

Диссертацияның негізгі нәтижелерінің жоғары рецензияланған журналдарда жарияланғандығы да зерттеу тақырыбының өзектілігін көрсетеді.

Гибридтік жүйелер – бұл динамикалық жүйелер теориясындағы маңызды қолданбалы сипатқа ие ұғым. Егер қарастырылатын теңдеу дискретті және үзіліссіз динамиканы біріктірсе, онда оны *гибридтік теңдеу* деп атайды. Жүйенің кейбір тәуелді айнымалылары дифференциалдық, ал басқалары дискретті теңдеулерді қанағаттандырса, мұндай жүйені де гибридтік деп атауға болады. ИДТ мен ЖБТАДТ үзіліссіз және дискретті теңдеулерді біріктіреді, демек, оларда гибридтік теңдеулер болып табылады [5]. Гибридтік жүйелердің неғұрлым формальді және жалпы анықтамалары [5-7] әдебиеттерде келтірілген.

Тербелістер табиғатта болатын әртүрлі процестердің ажырамас бөлігі болып табылады [8-15]. Ал дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталған тербелмелі қозғалыстар тек қана теориялық емес, практикалық тұрғыдан да үлкен маңызға ие. Белгіленген математикалық әдістерді қолдану арқылы ғалымдар, дифференциалдық теңдеулердің периодты, квазипериодты және периодты дерлік шешімдері үшін көптеген нәтижелер алды [16-20].

Зерттеудің теориялық бастауы толығымен, А. Пуанкаре [21] және Дж. Биркгоф [22] негізін қалаған динамикалық жүйелер теориясында жатыр. Француз данышпаны хаостық динамиканың негізінде Пуассон бойынша орнықты қозғалыс бар екенін анықтады. Пуассон бойынша орнықты, сондай ақ периодты, квазипериодты және периодты дерлік функциялар арқылы дифференциалдық теңдеулер теориясының негізгі қозғалыстарын сипаттауға болады [23-35].

Қазақстандық ғалымдар да дифференциалдық теңдеулер теориясын зерттеу бағытында елеулі нәтижелер алды. О.А. Жәутіков [36, 37] пен В.Х. Харасахал [38] бастаған бір топ ғалымдар сызықты емес тербелістерді зерттеу бойынша жұмыстар жүргізді. Д.У. Үмбетжанов пен оның шәкірттері дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің периодты және көппериодты шешімдерін жан-жақты зерттеді [39-44]. Қазіргі таңда қазақстандық математиктер тербелістерді талдауға айтарлықтай үлес қосып, зерттеулерді жалғастырып келеді [45-50].

Рекуррентті қозғалыстар мен Пуассон бойынша орнықты нүктелер динамикалық жүйелердің сапалық теориясының негізгі элементтері болып табылады. Пуассон бойынша орнықты қозғалыстардың негіздері Р.Д. Селл [23] еңбегінде баяндалған. А. Пуанкаре Пуассон бойынша орнықты нүктелерді, күн жүйесі денелері динамикасының күрделілігін сипаттаудағы негізгі элемент ретінде қарастырды [21, 51]. Бір ғасырдан астам уақыт өткен соң Пуассон бойынша орнықты нүкте ұғымын дамыта отырып, М.У. Ахмет және М.О. Фен болжанбайтын нүкте ұғымын енгізді [1, 2 б.]. Олар функционалды кеңістіктердегі рекурренттілікті оның шектік түріне жеткізді. Бұл жағдайда Пуассон бойынша орнықты функцияларға *бөліну* қасиеті де қосылды [1, 2 б.; 2, 86 б.]. Рекуррентті және Пуассон бойынша орнықты шешімдердің дифференциалдық теңдеулер теориясында да маңызды рөл атқаратыны белгілі [52-57].

Диссертацияда $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ және $\mathbb{R}$ арқылы сәйкесінше натурал, бүтін және нақты сандар жиыны белгіленген.

(X, d) метрикалық кеңістік және $\pi: \mathbb{R}_+ \times X \to X$, X жиынындағы жартылай ағын болсын, мұндағы $\mathbb{R}_+ -$ теріс емес нақты сандар жиыны. Кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін $\lim_{n\to\infty} \pi(t_n, x) = x$ және $d(\pi(t_n + s_n, x), \pi(t_n, x)) \geq \varepsilon_0$ орындалатындай оң ε_0 саны мен шексіздікке ұмтылатын t_n, s_n тізбектері бар болса, онда $x \in X$ нүктесі және осы нүкте арқылы өтетін траектория *болжанбайтын* деп аталады [2, 86 б.]. t_n және s_n тізбектерін, сәйкесінше *Пуассон тізбегі* және *бөліну тізбегі* деп атайды.

Болжанбайтын траектория міндетті түрде Пуассон бойынша оң орнықты болады, оның бір ерекшелігі – сәйкес квазиминималды жиында хаостың пайда болуында. Болжанбайтын траекторияның бар болуына негізделген хаостың түрі Пуанкаре хаосы деп аталды [1, 3 б.]. Символдық динамиканы, логистикалық бейнелеу мен Хенон бейнелеулерін болжанбайтындық қасиетке ие қозғалыстардың мысалдары ретінде қарастыруға болады. Яғни, болжанбайтындықты дәлелдеу арқылы, бір мезгілде сан түзуінің компактылы жиындарындағы жинақтылық топологиясымен берілген функционалды кеңістіктегі Бебутов динамикасының Пуанкаре хаосын зерттейді. Бұл дифференциалдық теңдеулердің көмегімен хаосты басқару мен сәйкестендіру бағытында жаңа мүмкіндіктер ашты.

Әдетте, белгілі бір процесстің динамикалық қасиеттері функционалдық қасиеттерді тудырады. Мысалы, периодты немесе периодты дерлік қозғалыстар, сәйкесінше периодты немесе периодты дерлік функцияларды анықтауға мүмкіндік береді. Болжанбайтын тербелістер периодты, квазипериодты, периодты дерлік және рекурренті тербелістер секілді дифференциалдық теңдеулер теориясында қарастырылатын қозғалыстардың соңғы буыны және мүлдем жаңа түрі болып табылады. Болжанбайтын функциялар периодты, периодты дерлік және рекурренті функциялар жиынынан ерекшеленетіндігін және Пуассон бойынша орнықты функциялар жиынының бір бөлігі болатынын 0.1-суреттен көруге болады.

Сурет 0.1 – Функциялар жиыны

Болжанбайтын нүктелер мен болжанбайтын функциялар хаос теориясын зерттеуде кеңінен қолданыла бастады. Мысалы, Пуанкаре хаосының кейбір топологиялық қасиеттерін өз зерттеулерінде Миллер [58], Такур және Дас [59, 60] қарастырды. Бұған қоса, олар болжанбайтын нүкте мен Пуанкаре хаосының анықтамаларын ғана емес, Пуассон және бөліну тізбектеріне негізделген тәсілді де қолданды. Болжанбайтын шешімдері бар дифференциалдық теңдеулер [3, 4, 61-64] жұмыстарда қарастырылды. Болжанбайтын қозғалыстардың кездейсоқ процестерде де орын алатындығы жақында дәлелденді [64, 65].

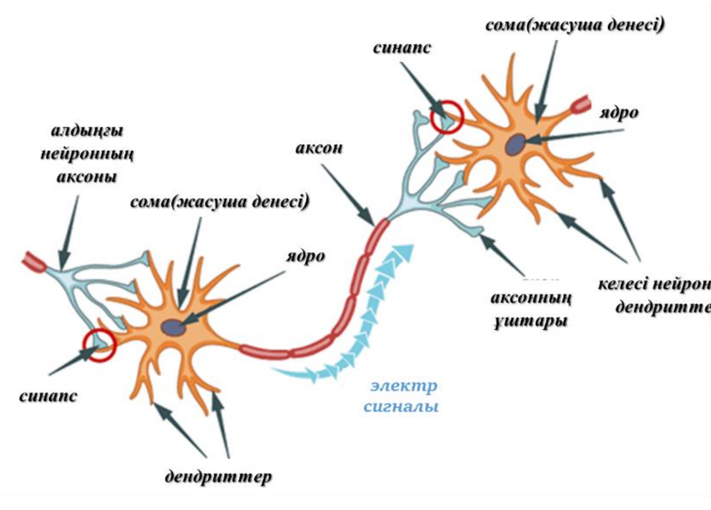
Жәй дифференциалдық теңдеулермен қатар, импульсті дифференциалдық теңдеулер де өте үлкен маңызға ие және соңғы бірнеше онжылдықта теориялық, практикалық тұрғыдан дамып келеді [9, 66–77]. Мұндай дифференциалдық теңдеулер үзіліссіз процестердің қапыл үзілістері болатын табиғи құбылыстардың динамикасын сипаттайды және олар механика, электроника, медицина, нейрондық желілер, байланыс жүйелері мен популяция динамикасы сияқты әртүрлі салаларда маңызды рөл атқарады [78-84].

Дирактың дельта-функцияларымен қоздырылған сызықты, біртекті емес жүйелердің периодты және периодты дерлік шешімдерінің бар болуын А.Халанай мен Д. Векслер зерттеді [85]. Дегенмен, олардың қолданған тәсілі сызықтық емес жүйелер үшін айтарлықтай қиындықтар туғызды. Бұл мәселені шешудің бір тәсілі жүйеге *секіру операторын* пайдалану болды [66, 9 б.; 67, 6б.]. Зерттеуде осы тәсіл қолданылады.

Жалпыланған бөлікті-тұрақты функцияны аргумент ретінде қарастырған дифференциалдық теңдеулердің теориясы алғаш [86-91] жұмыстарда енгізілді және дамыды. Бұл нәтижелер модельдеуден ғана емес, сонымен бірге әдіснамалық жағынан да өте кең таралды, өйткені операторлар теориясы мен функционалдық анализ әдістерін зерттеуге жол ашатын эквивалентті интегралдық теңдеулер ұсынылды. Бұл ұсыныстардан кейін жәй, импульсті, функционалды-дифференциалдық теңдеулерге, сондай-ақ, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге зерттеулер жүргізіліп, салмақты нәтижелер алына бастады [92-98]. Бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер, ЖБТАДТ-дің дербес жағдайы болып табылады және олар [99-102] зерттеулерінен бастау алып, соңғы бірнеше жылда қарқынды дамып келеді.

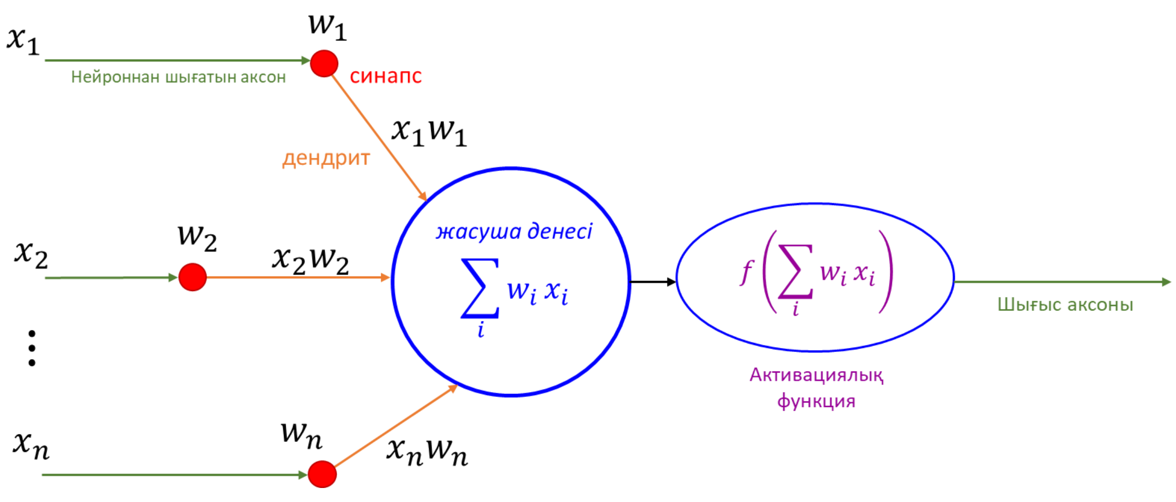
Жұмыстың жаңалығы тербелістер теориясы және нейрондық желілерді модельдеумен байланысты. Мидың белсенділігін зерттеуде жасанды нейрондық желілер ретінде белгілі нейрондық желілер қолданылады. Нейрондық желілердің математикалық түрде рекуррентті және дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталатын көптеген модельдері бар. Мысалы, Хопфилд нейрондық желілері [103], шунттаушы тежегіші бар жасушалық нейрондық желілер [104], Коэн-Гроссберг нейрондық желілері [105], инерциялық нейрондық желілер [106] зерттелуде. Нейрондық желілер бейімделгіш үлгіні тану, көру, суретті өңдеу, ассоциативті жады, рентген және компьютерлік томография кескіндерін жақсарту үшін қолданылады [107-112].

Нейрон сфера тәріздес денеге ие, оны *сома* (*жасуша денесі*) деп атайды. Сомада өндірілген сигналдар *аксон* немесе *жүйке талшықтары* деп аталатын жасуша денесіндегі таратқыш арқылы басқа нейрондарға таралады. Бұталы ағаш сияқты жасуша денесіндегі таратқыштың тағы бір түрі - басқа нейрондар тудыратын кіріс сигналдарын қабылдауға жауап беретін *дендриттер*. Аксон бірнеше тармақтарға бөлінеді, соңғы тармағында аксон мөлшері ұлғаяды және терминалды түймелерді құрайды. Бұл түймелер *синапстар* деп аталатын арнайы құрылымдарға орналастырылған. Синапстар – бұл сигналдарды бір нейроннан екіншісіне жіберетін тармақтар [113]. Биологиялық нейрондық желінің құрлымы 0.2-суретте көрсетілген.



Сурет 0.2 – Биологиялық нейрондық желі құрылымы [114]

Әрбір жасанды нейрон адам миының жүйке жасушаларының құрылымына ұқсас сипатталады. 0.3-суретте жасанды нейрондық желінің құрылымы көрсетілген. Жасанды нейрондық желі моделінің n кірісі болады, оларды сәйкесінше $x_1, x_2, \dots, x_n$ арқылы белгілейік. Бұл кірістердің әрқайсысының нейронмен байланыстыратын өз салмақтары болады, бұл салмақтарды сәйкесінше $w_1, w_2, \dots, w_n$ деп белгілейік. Биологиялық нейрондық желідегі секілді, синапстар нейрондар арасындағы байланысты жүзеге асырады және өзінің салмағымен сиппаталады. Яғни, жасанды нейрон модельіндегі салмақ биологиялық нейрондағы синаптикалық байланыстарды береді. Синапстар кіріс сигналдарын өзінің салмақтық коэффициентіне көбейтеді, $x_i \cdot w_i$ өлшенген барлық сигналдар өлшенген қосындыға біріктіретін сумматорға жіберіледі. Бұл қосындыны жай ғана шығысқа жіберудің мәні жоқ, өйткені нейрон шығыс сигналын қайткенде де өңдеуі және іріктеуі қажет. *Активациялық функция* осы мақсаттар үшін қолданылады, яғни функция өлшенген қосындыны нейронның шығысы болатын белгілі бір санға түрлендіреді.



Сурет 0.3 – Жасанды нейрондық желі құрылымы

Нейрондық тербелістер нейробиология, психофизика, биофизика, когнитивті психология және компьютерлік модельдеуді қамтитын пәнаралық зерттеулердің өзегіне айналды [115-120]. Сондықтан көптеген зерттеушілер енгізу/шығару механизмдерін ескере отырып, нейрондық желілердің периодты, периодты дерлік тербелістерін және орнықтылық мәселелерін зерттеп келеді [121-129].

Диссертацияда қарастырылған нейрондық желілердің модельдері хаостық сигналдардың таралуын зерттеуге мүмкіндік беретін болжанбайтын қозуларға негізделген. Яғни, болжанбайтын кіріс сигналдары хаостық сигналдарды тарататын нейрондардың қозу толқынын тудырады.

Зерттеудің мақсаты М. Ахмет пен М.О. Фен енгізген әдіс пен теориялық негіздерді қолдану арқылы болжанбайтын қоздыртқылы сызықтық және квазисызықтық импульсті дифференциалдық теңдеулерді, квазисызықтық жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулерді зерттеу және дифференциалдық теңдеулер мен гибридтік жүйелерді ХНЖ-нің болжанбайтын үзілісті және үзіліссіз тербелістерін зерттеу үшін пайдалану.

Зерттеу міндеттері:

а) сызықтық және квазисызықтық ИДТ-дің орнықты, үзілісті болжанбайтын шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттарын алу;

ә) квазисызықтық ЖБТАДТ-дің экспоненциалды орнықты болжанбайтын шешімдерінің бар және жалғыз болуын дәлелдеу;

б) ХНЖ-дегі асимптотикалық орнықты, күшті болжанбайтын үзіліссіз тербелістерінің бар болуының жеткілікті шарттарын орнату;

в) Хопфилдтік құрылымды импульсті нейрондық желілердегі (ХҚИНЖ) үзілісті болжанбайтын тербелістердің асимптотикалық орнықтылығын зерттеу;

г) Жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті ХНЖ-дегі экспоненциалды орнықты, болжанбайтын үзіліссіз тербелістерінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттарын анықтау;

ғ) теориялық нәтижелердің дұрыстығын растайтын сандық мысалдар құрып, есептеулер жүргізу және блок-схемалар құру.

Зерттеу нысаны: ИДТ, ЖБТАДТ және ХНЖ модельдерінің болжанбайтын үзілісті және үзіліссіз тербелістері.

Зерттеудің пәні: Асимптотикалық орнықты ИДТ, ЖБТАДТ мен ХНЖ-нің болжанбайтын үзілісті және үзіліссіз шешімдерінің бар және жалғыз болуы.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы: Болжанбайтын қоздыртқылы импульсті дифференциалдық теңдеулер мен жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер алғаш рет енгізіліп зерттелген және дифференциалдық теңдеулер мен гибридтік жүйелер арқылы сипатталған ХНЖ-нің модельдері алғаш рет қарастырылған.

Жұмыстың жаңалығы:

а) сызықтық және квазисызықтық ИДТ-дің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын шешімдерінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары орнатылды;

ә) квазисызықтық ЖБТАДТ-дің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын шешімдерінің бар және жалғыз болуы дәлелденді;

б) ХНЖ моделінің асимптотикалық орнықты, күшті болжанбайтын үзіліссіз тербелістерінің бар болуының жеткілікті шарттары көрсетілді;

в) ХҚИНЖ моделінің асимптотикалық орнықты, болжанбайтын үзілісті тербелістерінің бар болуы зерттелді;

г) жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті ХНЖ моделінің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын үзіліссіз тербелістерінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары анықталды;

ғ) теориялық нәтижелердің жүзеге асырылуын растайтын сандық мысалдар, графиктер мен блок-схемалар келтірілді.

Қорғауға ұсынылатын негізгі нәтижелер:

- үзілісті болжанбайтын функция ұғымы және үзілісті болжанбайтын функцияларды құру тәсілдері;
- сызықтық ИДТ жүйесінің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары;
- квазисызықтық ИДТ жүйесінің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары;
- квазисызықтық ЖБТАДТ-дің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын шешімінің бар және жалғыз болуының шарттары;

- ХНЖ-нің асимптотикалық орнықты, күшті болжанбайтын тербелістерінің бар болуының жеткілікті шарттары;
- ХҚИНЖ-дің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын тербелістерінің бар болуының жеткілікті шарттары;
- жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті ХНЖ-нің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын тербелістерінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары.

Алынған нәтижелердің нақтылығы және негізделуі. Диссертацияда функционалдық анализ, алгебра және дифференциалдық теңдеулер теориясының әдістері мен нәтижелері кеңінен қолданылады. Зерттеу жұмысының нәтижелерінің нақтылығы мен негізделуін алынған нәтижелерінің жоғары рецензияланған журналдарда жарияланғандығымен түйіндеуге болады.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Зерттеудің ғылыми мәні мынада: алынған нәтижелер функционалды-дифференциалдық теңдеулермен, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын болжанбайтын тербелістерді зерттеуге негіз болады және оларды медицина, биология, криптография сынды басқа да көптеген салаларда қолдануға мүмкіндік береді.

Зерттеудің басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертация Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулер бойынша гранттық зерттеу жобалары аясында орындалды:

1) «Дифференциалдық теңдеулердің болжанбайтын шешімдері» (No. AP08955400, 2020-2021жж);
2) «Болжанбайтын тербелістері бар инерциялық нейрондық желілер» (No. AP08856170, 2020-2022 жж);
3) «Болжанбайтын тербелістер теориясы» (No. AP09258737, 2021-2023).

Автордың жеке үлесі. Диссертацияда келтірілген барлық нәтижелер автордың жеке өзі немесе оның тікелей қатысуымен алынды. Қосалқы авторлар мен ғылыми кеңесшілер мәселенің қойылымына және алынған нәтижелерді талқылауға ғана үлестерін қосты.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі семинарлар мен конференцияларда баяндалды және талқыланды:
- ҚР БҒМ ҒК Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты «Информатика және қолданбалы математика» атты V– Халықаралық ғылыми конференция (Алматы, Қазақстан, 29 қыркүйек – 01 қазан, 2020ж.);
- Инженериядағы қолданбалы математика және жасанды интеллект бойынша халықаралық конференция «International Conference on Artificial Intelligence and Applied Mathematics in Engineering (ICAIAME 2020)» (Анталия, Түркия, 9 – 10 қазан, 202ж.);
- Дәстүрлі халықаралық сәуір ғылыми конференциясы. Математика және математикалық модельдеу институты (Алматы, Қазақстан, 5-8 сәуір, 2021ж.);

- «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті математика кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Ж. Сартабанов).

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша негізгі ғылыми тұжырымдар 7 ғылыми жұмыста жарияланды, оның 3-і Scopus мәліметтер қорында индекстелген журналдарда [130-132], 1 жұмыс БҒСҚК ұсынған рецензияланатын отандық басылымда [133], 3 жұмыс Қазақстанда және алыс шет елдерде өткізілген Халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында, оның ішінде 1 жұмыс Scopus деректер базасында индекстелетін шетелдік конференция материалында жарияланды [134-136].

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш тараудан, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Формулалар, мысалдар, теоремалар мен анықтамаларды нөмірлеу екі таңбалы: бірінші цифр бөлім нөмірін, екіншісі - бөлім ішіндегі формуланың, мысалдың, теореманың, анықтаманың тиісті нөмірін білдіреді. Жұмыстың көлемі – 124 бет. Әдебиеттер саны – 146.

Жұмыстың қысқаша мазмұны. Бірінші бөлім сызықтық және квазисызықтық импульсті жүйелердің болжанбайтын шешімдерін зерттеуге арналған. 1.1-бөлімшеде болжанбайтын тізбек және үзілісті болжанбайтын функциялардың негізгі анықтамалары мен қасиеттері келтірілген.

Жұмыста секіріс сәттері болжанбайтын тізбек құратын импульсті жүйелер қарастырылады. Сол себепті, алдымен болжанбайтын тізбек анықтамасы келтіріледі.

1.1-ші және 1.2-ші бөлімшелерде, векторлар үшін евклидтік норма және квадрат матрицалар үшін спектрлік норма қолданылды [137].

0.1-анықтама [4, 661 б.]. Шенелген, $\kappa_i = (\kappa_i^1, \kappa_i^2, \dots, \kappa_i^p), i \in \mathbb{Z}$, тізбегі берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max\limits_{i_1<i<i_2} \|\kappa_{i+l_n} - \kappa_i\| \to 0, n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\|\kappa_{m_n+l_n} - \kappa_{m_n}\| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі

орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$ саны мен $l_n \to \infty, m_n \to \infty$, $n \to \infty$, тізбектері табылатын болса, онда κ_i тізбегі *болжанбайтын* деп аталады.

Импульсті жүйені зерттеудің күрделілігі – әртүрлі шешімдердің үзіліс сәттері сәйкес келмеуі мүмкін. Осы себепті, импульсті жүйелердің болжанбайтын шешімдерін зерттеу кезінде B-*топология* ұғымы қолданылады [66, 63 б.].

Жұмыста интервал ұғымы жалпы жағдайда қарастырылған. Яғни, шеткі нүктелерін қамтуына қарамастан (ашық, жабық және жартылай ашық) аралықтардың барлығы интервал деп саналады.

Зерттеу барысында кез келген $a, b \in \mathbb{R}$ үшін $a < b$ болғанда $[a, b]$ интервалын, ал $b < a$ болғанда $[b, a]$ интервалын білдіретін $[\widehat{a, b}]$ белгілеуі қолданылады.

Сан түзуінде анықталған және үзіліс нүктелері саналымды жиындарды құрайтын, бұған қоса үзіліс нүктелерінде біржақты шектері бар барлық

p-өлшемді бөлікті үзіліссіз функциялар жиыны $\mathcal{F}$ арқылы белгіленген. Егер функциялар әртүрлі болса, онда үзіліс нүктелерінің жиындары бірдей болуы міндетті емес және бұл жиындардың шоғырлану (шектік) нүктелері болмайды, әрі екі жағынан шенелмеген.

ϕ_1 және ϕ_2 функциялары $\mathcal{F}$ жиынынан алынған бөлікті үзіліссіз функциялар болсын. Шенелген $J \subseteq \mathbb{R}$ интервалына тиесілі функциялардың үзіліс нүктелері сәйкесінше $\theta_i^{\phi_1}$ және $\theta_i^{\phi_2}$, $i = 1, \dots, k$ деп белгіленген. Егер, әрбір $i = 1, \dots, k$ үшін $\left|\theta_i^{\phi_1} - \theta_i^{\phi_2}\right| < \varepsilon$ шарты және $\left[\widehat{\theta_i^{\phi_1}, \theta_i^{\phi_2}}\right]$ кесіндісінен басқа аралықта жататын барлық $t \in J$ үшін $\| \phi_1(\mathrm{t}) - \phi_2(t)\| < \varepsilon$ шарты орындалса, онда бұл функциялар J интервалында *ε-эквивалентті* деп аталады. Егер ϕ_1 және ϕ_2 функциялары J интервалында ε-эквивалентті болса, онда бұл функциялар бір-бірінің *ε-маңайында* орналасқан деп аталады. Осындай маңайлардың көмегімен анықталатын топологияны *B-топология* деп атайды [66, 63 б.].

Диссертацияда қарастырылатын бөлікті үзіліссіз функциялар бірінші текті үзілістерге ие және үзіліс нүктелерінде сол жақты үзіліссіз болады деп ұйғарылады.

θ_i, $i \in Z$ тізбегі, $|i| \to \infty$, $|\theta_i| \to \infty$ және қандай да бір $\underline{\theta}, \bar{\theta}$ оң сандары үшін $\underline{\theta} \leq \theta_{i+1} - \theta_i \leq \bar{\theta}$ теңсіздігі орындалатындай нақты сандар тізбегі болсын.

0.2-анықтама. Үзіліс нүктелері θ_i, $i \in \mathbb{Z}$, болатын, шенелген және бөлікті үзіліссіз $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ функциясы берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max\limits_{i_1 < i < i_2} \left|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i\right| \to 0, n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\left|\theta_{m_n+l_n} - t_n - \theta_{m_n}\right| \geq \varepsilon_0$;

(c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma(\varepsilon) > 0\ t_1, t_2 \in (\theta_i, \theta_{i+1}]$, $i \in \mathbb{Z} : |t_1 - t_2| < \sigma(\varepsilon) \Rightarrow \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| < \varepsilon$;

(d) әрбір шенелген интервалдағы B-топологияда $\varphi(t + t_n) \to \varphi(t)$, $n \to \infty$;

(e) әрбір натурал n және $\varphi(t)$ мен $\varphi(t + t_n)$ фунцияларының үзіліс нүктелерін қамтымайтын $[s_n - \delta,\ s_n + \delta] \subseteq \left[\widehat{\theta_{m_n},\ \theta_{m_n+l_n}} - t_n\right]$ интервалынан алынған кез келген t үшін $\|\varphi(t + t_n) - \varphi(t)\| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі

орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$ сандары және нақты сандардың $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$, $n \to \infty$, тізбектері мен бүтін сандардың $l_n \to \infty$, $m_n \to \infty$, $n \to \infty$, тізбектері табылатын болса, онда $\varphi(t)$ функциясы *үзілісті болжанбайтын (ү.б.ф.)* деп аталады.

0.2-анықтамадағы (c) қасиетін φ функциясының *шартты бірқалыпты үзіліссіздігі*, (d) қасиетін φ функциясының *Пуассон бойынша орнықтылығы* және (e) қасиетін φ функциясының *бөліну қасиеті* деп атайды. Бұған қоса, t_n және s_n тізбектері φ функциясының сәйкесінше Пуассон және бөліну тізбектері болып табылады.

0.3-анықтама. Үзіліс нүктелері θ_i, $i \in \mathbb{Z}$, болатын, шенелген $\varphi(t)$ функциясы ү.б.ф болсын және шенелген $\Gamma_i \in \mathbb{R}^p$, $i \in Z$ тізбегі берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max\limits_{i_1 < i < i_2} \left|\Gamma_{i+l_n} - \Gamma_i\right| \to 0, n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\left|\Gamma_{m_n+l_n} - \Gamma_{m_n}\right| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$ сандары және бүтін сандардың $l_n \to \infty, m_n \to \infty, n \to \infty$, тізбектері табылатын болса, онда $(\varphi(t),\ \Gamma_i)$ жұбы *болжанбайтын* деп аталады.

0.2-анықтаманы 0.3-анықтаманың салдары ретінде алуға болмайды, өйткені 0.3-анықтамадағы $(\varphi(t),\ \Gamma_i)$ жұбынан Γ_i мүшелерін жою арқылы 0.2-анықтама алынбайды, ал нөлдерден құралған тізбек болжанбайтын тізбек болмайды. Сол себепті, зерттеуде екі анықтама да қажет.

Зерттеудің мақсатына сәйкес импульсті жүйенің үзіліс нүктелері төмендегідей түрде алынған:

$$\theta_i = iT + \gamma_i, i \in \mathbb{Z}, \tag{0.1}$$

мұндағы $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$ – 0.1-анықтама мағынасындағы болжанбайтын тізбек, ал $T \geq 4$ саны, $\sup_{i \in Z}|\gamma_i| < T/h$, $h \geq 3$ шартын қанағаттандыратын сан.

Сонымен қатар, 1.1-бөлімшеде алынған теориялық нәтижелердің қолданбалылығын көрсететін үзілісті болжанбайтын функцияның мысалы құрылған. Үзілісті болжанбайтын функцияны құруда логистикалық бейнелеудің болжанбайтын траекториясы [2, 88 б.] мен кездейсоқ анықталған болжанбайтын функция [65, 32 б.] пайдаланылады.

1.2-бөлімшеде сызықтық импульсті жүйелердің үзілісті болжанбайтын шешімдерінің бар болуы зерттелген.

Импульсті сызықтық жүйені қарастырылады

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + f(t), \qquad t \neq \theta_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= B\,x(\theta_i), \end{aligned} \tag{0.2}$$

мұндағы: $t \in \mathbb{R}$; $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – коммутативті матрицалар; θ_i, $i \in Z$ – (0.1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ – 0.2-анықтама мағынасындағы ү.б.ф. $\det(I + B) \neq 0$.

(0.2) жүйемен байланысқан

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \qquad t \neq \theta_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= B\,x(\theta_i). \end{aligned} \tag{0.3}$$

импульсті сызықтық жүйенің Коши матрицасы $X(t,s)$ деп белгіленген.

A және B коммутативті матрицалар болғандықтан $t > s$ үшін

$$X(t,s) = e^{A(t-s)}(I + B)^{i([s,t))}, \tag{0.4}$$

мұндағы $i([s,t))$ $-$ $[s,t)$ аралығына тиісті үзіліс нүктелерінің саны және $X(s,s) = I$ [66, 36 б.; 67, 103 б.].

$A+\frac{1}{T}Ln(I+B)$ матрицасының меншікті мәндерін $\lambda_j, j=1,2,\ldots,p$ арқылы белгілеп, келесі шарт орындалады деп ұйғарылады:
$(A1)$ $\max_j \mathcal{R}e\lambda_j=\lambda<0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ p,$ мұндағы $\mathcal{R}e\lambda_j$ – меншікті мәндерінің нақты бөліктері.

(0.2) жүйенің үзілісті болжанбайтын шешімі туралы мынадай теорема дәлелденген.

0.1-теорема. *Егер (A1) шарты орындалса және $f(t)$ функциясы 0.2-анықтама мағынасындағы ү.б.ф. болса, онда (0.2) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

1.2-бөлімшенің тағы бір негізгі объектісі импульстері болжанбайтын сызықтық жүйе, яғни

$$\begin{aligned} &x'(t)=Ax(t)+f(t),\ t\neq\theta_i,\\ &\Delta x|_{t=\theta_i}=B\,x(\theta_i)+I_i, \end{aligned} \tag{0.5}$$

мұндағы $t\in\mathbb{R};\ A\in\mathbb{R}^{p\times p}, B\in\mathbb{R}^{p\times p}$ – коммутативті матрицалар; $\theta_i\ ,\ i\in Z$ – (0.1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; $(f(t),I_i)$ – 0.3-анықтама мағынасындағы болжанбайтын жұп. $\det(I+B)\neq 0$.

Импульстері болжанбайтын сызықтық жүйе (0.2)-жүйенің дербес жағдайы бола алмайды. Өйткені, импульсті бөлікке I_i қозуларын енгізу үшін оларды тек қана болжанбайтын деп есептеу жеткіліксіз, сондай-ақ қозулары жоқ жүйе үшін алынған Пуассон және бөліну тізбектері де осы жаңа мүшелермен келісілген болуы керек.

Берілген жүйенің шешімін зерттеуде төмендегі тұжырым қолданылған.

0.2-теорема. *Егер (A1) шарты орындалса және $(f(t),I_i)$ жұбы* 0.3-*анықтама мағынасында болжанбайтын жұп болса, онда (0.5) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

1.3 бөлімше квазисызықтық импульсті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің үзілісті болжанбайтын, асиптотикалық орнықты шешімдерін зерттеуге арналған. Бұл бөлімшеде, 0.2-анықтаманы бірнеше тәуелсіз айнымалысы бар функциялар класына дейін кеңейтіп, уақыт айнымалысы бойынша болжанбайтындық ұғымы енгізілген.

Зерттеудің қалған бөлігінде $u=\left(u_1,\ldots,u_p\right)$ векторы үшін $\|u\|_1=\max_{1\le i\le p}|u_i|$ нормасы, ал $A=\left(a_{ij}\right),\ i,j=1,\ldots,p$ квадрат матрицасы үшін $\|A\|=\max_{1\le i\le p}\sum_{j=1}^{p}\left|a_{ij}\right|$ нормасы қолданылады, мұндағы $|\cdot|$ – абсолют шама белгісі.

1.1 бөлімшеде айтылған, p-өлшемді бөлікті үзіліссіз функциялардың $\mathcal{F}$ жиынын және анықталу облысы $\mathbb{R}\times\mathbb{S},\ \mathbb{S}\subset\mathbb{R}^p$ болатын p-өлшемді $g(t,x)$ вектор функциясын қарастырамыз. Егер әрбір бекітілген $x\in\mathbb{S}$ үшін $g(t,x)\in\mathcal{F}$ болса және оның үзіліс нүктелері мен x айнымалысының үзіліс нүктелері ортақ болса, онда $g(t,x)$ векторлық функциясы $\mathcal{F}(\mathbb{S})$ жиынынан алынған деп айтылады. Егер әрбір бекітілген $x \in \mathbb{S}$ үшін $\mathcal{F}(\mathbb{S})$ жиынынан алынған $g(t,x)$ мен $h(t,x)$ функциялары $\mathcal{F}$ жиынындағыдай ε-эквивалентті болса, онда олар $J \subseteq \mathbb{R}$ интервалында ε-эквивалентті деп аталады.

0.4-анықтама. Үзіліс нүктелері $\theta_i, i \in \mathbb{Z}$, болатын, t айнымалысы бойынша бөлікті үзіліссіз $f(t,x) \in \mathcal{F}(\mathbb{S})$, $f = (f_1, \ \dots, f_p)$ функциясы берілсін. Егер келесі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max\limits_{i_1<i<i_2} \left|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i\right| \to 0, n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\left|\theta_{m_n+l_n} - t_n - \theta_{m_n}\right| \geq \varepsilon_0$;

(c) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma(\varepsilon) > 0 \ \ t_1, t_2 \in (\theta_i, \theta_{i+1}], \ i \in \mathbb{Z} : |t_1 - t_2| < \sigma(\varepsilon)$ $\Rightarrow \sup\limits_{\mathbb{S}} \|f(t_1,x) - f(t_2,x)\| < \varepsilon$;

(d) әрбір шенелген интервалда $\sup\limits_{\mathbb{S}} \|f(t+t_n,x) - f(t,x)\| \to 0, n \to \infty$;

(e) әрбір натурал n үшін $f(t,x)$ пен $f(t+t_n,x)$ фунцияларының үзіліс нүктелерін қамтымайтын $[s_n - \delta, \ s_n + \delta] \subseteq \left[\theta_{m_n} \widehat{,} \ \theta_{m_n+l_n} - t_n\right]$ интервалынан алынған кез келген t үшін $\inf\limits_{\mathbb{S}} \|f(t+t_n,x) - f(t,x)\| \geq \varepsilon_0$

теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0, \ \delta > 0$ сандары және нақты сандардың $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty, \ n \to \infty$ тізбектері мен бүтін сандардың $l_n \to \infty, \ m_n \to \infty, \ n \to \infty$ тізбектері табылатын болса, онда $f(t,x)$ функциясы t *бойынша үзілісті болжанбайтын функция* деп аталады.

0.5-анықтама. Үзіліс нүктелері $\theta_i, i \in \mathbb{Z}$, болатын бөлікті үзіліссіз $f(t,x)$ функциясы t бойынша үзілісті болжанбайтын функция болсын және шенелген p-өлшемді $G_i(x) \in \mathbb{S}, \ i \in \mathbb{Z}$ векторы берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max\limits_{i_1<i<i_2} \sup\limits_{\mathbb{S}} \left\|G_{i+l_n}(x) - G_i(x)\right\| \to 0, n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\inf\limits_{\mathbb{S}} \left\|G_{m_n+l_n}(x) - G_{m_n}(x)\right\| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі

орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$ сандары және бүтін сандардың $l_n \to \infty, m_n \to \infty, n \to \infty$, тізбектері табылатын болса, онда $(f(t,x), G_i(x))$ жұбы *болжанбайтын жұп* деп аталады.

Импульсті квазисызықтық жүйе қарастыралады,

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + f(t,x), \qquad t = \theta_i, \\ \Delta x|_{t \neq \theta_i} &= B\, x(\theta_i), \end{aligned} \tag{0.6}$$

мұндағы $t \in \mathbb{R}$; $A \in \mathbb{R}^{p \times p}, B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ – коммутативті матрицалар; $\theta_i, \ i \in Z$ – (0.1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; $f(t,x)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}^p$ – 0.4-анықтама мағынасындағы болжанбайтын функция. $\det(I+B) \neq 0$.

(0.6) жүйені зерттеу үшін оған сәйкес (0.3) түріндегі біртекті импульсті жүйенінің фундаменталды матрицасын (1.2 бөлімше) қолданамыз: $X(t,s) = e^{A(t-s)}(I+B)^{i([s,t))}$, $\mathrm{t} > \mathrm{s}$. Бұған қоса, $A + \frac{1}{T} Ln(I+B)$ матрицасының

меншікті мәндерінің накты бөліктері $\mathcal{R}e\lambda_j$ теріс болсын деп ұйғарамыз, яғни
$(A1)$ $\max_j \mathcal{R}e\lambda_j = \lambda < 0, j = 1, 2, \dots, p.$

Олай болса, $\|X(t,s)\| \le Ke^{-\alpha(t-s)}$, $t \ge s$ шарты орындалатындай $K \ge 1$ және α, $0 < \alpha < -\lambda$ сандары табылады.

Үзіліс нүктелері (0.6)-жүйенің үзіліс нүктелерімен бірдей барлық $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, бөлікті үзіліссіз функцияларының $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ ішкі кеңістігін қарастыралық. Ондағы норма $\|\psi\|_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\psi(t)\|$ арқылы анықталады.

Кеңістіктің элементері келесі қасиеттерге бағынатын болсын:
$(\mathcal{D}1)$ барлық $\psi(t) \in \mathcal{D}$ үшін $\|\psi(t)\|_1 < H$ орындалатындай оң H саны табылады;
$(\mathcal{D}2)$ әрбір $\psi(t) \in \mathcal{D}$ үшін әрбір шенелген интервалдағы B-топологияда $\psi(t + t_n)$ функциялық тізбегі $\psi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады, мұндағы $t_n \to \infty$, $n \to \infty$, (0.6)-жүйедегі $f(t,x)$ функция үшін алынған Пуассон тізбегімен бірдей.

Төмендегі шарттар орындалсын деп ұйғарылады:
$(A2)$ барлық $t \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathbb{S}$ үшін $||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \le L_f||x_1 - x_2||$ орындалатындай оң L_f саны табылады;
$(A3)$ барлық $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ үшін $\|f(t,x)\| \le M_f$ орындалатындай оң M_f саны табылады;
$(A4)$ $\frac{KM_f}{H} < \alpha$;
$(A5)$ $KL_f < \alpha$.

0.3-теорема. *Егер (A1)-(A5) шарттары орындалса, онда (0.6) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Импульстері болжанбайтын квазисызықтық ИДТ жүйе қарастырылады,

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + f(t,x), \qquad t \ne \theta_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= B\,x(\theta_i) + G_i(x), \end{aligned} \tag{0.7}$$

мұндағы $t \in \mathbb{R}$; $A \in \mathbb{R}^{p\times p}, B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – коммутативті матрицалар; θ_i , $i \in Z$ – (0.1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; $(f(t,x),\ G_i(x))$ – 0.5-анықтама мағынасындағы болжанбайтын жұп, $\det(I + B) \ne 0$.

(0.6) жүйе импульстері болжанбайтын (0.7) жүйенің дербес жағдайы болмайтынын атап өтелік. Өйткені, импульсті бөлікке $G_i(x)$ қозуларын енгізу үшін оларды тек қана болжанбайтын деп есептеу жеткіліксіз, сондай-ақ қозулары жоқ жүйе үшін алынған Пуассон және бөліну тізбектері де осы жаңа мүшелермен келісілген болуы керек.

Келесі шарттар орындалсын деп ұйғарылады:
$(A6)$ барлық $i \in \mathbb{Z}, x_1, x_2 \in \mathbb{S}$ үшін $||G_i(x_1) - G_i(x_2)|| \le L_G||x_1 - x_2||$ орындалатындай оң L_G тұрақтысы бар болады;
$(A7)$ $\sup_{x\in\mathbb{S}} \|G(x)\| \le M_G$ орындалатындай оң M_G саны табылады;

$(A8)\ \dfrac{KM_f}{\alpha} + \dfrac{KM_G}{1 - e^{-\alpha\underline{\theta}}} < H;$

$(A9)\ \dfrac{KL_f}{\alpha} + \dfrac{KL_G}{1 - e^{-\alpha\underline{\theta}}} < 1;$

$(A10)\ KL_f + \dfrac{1}{\underline{\theta}}\ln(1 + KL_G) < 1.$

0.4-теорема. *Егер (A1)-(A3), (A6)-(A10) шарттары орындалса және $(f(t,x),\ G_i(x))$ жұбы 0.5-анықтама мағынасындағы болжанбайтын жұп болса, онда (0.7) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Бөлімнің теориялық нәтижелері мысалдар мен графикалық иллюстрациялар арқылы расталған.

Екінші бөлімде жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулердің болжанбайтын шешімдері зерттелді.

Математикалық тұрғыдан алғанда, жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулердің шешімі туындысы үзілісті болатын үзіліссіз функция және ол да импульсті теңдеулер сияқты гибридтік теңдеудің бір түрі болып табылады [5, 11 б.].

0.6-анықтама [4, 658 б.]. Бірқалыпты үзіліссіз, шенелген $\vartheta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ функциясы берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір шенелген интервалда $\vartheta(t + t_n) \to \vartheta(t),\ n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n мен $t \in [s_n - \delta,\ s_n + \delta]$ үшін $\|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(t)\| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0,\ \delta > 0$ сандары мен нақты сандардың $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty,\ n \to \infty$, тізбектері табылатын болса, онда $\vartheta(t)$ *болжанбайтын функция* деп аталады.

Барлық $|\theta_i| \to \infty,\ |i| \to \infty,\ i \in \mathbb{Z}$ үшін $\theta_i < \theta_{i+1}$, орындалатындай нақты мәнді $\theta_i, i \in \mathbb{Z}$ тізбегі бекітіледі.

Келесі түрдегі квазисызықтық жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті жүйе қарастыралады

$$x'(t) = Ax(t) + f(x(t)) + g(x(\gamma(t))) + h(t), \tag{0.8}$$

мұндағы $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^p,\ p \in \mathbb{N};\ A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – тұрақты матрица; $\gamma(t) = \xi_i$, $t \in [\theta_i, \theta_{i+1}), i \in \mathbb{Z}$ – аргумент фунция; $\theta_i \leq \xi_i \leq \theta_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$ – нақты сандардың тізбегі. $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^p$ – шенелген $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^p :\ \|x\| < \widetilde{H}\}, \widetilde{H} > 0$ облысында үзіліссіз функциялар; $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ – бірқалыпты үзіліссіз және шенелген функция.

Сонымен бірге, A матрицасының барлық меншікті мәндерінің нақты бөлігі теріс болсын және $\|A\| = \bar{\lambda}$ теңдігі орындалсын деп келісеміз. Олай болса, барлық t үшін $\|e^{At}\| \leq \sigma e^{-\lambda t}$ шарты орындалатындай нақты $\sigma \geq 1$ мен $\lambda > 0$ сандары табылады.

Төмендегі шарттар орындалсын деп ұйғарылады:

$(B1)$ барлық $u, v \in \mathbb{D}$ үшін $||f(u) - f(v)|| \leq L_f||u - v||$ және $||g(u) - g(v)|| \leq L_g||u - v||$, мұндағы L_f, L_g − Липшиц тұрақтылары;
$(B2)$ $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|h(t)\| \leq m_h$ орындалатындай оң m_h саны табылады;
$(B3)$ $\sup\limits_{\|x\|<\widetilde{H}}\|f(x)\| \leq m_f$ және $\sup\limits_{\|x\|<\widetilde{H}}\|g(x)\| \leq m_g$ орындалатындай оң m_f, m_g сандары табылады;
$(B4)$ $\frac{\sigma}{\lambda}\left(m_f + m_g + m_h\right) < \widetilde{H}$;
$(B5)$ $\frac{\sigma}{\lambda}\left(L_f + L_g\right) < 1$;
$(B6)$ барлық $i \in \mathbb{Z}$ үшін $\theta_{i+1} - \theta_i \leq \theta$ теңсіздігі орындалатындай оң θ саны табылады;
$(B7)$ $-\lambda + \sigma\left(L_f + \frac{L_g}{1-\theta[(\bar{\lambda}+L_f)(1+L_g\theta)e^{(\bar{\lambda}+L_f)\theta}+L_g]}\right) < 0$;
$(B8)$ $\theta[(\bar{\lambda} + L_f)(1 + L_g\theta)e^{(\bar{\lambda}+L_f)\theta} + L_g] < 1$;
$(B9)$ әрбір шенелген интервалда $\theta_{i-\eta_n} + t_n - \theta_i \to 0,\ \ n \to \infty$ мен $\xi_{i-\eta_n} + t_n - \xi_i \to 0,\ n \to \infty$ шарттары орындалатын $\eta_n \to \infty,\ n \to \infty$ тізбегі табылады, мұндағы t_n 0.6- анықтамадағы тізбек.

0.5-теорема. *Егер (B1)-(B9) шарттары орындалса және* h *функциясы болжанбайтын болса, онда (0.8) жүйенің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Үшінші бөлімде дифференциалдық теңдеулер мен гибридтік жүйелер арқылы сипатталған ХНЖ-нің болжанбайтын үзілісті және үзіліссіз тербелістері зерттелді.

3.1 бөлімшеде күшті болжанбайтын функция анықтамасы мен болжанбайтын қоздыртқылы ХНЖ-дің моделдері қарастырылды.

0.7-анықтама [62, 342 б.]. Бірқалыпты үзіліссіз, шенелген $\vartheta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_p)$ функциясы берілсін. Егер келесі шарттар:

(a) әрбір шенелген интервалда $\vartheta(t + t_n) \to \vartheta(t), n \to \infty$;

(b) әрбір $n \in \mathbb{N}, i = 1, .., p$ мен $t \in [s_n - \delta,\ s_n + \delta]$ үшін $|\vartheta_i(t + t_n) - \vartheta_i(t)| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0,\ \delta > 0$ сандары мен $t_n \to \infty,\ s_n \to \infty, n \to \infty$, тізбектері табылатын болса, онда $\vartheta(t)$ *күшті болжанбайтын функция* деп аталады.

Хопфилд нейрондық желісі қарастырылады

$$x_i'(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j(x_j(t)) + v_i(t), \tag{0.9}$$

мұндағы $t, x_i \in \mathbb{R}$, $a_i > 0, i = 1, \ldots, p$. Сонымен бірге,

t − уақыт айнымалысы;

p − желідегі нейрондар саны;

$x_i(t)$ − уақыттың t мезетіндегі i-ші нейронның мембраналық потенциалы;

v_i – желіден тыс i-ші нейронға кіретін сыртқы кіріс;

a_i − басқа нейрондар мен сыртқы кірістерден оқшауланған кезде өзін-өзі реттейтін немесе нейрондарды өз қалпына келтіретін тұрақты жылдамдықтар;

f_j − уақыттың t мезетінде j-ші нейронның мембраналық потенциалына әсерін тигізетін активациялық функция;

b_{ij} − i-ші нейрон мен j-ші нейронды байланыстыратын синапстың салмағы.

b_{ij} коэффициенттері нақты сандар, $f_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ активациялық функциялары мен $v_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ қозулары үзіліссіз функциялар болсын.

Барлық $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ вектор-функцияларының U кеңістігі енгізіліп, ондағы норма $\|\varphi\|_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi(t)\|$ арқылы анықталды.

Кеңістіктің элементері мына шарттарды қанағаттандырсын:

$(U1)$ $\varphi(t)$ бірқалыпты үзіліссіз;

$(U2)$ барлық $\varphi(t) \in U$ үшін $\|\varphi(t)\|_1 < H_0$ орындалатындай оң H_0 саны табылады;

$(U3)$ әрбір $\varphi(t) \in U$ үшін $\mathbb{R}$-дің шенелген интервалында $\varphi(t + t_n)$ функциялар тізбегі $\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталатындай $t_n \to \infty,\ n \to \infty$, тізбегі табылады.

(0.9) жүйе үшін келесі шарттар орындалады:

$(C1)$ барлық $u, v \in \mathbb{R}$ үшін $|f_i(u) - f_i(v)| \le L|u - v|$ теңсіздігі орындалатындай оң L саны табылады;

$(C2)$ γ және $\overline{\gamma}$ сандары үшін $1 < \gamma \le a_i \le \overline{\gamma}$, $i = 1, \ldots, p$ теңсіздіктері орындалады;

$(C3)$ барлық $i = 1, \ldots, p$ мен $t \in \mathbb{R}$ үшін $|v_i(t)| < H_0$ және $|f_i(t)| < \overline{m}_i$ теңсіздіктері орындалады, мұндағы $\overline{m}_i$ оң сан;

$(C4)$ $\dfrac{\max_i \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| \overline{m}_j}{\gamma - 1} < H_0$;

$(C5)$ $L \max_i \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| < \gamma$.

0.6-теорема. *Егер (0.9) жүйедегі $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ күшті болжанбайтын функция болса және (C1)-(C5) шарттары орындалса, онда (0.9) жүйенің асимптотикалық орнықты, күшті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

3.2-бөлімшеде импульсті ХНЖ-нің үзілісті болжанбайтын тербелістері зерттеледі. Яғни, жәй дифференциалдық теңдеумен берілген (0.9) жүйеге секіріс теңдеуін қосу арқылы алынған келесі түрдегі импульсті жүйе қарастырылады

$$
\begin{aligned}
x_i'(t) &= a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j(x_j(t)) + v_i(t), t \ne \theta_k,\\
\Delta x_i|_{t=\theta_k} &= \alpha_i x_i(\theta_k) + \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} g_j(x_j(\theta_k)) + W_{ik},
\end{aligned}
\tag{0.10}
$$

мұндағы $t, x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, $k \in \mathbb{Z}$. Жүйенің импульсті бөлігінің элементтері де (0.9) тендеудің элементтеріне сәйкес сипатталады:

α_i — басқа нейрондар мен импульсті кірістерден оқшауланған кезде өзін-өзі реттейтін немесе нейрондарды өз қалпына келтіретін тұрақты жылдамдықтар;

g_j – уақыттың t мезетінде j-ші нейронның мембраналық потенциалына соққы әсерін тигізетін активациялық функция;

β_{ij} — i-ші нейрон мен j-ші нейрон байланыстыратын лездік синаптикалық салмақ;

W_{ik} – желіден тыс i-ші нейронға кіретін сыртқы импульсті кіріс.

$f_j, g_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ активациялық функциялары үзіліссіз, $a_i, \alpha_i, b_{ij}, \beta_{ij}$ коэффициенттері нақты сандар және $v_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функциялары шартты бірқалыпты үзіліссіз функциялар болсын.

(0.10)-жүйенің импульсті бөлігі дифференциалдық теңдеумен бірдей құрылымға ие. Жүйенің импульстері Хопфилд нейрондық желісі теңдеуінің түріне ұқсас болғандықтан (0.10)-модельді *Хопфилдтік құрылымды импульсті нейрондық желі* (ХҚИНЖ) деп атайды.

Нейрондарды реттейтін және қалпына келтіретін жылдамдықтарды сипаттайтын a_i, $i = 1,2,\ldots,p$ коэффициенттері [127-129] мақалаларда оң мәнді деп қарастырылған. (0.10) нейрондық желі моделінде бұл коэффициенттер, электр тізбегіндегі теріс сыйымдылықтың әсерінен [138, 139], теріс, оң және нөлдік мәндерді қабылдауы мүмкін.

Барлық $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)$ бөлікті үзіліссіз функцияларының $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ ішкі кеңістігі енгізілген. Мұнда норма $\|\psi\|_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\psi(t)\|$ арқылы анықталады.

Кеңістіктің элементері мына қасиеттерге бағынатын болсын:

($\mathcal{S}1$) барлық $\psi(t) \in \mathcal{S}$ үшін $\|\psi(t)\|_1 < H_1$ орындалатындай оң H_1 саны табылады;
($\mathcal{S}3$) әрбір $\psi(t) \in \mathcal{S}$ үшін әрбір шенелген интервалдағы B-топологияда $\psi(t + t_n)$ функциялық тізбегі $\psi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады, мұндағы $t_n \to \infty,\ n \to \infty$, (0.10) жүйедегі $v(t)$ үшін анықталған тізбекпен бірдей тізбек.

(0.10) жүйе үшін келесі шарттар орындалады деп ұйғарылады:

($I1$) әрбір $i = 1,2,\ldots,p$ үшін $\lambda = \max_i \left(a_i + \frac{1}{T} Ln|1 + \alpha_i|\right) < 0$;
($I2$) барлық $i = 1,\ldots,p, |x| < H_1$ үшін $|f_i(x)| \le m_f,\ |g_i(x)| \le m_g$ орындалады, мұндағы m_f, m_g оң сандар;
($I3$) барлық $i = 1,\ldots,p, |x| < H_1, |y| < H_1$ үшін $|f_i(x) - f_i(y)| \le l_f^i \|x - y\|$ және $|g_i(x) - g_i(y)| \le l_g^i \|x - y\|$ теңсізіктері орындалатындай оң l_f^i, l_g^i сандары табылады;
($I4$) барлық $i = 1,\ldots,p$ үшін $\sup_{t\in\mathbb{R}} |v_i(t)| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |W_{ik}| = M < \infty$ орындалатындай оң M саны табылады.

(0.10) жүйеге сәйкес келетін біртекті жүйенің шешімі $x_i(t,s) = e^{a_i(t-s)}(1 + \alpha_i)^{i([s,t))}$, $t \ge s$ деп белгіленді. Олай болса, $|x_i(t,s)| \le K_I e^{\lambda(t-s)}, t \ge s$ шарты орындалатындай $K_I \ge 1$ саны табылады.

(0.10) жүйенің асимптотикалық орнықты жалғыз шешімін зерттеу үшін келесі шарттар қолданылды:

$$(I5)\ K_I\left(\frac{1}{|\lambda|}\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|m_f+M\right)+\frac{1}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}|\beta_{ij}|m_g+M\right)\right)<H_1;$$

$$(I6)\ K_I\left(\frac{1}{|\lambda|}\max_i l_f^i\max_i\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|+\frac{1}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\max_i l_g^i\max_i\sum_{j=1}^{p}|\beta_{ij}|\right)<1;$$

$$(I7)\ K_I\max_i l_f^i\max_i\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|+\frac{1}{\underline{\theta}}ln\left(1+K_I\max_i l_g^i\max_i\sum_{j=1}^{p}|\beta_{ij}|\right)<-\lambda.$$

0.7-теорема *Егер (0.10) жүйедегі* $(v(t),W_k)$ *жұбы 0.3-анықтама мағынасындағы болжанбайтын жұп болса және (I1)-(I7) шарттары орындалса, онда (0.10) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Зерттеу кезінде 0.3-анықтамадағы, $\omega(t)$ функциясы мен Γ_i тізбегі, сәйкесінше $v(t)$ функциясы мен W_k тізбегіне ауыстырылады.

3.3-бөлімшеде жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті ХНЖ зерттеледі. Яғни, (0.9) жүйенің оң жағына жалпыланған түрдегі бөлікті-тұрақты аргументті функцияны қосу арқылы алынған мына түрдегі гибридтік жүйе қарастырылады

$$x_i'(t)=-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{p}b_{ij}f_j\left(x_j(t)\right)+\sum_{j=1}^{p}c_{ij}g_j\left(x_j\big(\gamma(t)\big)\right)+v_i(t),\quad (0.11)$$

мұндағы $t,x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,p$;

$c_{ij}-i$-ші және j-ші нейрондарды байланыстыратын синапстың салмағы;

g_j-j-ші нейронның мембраналық потенциалына әсерін тигізетін активациялық функция;

$\gamma(t)-$ жалпыланған түрдегі бөлікті-тұрақты аргумент және ол $\gamma(t)=\xi_k$, тізбегімен беріледі, мұндағы $\theta_k\le t\le\theta_{k+1}$, θ_k, ξ_k, барлық $|\theta_k|\to\infty$, $|k|\to\infty$, $k\in\mathbb{Z}$ үшін $\theta_k<\theta_{k+1}$, $\theta_k\le\ \xi_k\le\theta_{k+1}$ орындалатындай нақты мәнді тізбектер.

(0.11) жүйеде b_{ij} мен c_{ij} коэффициенттері нақты сандар, $f_j,g_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ активациялық функциялары үзіліссіз болсын делік. Сонымен бірге, кез келген $i=1,2,\dots,p$ үшін $\lambda\le a_i\le\bar{\lambda}$ орындалатындай оң λ және $\bar{\lambda}$ тұрақтылары табылсын.

(0.11) жүйені векторлық түрде жазалық:

$$x'(t)=Ax(t)+Bf\big(x(t)\big)+Cg\left(x\big(\gamma(t)\big)\right)+v(t)\qquad(0.12)$$

мұндағы $x=colon(x_1,x_2,\dots,x_p)$ – нейрон күйін сипаттайтын вектор; $A=diag(-a_1,-a_2,\dots,-a_p)$, $B=\left(b_{ij}\right)_{p\times p}$, $C=\left(c_{ij}\right)_{p\times p}$ – матрицалар;

$f(x) = colon(f_1(x_1), \ldots, f_p(x_p))$ және $g(x) = colon(g_1(x_1), \ldots, g_p(x_p))$ – активациялар; $v = colon(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ – кіріс векторы.

Барлық $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ вектор-функцияларының кеңістігі Σ_0 арқылы белгіленеді. Ондағы норма $\|\varphi\|_1 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi(t)\|$ арқылы анықталады.

Кеңістіктің элементтері мынадай қасиеттерге ие:
$(E1)$ $\varphi(t)$ бірқалыпты үзіліссіз;
$(E2)$ барлық $\varphi(t) \in \Sigma_0$ үшін $\|\varphi(t)\|_1 < H_2$ орындалатындай оң H_2 саны табылады;
$(E3)$ әрбір $\varphi(t) \in \Sigma_0$ үшін $\mathbb{R}$-дің шенелген интервалында $\varphi(t + t_n)$ функциялар тізбегі $\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинакталатын $t_n \to \infty$, $n \to \infty$, тізбегі табылады.

(0.12) теңдеу үшін мына шарттар орындалсын деп ұйғарылады:
$(P1)$ барлық $x, y \in \mathbb{R}$ үшін $\|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\|$, $\|g(x) - g(y)\| \le \bar{L}\|x - y\|$, орындалсын, мұндағы оң $L, \bar{L}$ – тұрақтылар;
$(P2)$ $\sup\limits_{\|x\|<H_2} \|f(x)\| \le m_f$, $\sup\limits_{\|x\|<H_2} \|g(x)\| \le m_g$ дұрыс болатындай оң m_f, m_g сандары табылады;
$(P3)$ $v - \Sigma_0$ кеңістігінен алынған функция болсын және ол үшін $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|v(t)\| \le m_v$ орындалатын оң m_v саны табылады;
$(P4)$ $\|B\|m_f + \|C\|m_g + m_v < H_2\lambda$;
$(P5)$ $\|B\|L + \|C\|\bar{L} < \lambda$;
$(P6)$ $-\lambda + \|B\|L + \left(1 - \theta\left[\left(\bar{\lambda} + \|B\|L\right)(1 + \|C\|\bar{L})e^{\left(\bar{\lambda}+\|B\|L\right)\theta} + \|C\|\bar{L}\right]\right)^{-1}\|C\|\bar{L} < 0$;
$(P7)$ $\theta\left[\left(\bar{\lambda} + \|B\|L\right)(1 + \|C\|\bar{L})e^{\left(\bar{\lambda}+\|B\|L\right)\theta} + \|C\|\bar{L}\right] < 1$;
$(P8)$ әрбір шенелген интервалда $\theta_{k-\eta_n} + t_n - \theta_k \to 0$, $n \to \infty$ мен $\xi_{k-\eta_n} + t_n - \xi_k \to 0$, $n \to \infty$ шарттары орындалатын $\eta_n \to \infty$, $n \to \infty$ тізбегі табылады, мұндағы t_n 0.6- анықтамадағы тізбек.

0.8-теорема. *Егер (P1)-(P8) шарттары орындалса және v функциясы болжанбайтын болса, онда (0.12) жүйенің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Нейрондық желілердің болжанбайтын үзілісті және үзіліссіз тербелістері үшін алынған теориялық нәтижелерді растайтын графиктері бар иллюстрациялық мысалдар, блок схемалар келтірілген.

1 ИМПУЛЬСТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БОЛЖАНБАЙТЫН ШЕШІМДЕРІ

1.1 Үзілісті болжанбайтын функциялар

Диссертацияда қарастырылатын импульсті жүйелердің секіріс сәттері болжанбайтын тізбек құрады. Сол себепті, алдымен болжанбайтын тізбек анықтамасын келтіреміз.

1.1-ші және 1.2-ші бөлімшелерде, векторлар үшін евклидтік норма және квадрат матрицалар үшін спектрлік норма қолданылды [135, 15 б.].

1.1-анықтама [4, 661 б.]. Шенелген, $\kappa_i = \left(\kappa_i^1, \kappa_i^2, \dots, \kappa_i^p\right), i \in \mathbb{Z}$, тізбегі берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max\limits_{i_1<i<i_2} \left\|\kappa_{i+l_n} - \kappa_i\right\| \to 0, n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\left\|\kappa_{m_n+l_n} - \kappa_{m_n}\right\| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$ саны мен $l_n \to \infty,\ m_n \to \infty, n \to \infty$ тізбектері табылатын болса, онда κ_i тізбегі *болжанбайтын* деп аталады.

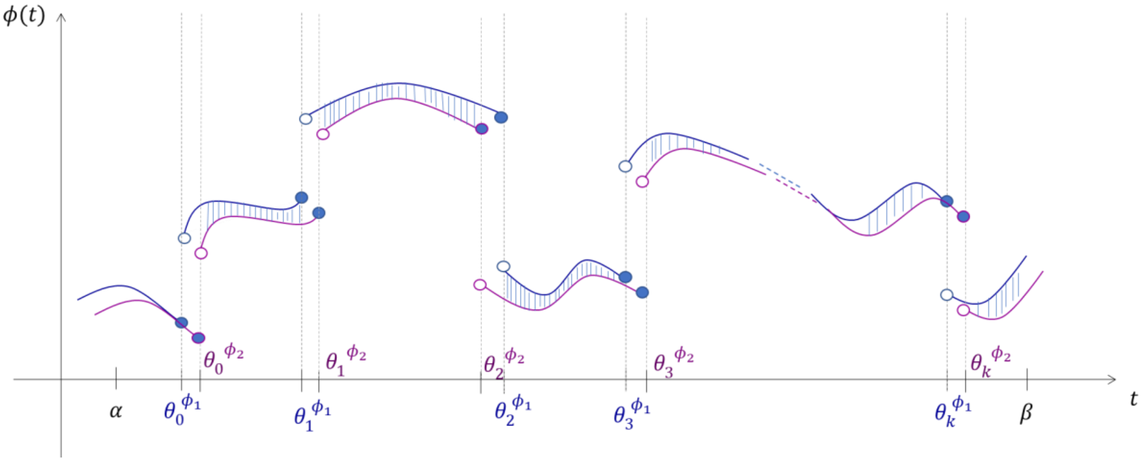
Сан түзуінде анықталған және үзіліс нүктелері саналымды жиындарды құрайтын, бұған қоса үзіліс нүктелерінде біржақты шектері бар барлық p-өлшемді бөлікті үзіліссіз функциялар жиынын $\mathcal{F}$ арқылы белгілейміз. Егер функциялар әртүрлі болса, онда үзіліс нүктелерінің жиындары бірдей болуы міндетті емес. Бұл жиындарының шоғырлану (шектік) нүктелері болмайды, әрі екі жағынан шенелмеген.

ϕ_1 және ϕ_2 функциялары $\mathcal{F}$ жиынынан алынған бөлікті үзіліссіз функциялар болсын. Шенелген $J \subseteq \mathbb{R}$ интервалына тиесілі функциялардың үзіліс нүктелерін сәйкесінше $\theta_i^{\phi_1}$ және $\theta_i^{\phi_2}$, $i = 1, \dots, k$ деп белгілейміз. Егер әрбір $i = 1, \dots, k$ үшін $\left|\theta_i^{\phi_1} - \theta_i^{\phi_2}\right| < \varepsilon$ шарты және $\left[\widehat{\theta_\iota^{\phi_1}, \theta_\iota^{\phi_2}}\right]$ интервалынан басқа аралықта жататын барлық $t \in J$ үшін $\|\phi_1(\mathrm{t}) - \phi_2(t)\| < \varepsilon$ шарты орындалса, онда бұл функциялар J интервалында *ε-эквивалентті* деп аталады. Егер ϕ_1 және ϕ_2 функциялары J интервалында ε-эквивалентті болса, онда бұл функциялар бір-бірінің *ε-маңайында* орналасқан деп айтады. Осындай маңайлардың көмегімен анықталатын топологияны *B-топология* деп атайды [66, 63 б.]. 1.1-суретте бір-бірінің B-топология маңайында орналасқан үзілісті ϕ_1 және ϕ_2 функцияларының графигі көрсетілген.

Жұмыста қарастырылатын бөлікті үзіліссіз функциялар үзіліс нүктелерінде сол жақты үзіліссіз және бірінші текті үзілістерге ие болады.

Нақты сандардың $\theta_i, i \in \mathbb{Z}$ тізбегін қарастырамыз, ол келесідей қасиеттерге ие: 1) $|\theta_i| \to \infty,\ |i| \to \infty$; 2) кез келген оң $\underline{\theta},\ \overline{\theta}$ сандары үшін $\underline{\theta} \leq \theta_{i+1} - \theta_i \leq \overline{\theta}$ орындалады.

Үзілісті болжанбайтын функция ұғымын енгіземіз.



Сурет 1.1 – Үзілісті ϕ_1 және ϕ_2 функцияларының B - топология маңайы

1.2-анықтама. Үзіліс нүктелері $\theta_i\,, i\in\mathbb{Z}$, болатын, шенелген $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$ функциясы берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1<i_2$ үшін $\max\limits_{i_1<i<i_2}\left|\theta_{i+l_n}-\,t_n-\theta_i\right|\to 0,\, n\to\infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\left|\theta_{m_n+l_n}-\,t_n-\theta_{m_n}\right|\geq\varepsilon_0$;

(c) $\forall\varepsilon>0\ \exists\sigma(\varepsilon)>0\ t_1,t_2\in(\theta_i,\theta_{i+1}],\ i\in\mathbb{Z}:|t_1-\,t_2|<\sigma(\varepsilon)\Rightarrow$ $\|\varphi(t_1)-\,\varphi(t_2)\|<\varepsilon$;

(d) әрбір шенелген интервалдағы B-топологияда $\varphi(t+t_n)\to\varphi(t),\, n\to\infty$;

(e) әрбір натурал n және $\varphi(t)$ мен $\varphi(t+t_n)$ фунцияларының үзіліс нүктелерін қамтымайтын $[s_n-\delta,\ s_n+\delta]\subseteq\left[\theta_{m_n}\widehat{,}\ \theta_{m_n+l_n}-t_n\right]$ интервалынан алынған кез келген t үшін $\|\varphi(t+t_n)-\varphi(t)\|\geq\varepsilon_0$ теңсіздігі

орындалатындай $\varepsilon_0>0,\ \delta>0$ сандары және нақты сандардың $t_n\to\infty, s_n\to\infty$, $n\to\infty$, тізбектері мен бүтін сандардың $l_n\to\infty,\, m_n\to\infty,\ n\to\infty$, тізбектері табылатын болса, онда $\varphi(t)$ функциясы *үзілісті болжанбайтын (ү.б.ф.)* деп аталады.

1.2-анықтамадағы (c) қасиетін – φ функциясының *шартты бірқалыпты үзіліссіздігі*, (d) қасиетін – φ функциясының *Пуассон бойынша орнықтылығы* және (e) қасиетін – φ функциясының *бөліну қасиеті* деп атаймыз. Бұған қоса, t_n және s_n тізбектері φ функциясының сәйкесінше Пуассон және бөліну тізбектері болып табылады.

1.3-анықтама. Үзіліс нүктелері $\theta_i\,, i\in\mathbb{Z}$, болатын, шенелген $\varphi(t)$ функциясы ү.б.ф болсын және шенелген $\Gamma_i\in\mathbb{R}^p,\ i\in Z$ тізбегі берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1<i_2$ үшін $\max\limits_{i_1<i<i_2}\left|\Gamma_{i+l_n}-\Gamma_i\right|\to 0,\, n\to\infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\left|\Gamma_{m_n+l_n}-\Gamma_{m_n}\right|\geq\varepsilon_0$ теңсіздігі

орындалатындай $\varepsilon_0>0$ саны және бүтін сандардың $l_n\to\infty,\ m_n\to\infty,\ n\to\infty$, тізбектері табылатын болса, онда $(\varphi(t),\ \Gamma_i)$ жұбы *болжанбайтын* деп аталады.

1.2-анықтаманы 1.3-анықтаманың салдары ретінде алуға болмайды, өйткені 1.3-анықтамадағы $(\varphi(t),\,\Gamma_i)$ жұбынан Γ_i мүшелерін жою арқылы

1.2-анықтаманы ала алмаймыз, ал нөлдерден құралған тізбек болжанбайтын тізбек болмайды. Сол себепті, зерттеуде екі анықтама да қажет.

Зерттеуіміздің мақсатына сәйкес импульсті жүйенің үзіліс нүктелерін төмендегідей түрде аламыз:

$$\theta_i = iT + \gamma_i, i \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

мұндағы $\gamma_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{Z}$ – 1.1-анықтама мағынасындағы болжанбайтын тізбек, ал $T \geq 4$ саны $\sup_{i \in Z}|\gamma_i| < T/h,\ \ h \geq 3$ шартын қағаттандыратындай сан.

$\gamma_i, i \in \mathbb{Z}$ болжанбайтын тізбек болғандықтан әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max_{i_1<i<i_2}|\gamma_{i+l_n} - \gamma_i| \to 0,\ n \to \infty$ және әрбір натурал n үшін $|\gamma_{m_n+l_n} - \gamma_{m_n}| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатын оң ε_0 саны мен натурал сандардың $l_n \to \infty,\ m_n \to \infty,\ n \to \infty$ тізбектері табылады.

$\theta_i,\ i \in \mathbb{Z}$ тізбегінің болжанбайтын тізбек болатынын дәлелделік. Дәлірек айтқанда, $t_n = Tl_n,\ n \in \mathbb{N}$ болғанда $\theta_i, i \in \mathbb{Z}$ үшін, 1.2-анықтамада айтылған (a) және (b) қасиеттері орындалатынын көрсетеміз. t_n тізбегін жоғарыда айтылғандай таңдай отырып, мына теңдікті аламыз:

$$|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i| = |(i + l_n)T + \gamma_{i+l_n} - l_nT - iT - \gamma_i| = |\gamma_{i+l_n} - \gamma_i|.$$

Яғни, әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max_{i_1<i<i_2}|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i| \to 0,\ n \to \infty$. Енді әрбір натурал n саны үшін (b) қасиеті орындалатынын тексереміз

$$|\theta_{m_n+l_n} - t_n - \theta_{m_n}| = |(\eta_n + l_n)T + \gamma_{m_n+l_n} - l_nT - m_nT - \gamma_{m_n}| =$$

$$= |\gamma_{m_n+l_n} - \gamma_{m_n}| \geq \varepsilon_0.$$

Бұған қоса, $\underline{\theta} = T - \frac{2T}{h}, \overline{\theta} = T + \frac{2T}{h}$ болғанда, (1.1) түрінде берілген $\theta_i,\ i \in Z$ тізбегінің мәндері $\underline{\theta} \leq \theta_{i+1} - \theta_i \leq \overline{\theta}$ теңсіздігін қанағаттандырады.

Үзілісті болжанбайтын функцияны құру үшін логистикалық бейнелеудің болжанбайтын траекториясы мен кездейсоқ анықталған болжанбайтын тізбекті қолданамыз.

1.1-мысал. Алдымен үзілісті болжанбайтын функцияның үзіліс нүктелерін анықтап аламыз. Ол үшін

$$\lambda_{i+1} = \mu\lambda_i(1 - \lambda_i), i \in \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

логистикалық бейнелеуін қарастырамыз. Егер $\mu \in (0,4]$ болса, (1.2) логистикалық теңдеуінің барлық итерациялары [0,1] интервалында жатады [140]. Ал [2, 89 б.] жұмыста $[3 + (2/3)^{1/2}, 4]$ интервалынан алынған әрбір μ үшін логистикалық теңдеудің шешімдері болжанбайтын $\gamma_i, i \in \mathbb{Z}$ тізбегін құратындығы дәлелденген. Яғни, әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max_{i_1<i<i_2}\left|\gamma_{i+l_n} - \gamma_i\right| \to 0$, $n \to \infty$ және әрбір натурал n үшін $\left|\gamma_{m_n+l_n} - \gamma_{m_n}\right| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатын оң ε_0 саны мен натурал сандардың $l_n \to \infty,\ m_n \to \infty,\ n \to \infty$ тізбектері табылады.

$$\theta_i = 4i + \gamma_i, i \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

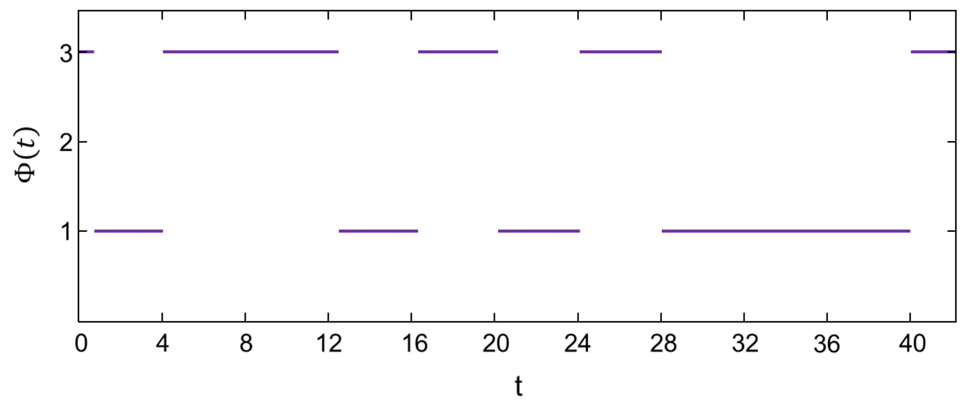
тізбегін қарастырайық. (1.3)-тізбек (1.1)-тізбектің дербес жағдайы болғандықтан, әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $n \to \infty$ кезде $\max_{i_1<i<i_2}\left|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i\right|$ нөлге ұмтылатын және әрбір натурал n үшін $\left|\theta_{m_n+l_n} - t_n - \theta_{m_n}\right| \geq \epsilon_0$ теңсіздігі орындалатын оң ε_0 саны және $t_n = 4l_n,\ l_n,\ m_n$ тізбектері табылады.

Болжанбайтын функцияны құру үшін Бернулли процесін қолданамыз. Яғни, [65, 33 б.] мақаладағы нәтижеге сәйкес ықтималдығы 1/2-ге тең, кездейсоқ анықталған 1 мен 3 сандарының шексіз тізбегін қарастырамыз. Олай болса, $\tau_i = 1,3,\ i \in \mathbb{Z}$ болжанбайтын тізбегі табылады және бүтін сандардың шенелген интервалынан алынған әрбір i үшін $\tau_{i+l_n} = \tau_i$, және барлық натурал n үшін $\left|\tau_{m_n+l_n} - \tau_{m_n}\right| = |1-3| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатын бүтін санды $l_n \to \infty$, $m_n \to \infty,\ n \to \infty$ тізбектері бар болады.

$\Phi(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функциясы $\Phi(t) = \tau_i,\ t \in [\,\theta_i,\ \theta_{i+1}),\ i \in \mathbb{Z}$ теңдеуі арқылы анықталған функция болсын. $\Phi(t)$ функциясының 1.2-анықтама мағынасындағы ү.б.ф. болатындығын көрсетелік.

Егер $t \in [\,\theta_i, \theta_{i+1}), i \in \mathbb{Z}$ болса, онда $t + t_n$-дің $\left[\,\theta_{i+l_n}, \theta_{i+1+l_n}\right), i \in \mathbb{Z}$ аралығына тиісті екенін көрсетуге болады. $\Phi(t)$ функциясының үзіліс нүктелерін θ_i, ал $\Phi(t + t_n)$ функциясының үзіліс нүктелерін $\theta'_i = \theta_{i+l_n} - t_n$ арқылы белгілейік. $t \in [\,\theta'_i,\ \theta'_{i+1}), i \in \mathbb{Z}$ үшін $\theta'_i \leq t \leq\ \theta'_{i+1}$ және $\theta'_i + t_n \leq t + t_n \leq\ \theta'_{i+1} + t_n$ теңсіздіктері орындалады, олай болса, $\theta'_{i+l_n} \leq t + t_n \leq\ \theta'_{i+1+l_n}$. Демек, $\Phi(t + t_n)$ функциясының үзіліс нүктелері – $\Phi(t)$ функциясының үзіліс нүктелерімен бірдей. Сәйкесінше, $\Phi(t + t_n)$ функциясының мәндері τ_{i+l_n} тең. Сонымен, τ_i болжанбайтындығын қолданып, кез келген шенелген интервалдағы B-топологияда $\Phi(t + t_n) \to \Phi(t),\ n \to \infty$ болады. Бұған қоса, бекітілген n үшін $\Phi(t)$ мен $\Phi(t + t_n)$ функцияларының $\left[\,\theta_{m_n}, \theta_{m_n+1}\right), \left[\,\theta_{m_n+l_n}, \theta_{m_n+1+l_n}\right)$ аралықтарындағы мәндері сәйкесінше τ_{m_n} мен $\tau_{m_n+l_n}$ тең. Бұдан, $|\Phi(t + t_n) - \Phi(t)| = \left|\tau_{m_n+l_n} - \tau_{m_n}\right| \geq \varepsilon_0 = 2$ шығады.

Сонымен, $\Phi(t)$ функциясы $\varepsilon_0 = 2,\ \sigma = \frac{3}{2}$ сандары және $t_n = 4l_n$, $s_n = \frac{\theta_{m_n} + \theta_{m_n+1}}{2}$ тізбектерімен ү.б.ф. болады. $\Phi(t)$ функциясының графигі 1.2-суретте көрсетілген.



Сурет 1.2 – Үзілісті болжанбайтын $\Phi(t)$ функциясының графигі

1.2 Импульсті сызықтық жүйелердің болжанбайтын шешімдері

1.2.1 Импульсті сызықтық жүйе

Импульсті сызықтық жүйені қарастыралық:

$$\begin{aligned} &x'(t) = Ax(t) + f(t), \qquad t \neq \theta_i, \\ &\Delta x|_{t=\theta_i} = B\, x(\theta_i), \end{aligned} \tag{1.4}$$

мұндағы: $t \in \mathbb{R}$; $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – коммутативті матрицалар; θ_i , $i \in Z$ – (1.1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ – 1.2-анықтама мағынасындағы ү.б.ф. $\det(I + B) \neq 0$.

(1.4)- жүйемен байланысқан

$$\begin{aligned} &x'(t) = Ax(t), \qquad t \neq \theta_i, \\ &\Delta x|_{t=\theta_i} = B\, x(\theta_i) \end{aligned} \tag{1.5}$$

импульсті сызықтық жүйенің Коши матрицасын $X(t,s)$ деп белгілейміз.

A және B коммутативті матрицалар болғандықтан $t > s$ үшін

$$X(t,s) = e^{A(t-s)}(I + B)^{i([s,t))}, \tag{1.6}$$

мұндағы $i([s,t))$ $-$ $[s,t)$ аралығына тиісті үзіліс нүктелерінің саны және $X(s,s) = I$.

$A + \frac{1}{T}Ln(I + B)$ матрицасының меншікті мәндерін $\lambda_j, j = 1,2,\ldots,p$ арқылы белгілейміз және мына шарт орындалады деп ұйғарамыз:

$(A1)$ $\max\limits_j \mathcal{R}e\lambda_j = \lambda < 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,$ мұндағы $\mathcal{R}e\lambda_j$ – меншікті мәндердің нақты бөліктері.

Онда (1.6) теңдігі бойынша

$$\|X(t,s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \qquad t \geq s \tag{1.7}$$

шарты орындалатындай $K \geq 1$ және $\alpha,\ 0 < \alpha < -\lambda$ сандары табылатындығы шығады [66, 36 б.].

Келесі көмекші тұжырымды дәлелделік.

1.1-лемма. *Егер (A1) шарты орындалса, онда*

$$\|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\| \leq K_0 e^{-\alpha(t-s)} \tag{1.8}$$

теңсіздігі шығады, мұндағы $K_0 = K\, max(1, \|B\|)$.

Дәлелдеуі. (1.6) матрица мен (1.7) теңсіздікті қолданып, барлық $t \geq s$ үшін

$$\|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\| \leq$$

$$\leq \left\| e^{A(t-s)}(I+B)^{i([s+t_n, t+t_n))} - e^{A(t-s)}(I+B)^{i([s,t))} \right\|$$

$$\leq \left\| e^{A(t-s)}(I+B)^{i([s,t))} \right\| \left\| (I+B)^{\left| i([s+t_n, t+t_n)) - i([s,t)) \right|} - I \right\|$$

$$\leq K\, ma\,x(1, \|B\|)\, e^{-\alpha(t-s)}$$

теңсіздігі орындалатынын аламыз.

1.1-теорема. *Егер (A1) шарты орындалса және* $f(t)$ *1.2-анықтама мағынасындағы ү.б.ф. болса, онда (1.4) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Дәлелдеуі. Импульсті дифференциалдық теңдеулер теориясынан, $f(t)$ функциясының шенелгендігінен (1.4) жүйенің сан түзуінде шенелген жалғыз $\varphi(t)$ шешімі бар болатыны белгілі және ол

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t,s)\, f(s) du,\ \ t \in \mathbb{R}$$

түрінде болады [66, 44 б.].

Бөлікті үзіліссіз $\varphi(t)$ шешімінің шартты бірқалыпты үзіліссіздігін тексереміз. Ол үшін $\varphi(t)$ функциясын дифференциалдаймыз

$$\left\| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\| \leq \|A\| \int_{-\infty}^{t} \|X(t,s)\|\, \|f(s)\| ds + \|f(t)\| = \frac{\|A\| M_f K}{\alpha} + M_f,$$

мұндағы $M_f = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$. Сәйкесінше, $\varphi(t)$ шартты бірқалыпты үзіліссіз функция болып табылады. $\varphi(t)$-дің асимптотикалық орнықтылығын [67, 57 б.] әдебиетте көрсетілгендей, шенелген шешімнің орнықтылығына ұқсас тексеруге болады.

$f(t)$ ү.б.ф. болғандықтан, 1.2-анықтамадағы (d) және (e) қасиеттері орындалатын оң ε_0, δ сандары және нақты сандардан құралған $t_n \to \infty$,

$s_n \to \infty$ тізбектері мен бүтін сандардан құралған $l_n \to \infty,\ m_n \to \infty$ тізбектері табылады және f функциясын анықтамадағы φ-мен ауыстырып зерттейміз.

$\varphi(t)$ функциясының Пуассон бойынша орнықты болатынын, яғни 1.2-анықтамадағы (d) қасиеті орындалатынын дәлелделік.

Нақты сандардың кез келген шенелген $[a,b], -\infty < a < b < \infty$ интервалын және кез келген оң ε санын бекітіп, жеткілікті үлкен n саны үшін $\|\varphi(t+t_n) - \varphi(t)\| < \varepsilon,\ t \in [a,b]$ теңсіздігі орындалатынын көрсетелік.

$$\frac{M_f(K_0 + 2K)}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1.9}$$

$$\frac{M_f(K_0 + 2K)(e^{\alpha\xi} - 1)}{\alpha(1 - e^{-\alpha\underline{\theta}})} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1.10}$$

және

$$\frac{K\xi}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.11}$$

теңсіздіктері орындалатын $c < a, \xi > 0$ сандарын таңдап аламыз.

n саны $\theta_i \in [c,b],\ i \in \mathbb{Z}$ үшін $\left|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i\right| < \xi$ теңсіздігі және $t \in [c,b]$ үшін $\|f(t+t_n) - f(t)\| < \xi$ теңсіздігі орындалатын жеткілікті үлкен натурал сан болсын. Жалпылықты жоғалтпай $\theta_i \leq \theta_{i+l_n}$ деп аламыз және $m, q \in \mathbb{Z}$ үшін

$$\theta_{m-1} \leq c \leq \theta_m < \cdots < \theta_q \leq t \leq \theta_{q+1}$$

теңсіздігі орындалсын.

Егер $t \in [a,b]$ болса, онда

$$\|\varphi(t+t_n) - \varphi(t)\| \leq \int_{-\infty}^{c} \|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\| \|f(s+t_n)\| ds +$$

$$+ \int_{c}^{t} \|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\| \|f(s+t_n)\| ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^{c} \|X(t,s)\| \|f(s+t_n) - f(s)\| ds + \int_{c}^{t} \|X(t,s)\| \|f(s+t_n) - f(s)\| ds$$

теңсіздігін аламыз. (1.8) шартын қолданып,

$$\int_{-\infty}^{c} \|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\| \|f(s+t_n)\| ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{c} M_f K_0 e^{-\alpha(t-s)} ds < \frac{M_f K_0}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)}$$

және

$$\int_{c}^{t} \|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\| \|f(s+t_n)\| ds \le$$

$$\le \sum_{i=m}^{q} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+l_n}-t_n} M_f K_0 e^{-\alpha(t-s)} ds \le \sum_{i=m}^{q} \frac{M_f K_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\left(e^{\alpha\left(\theta_{i+l_n}-t_n\right)} - e^{\alpha\theta_i}\right) \le$$

$$\le \sum_{i=m}^{q} \frac{M_f K_0}{\alpha} e^{-\alpha(t-\theta_i)}\left(e^{\alpha\,\xi} - 1\right) <$$

$$< \sum_{i=m}^{q} \frac{M_f K_0}{\alpha} \left(e^{\alpha\,\xi} - 1\right) e^{-\alpha(t-\theta_i)} \sum_{i=m}^{q} e^{-\alpha\left(\theta_q-\theta_i\right)} <$$

$$< \frac{M_f K_0\left(e^{\alpha\,\xi} - 1\right)}{\alpha\left(1 - e^{-\alpha\,\underline{\theta}}\right)}.$$

бағалауларын аламыз. Осылай жалғастыра отырып

$$\int_{-\infty}^{c} \|X(t,s)\| \|f(s+t_n) - f(s)\| ds + \int_{c}^{t} \|X(t,s)\| \|f(s+t_n) - f(s)\| ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{c} 2M_f K e^{-\alpha(t-s)} ds + \int_{c}^{t} K\xi e^{-\alpha(t-s)} ds + \sum_{i=m}^{q} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+l_n}-t_n} 2M_f K e^{-\alpha(t-s)} ds <$$

$$< 2\frac{M_f K_0}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)} + \frac{K\xi}{\alpha} + \frac{2M_f K\left(e^{\alpha\,\xi} - 1\right)}{\alpha\left(1 - e^{-\alpha\,\underline{\theta}}\right)}$$

теңсіздігін аламыз. Сонымен, (1.9)-(1.11) теңсіздіктерінен $t \in [a, b]$ үшін $\|\varphi(t+t_n) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ шарты шығады және сәйкесінше, шенелген интервалдағы B-топологияда $n \to \infty$ кезде $\varphi(t+t_n)$ функциялық тізбегі $\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады.

Әрі қарай, кез келген $t \in [\, r_n - \delta,\ r_n + \delta]$ үшін $\|\varphi(t+t_n) - \varphi(t)\| > \varepsilon_1$ теңісіздігі орындалатын оң ε_1, δ сандары мен шексіздікке ұмтылатын нақты сандардың r_n тізбегі табылатынын көрсетелік.

Егер $f(t)$ ү.б.ф. болса, онда $[s_n - \delta, s_n + \delta] \subseteq \left[\theta_{m_n}, (\widehat{\theta_{m_n+l_n}} - t_n)\right]$ кесіндісінде $f(t)$ мен $f(t+t_n)$, фунциясының үзіліс нүктелері болмайды. Сол себепті зерттеу барысында үзіліс нүктелерін ескермейміз.

Натурал n сандары мен кез келген $[s_n - \delta_1,\ s_n + \delta_1]$ кесіндісі үшін

$$\|f(t+t_n) - f(t_n+s_n)\| \le \frac{\varepsilon_0}{4\sqrt{p}}$$

және

$$\|f(t) - f(s_n)\| \le \frac{\varepsilon_0}{4\sqrt{p}}$$

теңсіздіктері орындалатын оң $\delta_1 < \delta$ саны табылады.

Натурал n санын бекітеміз, және $f(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)\right)$ болсын, мұндағы $f_k(t),\ k = 1,2,\dots,p$ - нақты мәнді функция.

$$\left|f_{j_n}(t_n+s_n) - f_{j_n}(s_n)\right| \ge \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{p}}$$

теңсіздігі орындалатын бүтін $j_n,\ 1 \le j_n \le p$ саны табылатынын тексерелік. Сонда $t \in [s_n - \delta_1,\ s_n + \delta_1]$ үшін

$$\left|f_{j_n}(t+t_n) - f_{j_n}(t)\right| \ge$$

$$\ge \left|f_{j_n}(t_n+s_n) - f_{j_n}(s_n)\right| - \left|f_{j_n}(t+t_n) - f_{j_n}(t_n+s_n)\right| -$$

$$-\left|f_{j_n}(t) - f_{j_n}(s_n)\right| \ge \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{p}} \qquad (1.12)$$

теңсіздігі шығады.

$$\|\int_{s_n-\delta_1}^{s_n+\delta_1} \left(f(s+t_n) - f(s)\right) ds \,\| = 2\delta_1 [\sum_{i=1}^{p} (f_i(\,u_i^n + t_n) - f_i(u_i^n))^2]^{1/2}$$

теңдігі орындалатындай $[s_n - \delta_1,\ s_n + \delta_1]$ кесіндісіне тиісті $u_1^n, u_2^n, \ldots, u_p^n$ сандары бар болады. (1.12) теңсіздікті қолданып,

$$|| \int_{s_n-\delta_1}^{s_n+\delta_1} (f(s+t_n) - f(s))ds \,|| \geq 2\delta_1 \left| f_{j_n}(u_i^n + t_n) - f_{j_n}(u_{j_n}^n) \right| \geq \frac{\delta_1 \varepsilon_0}{\sqrt{p}}$$

орындалатынын көреміз. Бұған қоса,

$$\varphi(t_n + s_n + \delta_1) - \varphi(t_n + \delta_1) = \varphi(t_n + s_n - \delta_1) - \varphi(s_n - \delta_1) +$$

$$+ \int_{s_n-\delta_1}^{s_n+\delta_1} A[\varphi(s+t_n) - \varphi(s)]ds + \int_{s_n-\delta_1}^{s_n+\delta_1} [f(s+t_n) - f(s)]ds$$

теңдеуін қолданып, келесі теңсіздікті аламыз:

$$\|\varphi(t_n + s_n + \delta_1) - \varphi(t_n + \delta_1)\| \geq$$

$$\geq \frac{\delta_1 \varepsilon_0}{\sqrt{p}} - (1 + 2\delta_1\|A\|) \sup_{t \in [s_n - \delta_1, s_n + \delta_1]} \|\varphi(t+t_n) - \varphi(t)\|.$$

Сонымен, $\sup\limits_{t \in [s_n - \delta_1, s_n + \delta_1]} \|\varphi(t+t_n) - \varphi(t)\| \geq \frac{\delta_1 \varepsilon_0}{2(1+\delta_1\|A\|)\sqrt{p}}$ теңсіздігі ақиқат.

Кейбір $r_n \in [s_n - \delta_1, s_n + \delta_1]$ үшін

$$\sup_{t \in [s_n - \delta_1, s_n + \delta_1]} \|\varphi(t+t_n) - \varphi(t)\| = \|\varphi(t_n + r_n) - \varphi(r_n)\|$$

болсын делік.

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1 \varepsilon_0}{4(1 + \delta_1\|A\|)\sqrt{p}}$$

және

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta_1 \alpha \varepsilon_0}{8M_f(1 + \delta_1\|A\|)(\alpha + 2K\|A\|)\sqrt{p}}$$

белгілеулерін енгіземіз.

$$\bar{\delta} < \min\left(\tilde{\delta}, \delta - \delta_1\right) \tag{1.13}$$

теңсіздігі орындалатындай етіп $\bar{\delta}$-ны таңдап алайық.

Олай болса, $t \in \left[r_n - \bar{\delta}, r_n + \bar{\delta}\right]$ үшін

$$\|\varphi(t+t_n)-\varphi(t)\| \geq \|\varphi(t_n+r_n)-\varphi(r_n)\| - \int_{r_n}^{t} \|A\|\,\|\varphi(s+t_n)-\varphi(s)\|ds -$$

$$-\int_{r_n}^{t} ||f(s+t_n)-f(s)||ds \geq \frac{\delta_1\varepsilon_0}{2(1+\delta_1||A||)\sqrt{p}} - \frac{4\bar{\delta}M_f K||A||}{\alpha} - 2\bar{\delta}M_f = \varepsilon_1$$

аламыз. Сонымен, $\left[r_n-\bar{\delta}, r_n+\bar{\delta}\right] \subseteq \left[\theta_{m_n}, \widehat{\theta_{m_n+l_n}} - t_n\right]$, $n \in \mathbb{N}$ кесіндісінен алынған барлық t үшін $\|\varphi(t+t_n)-\varphi(t)\| \geq \varepsilon_1$ орындалады және r_n тізбегі жинақсыз болады. Демек, $\varphi(t)$ – функциясы (1.4) жүйесінің үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі болып табылады.

1.2.2 Импульстері болжанбайтын сызықтық жүйе

Келесі импульсті сызықтық жүйені қарастыралық:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t)+f(t), \qquad t \neq \theta_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= B\,x(\theta_i)+I_i, \end{aligned} \tag{1.14}$$

мұндағы $t \in \mathbb{R}$; $A \in \mathbb{R}^{p\times p}, B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – коммутативті матрицалар; θ_i , $i \in Z$ – (1.1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; $(f(t), I_i)$ – 1.3-анықтама мағынасындағы болжанбайтын жұп. $\det(I+B) \neq 0$.

(1.14) жүйе – импульстері болжанбайтын сызықтық жүйе және ол (1.4)-жүйенің дербес жағдайы бола алмайды. Өйткені, импульсті бөлікке I_i қозуларын енгізу үшін оларды тек қана болжанбайтын деп есептеу жеткіліксіз. Сондай-ақ, қозулары жоқ жүйе үшін алынған Пуассон және бөліну тізбектері де осы жаңа мүшелермен келісілген болуы керек.

1.2-теорема. *Егер (A1) шарты орындалса және* $(f(t), I_i)$ *жұбы 1.3-анықтама мағынасында болжанбайтын жұп болса, онда (1.14)-жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Теореманы дәлелдеу үшін 1.1-теореманы дәлелдеуде қолданылған $K_0 = K\,max(1, \|B\|)$, $M_f = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|$ белгілеулері қажет болады. Сонымен қатар, $M_I = \sup\limits_{i\in\mathbb{Z}}\|I_i\|$ деп аламыз.

Дәлелдеуі. [66, 44 б.] жұмыстың нәтижелеріне сәйкес, (1.14)-жүйенің сан түзуінде шенелген жалғыз $\omega(t)$ шешімі бар болады және мына теңдеуді қанағаттандырады:

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t,s)\,f(s)ds + \sum_{\theta_i<t} X(t,\theta_i+)I_i \;, t \in \mathbb{R}.$$

Егер $t \neq \theta_i$ болса, онда

$$\left\|\frac{d\omega(t)}{dt}\right\| \leq \|A\| \int_{-\infty}^{t} \|X(t,s)\| \, \|f(s)\| ds + \|f(t)\| \leq$$

$$\leq \|A\| \int_{-\infty}^{t} M_f \, K e^{-\alpha(t-u)} du + M_f \leq \frac{\|A\| M_f K}{\alpha} + M_f.$$

Соңғы теңсіздік $\omega(t)$-шешімінің шартты бірқалыпты үзіліссіздігін береді. $\omega(t)$ шешімінің асимптотикалық орнықтылығы шенелген шешімнің орнықтылығы арқылы тексеріледі [67, 58 б.].

$(f(t), I_i)$ жұбы болжанбайтын жұп болғандықтан, 1.3-анықтамадағы (d)-(g) қасиеттері орындалатын оң ε_0, δ сандары және нақты сандардан құралған $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$ тізбектері мен бүтін сандардан құралған $l_n \to \infty$, $m_n \to \infty$ тізбектері табылады. Яғни, f функциясы мен I_i тізбегін сәйкесінше, анықтамадағы $\varphi(t)$ функциясы мен Γ_i тізбегіне ауыстырамыз.

$\omega(t)$ шешімінің Пуассон бойынша орнықтылығына тоқталайық. Нақты сандардың кез келген $[a,b], b > a$ интервалын және кез келген оң ε санын бекітеміз. Жеткілікті үлкен n саны үшін $\|\omega(t+t_n) - \omega(t_n)\| < \varepsilon,\ t \in [a,b]$ теңсіздігі орындалатынын көрсетелік. Төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратын $c < a, \xi > 0$ сандарын бектеміз:

$$\frac{M_f(K_0 + 2K)}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)} < \frac{\varepsilon}{5}, \tag{1.15}$$

$$\frac{4M_I K}{1 - e^{-\alpha\underline{\theta}}} e^{-\alpha(a-c)} < \frac{\varepsilon}{5}, \tag{1.16}$$

$$\frac{M_f(K_0 + 2K)(e^{\alpha\xi} - 1)}{\alpha(1 - e^{-\alpha\underline{\theta}})} < \frac{\varepsilon}{5}, \tag{1.17}$$

$$\frac{K\xi(M_I + 1)}{\alpha(1 - e^{-\alpha\underline{\theta}})} < \frac{\varepsilon}{5} \tag{1.18}$$

және

$$\frac{K\xi}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{1.19}$$

Егер n жеткілікті үлкен сан болса, онда

$$\sum_{\theta_i < t + t_n} X(t + t_n, \theta_i +) I_i = \sum_{\theta_i < t} X\big(t + t_n, \theta_{i+l_n} +\big) I_{i+l_n}$$

теңдеуі орындалады.

$\theta_i \in [c,b],, i \in \mathbb{Z}$ үшін $\left|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i\right| < \xi$, $\left\|I_{i+l_n} - I_i\right\| < \xi$ теңсіздіктері және $t \in [c,b]$ үшін $\|f(t+t_n) - f(t)\| < \xi$ теңсіздігі орындалатын жеткілікті үлкен натурал n санын бекітеміз. Жалпылықты жоғалтпай $\theta_i \le \theta_{i+l_n}$ болсын деп алайық. Барлық $t \in [a,b]$ үшін

$$\|\omega(t+t_n) - \omega(t)\| \le \int_{-\infty}^{c} \|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\| \|f(s+t_n)\| ds +$$

$$+ \sum_{\theta_i < c} \left\|X\left(t+t_n, \theta_{i+l_n}+\right) - X(t,\theta_i+)\right\| \left\|I_{i+l_n}\right\| +$$

$$+ \int_{c}^{t} \|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\| \|f(s+t_n)\| ds +$$

$$+ \sum_{c \le \theta_i < t} \left\|X\left(t+t_n, \theta_{i+l_n}+\right) - X(t,\theta_i+)\right\| \left\|I_{i+l_n}\right\| +$$

$$+ \int_{-\infty}^{c} \|X(t,s)\| \|f(s+t_n) - f(s)\| ds + \sum_{\theta_i < c} \|X(t,\theta_i+)\| \left\|I_{i+l_n} - I_i\right\| +$$

$$+ \int_{c}^{t} \|X(t,s)\| \|f(s+t_n) - f(s)\| ds + \sum_{c \le \theta_i < t} \|X(t,\theta_i+)\| \left\|I_{i+l_n} - I_i\right\|$$

теңсіздігін аламыз. Соңғы теңсіздік бірнеше қосылғыштан тұратын болғандықтан, бағалауды кезек-кезек жүргіземіз. (1.8) шартын қолданып,

$$\int_{-\infty}^{c} \|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\| \|f(s+t_n)\| ds +$$

$$+ \sum_{\theta_i < c} \left\|X\left(t+t_n, \theta_{i+l_n}+\right) - X(t,\theta_i+)\right\| \left\|I_{i+l_n}\right\| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{c} M_f K_0 e^{-\alpha(t-s)} ds + \sum_{i=-\infty}^{m-1} M_I K e^{-\alpha\left(t+t_n-\theta_{i+l_n}\right)} + \sum_{i=-\infty}^{m-1} M_I K e^{-\alpha(t-\theta_i)} <$$

$$< \left(\frac{M_f K_0}{\alpha} + \frac{2 M_I K}{1 - e^{-\alpha \underline{\theta}}}\right) e^{-\alpha(a-c)}$$

бағалауын аламыз. Әрі қарай

$$\int_{c}^{t}\|X(t+t_n,s+t_n)-X(t,s)\|\|f(s+t_n)\|ds+$$

$$+\sum_{c\le\theta_i<t}\left\|X\left(t+t_n,\theta_{i+l_n}+\right)-X(t,\theta_i+)\right\|\left\|I_{i+l_n}\right\|\le$$

$$\le\sum_{i=m}^{q}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+l_n}-t_n}M_fK_0e^{-\alpha(t-s)}ds+\sum_{i=m}^{q}M_IK\xi e^{-\alpha(t-\theta_i)}\le$$

$$\le\sum_{i=m}^{q}\frac{M_fK_0}{\alpha}e^{-\alpha t}\left(e^{\alpha\left(\theta_{i+l_n}-t_n\right)}-e^{\alpha\theta_i}\right)+\sum_{i=m}^{q}M_IK\xi e^{-\alpha(t-\theta_i)}\le$$

$$\le\sum_{i=m}^{q}\frac{M_fK_0}{\alpha}e^{-\alpha(t-\theta_i)}\left(e^{\alpha\,\xi}-1\right)+\sum_{i=m}^{q}M_IK\xi e^{-\alpha(t-\theta_i)}<$$

$$<\sum_{i=m}^{q}\frac{M_fK_0}{\alpha}\left(e^{\alpha\,\xi}-1\right)e^{-\alpha(t-\theta_i)}\sum_{i=m}^{q}e^{-\alpha\left(\theta_q-\theta_i\right)}+M_IK\xi e^{-\alpha(t-\theta_i)}\sum_{i=m}^{q}e^{-\alpha\left(\theta_q-\theta_i\right)}<$$

$$<\frac{M_fK_0\left(e^{\alpha\,\xi}-1\right)}{\alpha(1-e^{-\alpha\,\underline{\theta}})}+\frac{M_IK\xi}{1-e^{-\alpha\underline{\theta}}}$$

теңсіздігі орындалады. Бағалауды жалғастыра отырып,

$$\int_{-\infty}^{c}\|X(t,s)\|\|f(s+t_n)-f(s)\|ds+\sum_{\theta_i<c}\|X(t,\theta_i+)\|\left\|I_{i+l_n}-I_i\right\|\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{c}2M_fKe^{-\alpha(t-s)}ds+\sum_{i=-\infty}^{m-1}2M_IKe^{-\alpha(t-\theta_i)}<$$

$$<\left(\frac{2M_fK_0}{\alpha}+\frac{2M_IK}{1-e^{-\alpha\underline{\theta}}}\right)e^{-\alpha(a-c)}$$

теңсіздігін аламыз. Соңғы қосылғыш үшін

$$\int_c^t \|X(t,s)\|\|f(s+t_n)-f(s)\|ds + \sum_{c\le\theta_i<t} \|X(t,\theta_i+)\|\left\|I_{i+l_n}-I_i\right\| \le$$

$$\le \int_c^t K\xi e^{-\alpha(t-s)}ds + \sum_{i=m}^{q} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+l_n}-t_n} 2M_f K e^{-\alpha(t-s)}ds + \sum_{i=m}^{q} K\xi e^{-\alpha(t-\theta_i)} <$$

$$< \frac{K\xi}{\alpha} + \frac{2M_f K\left(e^{\alpha\,\xi}-1\right)}{\alpha(1-e^{-\alpha\,\underline{\theta}})} + \frac{K\xi}{1-e^{-\alpha\,\underline{\theta}}}$$

бағалауы орындалады.

Сонымен, (1.15)-(1.19) теңсіздіктерге сәйкес $\|\varphi(t+t_n)-\varphi(t)\| < \varepsilon$, $t\in[a,b]$ екендігі шығады. Яғни, шенелген интервалдағы B-топологияда $\omega(t+t_n)$, $n\to\infty$ функциялық тізбегі $\omega(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады.

$\omega(t)$ шешімінің болжанбайтындығы (1.4)-жүйенің $\varphi(t)$ шешімінің болжанбайтындығына ұқсас дәлелденеді.

1.2-мысал. Келесі импульстік жүйені қарастыралық:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 + 2\Phi^3(\mathrm{t}), t\neq\theta_i,\\ x_2' &= x_1 - 7\Phi(t), \quad t\neq\theta_i\\ \Delta x_1|_{t=\theta_i} &= -\frac{15}{16}x_1 + 3\gamma_i,\\ \Delta x_2|_{t=\theta_i} &= -\frac{15}{16}x_2 - 2\gamma_i, \end{aligned} \tag{1.20}$$

мұндағы $\gamma_i,\theta_i,\ i\in\mathbb{Z}$ тізбектері мен $\Phi(t)$ функциясы сәйкесінше, 1.1-мысалда анықталған болжанбайтын тізбектер мен ү.б.ф. және

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-\frac{15}{16} & 0\\ 0 & -\frac{15}{16}\end{pmatrix}.$$

$(f(t),I_i)=\left(\begin{pmatrix}2\Phi^3(\mathrm{t})\\ -7\Phi(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\gamma_i\\ -2\gamma_i\end{pmatrix}\right)$ жұбы [61, 2378 б.] жұмыстағы 1.4 мен 1.5 леммаларға сәйкес, 1.3-анықтама мағынасындағы болжанбайтын жұп болады.

A мен B матрицалары коммутативті және

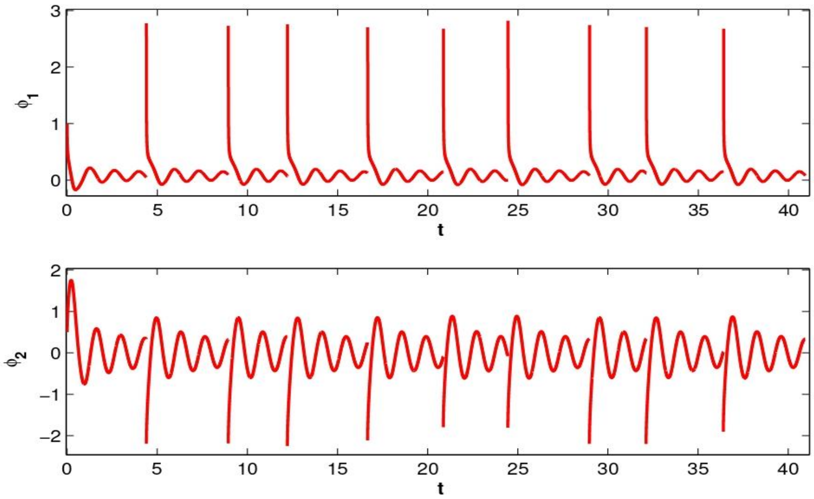
$$A+\frac{1}{T}\ln(I+B)=\begin{pmatrix}-ln2 & -1\\ 1 & -ln2\end{pmatrix},$$

матрицасының меншікті мәндері $\lambda_{1,2} = -ln2 \pm i$.

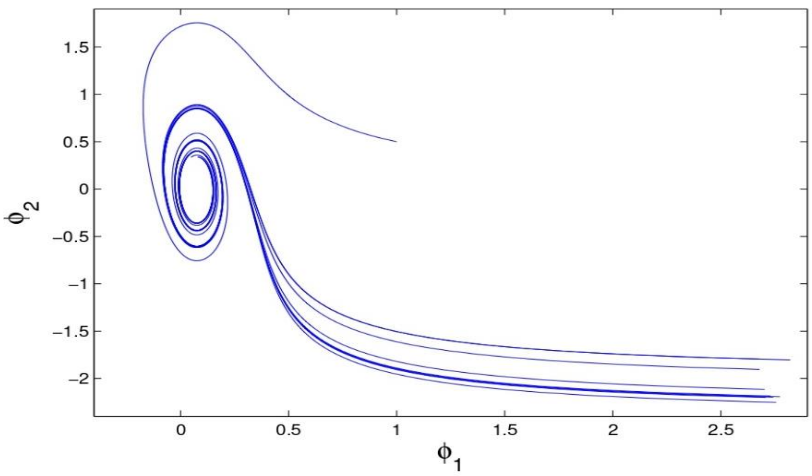
$$X(t,s) = P\begin{pmatrix} \cos(t-s) & -\sin(t-s) \\ \sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} P^{-1}(I+B)^{i(s,t)},$$

мұндағы $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (1.7)-теңсіздік $\alpha = 0.5$ және $K = 2$ болғанда (1.20) жүйесін қанағаттандырады. Демек, 1.2-теоремаға сәйкес (1.20)-жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.

Бастапқы мәндері белгісіз болғандықтан болжанбайтын шешімді модельдеу мүмкін емес. Сол себепті, уақыт артқан сайын $x(t)$ болжанбайтын шешіміне жақындайтын басқа бір $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ шешімінің графигін кескіндейміз. 1.3-суретте бастапқы шарттары $\phi_1(0) = 1$, $\phi_2(0)$=0,5 болатын $\phi(t)$ функциясының координаталары, ал 1.4-суретте $\phi(t)$ шешімінің траекториясы кескінделген.



Сурет 1.3 – (1.20)-жүйенің үзілісті болжанбайтын шешіміне жақындайтын ϕ_1, ϕ_2 функцияларының координаталары



Сурет 1.4 – $x(t)$ үзілісті болжанбайтын шешіміне жақындайтын $\phi(t)$ функциясының траекториясы

1.3 Импульсті квазисызықтық жүйелердің болжанбайтын шешімдері

Зерттеуіміздің қалған бөлімдерінде $u = (u_1, \dots, u_p)$ векторы үшін $\|u\|_1 = \max_{1 \le i \le p} |u_i|$ нормасын, ал $A = (a_{ij}),\ i,j = 1, \dots, p$ квадрат матрицасы үшін $\|A\| = \max_{1 \le i \le p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|$ нормасын қолданамыз, мұндағы $|\cdot|$ – абсолют шама белгісі.

1.1 бөлімшеде айтылған, p-өлшемді бөлікті үзіліссіз функциялардың $\mathcal{F}$ жиынын және анықталу облысы $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$, $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^p$ болатын p-өлшемді $g(t,x)$ вектор функциясын қарастырамыз. Егер әрбір бекітілген $x \in \mathbb{S}$ үшін $g(t,x) \in \mathcal{F}$ болса және оның үзіліс нүктелері мен x айнымалысының үзіліс нүктелері ортақ болса, онда $g(t,x)$ векторлық функциясы $\mathcal{F}(\mathbb{S})$ жиынынан алынған деп айтылады. Егер әрбір бекітілген $x \in \mathbb{S}$ үшін $\mathcal{F}(\mathbb{S})$ жиынынан алынған $g(t,x)$ мен $h(t,x)$ функциялары $\mathcal{F}$ жиынындағыдай ε-эквивалентті болса, онда олар $J \subseteq \mathbb{R}$ интервалында *ε-эквивалентті* деп аталады.

1.4-анықтама. Үзіліс нүктелері $\theta_i, i \in \mathbb{Z}$, болатын, t айнымалысы бойынша бөлікті үзіліссіз $f(t,x) \in \mathcal{F}(\mathbb{S}),\ f = (f_1, \ \dots, f_p)$ функциясы берілсін. Егер келесі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max_{i_1 < i < i_2} \left|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i\right| \to 0,\ n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\left|\theta_{m_n + l_n} - t_n - \theta_{m_n}\right| \ge \varepsilon_0$;

(c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma(\varepsilon) > 0\ \ t_1, t_2 \in (\theta_i, \theta_{i+1}],\ i \in \mathbb{Z} : |t_1 - t_2| < \sigma(\varepsilon)$
$\Rightarrow \sup_{\mathbb{S}} \|f(t_1, x) - f(t_2, x)\| < \varepsilon$;

(d) әрбір шенелген интервалда $\sup_{\mathbb{S}} \|f(t + t_n, x) - f(t,x)\| \to 0,\ n \to \infty$;

(e) әрбір натурал n үшін $f(t,x)$ пен $f(t + t_n, x)$ фунцияларының үзіліс нүктелерін қамтымайтын $[s_n - \delta,\ s_n + \delta] \subseteq \left[\theta_{m_n} \widehat{,}\ \theta_{m_n + l_n} - t_n\right]$ интервалынан алынған кез келген t үшін $\inf_{\mathbb{S}} \|f(t + t_n, x) - f(t,x)\| \ge \varepsilon_0$

теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0,\ \delta > 0$ сандары және нақты сандардың $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty,\ n \to \infty$ тізбектері мен бүтін сандардың $l_n \to \infty,\ m_n \to \infty,\ n \to \infty$ тізбектері табылатын болса, онда $f(t,x)$ функциясы *t бойынша үзілісті болжанбайтын функция* деп аталады.

1.5-анықтама. Үзіліс нүктелері $\theta_i, i \in \mathbb{Z}$, болатын, бөлікті үзіліссіз $f(t,x)$ функциясы t бойынша үзілісті болжанбайтын функция болсын және шенелген p-өлшемді $G_i(x) \in \mathbb{S},\ i \in \mathbb{Z}$, векторы берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max_{i_1 < i < i_2} \sup_{\mathbb{S}} \left\|G_{i+l_n}(x) - G_i(x)\right\| \to 0,\ n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\inf_{\mathbb{S}} \left\|G_{m_n + l_n}(x) - G_{m_n}(x)\right\| \ge \varepsilon_0$ теңсіздігі

орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$ сандары және бүтін сандардың $l_n \to \infty, m_n \to \infty, n \to \infty$ тізбектері табылатын болса, онда $(f(t,x), G_i(x))$ жұбы *болжанбайтын жұп* деп аталады.

1.3.1 Импульсті квазисызықтық жүйе

Келесі импульсті квазисызықтық жүйені қарастыралық

$$\begin{aligned} &x'(t) = Ax + f(t,x), \qquad t \neq \theta_i, \\ &\Delta x|_{t=\theta_i} = B\,x, \end{aligned} \tag{1.21}$$

мұндағы $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{S}$; $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – коммутативті матрицалар; θ_i, $i \in Z$ – (1.1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; $f(t,x): \mathbb{R} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}^p$ – 1.4-анықтама мағынасындағы болжанбайтын функция. $\det(I + B) \neq 0$.

Бөлікті үзіліссіз $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ функцияларының $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ ішкі кеңістігін енгіземіз. Ондағы норма $\|\varphi\|_1 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi(t)\|$ арқылы анықталады. $\varphi(t)$ функциясының үзіліс сәттері (1.21) жүйенің үзіліс сәттерімен бірдей болады.

Кеңістіктің элементері мынадай қасиеттерге ие болсын:
($\mathcal{D}1$) барлық $\varphi(t) \in \mathcal{D}$ үшін $\|\varphi(t)\|_1 < H$ орындалатындай оң H саны табылады;
($\mathcal{D}2$) әрбір $\varphi(t) \in \mathcal{D}$ үшін нақты сандар жиынының шенелген интервалындағы B –топологияда $\varphi(t + t_n) \to \varphi(t)$, мұндағы t_n (1.21)-жүйедегі $f(t,x)$ функциясы үшін таңдалған t_n-мен бірдей тізбек.

(1.21)- жүйені зерттеу үшін, оған сәйкес біртекті импульсті жүйенің фундаментальді матрицасын қолданамыз: $X(t,s) = e^{A(t-s)}(I + B)^{i([s,t))}$, t ≥ s. $A + \frac{1}{T} Ln(I + B)$ матрицасының меншікті мәндерін λ_j, $j = 1,2, \dots, p$, қарастырамыз және меншікті мәндерінің нақты бөліктері $\mathcal{R}e\lambda_j$ үшін мына шарт орындалсын деп ұйғарамыз:

($A1$) $\max\limits_j \mathcal{R}e\lambda_j = \lambda < 0, j = 1,\ 2,\ \dots, p$.

Олай болса,

$$\|X(t,s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, t \geq s \tag{1.22}$$

теңсіздігі орындалатындай $K \geq 1$ және $0 < \alpha < -\lambda$ сандары табылады.

Бұл бөлімде келесі шарттар қажет болады:
($A2$) барлық $t \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathbb{S}$ үшін $||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leq L_f ||x_1 - x_2||$ орындалатындай оң L_f тұрақтысы табылады;
($A3$) барлық $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ үшін $\|f(t,x)\| \leq M_f$ орындалатындай оң M_f саны табылады;
($A4$) $\dfrac{KM_f}{H} < \alpha$;
($A5$) $KL_f < \alpha$.

1.2-лемма. *Егер (A1) шарты орындалса, онда*

$$\|X(t + t_n, s + t_n) - X(t,s)\| \leq \mathcal{K}e^{-\alpha(t-s)} \tag{1.23}$$

теңсіздігі орынды, мұндағы $\mathcal{K} = K\ max(1, \|B\|)$.

1.2-лемма дәлелдеуі 1.1-лемманың дәледеуімен бірдей.

1.3-лемма. $\vartheta(t)$ *фунциясы (1.21)-жүйенің шенелген шешімі болуы үшін ол*

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t,s)\, f(s, \vartheta(s))ds, \ \ t \in \mathbb{R}$$

интегралық теңдеудің шешімі болуы қажетті және жеткілікті.

$\mathcal{D}$ жиынында келесі операторды еңгізелік:

$$\Pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t,s)\, f(s, \varphi(s))ds, \ \ t \in \mathbb{R}, \ \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

1.4-лемма. *$\mathcal{D}$ кеңістігі Π операторына қатысты инвариантты.*

Дәледеуі. $\varphi(t) \in \mathcal{D}$ функциясын бекітеміз. Барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін мынадай бағалауды аламыз:

$$\|\Pi\varphi(t)\| = \int_{-\infty}^{t} \|X(t,s)\, \| \|f(s,\varphi(s))\|ds \leq \int_{-\infty}^{t} Ke^{-\alpha(t-s)} M_f\, ds \leq \frac{KM_f}{\alpha}.$$

Демек, $(A4)$ шарты бойынша $\|\Pi\varphi(t)\|_1 < H$ теңсіздігі дұрыс болады.

Әрі қарай, $\Pi\varphi(t)$-дің Пуассон бойынша орнықтылығын, яғни $(\mathcal{D}2)$ қасиетінің дұрыстығын тексереміз.

Шенелген $[a, b], b > a$ интервалында кез келген оң ε санын бекітеміз. Жеткілікті үлкен n саны үшін $\|\Pi\varphi(t + t_n) - \Pi\varphi(t)\| < \varepsilon, \ t \in [a, b]$ теңсіздігі орындалатындығын көрсетеміз. Келесі теңсіздіктер орындалатындай $c < a$, $\xi > 0$ сандарын таңдап алайық:

$$\frac{\mathcal{K}M_f + 2KL_fH}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1.24}$$

$$\frac{\mathcal{K}M_f + 2KL_fH}{\alpha(1 - e^{-\alpha\underline{\theta}})} (e^{\alpha\xi} - 1) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.25}$$

және

$$\frac{K\xi L_f}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.26}$$

$\theta_i \in [c, b], \ i \in \mathbb{Z}$ үшін $\left|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i\right| < \xi$ және $t \in [c, b], x \in \mathbb{S}$ үшін $\|\varphi(t + t_n) - \varphi(t)\| < \xi$ мен $\|f(t + t_n, x) - f(t, x)\| < \xi$ орындалатын жеткілікті үлкен натурал n санын қарастырамыз.

Жалпылықты жоғалтпай, $m, q \in \mathbb{Z}$ үшін

$$\theta_{m-1} \leq \ c \leq \theta_m < \cdots < \theta_q \leq t \leq \theta_{q+1}$$

теңсіздігі орындалады деп ұйғарамыз. Онда барлық $t \in [a, b]$ үшін

$$\|\Pi\varphi(t+t_n)-\Pi\varphi(t)\| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{c} \|X(t+t_n,s+t_n)-X(t,s)\| \big\|f\big(s+t_n,\varphi(s+t_n)\big)\big\| ds +$$

$$+\int_{c}^{t} \|X(t+t_n,s+t_n)-X(t,s)\| \big\|f\big(s+t_n,\varphi(s+t_n)\big)\big\| ds +$$

$$+\int_{-\infty}^{c} \|X(t,s)\| \big\|f(s+t_n,\varphi(s+t_n)\,)-f\big(s,\varphi(s)\big)\big\| ds +$$

$$+\int_{c}^{t} \|X(t,s)\| \big\|f(s+t_n,\varphi(s+t_n)\,)-f\big(s,\varphi(s)\big)\big\| ds$$

теңсіздігін аламыз. (1.23) бағалауын қолдансақ,

$$\int_{-\infty}^{c} \|X(t+t_n,s+t_n)-X(t,s)\| \big\|f\big(s+t_n,\varphi(s+t_n)\big)\big\| ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{c} \mathcal{K} e^{-\alpha(t-s)} M_f ds < \frac{\mathcal{K} M_f}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)}$$

шығады. Сонымен бірге

$$\int_{c}^{t} \|X(t+t_n,s+t_n)-X(t,s)\| \big\|f\big(s+t_n,\varphi(s+t_n)\big)\big\| ds \le$$

$$\le \sum_{i=m}^{q} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+l_n}-t_n} \mathcal{K} e^{-\alpha(t-s)} M_f ds \le \sum_{i=m}^{q} \frac{\mathcal{K} M_f}{\alpha} e^{-\alpha(t-\theta_i)} \big(e^{\alpha\,\xi}-1\big) <$$

$$< \sum_{i=m}^{q} \frac{\mathcal{K} M_f}{\alpha} \big(e^{\alpha\,\xi}-1\big) e^{-\alpha(t-\theta_i)} \sum_{i=m}^{q} e^{-\alpha\left(\theta_q-\theta_i\right)} < \frac{\mathcal{K} M_f\big(e^{\alpha\,\xi}-1\big)}{\alpha(1-e^{-\alpha\,\underline{\theta}})}$$

теңсіздігі де орындалады. Осыған ұқсас

$$\int_{-\infty}^{c} \|X(t,s)\| \left\| f(s+t_n, \varphi(s+t_n)\,) - f\big(s, \varphi(s)\big) \right\| ds +$$

$$+ \int_{c}^{t} \|X(t,s)\| \left\| f(s+t_n, \varphi(s+t_n)\,) - f\big(s, \varphi(s)\big) \right\| ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{c} K e^{-\alpha(t-s)} 2L_f H ds + \int_{c}^{t} K e^{-\alpha(t-s)} L_f \xi ds + \sum_{i=m}^{q} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+l_n}-t_n} K e^{-\alpha(t-s)} 2L_f H ds <$$

$$< 2\frac{2KL_f H}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)} + \frac{K\xi L_f}{\alpha} + \frac{2KL_f H\left(e^{\alpha\,\xi} - 1\right)}{\alpha(1 - e^{-\alpha\,\underline{\theta}})}$$

теңсіздігін аламыз.

(1.24)-(1.26) теңсіздіктеріне сүйеніп, $\|\Pi\varphi(t+t_n) - \Pi\varphi(t)\| < \varepsilon$, $t \in [a,b]$ болатынын көрсеттік. Демек, шенелген интервалдағы B-топологияда $\Pi\varphi(t+t_n)$ функциялық тізбегі $\Pi\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады. Яғни, $\Pi\varphi(t)$ функциясы $(\mathcal{D}2)$ шартын қағаттандырады, $\mathcal{D}$ жиыны Π операторына қатысты инвариантты.

1.5-лемма. *Π операторы $\mathcal{D}$ кеңістігінің ішінде кысушы оператор.*

Дәлелдеуі. Айталық, $\varphi_1(t)$ және $\varphi_2(t)$ функциялары $\mathcal{D}$-нің элементтері болсын. Олай болса,

$$\|\Pi\varphi_1(t) - \Pi\varphi_2(t)\| \le \int_{-\infty}^{t} \|X(t,s)\| \|f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))\| ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} K e^{-\alpha(t-s)} L_f \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \ \le \frac{KL_f}{\alpha} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_1$$

теңсіздігі орындалады. Демек, (A4) шартына сәйкес Π операторы $\mathcal{D}$ кеңістігінің ішінде кысушы болады.

1.3-теорема. *Егер (A1)-(A5) шарттары орындалса, онда (1.21) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Дәлелдеуі. Алдымен, $\mathcal{D}$-нің толық кеңістік екенін көрсетейік. $\mathcal{D}$ кеңістігінде, $\mathbb{R}$-де $\phi(t)$ шектік функциясына жинақталатын $\phi_k(t)$ Коши тізбегін қарастырайық. $(\mathcal{D}2)$ қасиетінен бастайық, себебі $(\mathcal{D}1)$ қасиетінің орындалатындығы оңай тексеріледі. Жабық және шенелген $I \subset \mathbb{R}$ интервалын бекітеміз. Осы интервалда сәйкесінше $\phi(t)$ мен $\phi_k(t)$ функцияларының үзіліс нүктелерін θ_i, $i = j, j+1, \dots, j+m$ арқылы, ал $\phi(t+t_n)$ мен $\phi_k(t+t_n)$ функцияларының үзіліс нүктелерін $\theta_i^n = \theta_{i+l_n} - t_n$, $i = j, j+1, \dots, j+m$, арқылы белгілейік. n саны $|\theta_i^n - \theta_i| < \varepsilon$, $i = j, j+1, \dots, j+m$ орындалатын жеткілікті үлкен сан болсын. $\phi_k(t)$ тізбегінің жинактылығынан, егер k жеткілікті үлкен болса, $\|\phi(t+t_n) - \phi_k(t+t_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ мен $\|\phi(t) - \phi_k(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ аламыз. $\phi_k(t) \in \mathcal{D}$ тізбегі ($\mathcal{D}2$) шартты қанағаттандыратын болғандықтан, жеткілікті үлкен n үшін $\|\phi_k(t+t_n) - \phi_k(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $t \notin [\widehat{\theta_\iota, \theta_i^n}]$, $|\theta_i^n - \theta_i| < \varepsilon$, $i = j, j+1, \dots, j+m$. Демек, жеткілікті үлкен n мен k, және $t \notin [\widehat{\theta_\iota, \theta_i^n}]$ мен $|\theta_i^n - \theta_i| < \varepsilon$, $i = j, j+1, \dots, j+m$ үшін мына теңісіздік орындалады:

$$\|\phi(t+t_n) - \phi(t)\| \leq \|\phi(t+t_n) - \phi_k(t+t_n)\| +$$

$$\|\phi_k(t+t_n) - \phi_k(t)\| + \|\phi(t) - \phi_k(t)\| < \varepsilon.$$

Сонымен, I интервалындағы B-топологияда $\phi(t+t_n), n \to \infty$ функциялық тізбегі $\phi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады. $\mathcal{D}$ кеңістігінің толықтығы дәлелденді.

Қысушы бейнелеулер туралы теореманы, 1.4 және 1.5-леммаларымен қатар қолдану арқылы (1.21) жүйенің жалғыз $\vartheta(t) \in \mathcal{D}$ шешімі бар екендігін алуға болады.

Әрі қарай, $\vartheta(t)$ функциясының ү.б.ф. болатындығын көрсетеміз.

Келесі қатынастарды қолданамыз:

$$\vartheta(t) = \vartheta(s_n) + \int_{s_n}^{t} A\vartheta(s)ds + \int_{s_n}^{t} f(s, \vartheta(s))ds$$

және

$$\vartheta(t+t_n) = \vartheta(s_n+t_n) + \int_{s_n}^{t} A\vartheta(s+t_n)ds + \int_{s_n}^{t} f(s+t_n, \vartheta(s+t_n))ds.$$

Екіншісінен біріншісін азайту арқылы

$$\vartheta(t+t_n) - \vartheta(t) = \vartheta(s_n+t_n) - \vartheta(s_n) + \int_{s_n}^{t} A[\vartheta(s+t_n) - \vartheta(s)]ds +$$

$$+ \int_{s_n}^{t} [f(s+t_n, \vartheta(s+t_n)) - f(s, \vartheta(s))]ds$$

қатынасын аламыз.

Төмендегі теңсіздіктер орындалатындай оң κ және натурал l, k сандарын қарастырамыз:

$$\kappa < \delta, \tag{1.27}$$

$$\|f(t_n + s_n + s, x) - f(s_n + s, x)\| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}, \tag{1.28}$$

$$\kappa\left(\frac{1}{4} - \left(L_f + \left\|A\right\|\right)\left(\frac{1}{l} + \frac{2}{\kappa}\right)\right) > \frac{4}{3l}, \tag{1.29}$$

$$\left\|\vartheta(t+u) - \vartheta(t)\right\| < \varepsilon_0 \, min\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{3l}\right), t \in \mathbb{R}, |u| < \kappa. \tag{1.30}$$

l, k, κ және $n \in \mathbb{N}$ сандарын бекітілген сандар деп алайық.

$\Delta = ||\vartheta(s_n + t_n) - \vartheta(s_n)||$ белгілеуін қолданып, мүмкін болатын екі жағдайды қарастырайық: (i) $\Delta \geq \varepsilon_0/l$ және (ii) $\Delta < \varepsilon_0/l$. Сонда дәлелдеу екі бөлікке бөлінеді.

(i) $\Delta \geq \varepsilon_0/l$ жағдайында, егер $t \in [s_n - \kappa, s_n + \kappa]$ және $n \in \mathbb{N}$ болса, онда

$$\|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(t)\| \geq \|\vartheta(s_n + t_n) - \vartheta(s_n)\| - \|\vartheta(s_n) - \vartheta(t)\| -$$

$$-\|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(s_n + t_n)\| \geq \frac{\varepsilon_0}{l} - \frac{\varepsilon_0}{3l} - \frac{\varepsilon_0}{3l} = \frac{\varepsilon_0}{3l}$$

аламыз.

(ii) (1.30) қолдансақ, егер $t \in [s_n, s_n + \kappa]$ болса

$$\|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(t)\| \leq \|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(s_n + t_n)\| + \|\vartheta(s_n + t_n) - \vartheta(s_n)\| +$$

$$+\|\vartheta(s_n) - \vartheta(t)\| < \frac{\varepsilon_0}{k} + \frac{\varepsilon_0}{l} + \frac{\varepsilon_0}{k} = \varepsilon_0\left(\frac{1}{l} + \frac{2}{k}\right)$$

шығарамыз.

(1.27) - (1.30) қолданып, $t \in [s_n + \kappa/2, s_n + \kappa]$ үшін

$$\|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(t)\| \geq \int_{s_n}^{t} \|f(s + t_n, \vartheta(s + t_n)) - f(s, \vartheta(s + t_n))\| ds -$$

$$- \int_{s_n}^{t} \left\|f\left(s, \vartheta(s + t_n)\right) - f\left(s, \vartheta(s)\right)\right\| ds - \|A\| \int_{s_n}^{t} \|\vartheta(s + t_n) - \vartheta(s)\| ds -$$

$$-\left|\left|\vartheta(s_n+t_n)-\vartheta(s_n)\right|\right| \geq \frac{\kappa}{4}\varepsilon_0-\kappa L_f\varepsilon_0\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)-\kappa||A||\varepsilon_0\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{l} \geq \frac{\varepsilon_0}{3l}$$

табамыз. Сонымен, $\vartheta(t)$ ү.б.ф. болады.

Соңында, $\vartheta(t)$ шешімінің орнықтылығын дәлелдейік. Ол үшін

$$\vartheta(t)=X(t,t_0)\vartheta(t_0)+\int_{t_0}^{t}X(t,s)f(s,\vartheta(s))ds$$

теңдігін қарастырамыз. Сәйкесінше, $y(t)$ (1.21) жүйенің басқа шешімі болсын. Сонда

$$y(t)=X(t,t_0)y(t_0)+\int_{t_0}^{t}X(t,s)f(s,y(s))ds.$$

$y(t)$-ні $\vartheta(t)$-дан азайту арқылы келесі теңдікті аламыз:

$$\vartheta(t)-y(t)=X(t,t_0)[\vartheta(t_0)-y(t_0)]+\int_{t_0}^{t}X(t,s)[f(s,\vartheta(s))-f(s,y(s))]ds.$$

Бұдан

$$\|\vartheta(t)-y(t)\|=\|X(t,t_0)\|\|\vartheta(t_0)-y(t_0)\|+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|X(t,s)\|\left\|f\left(s,\vartheta(s)\right)-f\left(s,y(s)\right)\right\|ds\leq$$

$$\leq Ke^{\alpha(t-t_0)}\|\vartheta(t_0)-y(t_0)\|+K\int_{t_0}^{t}e^{\alpha(t-s)}L_f\|\,\vartheta(s)-y(s)\|ds$$

теңсіздігін алуға болады. Гроноулл-Беллман леммасын қолданып [66, 16 б.],

$$\|\vartheta(t)-y(t)\|\leq K\|\vartheta(t_0)-y(t_0)\|e^{(KL_f-\alpha)(t-t_0)}$$

теңсіздігін аламыз.

Сонымен, (A5) шарты бойынша $\vartheta(t)$ функциясы (1.21)-жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі екендігі шығады.

1.3.2 Импульстері болжанбайтын квазисызықтық жүйелер

Келесі импульсті квазисызықтық жүйені қарастыралық:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= Ax + f(t,x), \qquad t \neq \theta_i,\\
\Delta x|_{t=\theta_i} &= Bx + G_i(x),
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

мұндағы $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{S}$; $A \in \mathbb{R}^{p\times p}, B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – коммутативті матрицалар; $\theta_i,\ i \in Z$ – (1.1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; $(f(t,x),\ G_i(x))$ 1.5-анықтама мағынасындағы болжанбайтын жұп. $\det(I+B) \neq 0$.

Төмендегі шарттар орындалады деп ұйғаралық:

$(A6)$ барлық $i \in \mathbb{Z}, x_1, x_2 \in \mathbb{S}$ үшін $||G_i(x_1) - G_i(x_2)|| \leq L_G||x_1 - x_2||$ теңсіздігі орындалатындай оң L_G тұрақтысы бар болады;

$(A7)$ $\sup\limits_{x\in\mathbb{S}}\|G(x)\| \leq M_G$ орындалатындай оң M_G саны табылады;

$(A8)$ $\dfrac{KM_f}{\alpha} + \dfrac{KM_G}{1-e^{-\alpha\underline{\theta}}} < H$;

$(A9)$ $\dfrac{KL_f}{\alpha} + \dfrac{KL_G}{1-e^{-\alpha\underline{\theta}}} < 1$;

$(A10)$ $KL_f + \dfrac{1}{\underline{\theta}}\ln(1+KL_G) < 1$.

1.3.1-бөлімшедегі $\mathcal{K} = K\,max(1, \|B\|)$ белгілеуін бұл бөлімшеде де қолданамыз.

1.4-теорема. *Егер (A1)-(A2), (A6)-(A10) шарттары орындалса және $(f(t,x),\ G_i(x))$ жұбы 1.5-анықтама мағынасындағы болжанбайтын жұп болса, онда (1.31) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Дәлелдеуі. Импульсті диффенциалдық теңдеулер теориясына сәйкес, (1.31)-жүйенің

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t,s)\, f\big(s,\omega(s)\big)ds + \sum_{\theta_i<t} X(t,\theta_i+)G_i(\omega(\theta_i))\,, t \in \mathbb{R}$$

интегралдық теңдеуін қағаттандыратын, сан түзуінде шенелген жалғыз шешімі бар болады.

$\mathcal{D}$ кеңістігінде $\Pi\psi(t)$ операторын еңгізелік:

$$\Pi\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t,s)\, f\big(s,\psi(u)\big)ds + \sum_{\theta_i<t} X(t,\theta_i+)G_i(\psi(\theta_i))\,, t \in \mathbb{R}\,.$$

Кез кезген бекітілген $\psi(t) \in \mathcal{D}$ функциясы үшін

$$\|\Pi\psi(t)\| = \int_{-\infty}^{t} \|X(t,s)\|\, \big\|f\big(s,\psi(s)\big)\big\|ds + \sum_{\theta_i<t} \|X(t,\theta_i+)\|\|G_i(\psi(\theta_i))\|$$

$$\int_{-\infty}^{t} Ke^{-\alpha(t-s)}M_f ds + \sum_{i=-\infty}^{m-1} Ke^{-\alpha(t-\theta_i)}M_G \leq \frac{KM_f}{\alpha} + \frac{KM_G}{1-e^{\alpha\underline{\theta}}}$$

бағалауы орындалады. Яғни, (A8) шарты бойынша $\|\Pi\psi(t)\|_1 < H$ екені шығады. Сонымен қатар, $\Pi\psi(t)$-функциясының туындысы шенелген функция болады. Бұдан функцияның шартты бірқалыпты үзіліссіздігі шығады.

$\Pi\psi(t)$-дің Пуассон бойынша орнықтылық қасиетін, яғни ($\mathcal{D}2$) қасиетін қанағаттандыратынын тексерелік.

Шенелген $[a,b],\ -\infty < a < b < \infty$ интервалын және кез келген оң ε санын бекітеміз. Жеткілікті үлкен n саны үшін $\|\Pi\psi(t+t_n) - \Pi\psi(t)\| < \varepsilon,\ t \in [a,b]$ теңсіздігі орындалатынын көрсетелік.

Келесі теңсіздіктерді қанағаттандыратын $c < a, \xi > 0$ сандарын таңдап алайық:

$$\frac{M_f\mathcal{K} + 2K(L_fH + M_G)}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{1.32}$$

$$\frac{2K(L_GH + 2M_G)}{1-e^{-\alpha\underline{\theta}}} e^{-\alpha(a-c)} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{1.33}$$

$$\frac{M_f\mathcal{K} + 2K(L_fH + M_G)}{\alpha(1-e^{-\alpha\underline{\theta}})}(e^{\alpha\xi} - 1) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{1.34}$$

және

$$K\xi\left(\frac{L_f + 1}{\alpha} + \frac{M_G + L_G + 1}{1-e^{-\alpha\underline{\theta}}}\right) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.35}$$

n саны, $\theta_i \in [c,b],\ i \in \mathbb{Z}$ үшін $\left|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i\right| < \xi,\ \left\|\psi(\theta_{i+l_n}) - \psi(\theta_i)\right\| < \xi$ және $\left\|G_{i+l_n}(\psi(\theta_i)) - G_i(\psi(\theta_i))\right\| < \xi$, ал $t \in [c,b],\ x \in \mathbb{S}$ үшін $\|\psi(t+t_n) - \psi(t)\| < \xi,\ \|f(t+t_n,x) - f(t,x)\| < \xi$ орындалатын жеткілікті үлкен натурал сан болсын. Жалпылықты жоғалтпай $\theta_i \leq \theta_{i+l_n}$ болсын деп алайық. Барлық $t \in [a,b]$ үшін мына теңсіздікті аламыз:

$$\|\Pi\psi(t+t_n) - \Pi\psi(t)\| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{c} \|X(t+t_n, s+t_n) - X(t,s)\|\|f(s+t_n, \psi(s+t_n))\|ds +$$

$$+ \sum_{\theta_i < c} \left\|X\left(t+t_n, \theta_{i+l_n}+\right) - X(t,\theta_i+)\right\|\left\|G_{i+l_n}(\psi(\theta_{i+l_n}))\right\| +$$

$$+\int_c^t \|X(t+t_n,s+t_n)-X(t,s)\|\|f(s+t_n,\psi(s+t_n))\|ds+$$

$$+\sum_{c\le\theta_i<t}\left\|X\big(t+t_n,\theta_{i+l_n}+\big)-X(t,\theta_i+)\right\|\left\|G_{i+l_n}(\psi(\theta_{i+l_n}))\right\|+$$

$$+\int_{-\infty}^c \|X(t,s)\|\|f(s+t_n,\psi(s+t_n))-f(s,\psi(s))\|ds+$$

$$+\sum_{\theta_i<c}\|X(t,\theta_i+)\|\left\|G_{i+l_n}(\psi(\theta_{i+l_n}))-G_i(\psi(\theta_i))\right\|+$$

$$+\int_c^t \|X(t,s)\|\|f(s+t_n,\psi(s+t_n))-f(s,\psi(s))\|ds+$$

$$+\sum_{c\le\theta_i<t}\|X(t,\theta_i+)\|\left\|G_{i+l_n}(\psi(\theta_{i+l_n}))-G_i(\psi(\theta_i))\right\|.$$

(1.23) теңсіздігін қолданып

$$\int_{-\infty}^c \|X(t+t_n,s+t_n)-X(t,s)\|\|f(s+t_n,\psi(s+t_n))\|ds+$$

$$+\sum_{\theta_i<c}\left\|X\big(t+t_n,\theta_{i+l_n}+\big)-X(t,\theta_i+)\right\|\left\|G_{i+l_n}(\psi(\theta_{i+l_n}))\right\|\le$$

$$\le\int_{-\infty}^c \mathcal{K}e^{-\alpha(t-s)}M_f ds+\sum_{i=-\infty}^{m-1}Ke^{-\alpha\left(t+t_n-\theta_{i+l_n}\right)}M_G+\sum_{i=-\infty}^{m-1}Ke^{-\alpha(t-\theta_i)}M_G<$$

$$<\left(\frac{\mathcal{K}M_f}{\alpha}+\frac{2KM_G}{1-e^{-\alpha\underline{\theta}}}\right)e^{-\alpha(a-c)}$$

бағалауын аламыз. Әрі қарай келесі бағалауды шығарамыз:

$$\int_c^t \|X(t+t_n,s+t_n)-X(t,s)\|\|f(s+t_n,\psi(s+t_n))\|ds+$$

$$+\sum_{c\le\theta_i<t}\left\|X\left(t+t_n,\theta_{i+l_n}+\right)-X(t,\theta_i+)\right\|\left\|G_{i+l_n}(\psi(\theta_{i+l_n}))\right\|\le$$

$$\le\sum_{i=m}^{q}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+l_n}-t_n}\mathcal{K}e^{-\alpha(t-s)}M_f ds+\sum_{i=m}^{q}Ke^{-\alpha(t-\theta_i)}\xi M_G\le$$

$$\le\sum_{i=m}^{q}\frac{\mathcal{K}M_f}{\alpha}e^{-\alpha t}\left(e^{\alpha\left(\theta_{i+l_n}-t_n\right)}-e^{\alpha\theta_i}\right)+\sum_{i=m}^{q}Ke^{-\alpha(t-\theta_i)}\xi M_G\le$$

$$\le\sum_{i=m}^{q}\frac{\mathcal{K}M_f}{\alpha}e^{-\alpha(t-\theta_i)}\left(e^{\alpha\,\xi}-1\right)+\sum_{i=m}^{q}K\xi e^{-\alpha(t-\theta_i)}M_G<$$

$$<\sum_{i=m}^{q}\frac{\mathcal{K}M_f}{\alpha}\left(e^{\alpha\,\xi}-1\right)e^{-\alpha(t-\theta_i)}\sum_{i=m}^{q}e^{-\alpha\left(\theta_q-\theta_i\right)}+$$

$$+K\xi M_G e^{-\alpha(t-\theta_i)}\sum_{i=m}^{q}e^{-\alpha\left(\theta_q-\theta_i\right)}<\frac{\mathcal{K}M_f\left(e^{\alpha\,\xi}-1\right)}{\alpha(1-e^{-\alpha\,\underline{\theta}})}+\frac{K\xi M_G}{1-e^{-\alpha\underline{\theta}}}.$$

Дәл солай, барлық $t\in[a,b]$ үшін

$$\int_{-\infty}^{c}\|X(t,s)\|\|f(s+t_n,\psi(s+t_n))-f(s,\psi(s))\|ds+$$

$$+\sum_{\theta_i<c}\|X(t,\theta_i+)\|\left\|G_{i+l_n}(\psi(\theta_{i+l_n}))-G_i(\psi(\theta_i))\right\|\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{c}\|X(t,s)\|(L_f\|\,\psi(s+t_n)-\psi(s)\|+2M_f)ds+$$

$$+\sum_{\theta_i<c}\|X(t,\theta_i+)\|(L_G\left\|\,\psi(\theta_{i+l_n})-\psi(\theta_i)\right\|+2M_G)\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{c}2Ke^{-\alpha(t-s)}(L_fH+M_f)ds+\sum_{i=-\infty}^{m-1}2Ke^{-\alpha(t-\theta_i)}\,(L_GH+M_G)<$$

$$<\left(\frac{2K(L_fH+M_f)}{\alpha}+\frac{2K(L_GH+M_G)}{1-e^{-\alpha\underline{\theta}}}\right)e^{-\alpha(a-c)}$$

бағалауын шығарамыз. Бұған қоса, мына бағалау да орындалады:

$$\int_c^t \|X(t,s)\| \|f(s+t_n, \psi(s+t_n)) - f(s,\psi(s))\| ds +$$

$$+ \sum_{c \le \theta_i < t} \|X(t,\theta_i +)\| \left\| G_{i+l_n}(\psi(\theta_{i+l_n})) - G_i(\psi(\theta_i)) \right\| \le$$

$$\le \int_c^t \|X(t,s)\| \big(L_f \| \psi(s+t_n) - \psi(s)\| + \xi\big) du +$$

$$+ \sum_{i=m}^{q} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+l_n} - t_n} \|X(t,s)\| (L_f \| \psi(s+t_n) - \psi(s)\| + 2M_f) ds +$$

$$+ \sum_{c \le \theta_i < t} \|X(t,\theta_i +)\| (L_G \left\| \psi(\theta_{i+l_n}) - \psi(\theta_i) \right\| + \xi) \le$$

$$\le \int_c^t K e^{-\alpha(t-s)} \big(L_f + 1\big) \xi ds + \sum_{i=m}^{q} K e^{-\alpha(t-\theta_i)} \big(L_g + 1\big) \xi +$$

$$+ \sum_{i=m}^{q} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+l_n} - t_n} K e^{-\alpha(t-s)} (L_f H + M_f) ds <$$

$$< \frac{K\xi\big(L_f + 1\big)}{\alpha} + \frac{2K(L_f H + M_f)}{\alpha} \frac{\big(e^{\alpha\,\xi} - 1\big)}{(1 - e^{-\alpha\,\underline{\theta}})} + \frac{K\xi(L_G + 1)}{1 - e^{-\alpha\,\underline{\theta}}}.$$

(1.32)-(1.35) теңсіздіктерін ескерсек, $\|\Pi\psi(t+t_n) - \Pi\psi(t)\| < \varepsilon, t \in [a,b]$ шығады. Олай болса, шенелген интервалдағы B-топологияда $\Pi\psi(t+t_n), n \to \infty$ функциялық тізбегі $\Pi\psi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады. Яғни, $\mathcal{D}$ жиыны Π операторына қатысты инвариантты.

Енді $\Pi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ операторының қысушы оператор екенін көрсетейік. $\psi_1(t)$ мен $\psi_2(t)$ функциялары $\mathcal{D}$ кеңістігінің мүшелері болсын делік. Олай болса,

$$\|\Pi\psi_1(t) - \Pi\psi_2(t)\| \le \int_{-\infty}^{t} \|X(t,s)\| \big\|f\big(s,\psi_1(s)\big) - f\big(s,\psi_2(s)\big)\big\| ds +$$

$$+\sum_{\theta_i<c}\|X(t,\theta_i+)\|\|G_i(\psi_1(\theta_i))-G_i(\psi_2(\theta_i))\|\le$$

$$\le\int\limits_{-\infty}^{t}Ke^{-\alpha(t-s)}L_f\|\psi_1(s)-\psi_2(s)\|ds+\sum_{\theta_i<c}Ke^{-\alpha(t-\theta_i)}L_f\|\psi_1(\theta_i)-\psi_2(\theta_i)\|\le$$

$$\le\left(\frac{KL_f}{\alpha}+\frac{KL_G}{1-e^{\alpha\underline{\theta}}}\right)\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\|_1$$

шарты орындалады.

Сонымен, (A9) шартынан $\Pi\colon\mathcal{D}\to\mathcal{D}$ операторының қысушы оператор екені шығады. Қысушы бейнелеулер туралы теорема бойынша (1.31)-жүйенің жалғыз $\omega(t)\in\mathcal{D}$ шешімі бар болады.

$\omega(t)$ шешімінің болжанбайтындығын дәлелдеу жолы (1.21)-жүйе жағдайымен бірдей болады.

Енді $\omega(t)$ шешімінің орнықтылығын дәлелделік. Ол үшін келесі теңдікті қарастыралық:

$$\omega(t)=X(t,t_0)\omega(t_0)+\int_{t_0}^{t}X(t,s)f(s,\omega(s))ds+\sum_{t_0\le\theta_i<t}X(t,\theta_i+)G_i(\omega(\theta_i)).$$

Егер $z(t)$ (1.31) жүйенің басқа бір шешімі болса, онда

$$z(t)=X(t,t_0)z(t_0)+\int_{t_0}^{t}X(t,s)f(s,z(s))ds+\sum_{t_0\le\theta_i<t}X(t,\theta_i+)G_i(z(\theta_i)).$$

Келесі айырымды қолданып

$$\omega(t)-z(t)=X(t,t_0)[\omega-z(t_0)]+\int_{t_0}^{t}X(t,s)[f(s,\omega(s))-f(s,z(s))]ds+$$

$$+\sum_{t_0\le\theta_i<t}X(t,\theta_i+)[G_i\big(\omega(\theta_i)\big)-G_i(z(\theta_i))],$$

мына теңсіздікті аламыз

$$\|\omega(t)-z(t)\|=\|X(t,t_0)\|\|\omega(t_0)-z(t_0)\|+$$

$$\int_{t_0}^{t}\|X(t,s)\|\big\|f\big(s,\omega(s)\big)-f\big(s,z(s)\big)\big\|ds+$$

$$+\sum_{t_0\le\theta_i<t}\|X(t,\theta_i+)\|\|G_i(\omega(\theta_i))-G_i(z(\theta_i))\|\le$$

$$\le Ke^{\alpha(t-t_0)}\|\omega(t_0)-z(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}Ke^{\alpha(t-s)}L_f\|\,\omega(s)-z(s)\|ds+$$

$$+\sum_{t_0\le\theta_i<t}Ke^{\alpha(t-\theta_i)}L_G\|\omega(\theta_i)-z(\theta_i)\|.$$

Әрі қарай, бөлікті үзіліссіз функциялар үшін Гронуолл-Беллман леммасын қолданып [69, 17 б.],

$$\|\omega(t)-z(t)\|\le K\|\omega(t_0)-z(t_0)\|e^{(KL_f-\alpha)(t-t_0)}(1+KL_G)^{i(t_0,t)}.$$

теңсіздігін аламыз. Бұдан

$$\|\omega(t)-z(t)\|\le K\|\omega(t_0)-z(t_0)\|e^{\left(KL_f-\alpha+\frac{1}{\underline{\theta}}ln(1+KL_G)\right)(t-t_0)},t\ge t_0 \quad (1.36)$$

шығады.

Сонымен, (A10) шарты бойынша $\omega(t)$ функциясының (1.31)-жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі екендігі шығады.

1.3-мысал. Алдымен жүйенің үзіліс сәттерін анықтап алайық.

Келесі қатынас

$$\theta_i=\ 6i+\gamma_i\ ,i\in\mathbb{Z} \quad (1.37)$$

арқылы анықталатын $\theta_i,i\in\mathbb{Z}$ тізбегін қарастыралық, мұндағы $\gamma_i,i\in\mathbb{Z}$ – (1.2) логистикалық теңдеуінің болжанбайтын шешімі. (1.37), (1.1) тізбектің $T=6$ болғандағы түрі болғандықтан, әрбір бүтін $i_1<i_2$ үшін $n\to\infty$ кезде $\max_{i_1<i<i_2}\left|\theta_{i+l_n}-\ t_n-\theta_i\right|$ нөлге ұмтылатын және әрбір натурал n үшін $\left|\theta_{m_n+l_n}-\ t_n-\theta_{m_n}\right|\ge\epsilon_0$ теңсіздігі орындалатын оң ε_0 саны және $t_n=6l_n$, l_n, m_n тізбектері табылады.

$\Phi(t)=\tau_i,\ \ t\in[\,\theta_i,\ \theta_{i+1}),\ i\in\mathbb{Z}$ теңдеуі арқылы анықталған $\Phi(t)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ функциясын қарастырайық, мұндағы $\tau_i,i\in\mathbb{Z}$, 1.1-мысалға ұқсас, кездейсоқ анықталған дискретті Бернулли процесінің нәтижесінде алынған болжанбайтын тізбек.

$\Phi(t)$ болжанбайтындығы 1.1-мысалға ұқсас дәлелденеді. Сонымен, $\Phi(t)$ оң ε_0, $\sigma=\frac{5}{2}$ сандары және $t_n=6l_n$, $s_n=\frac{\theta_{m_n}+\theta_{m_n+1}}{2}$, $n\in\mathbb{N}$ тізбектерімен ү.б.ф. болады.

1.4-мысал. Квазисызықты импульсті жүйесін қарастыралық

$$\begin{aligned}
&x_1' = 4x_2 + 0.014x_2^2 - 0.027x_3^3 + 0.008\Phi^3(\mathrm{t}),\\
&x_2' = -7x_1 + 0.019x_1^2 + 0.036x_2^3 + 0.009\Phi(\mathrm{t}),\\
&x_2' = -0.5x_3 + 0.025x_1^3 + 0.013x_2^2 - 0.11\Phi^3(\mathrm{t}),\\
&\Delta x_1|_{t=\theta_i} = -\frac{3}{4}x_1 + 0.001x_2^2 + 0.015x_3^3 + 0.04\gamma_i\,, t \neq \theta_i \qquad (1.38)\\
&\Delta x_2|_{t=\theta_i} = -\frac{3}{4}x_2 - 0.011x_1^3 + 0.01x_3^2 - 0.06\gamma_i,\\
&\Delta x_3|_{t=\theta_i} = -\frac{3}{4}x_3 + 0.002x_1^2 - 0.023x_2^3 + 0.05\gamma_i,
\end{aligned}$$

мұндағы $\gamma_i, \theta_i,\ i \in \mathbb{Z}$ тізбектері мен $\Phi(t)$ функциясы, сәйкесінше 1.3-мысалда анықталған болжанбайтын тізбектер мен ү.б.ф.
Бұған қоса,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

1.4 және 1.5 леммалар [61, 2379 б.] бойынша $\big(f(t,x), G(x)\big)$ жұбы 1.5-анықтама мағынасындағы үзіліссіз жұп болады.

A мен B матрицалары коммутативті және

$$A + \frac{1}{T}\ln(I+B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}ln2 & 4 & 0 \\ -7 & -\frac{1}{3}ln2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 - \frac{1}{3}ln2 \end{pmatrix},$$

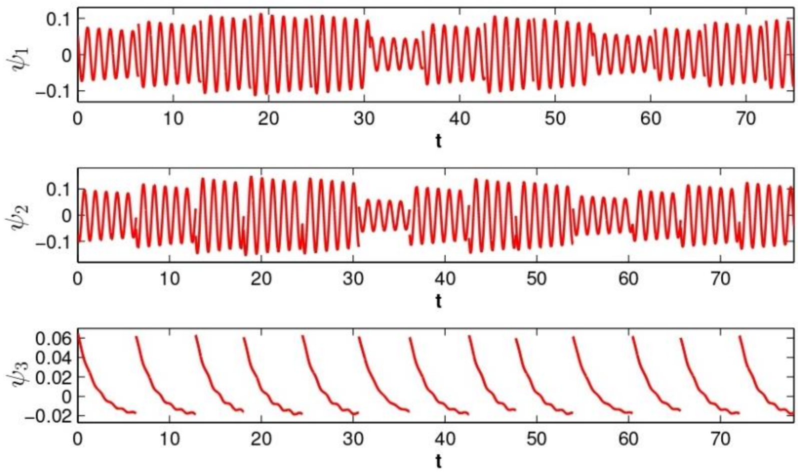
матрицасының меншікті мәндері мындай болады: $\lambda_1 = -0.5 - \frac{1}{3}ln2$, және $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{3}ln2 \pm 2\sqrt{7}i$. $\alpha = 0.2$ және $K = \sqrt{2}$ мәндерінде (A1)-шарты орындалады. Бұған қоса, $M_f = 0.01468$, $M_G = 0.06086$, $L_f = 0.01728$, $L_G = -0.01104$ және $H = 0.4$ болғанда, (1.38) жүйе үшін (A2), (A5)-(A9) шарттары орындалады. 1.4-теоремаға сәйкес, (1.38)-жүйенің асимптотикалық орнықты $\phi(t) = \big(\phi_1(t),\ \phi_2(t),\ \phi_3(t)\big)$ жалғыз шешімі бар болады.

Бастапқы мәндері белгісіз болғандықтан болжанбайтын функцияның шешімін модельдеу мүмкін емес. Сол себепті, бастапқы мәні

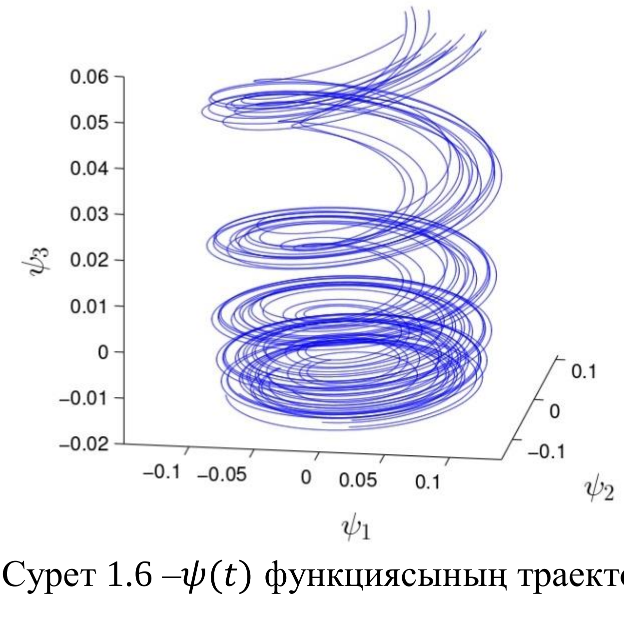
$\psi_1(0) = (0.0523; -0.0748; 0.0651)$ тең болатын көршілес $\psi(t) = \big(\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \psi_3(t)\big)$ шешімін қарастырамыз. (1.36) қолданып,

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| \le \sqrt{2}e^{-0.17t}\|\phi(t_0) - \psi(t_0)\|, t > 0$$

аламыз. Соңғы теңсіздік $\phi(t) - \psi(t)$ айырымы бір-біріне экспоненциалды түрде жақындайтынын көрсетеді. Демек, уақыт артқан сайын $\psi(t)$ функциясының графигі болжанбайтын $\phi(t)$ шешімінің графигіне жақындайды. Яғни болжанбайтын шешімді сипаттайтын қисықтың орнына $\psi(t)$-нің графигін қарастырамыз. 1.5-суретте $\psi(t)$-нің координаталары, ал 1.6-суретте шешімінің траекториясы көрсетілген.



Сурет 1.5 – $\phi(t)$ үзілісті болжанбайтын шешімнің координаталарына жақындайтын $\psi(t)$ функциясының координаталары



Сурет 1.6 –$\psi(t)$ функциясының траекториясы

2 ЖАЛПЫЛАНҒАН БӨЛІКТІ-ТҰРАҚТЫ АРГУМЕНТТІ ДИФФЕРЕНЕЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БОЛЖАНБАЙТЫН ШЕШІМДЕРІ

2.1-анықтама [4, 658 б.]. Бірқалыпты үзіліссіз, шенелген $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ функциясы берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір шенелген интервалда $\vartheta(t + t_n) \to \vartheta(t), n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n мен $t \in [s_n - \sigma, s_n + \sigma]$ үшін $\|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(t)\| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$ саны мен $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$, $n \to \infty$, тізбектері табылатын болса, онда $\vartheta(t)$ функциясы *болжанбайтын* деп аталады.

Барлық $|\theta_i| \to \infty$, $|i| \to \infty$, $i \in \mathbb{Z}$ үшін $\theta_i < \theta_{i+1}$, $\theta_i \leq \xi_i \leq \theta_{i+1}$ орындалатындай нақты мәнді θ_i, $\xi_i, i \in \mathbb{Z}$ тізбектерін бекітейік.

Келесі квазисызықтық ЖБТАДТ жүйесін қарастыралық

$$x'(t) = Ax(t) + f(x(t)) + g(x(\gamma(t))) + h(t), \tag{2.1}$$

мұндағы $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ – тұрақты матрица; $\gamma(t) = \xi_i$, $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$ – аргумент фунция; ξ_i, $\theta_i \leq \xi_i \leq \theta_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$ – нақты сандардың тізбегі. $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^p$ – шенелген $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| < \widetilde{H}\}$, $\widetilde{H} > 0$ облысында үзіліссіз функциялар; $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ – бірқалыпты үзіліссіз және шенелген функция.

Сонымен бірге, A матрицасының барлық меншікті мәндерінің нақты бөлігі теріс және $\|A\| = \bar{\lambda}$ теңдігі орындалады деп келісеміз. Олай болса, барлық t үшін $\|e^{At}\| \leq \sigma e^{-\lambda t}$ шарты орындалатындай нақты $\sigma \geq 1$ мен $\lambda > 0$ сандары табылады.

Келесі шарттарды қолданамыз:

$(B1)$ барлық $u, v \in \mathbb{D}$ үшін $||f(u) - f(v)|| \leq L_f||u - v||$ және $||g(u) - g(v)|| \leq L_g||u - v||$ шарттары орындалады, мұндағы L_f, L_g Липшиц тұрақтылары;

$(B2)$ $\sup\limits_{\|x\|<\widetilde{H}} \|f(x)\| \leq m_f$ және $\sup\limits_{\|x\|<\widetilde{H}} \|g(x)\| \leq m_g$ орындалатындай оң m_f, m_g сандары табылады;

$(B3)$ $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|h(t)\| \leq m_h$ орындалатындай оң m_h саны табылады;

$(B4)$ $\frac{\sigma}{\lambda}\left(m_f + m_g + m_h\right) < \widetilde{H}$;

$(B5)$ $\frac{\sigma}{\lambda}\left(L_f + L_g\right) < 1$;

$(B6)$ барлық $i \in \mathbb{Z}$ үшін $\theta_{i+1} - \theta_i \leq \theta$ теңсіздігі орындалатындай оң θ саны табылады.

Әрі қарай ыңғайлылық үшін

$$N_0 = \left(1 - \theta[(\bar{\lambda} + L_f)(1 + L_g\theta)e^{(\bar{\lambda}+L_f)\theta} + L_g]\right)^{-1}$$

белгілеуін қолданамыз.

$(B7)\ -\lambda + \sigma\left(L_f + \ N_0 L_g\right) < 0;$
$(B8)\ \theta[(\bar{\lambda} + L_f)(1 + L_g\theta)e^{(\bar{\lambda}+L_f)\theta} + L_g] < 1;$
$(B9)$ әрбір шенелген интервалда $\theta_{i-\eta_n} + t_n - \theta_i \to 0$ мен $\xi_{i-\eta_n} + t_n - \xi_i \to 0$, $n \to \infty$ шарттары орындалатындай $\eta_n \to \infty$ тізбегі табылады, мұндағы t_n 2.1- анықтамадағы тізбек.

Барлық $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ вектор функцияларының $\mathcal{P}$ кеңістігін қарастырамыз. Ондағы норма $\|\varphi\|_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\varphi(t)\|$ арқылы анықталады. Кеңістіктің элементері мынадай қасиеттерге ие болсын:
$(\mathcal{P}1)$ $\varphi(t)$ бірқалыпты үзіліссіз;
$(\mathcal{P}2)$ барлық $\varphi(t) \in \mathcal{P}$ үшін $\|\varphi(t)\|_1 < \widetilde{H}$ орындалатындай оң $\widetilde{H}$ саны табылады;
$(\mathcal{P}3)$ әрбір $\varphi(t) \in \mathcal{P}$ үшін кез келген шенелген интервалда $\varphi(t + t_n)$ функциялар тізбегі $\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинакталатындай $t_n \to \infty$, $n \to \infty$ тізбегі табылады.

Дифференциалдық теңдеулер теориясынан белгілі, $x(t)$ фунциясы (2.1)-жүйенің сан түзуінде шенелген шешімі болуы үшін

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}\,[f(x(s)) + g(x(\gamma(s))) + h(s)]ds$$

интегралық теңдеудеуінің шешімі болуы қажетті және жеткілікті [141].

$\mathcal{P}$ кеңістігінде Π операторын

$$\Pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}\,[f(\varphi(s)) + g(\varphi(\gamma(s))) + h(s)]ds$$

түрінде анықтаймыз.

2.1-лемма. *$\mathcal{P}$ кеңістігі Π операторына қатысты инвариантты.*

Дәлелдеуі. $\Pi\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$ болатындығын көрсету керек. Алдымен, $\Pi\varphi(t)$ функциясын t бойынша дифференциалдаймыз

$$\frac{d\Pi\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) + g(\varphi(\gamma(t))) + h(t) +$$

$$+A\int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}\,[f(\varphi(s)) + g(\varphi(\gamma(s))) + h(s)]ds.$$

Осыдан, барлық $t \in \mathbb{R}$, үшін

$$\left\|\frac{d\Pi\varphi(t)}{dt}\right\| = \|f(\varphi(t))\| + \|g(\varphi(\gamma(t)))\| + \|h(t)\| +$$

$$+\bar{\lambda}\int_{-\infty}^{t}\sigma e^{-\lambda(t-s)}\left(\|f(\varphi(s))\|+\left\|g\left(\varphi(\gamma(s))\right)\right\|+\|h(s)\|\right)ds\leq$$

$$\leq\ m_f+m_g+m_h+\frac{\sigma\bar{\lambda}}{\lambda}\left(m_f+m_g+m_h\right)=\left(1+\frac{\sigma\bar{\lambda}}{\lambda}\right)\left(m_f+m_g+m_h\right)$$

бағалауын аламыз.

Бұдан $\frac{d\Pi\varphi(t)}{dt}$ туындысының шектелгендігі шығады. Демек, $\Pi\varphi$ бірқалыпты үзіліссіз, яғни $\Pi\varphi$ функциясы $(\mathcal{P}1)$ қасиетін қанағаттандырады.

Сонымен қатар, $\varphi(t)\in\mathcal{P}$ үшін

$$\|\Pi\varphi(t)\|=\left\|\int_{-\infty}^{t}e^{A(t-s)}\left[f(\varphi(s))+g(\varphi(\gamma(s)))+h(s)\right]ds\right\|\leq$$

$$\leq\int_{-\infty}^{t}\sigma e^{-\lambda(t-s)}(\|f\varphi(s)\|+\|g(\varphi(\gamma(s)))\|+\|h(s)\|)ds\leq$$

$$\leq\int_{-\infty}^{t}\sigma e^{-\lambda(t-s)}\left(m_f+m_g+m_h\right)ds=\ \frac{\sigma}{\lambda}\left(m_f+m_g+m_h\right)$$

теңсіздігі орындалады. Соңғы теңсіздік пен $(B4)$ шартынан $\|\Pi\varphi\|_1<\widetilde{H}$ екендігі шығады. Сонымен, $\Pi\varphi$ функциясы $(\mathcal{P}2)$ қасиетінде қанағаттандырады.

Соңғы $(\mathcal{P}3)$ қасиетінің орындалуын тексерелік. Яғни, әрбір $\Pi\varphi\in\mathcal{P}$ үшін сан түзуінің шенелген интервалында $\Pi\varphi(t+t_n)$ функциялық тізбегі $\Pi\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақты болатынын көрсетуіміз қажет. Ол үшін, кез келген оң ε санын және шенелген $[a,b],\ a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$ интервалын бекітеміз. Бұл жеткілікті үлкен n мен $t\in[a,b]$ үшін $\|\Pi\varphi(t+t_n)-\Pi\varphi(t)\|<\varepsilon$ орындалатынын көрсетеді.

Келесі теңсіздіктер орындалатындай $c<a$ және $\epsilon>0$ сандарын таңдап аламыз:

$$\frac{2\sigma}{\lambda}\left(L_f\widetilde{H}+L_g\widetilde{H}+m_h\right)e^{-\lambda(a-c)}<\frac{\varepsilon}{4},\tag{2.2}$$

$$\frac{\sigma\epsilon}{\lambda}\left(1+L_f\right)<\frac{\varepsilon}{4},\tag{2.3}$$

$$\frac{2\sigma}{\lambda}L_g(m+1)\epsilon\left(1-e^{-\lambda\theta}\right)<\frac{\varepsilon}{4},\tag{2.4}$$

$$\frac{2\sigma}{\lambda}L_gm\widetilde{H}\left(e^{-\lambda\epsilon}-1\right)\ <\frac{\varepsilon}{4}.\tag{2.5}$$

$t \in [c, b]$ интервалында $\|\varphi(t+t_n) - \varphi(t)\| < \epsilon$, $\|h(t+t_n) - h(t)\| < \epsilon$ және $\theta_k \in [c, b]$ интервалында $\left|\theta_{k-\eta_n} + t_n - \theta_k\right| < \epsilon$ теңсіздіктері орындалатын жеткілікті үлкен натурал n санын таңдап алайық. Келесі шаманы бағалауымыз керек:

$$\|\Pi\varphi(t+t_n) - \Pi\varphi(t)\| =$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{t+t_n} e^{A(t+t_n-s)} \left[f\big(\varphi(s)\big) + g\Big(\varphi\big(\gamma(s)\big)\Big) + h(s) \right] ds - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} \left[f\big(\varphi(s)\big) + g\Big(\varphi\big(\gamma(s)\big)\Big) + h(s) \right] ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} \left([f(\varphi(s+t_n)) - f(\varphi(s))] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[g\Big(\varphi\big(\gamma(s+t_n)\big)\Big) - g\Big(\varphi\big(\gamma(s)\big)\Big) \right] + h(s+t_n) - h(s) \right) ds \right\| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} \sigma e^{-\lambda(t-s)} (L_f \|\varphi(s+t_n) - \varphi(s)\| +$$

$$+ L_g \|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s))\| + \|h(s+t_n) - h(s)\|)\, ds.$$

Енді, соңғы интегралды екі интегралдың қосындысы ретінде қайта жазалық. Сонда

$$\|\Pi\varphi(t+t_n) - \Pi\varphi(t)\| \le \int_{-\infty}^{c} \sigma e^{-\lambda(t-s)} (L_f \|\varphi(s+t_n) - \varphi(s)\| +$$

$$+ L_g \|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s))\| + \|h(s+t_n) - h(s)\|)\, ds +$$

$$+ \int_{c}^{t} \sigma e^{-\lambda(t-s)} (L_f \|\varphi(s+t_n) - \varphi(s)\| +$$

$$+ L_g \|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s))\| + \|h(s+t_n) - h(s)\|)\, ds$$

$$\le L_f \int_{-\infty}^{c} \sigma e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(s+t_n) - \varphi(s)\| ds +$$

$$+ L_g \int_{-\infty}^{c} \sigma e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s))\| ds +$$

$$+\int_{-\infty}^{c} \sigma e^{-\lambda(t-s)} \|h(s+t_n) - h(s)\| ds +$$

$$+L_f \int_{c}^{t} \sigma e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(s+t_n) - \varphi(s)\| ds +$$

$$+L_g \int_{c}^{t} \sigma e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s))\| ds +$$

$$+\int_{c}^{t} \sigma e^{-\lambda(t-s)} \|h(s+t_n) - h(s)\| ds.$$

Бекітілген $t \in [a, b]$ үшін жалпылықты жоғалтпай $\theta_k \le \theta_{k-\eta_n} + t_n$ және $\theta_k \le \theta_{k-\eta_n} + t_n = c < \theta_{k+1} < \theta_{k+2} < \cdots < \theta_{k+m} \le \theta_{k+m-\eta_n} + t_n \le t < \theta_{k+m+1}$ болсын деп алайық. Сонда $[c, t]$ интервалында жататын үзіліс нүктелерінің саны дәл m дана болады.

Жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументі бар интегралды

$$I = \int_{c}^{t} e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s))\| ds$$

арқылы белгілеп, оны жоғарыдан бағалауға тырысамыз. I интегралын, төменде көрсетілгендей, шенелген интегралдардың қосындысы ретінде қарастыра отырып бағалаймыз:

$$I = \int_{c}^{\theta_{k+1}} e^{-\lambda(t-s)} \left\|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big)\right\| ds +$$

$$+\int_{\theta_{k+1}}^{\theta_{k+1-\eta_n}+t_n} e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s))\| ds +$$

$$+\int_{\theta_{k+1-\eta_n}+t_n}^{\theta_{k+2}} e^{-\lambda(t-s)} \left\|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big)\right\| ds +$$

$$+\int_{\theta_{k+2}}^{\theta_{k+2-\eta_n}+t_n} e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s))\| ds +$$

$$+\int_{\theta_{k+2-\eta_n}+t_n}^{\theta_{k+3}} e^{-\lambda(t-s)} \left\|\varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big)\right\| ds +$$

$$\vdots$$

$$+\int_{\theta_{k+m-\eta_n}+t_n}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\left\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi\big(\gamma(s)\big)\right\|ds=$$

$$=\sum_{i=k}^{k+m-1} A_i+\sum_{i=k}^{k+m-1} B_i+\int_{\theta_{k+m-\eta_n}+t_n}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\left\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi\big(\gamma(s)\big)\right\|ds,$$

мұндағы, $i=k,k+1,\dots,k+m-1$ үшін

$$A_i=\int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\lambda(t-s)}\left\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi\big(\gamma(s)\big)\right\|ds$$

және

$$B_i=\int_{\theta_{i+1}}^{\theta_{i+1-\eta_n}+t_n} e^{-\lambda(t-s)}\left\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi\big(\gamma(s)\big)\right\|ds.$$

$t\in[\theta_{i-\eta_n}+t_n,\theta_{i+1})$, $i\in\mathbb{Z}$ үшін $\gamma(t)=\xi_i$ болатыны анық және (B9) шарттан $\gamma(t+t_n)=\xi_{i+\eta_n}$ шығады. Осы нәтижелерді қолданып,

$$A_i=\int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\lambda(t-s)}\left\|\varphi(\xi_{i+\eta_n})-\varphi(\xi_i)\right\|ds=$$

$$=\int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\lambda(t-s)}\|\varphi(\xi_i+t_n+o(1))-\varphi(\xi_i)\|ds=$$

$$=\int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\lambda(t-s)}\|\varphi(\xi_i+t_n)-\varphi(\xi_i)+$$

$$+\varphi(\xi_i+t_n+o(1))-\varphi(\xi_i+t_n)\|ds=$$

$$=\int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\lambda(t-s)}[\|\varphi(\xi_i+t_n)-\varphi(\xi_i)\|+$$

$$+\|\varphi(\xi_i+t_n+o(1))-\varphi(\xi_i+t_n)\|]ds=$$

$$= \int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\lambda(t-s)}[\epsilon + \|\varphi(\xi_i + t_n + o(1)) - \varphi(\xi_i + t_n)\|]ds$$

бағалауын аламыз. Бізге φ-дің бірқалыпты үзіліссіз екені алдынан белгілі. Сонымен, $\epsilon > 0$ мен жеткілікті үлкен n үшін $\left|\xi_{i+\eta_n} - \xi_i - t_n\right| < \rho$ болса, $\|\varphi(\xi_i + t_n + o(1)) - \varphi(\xi_i + t_n)\| < \epsilon$ орындалатындай $\rho > 0$ санын таба аламыз. Бұдан

$$A_i \leq 2\epsilon \int_{\theta_{i-1-\eta_n}+t_n}^{\theta_i} e^{-\lambda(t-s)}ds \leq \frac{2\epsilon}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right).$$

теңсіздігі орындалатындығы шығады. Екінші жағынан, (B9) шарты бойынша

$$B_i \leq 2\widetilde{H} \int_{\theta_i}^{\theta_{i-\eta_n}+t_n} e^{-\lambda(t-s)}ds \leq \frac{2\widetilde{H}}{\lambda}\left(e^{-\lambda\epsilon} - 1\right).$$

бағалауын адамыз. Келесі интегралға A_i интегралын бағалау үшін қолданған тәсілді қолдансақ,

$$\int_{\theta_{k+p-\eta_n}+t_n}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\left\|\varphi(\gamma(s + t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big)\right\|ds \leq \frac{2\epsilon}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right).$$

Осылайша,

$$I \leq \frac{2(m+1)\epsilon}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right) + \frac{2m\widetilde{H}}{\lambda}\left(e^{-\lambda\epsilon} - 1\right)$$

бағалауын аламыз.
Осы есептеулердің нәтижесінде, барлық $t \in [a, b]$ үшін

$$\|\Pi\varphi(t + t_n) - \Pi\varphi(t)\| \leq \frac{2\sigma}{\lambda}\left(L_f\widetilde{H} + L_g\widetilde{H} + m_h\right)e^{-\lambda(a-c)} + \frac{\sigma\epsilon}{\lambda}\left(1 + L_f\right) +$$

$$+\sigma L_g \frac{2(m+1)\epsilon}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right) + \sigma L_g \frac{2m\widetilde{H}}{\lambda}\left(e^{-\lambda\epsilon} - 1\right)$$

шығады. Нәтижесінде, (2.2) - (2.5) теңсіздіктерінен барлық $t \in [a, b]$ үшін

$$\|\Pi\varphi(t + t_n) - \Pi\varphi(t)\| < \varepsilon$$

екені шығады. Демек, $\Pi\varphi$ функциясы ($\mathcal{P}3$) қасиетін қанағаттандырады. Сонымен, Π операторының $\mathcal{P}$ кеңістігінде инвариантты екендігі анықталды.

2.2-лемма. *Π операторы $\mathcal{P}$ кеңстігінде кысушы оператор.*

Дәлелдеуі. φ мен ψ, $\mathcal{P}$ кеңістігінен алынған функциялар болсын. Барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін мына теңсіздік орынды:

$$\|\Pi\varphi(t) - \Pi\psi(t)\| =$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} \left([f(\varphi(s)) - f(\psi(s))] + [g(\varphi(\gamma(s))) - g(\psi(\gamma(s)))] \right) ds \right\| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} \sigma e^{-\lambda(t-s)} \big(L_f \|\varphi(s + t_n) - \varphi(s)\| + L_g \|\varphi(\gamma(s)) - \psi(\gamma(s))\| \big) ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} \sigma e^{-\lambda(t-s)} \big(L_f \|\varphi(s) - \varphi(s)\|_1 + L_g \|\varphi(s) - \psi(s)\|_1 \big) ds \le$$

$$\le \frac{\sigma}{\lambda} \big(L_f + L_g \big) \|\varphi(t) - \psi(t)\|_1.$$

Олай болса, барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін

$$\|\Pi\varphi(t) - \Pi\psi(t)\|_1 \le \frac{\sigma}{\lambda} \big(L_f + L_g \big) \|\varphi(t) - \psi(t)\|_1$$

теңсіздігі шығады. Қорытындылай келе, ($B5$)-шарт $\Pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ операторының қысушы оператор екенін білдіреді.

Келесі нәтиже шешімнің орнықтылығын дәлелдеу үшін керек болады.

2.3-лемма. [5, 72 б.] *(B1), (B6), (B8) шарттары орындалсын және $z(t)$, $\|z(t)\|_1 < \widetilde{H}$ болатындай үзіліссіз функция болсын делік. Егер $\omega(t)$ келесі жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеудің шешімі болса, яғни*

$$\omega'(t) = A\omega(t) + f(\omega(t) + z(t)) - f(z(t)) +$$

$$+ g(\omega(\gamma(t)) + z(\gamma(t))) - g(z(\gamma(t))) \tag{2.6}$$

онда барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\|\omega(\gamma(t))\| \le N_0 \|\omega(t)\|. \tag{2.7}$$

Дәлелдеуі. $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ болатындай $i \in \mathbb{Z}$ бекітіп, екі жағдайды қарастырамыз: (a) $\theta_i \le \xi_i \le t < \theta_{i+1}$ және (b) $\theta_i \le t < \xi_i < \theta_{i+1}$.

(a) $t \geq \xi_i$ үшін мына түрде жазуға болады:

$$\|\omega(t)\| = \|\omega(\xi_i)\| + \int_{\xi_i}^{t} (\|A\|\|\omega(s)\| + L_f\|\omega(s)\| + L_g\|\omega(\xi_i)\|)ds \leq$$

$$\leq \|\omega(\xi_i)\| + \int_{\xi_i}^{t} (\bar{\lambda}\|\omega(s)\| + L_f\|\omega(s)\| + L_g\|\omega(\xi_i)\|)ds \leq$$

$$\leq \|\omega(\xi_i)\|\left(1 + L_g\right) + \int_{\xi_i}^{t} \left(\bar{\lambda} + L_f\right)\|\omega(s)\|ds.$$

Егер Гронуолл-Беллман леммасын қолдансақ, онда

$$\|\omega(t)\| \leq \|\omega(\xi_i)\|\left(1 + L_g\right)e^{\left(\bar{\lambda}+L_f\right)\theta}.$$

Екінші жағынан, мына теңсіздік дұрыс болады:

$$\|\omega(\xi_i)\| \leq \|\omega(t)\| + \int_{\xi_i}^{t} \left(\|A\|\|\omega(s)\| + L_f\|\omega(s)\| + L_g\|\omega(\xi_i)\|\right)ds \leq$$

$$\leq \|\omega(t)\| + \int_{\xi_i}^{t} (\bar{\lambda} + L_f)\|\omega(s)\| + L_g\|\omega(\xi_i)\|)ds \leq$$

$$\leq \|\omega(t)\| + \int_{\xi_i}^{t} [(\bar{\lambda} + L_f)\left(1 + L_g\right)e^{\left(\bar{\lambda}+L_f\right)\theta}\|\omega(\xi_i)\| + L_g\|\omega(\xi_i)\|]ds \leq$$

$$\leq \|\omega(t)\| + \theta\left[\left(\bar{\lambda} + L_f\right)\left(1 + L_g\right)e^{\left(\bar{\lambda}+L_f\right)\theta} + L_g\right]\|\omega(\xi_i)\|.$$

Сәйкесінше, $(B8)$-шарттан, $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$ үшін $\|\omega(\xi_i)\| \leq N_0\|\omega(t)\|$ екендігі шығады. Демек, барлық $\theta_i \leq \xi_i \leq t < \theta_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$ үшін (2.7) шарты орындалады. Екінші (b) жағдайы да осыған ұқсас дәлелденеді.

Сонымен, барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін (2.7) теңсіздігі орындалады. Лемма дәлелденді.

Келесі теорема осы бөлімнің маңызды нәтижесін тұжырымдайды.

2.1-теорема. *Егер (B1)-(B9) шарттары орындалса және h функциясы болжанбайтын болса, онда (2.1) жүйенің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Дәлелдеуі. Алдымен, $\mathcal{P}$ кеңістігінің толық кеңістік екенін көрсетелік. $\phi_k(t) - \mathbb{R}$-де $\phi_k(t) \to \phi(t)$, $k \to \infty$ болатындай, $\mathcal{P}$ кеңістігінен алынған Коши тізбегі болсын. $\phi(t)$ шектік функциясы бірқалыпты үзіліссіз және шенелген болады. Сонымен, $\phi(t)$ функциясы $(\mathcal{P}1)$ және $(\mathcal{P}2)$ қасиеттерін қанағаттандырады. $\phi(t)$ функциясының $(\mathcal{P}3)$ қасиетін де қанағаттандыратынын көрсету қажет. I интервалы $\mathbb{R}$-де жабық және шенелген интервал болсын. Үшбұрыш теңсіздігін қолданып,

$$\|\phi(t+t_n)-\phi(t)\| \le \|\phi(t+t_n)-\phi_k(t+t_n)\| + \|\phi_k(t+t_n)-\phi_k(t)\| +$$

$$+\|\phi_k(t)-\phi(t)\|$$

теңсіздігін жазайық. Егер жеткілікті аз $\varepsilon > 0$ мен $t \in I$ үшін соңғы теңсіздіктің оң жағындағы әрбір қосылғышы $\frac{\varepsilon}{3}$ кіші болатындай, жеткілікті үлкен n мен k сандарын таңдап алсақ, онда I-де $\|\phi(t+t_n)-\phi(t)\| \le \varepsilon$ теңсіздігі шығады. Бұдан, I интервалында $\phi(t+t_n)$ функциясының $\phi(t)$-ге жинақталатынын аламыз. Демек, $\mathcal{P}$ толық кеңістік. 2.1 және 2.2-леммалар бойынша Π операторының $\mathcal{P}$ кеңістігінде инвариантты және қысушы оператор екені анықталды. Қысушы бейнелеулер туралы теоремаға сүйенсек, (2.1) жүйенің жалғыз шешімі болатын Π операторының жалғыз қозғалмайтын нүктесі бар болады. Сонымен шешімнің жалғыздығы дәлелденді.

Енді жалғыз шешімнің болжанбайтындық қасиетке ие екенін көрсетелік. $l, k \in \mathbb{N}$ және κ, келесі теңсіздіктер орындалатындай оң сандар болсын:

$$\kappa < \delta, \tag{2.8}$$

$$\kappa\left[-(\bar{\lambda}+L_f)\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)-2L_g+\frac{1}{2}\right] \ge \frac{3}{2l} \tag{2.9}$$

және

$$\|z(t+s)-z(t)\| < \varepsilon_0 min\left\{\frac{1}{k},\frac{1}{4l}\right\}, t\in\mathbb{R}, |s|<\kappa. \tag{2.10}$$

l, k, κ және $n \in \mathbb{N}$ сандарын бекітілген сандар деп алайық.

$\|z(s_n+t_n)-z(s_n)\|$ шамасын белгілеу үшін Δ символын қолданайық. Олай болса мындай екі жағдайды қарастырамыз: (i) $\Delta < \frac{\varepsilon_0}{l}$ және (ii) $\Delta \ge \frac{\varepsilon_0}{l}$.

(i) $\Delta \ge \frac{\varepsilon_0}{l}$, $t \in [s_n-\kappa, s_n+\kappa]$ және $n \in \mathbb{N}$ болғанда келесі теңсіздікті аламыз:

$$\|z(t+t_n)-z(t)\| \ge \|z(s_n+t_n)-z(s_n)\| - \|z(s_n)-z(t)\| -$$

$$-\|z(t+t_n)-z(s_n+t_n)\| \ \ge \ \frac{\varepsilon_0}{l} - \frac{\varepsilon_0}{4l} - \frac{\varepsilon_0}{4l} = \frac{\varepsilon_0}{2l}.$$

(ii) $\Delta \ge \frac{\varepsilon_0}{l}$ жағдайында, $t \in [s_n, s_n+\kappa]$ үшін (2.9) қолдансақ,

$$\|z(t+t_n)-z(t)\| \le \|z(s_n+t_n)-z(s_n)\| + \|z(s_n)-z(t)\| +$$

$$+\|z(t+t_n)-z(s_n+t_n)\| \ < \frac{\varepsilon_0}{l} + \frac{\varepsilon_0}{k} + \frac{\varepsilon_0}{k} = \left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\varepsilon_0$$

шығады.

Келесі интегралдық теңдеулерді қолданамыз:

$$z(t) = z(s_n) + \int_{s_n}^{t} [Az(s) + f(z(s)) + g(z(\gamma(s))) + h(s)]ds$$

және

$$z(t + t_n) = z(s_n + t_n) + \int_{s_n}^{t} [Az(s + t_n) + f(z(s + t_n)) +$$

$$+g(z(\gamma(s + t_n))) + h(s + t_n)]ds.$$

Бірінші теңдікті екіншісінен азайту арқылы

$$z(t + t_n) - z(t) = z(s_n + t_n) - z(s_n) + \int_{s_n}^{t} [A[z(s + t_n) - z(s)] +$$

$$+\left[f\left(z(s + t_n)\right) - f\left(z(s)\right)\right] + [g(z(\gamma(s + t_n))) - g(z(\gamma(s)))] +$$

$$+ [h(s + t_n) - h(s)]]ds = z(s_n + t_n) - z(s_n) + \int_{s_n}^{t} A[z(s + t_n) - z(s)]ds +$$

$$+ \int_{s_n}^{t} \left[f\left(z(s + t_n)\right) - f\left(z(s)\right)\right]ds + \int_{s_n}^{t} [g(z(\gamma(s + t_n))) - g(z(\gamma(s)))]ds +$$

$$+ \int_{s_n}^{t} [h(s + t_n) - h(s)]ds$$

теңдігін аламыз. Екі жағынан норма алсақ және үшбұрыш теңсіздігін қолдансақ, $t \in \left[s_n + \frac{\kappa}{2}, s_n + \kappa\right]$ үшін мына теңсіздікті алуға болады:

$$\|z(t + t_n) - z(t)\| \geq -\|z(s_n + t_n) - z(s_n)\| - \int_{s_n}^{t} \bar{\lambda}\|z(s + t_n) - z(s)\|ds -$$

$$- \int_{s_n}^{t} \left\|f\left(z(s + t_n)\right) - f\left(z(s)\right)\right\|ds - \int_{s_n}^{t} \|g(z(\gamma(s + t_n))) - g(z(\gamma(s)))\|ds +$$

$$+ \int_{s_n}^{t} \|h(s + t_n) - h(s)\|ds \geq -\frac{\varepsilon_0}{l} - \bar{\lambda}\kappa\left(\frac{1}{l} + \frac{2}{k}\right)\varepsilon_0 - L_f\kappa\left(\frac{1}{l} + \frac{2}{k}\right)\varepsilon_0 -$$

$$-L_g \int_{u_n}^{t} \left\|z\left(\gamma(s + t_n)\right) - z\left(\gamma(s)\right)\right\|ds + \frac{\kappa}{2}\varepsilon_0.$$

Жоғарыдағы интегралды

$$J=\int_{s_n}^{t}\left\|z\big(\gamma(s+t_n)\big)-z\big(\gamma(s)\big)\right\|ds$$

арқылы белілейік.

$t\in\left[s_n+\frac{\kappa}{2},s_n+\kappa\right]$ үшін $\theta_{i-\eta_n}+t_n\le s_n<s_n+\frac{\kappa}{2}\le t\le s_n+\kappa<\theta_{i+1}$, $i\in\mathbb{Z}$ орындалатындай жеткілікті аз κ-ны таңдап аламыз. Сонда $(B9)$ шарты негізінде $\gamma(t)=\xi_i$, $t\in\left[s_n+\frac{\kappa}{2},s_n+\kappa\right]$ және $\gamma(t+t_n)=\xi_{i+\eta_n}$ мәндерін аламыз. $z(t)\in\mathcal{P}$ бірқалыпты үзіліссіз функция болғандықтан, $\varepsilon_0>0$ мен жеткілікті үлкен n үшін $\left\|\xi_{i+\eta_n}-\xi_i-t_n\right\|<\rho$ болса, $\left\|z(\xi_{i+\eta_n})-z(\xi_i)\right\|\le$ $\le\|z(\xi_i+t_n)-z(\xi_i)\|+\left\|z\big(\xi_i+t_n+o(1)\big)-z(\xi_i+t_n)\right\|<2\varepsilon_0$ орындалатындай $\rho>0$ санын таба аламыз. Осылайша, $J<2\kappa\varepsilon_0$ болады. Нәтижесінде (2.9) теңсіздіктен мына бағалау шығады:

$$\|z(t+t_n)-z(t)\|\ge-\frac{\varepsilon_0}{l}-\ \bar{\lambda}\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\kappa\varepsilon_0-L_f\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\kappa\varepsilon_0-2L_g\kappa\varepsilon_0+\frac{\kappa}{2}\varepsilon_0\ge$$

$$\ge-\frac{\varepsilon_0}{l}+\frac{3\varepsilon_0}{2l}\ge\frac{\varepsilon_0}{2l}.$$

(i) мен (ii) жағдайларында алынған теңсіздіктерге сүйенсек, $z(t)$ болжанбайтын шешім болады. Демек, ол үшін Пуассон тізбегі мен бөліну тізбегі сәйкесінше $\bar{s}_n=s_n+\frac{3\kappa}{4}$ мен $\bar{\delta}=\frac{\kappa}{4}$ түрде болады.

Енді $z(t)$ шешімінің орнықтылығына тоқталамыз.

$\omega(t)=y(t)-z(t)$ белгілеуін қолданамыз, мұндағы $y(t)$ − (2.1)-жүйенің басқа шешімі. Олай болса, $\omega(t)$ (2.6)-жүйенің шешімі болады және

$$\|\omega(t)\|\le\sigma e^{-\lambda(t-t_0)}\|\omega(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}\sigma e^{-\lambda(t-s)}\left[L_f\|\omega(s)\|+L_g\left\|\omega\big(\gamma(s)\big)\right\|\right]ds.\quad(2.11)$$

теңсіздігі орындалады. Бұдан 2.3-лемманы қолдансақ,

$$\|\omega(t)\|\le\sigma e^{-\lambda(t-t_0)}\|\omega(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}\sigma e^{-\lambda(t-s)}(L_f+N_0L_g)\|\omega(s)\|ds$$

теңсіздігін шығарамыз. Соңғы теңсіздіктен

$$e^{\lambda t}\|\omega(t)\|\le\sigma e^{\lambda t_0}\|\omega(t_0)\|+\sigma(L_f+N_0L_g)\int_{t_0}^{t}e^{\lambda s}\|\omega(s)\|ds.$$

аламыз. Егер соңғы теңсіздікке Гронуолл-Беллман леммасын қолдансақ, оны мына түрге келтіреміз:

$$\|\omega(t)\| \leq \sigma\|\omega(t_0)\| e^{\left(-\lambda+\sigma\left(L_f+N_0L_g\right)\right)(t-t_0)}.$$

Бұдан

$$\|y(t)-z(t)\| \leq \sigma\|y(t_0)-z(t_0)\| e^{\left(-\lambda+\sigma\left(L_f+N_0L_g\right)\right)(t-t_0)} \tag{2.12}$$

$(B7)$ шарттан (2.1) жүйенің болжанбайтын $z(t)$ шешімінің бірқалыпты экспоненциалды орнықты болатындығы шығады. Теорема дәлелденді.

2.1-мысал. Болжанбайтын шешімнің бар екендігін зерттеу үшін (1.2) логистикалық теңдеуді қарастырамыз. 4.1-теоремаға бойынша [2, 89 б.], әрбір $\mu \in [3+(2/3)^{1/2}, 4]$ үшін (1.2) логистикалық теңдеуі болжанбайтын шешімге ие болады. $\psi_i, i \in \mathbb{Z}$, $\mu = 3.92$ болғандағы (1.2) логистикалық теңдеудің болжанбайтын шешімі болсын делік.

Сыртқы кірістер ретінде мына түрдегі болжанбайтын $\Theta(t)$ функциясын қолданамыз [4, 664 б.]:

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-3(t-s)}\Omega(s)ds\,, t \in \mathbb{R},$$

мұндағы $\Omega(t) = \psi_i, t \in [\,\theta_i,\ \theta_{i+1}), i \in \mathbb{Z}$. $\Theta(t) -$ барлық нақты сандар жиынында $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\Theta(t)| \leq 1/3$ болатындай шектелген функция екенін атап өткен жөн. $\Theta(t)$ функциясының болжанбайтындығы [4, 664 б.] жұмыстағы дәлелдеу жолымен бірдей.

Квазисызықтық ЖБТАДТ жүйесін қарастыралық:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.6 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(\mathrm{t}) \\ x_2(\mathrm{t}) \\ x_3(\mathrm{t}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.01\tanh\left(\dfrac{x_1(\mathrm{t})}{25}\right) \\ 0.01\tanh\left(\dfrac{x_2(\mathrm{t})}{25}\right) \\ 0.01\tanh\left(\dfrac{x_3(\mathrm{t})}{25}\right) \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0.01\tanh(\dfrac{x_1(\gamma(\mathrm{t}))}{20}) \\ 0.01\tanh(\dfrac{x_2(\gamma(\mathrm{t}))}{20}) \\ 0.01\tanh(\dfrac{x_3(\gamma(\mathrm{t}))}{20}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\Theta^3(t)+0.02 \\ 0.5\Theta(t)-0.03 \\ 3\Theta^3(t)+0.01 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

$h_1(\text{t}) = -4\Theta^3(t) + 0.02, \qquad h_2(\text{t}) = 0.5\Theta(t) - 0.03, \qquad h_3(\text{t}) = 3\Theta^3(t) + 0.01$ функциялары болжанбайтын функциялар.

Сондай ақ, $\gamma(t) = \xi_k$ аргумент функциясы $\theta_k = \frac{3}{4}k$, $\xi_k = \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2} + \psi_k = \frac{3(2k+1)}{8} + \psi_k, k \in \mathbb{Z}$ тізбегі арқылы анықталады.

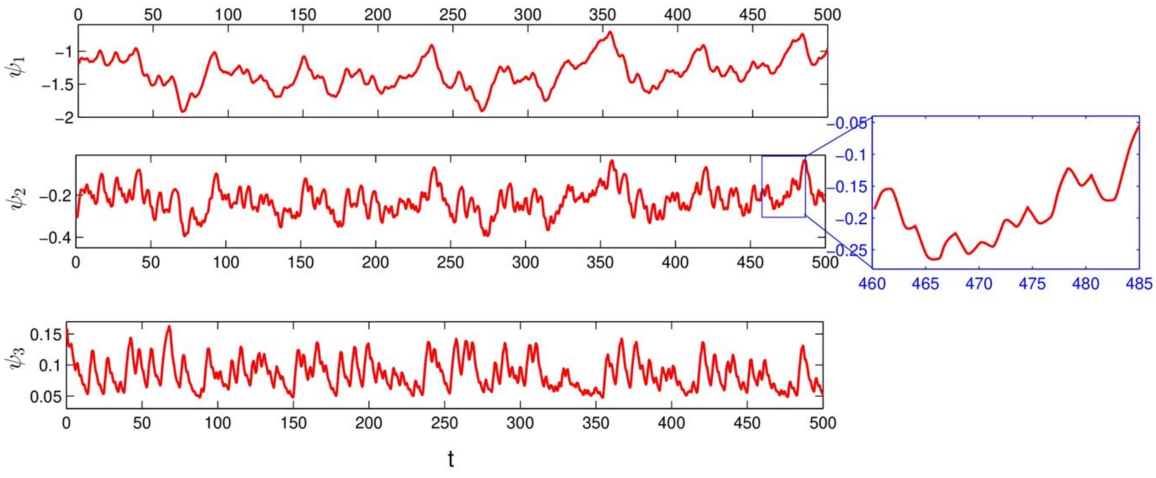
$\lambda = 0.1$, $\bar{\lambda} = 0.7$, $L_f = 0{,}0004$, $L_g = -0.0005$, $m_f = m_g = 0.01$ және $m_h = 0.19$, $\sigma = 20$, $\widetilde{H} = 38$ болғанда, (2.13) жүйе үшін $(B1)$-$(B9)$ шарттары орындалатындығы шығады. Сонымен, 2.1-теоремаға сәйкес, (2.13)-жүйенің экспоненциалды орнықты жалғыз шешімі $x(t)$ бар болады.

Бастапқы мәндері белгісіз болғандықтан болжанбайтын функцияның шешімін модельдеу өте күрделі мәселе. Экспоненциалды орнықтылық қасиеті бойынша, болжанбайтын шешімнің маңайынан алынған кез келген шешім сол шешімге жақындайды. Сол себепті, болжанбайтын $x(t)$ шешімінің орнына, бастапқы мәндері $\psi_1(0) = -1.1951$, $\psi_2(0) = -0.2828$, $\psi_3(0) = 0.1587$ тең болатын көршілес $\psi(t)$ шешімін қарастырамыз.

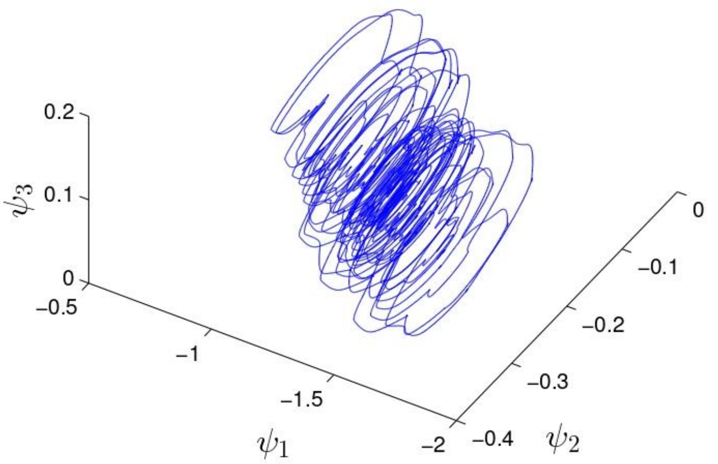
(2.12) қолданып, мына теңсіздікті алуға болады:

$$\|\psi(t) - x(t)\| \le 20e^{-0.002t}\|\psi(0) - x(0)\|, t \ge 0.$$

Соңғы теңсіздік $\phi(t) - \psi(t)$ айырымы бірі біріне экспоненциалды түрде жақындайтындығын көрсетеді. Демек, уақыт артқан сайын $\psi(t)$ функциясының графигі, (2.12) жүйенің болжанбайтын $x(t)$ шешімінің графигіне жақындайды. Яғни болжанбайтын шешімді сипаттайтын қисықтың орнына $\psi(t)$-нің графигін қарастырамыз. Болжанбайтын $x(t)$ шешіміне экспоненциалды түрде жақындайтын $\psi(t)$-нің координатасы мен траекториясы сәйкесінше 2.1 және 2.2-суреттерде көрсетілген.



Сурет 2.1 – $\psi(t)$ функциясының координаталары



Сурет 2.2 –$\psi(t)$ функциясының траекториясы

Сонымен қатар, 2.1-суреттен (2.13) жүйенің шешімі туындысы үзілісті болатын және $t \in [\,\theta_k,\ \theta_{k+1}),\ k \in \mathbb{Z}$ интервалында үзіліссіз дифференциалданатын үзіліссіз функция екендігін байқауға болады.

3 АКТИВАЦИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРЫ ҮЗІЛІСТІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗ ХОПФИЛДТІК НЕЙРОНДЫҚ ЖЕЛІЛЕРДІҢ БОЛЖАНБАЙТЫН ТЕРБЕЛІСТЕРІ

3.1 Хопфилдтік нейрондық желілердің күшті болжанбайтын тербелістері

Хопфилд нейрондық желілері деп аталатын реккурентті желінің түрін алғашқы рет 1982 жылы Джон Хопфилд енгізген. ХНЖ еңгізу арқылы ол статистикалық механикада қарастырылатын нейрондық желілердің физикалық жүйелермен байланысын орнатты [103, 2556 б.]. Хопфилд нейронды желісі - бұл адамның миына ұқсас жадыны сақтауға және қайта шығаруға арналған жасанды нейрондық желі.

Бұл бөлімшеде болжанбайтын қоздырғқылы ХНЖ-дің жаңа моделі жасалды және күшті болжанбайтын шешімдердің бар болуы, жалғыздығы мен асимптотикалық орнықтылығының жеткілікті шарттары алынды.

3.1-анықтама [62, 342 б.]. Бірқалыпты үзіліссіз, шенелген $\vartheta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p)$ функциясы берілсін. Егер келесі шарттар:

(a) әрбір шенелген интервалда $\vartheta(t + t_n) \to \vartheta(t), n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n, $i = 1,2\dots, p$ мен $t \in [s_n - \sigma, s_n + \sigma]$ үшін $|v_i(t + t_n) - v_i(t)| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$ саны мен $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$, $n \to \infty$, тізбектері табылатын болса, онда $\vartheta(t)$ функциясы *күшті болжанбайтын* деп аталады.

3.1-анықтамағағы $v_i(t)$, $i = 1,2\dots, p$ функцияларының әрқайсысы 2.1 анықтама мағынасында болжанбайтын функция болады.

Бұл бөлімшеде келесі ХНЖ моделі қарасытырылады:

$$x_i'(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j(x_j(t)) + v_i(t), \tag{3.1}$$

мұндағы $t, x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, $a_i > 0$. Сонымен бірге,

$t -$ уақыт айнымалысы;

$p -$ желідегі нейрондар саны;

$x_i(t) - t$ уақыт мезетіндегі i-ші нейронның мембраналық потенциалы;

$a_i -$ басқа нейрондар мен кірістерден оқшауланған кезде өзін-өзі реттейтін немесе нейрондарды өз қалпына келтіретін тұрақты жылдамдықтар;

$f_j - t$ уақыт мезетіндегі i-ші нейронның кіріс потенциалдарының активациялық функциялары;

b_{ij} $-$ i-ші нейрон мен j-ші нейронның байланысың синаптикалық салмағы;

v_i – желіден тыс i-ші нейронға кіретін сыртқы кірістер.

Бұл бөлімде b_{ij} коэффициенттері нақты сандар, $f_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ активациялық функциялары мен $v_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ қозулары үзіліссіз функциялар болсын деп аламыз.

Барлық $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ вектор-функцияларының U кеңістігін енгіземіз. Ондағы норма $\|\varphi\|_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\|$ арқылы анықталсын. Кеңістіктің элементтері мына шарттарды қанағаттандырсын:

$(U1)$ $\varphi(t)$ бірқалыпты үзіліссіз;

$(U2)$ барлық $\varphi(t) \in U$ үшін $\|\varphi(t)\|_1 < H_0$ орындалатын оң H_0 саны табылады;

$(U3)$ әрбір $\varphi(t) \in U$ үшін $\mathbb{R}$-дің шенелген ішкі жиынында $\varphi(t + t_n)$ функциялар тізбегі $\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинакталатындай $t_n \to \infty,\ n \to \infty$, тізбегі табылады.

(3.1) жүйе үшін келесі шарттар орындалады деп ұйғарамыз:

$(C1)$ барлық $u, v \in \mathbb{R}$ үшін $|f_i(u) - f_i(v)| \le L|u - v|$ теңсіздігі орындалатындай оң L саны табылады;

$(C2)$ γ және $\overline{\gamma}$ сандары үшін $1 < \gamma \le a_i \le \overline{\gamma}, i = 1, \dots, p$ теңсіздіктері орындалады;

$(C3)$ барлық $i = 1, \dots, p$ мен $t \in \mathbb{R}$ үшін $|v_i(t)| < H_0$ және $|f_i(t)| < \overline{m}_i$ теңсіздіктері орындалады, мұндағы $\overline{m}_i$ оң сан;

$(C4)$ $\frac{\max_i \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| \overline{m}_j}{\gamma - 1} < H_0$;

$(C5)$ $L \max_i \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| < \gamma$.

3.1-лемма [141, 10 б.]. *$\mathbb{R}$ жиынында шенелген $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ фунциясы (*3.1*)-жүйенің шенелген шешімі болуы үшін*

$$x_i(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a_i(t-s)} \left[\sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j\left(x_j(s)\right) + v_i(s) \right] ds \,, t \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$$

интегралық теңдеудің шешімі болуы қажетті және жеткілікті.

U кеңістігінде $\Pi\varphi(t) = (\Pi_1\varphi(t),\ \Pi_2\varphi(t), \dots, \Pi_p\varphi(t))$ операторын енгізелік:

$$\Pi_i\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a_i(t-s)} \left[\sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j\left(\varphi_j(s)\right) + v_i(s) \right] ds, i = 1, \dots, p.$$

3.2-лемма. U *кеңістігі П операторына қатысты инвариантты.*

Дәлелдеуі. Лемманы дәлелдеу үшін $(U1)$– $(U3)$ шарттарының дұрыстығын тексеру керек. Барлық $i = 1, \dots, p$ мен $t \in \mathbb{R}$ үшін

$$\left| \frac{d\Pi_i\varphi(t)}{dt} \right| \le \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| \left| f_j\left(\varphi_j(t)\right) \right| + |v_i(t)| +$$

$$+\bar{\gamma}\int_{-\infty}^{t} e^{-a_i(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|\left|f_j\left(\varphi_j(s)\right)\right| + |v_i(s)|\right]ds \leq$$

$$\leq \max_i\left(\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|\bar{m}_j + H\right) + \frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\max_i\left(\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|\bar{m}_j + H_0\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\right)\max_i\left(\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|\bar{m}_j + H_0\right) < \infty$$

теңсіздігі дұрыс болады. Яғни, $\frac{d\Pi_i\varphi(t)}{dt}$ туындылар шенелген және сәйкесінше $\Pi\varphi(t)$ үшін $(U1)$ шарты орындалады.

Енді $\Pi\varphi(t)$-дің $(U2)$ шартын қанағаттандыратындығын көрсетелік. $\varphi(t) \in U$ функциясы мен бекітілген $i = 1, \dots, p$ үшін

$$|\Pi_i\varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{t} e^{-a_i(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p} b_{ij}f_j\left(\varphi_j(s)\right) + v_i(s)\right]ds\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|\left|f_j\left(\varphi_j(s)\right)\right| + |v_i(s)|\right]ds \leq \frac{1}{\gamma}\max_i\left(\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|\bar{m}_j + H_0\right)$$

теңсіздігін аламыз. Соңғы теңсіздік пен (C5) шартынан $\|\Pi\varphi\|_1 < H_0$ шығады.

Әрі қарай, шенелген интервалда $\Pi\varphi(t + t_n), n \to \infty$ функциялық тізбегі $\Pi\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталатынын көрсетелік.

Кез келген $\varepsilon > 0$ санын және $[a, b] \subset \mathbb{R}$ интервалын бекітеміз. Барлық $i = 1, \dots, p$ үшін келесі теңсіздіктер орындалатындай $c < a$ мен $\varepsilon_\xi > 0$ сандарын қарастырамыз.

$$\frac{2H_0}{\gamma}\left(L\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}| + 1\right)e^{-\gamma(a-c)} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3.2)$$

және

$$\frac{\varepsilon_\xi}{\gamma}\left(L\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}| + 1\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.3)$$

$t \in [c,b]$ үшін $\|\varphi(t+t_n)-\varphi(t)\| < \varepsilon_\xi$ мен $\|f(t+t_n,x)-f(t,x)\| < \varepsilon_\xi$ теңсіздіктері орындалатындай жеткілікті үлкен натурал n санын қарастырамыз. U кеңістігіне тиісті $\varphi(t)$ функциясы мен бекітілген $i = 1,\dots,p$ үшін мына теңсіздікті аламыз:

$$|\Pi_i\varphi(t+t_n) - \Pi_i\varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{t+t_n} e^{-a_i(t+t_n-s)}\left[\sum_{j=1}^{p} b_{ij}f_j\left(\varphi_j(s)\right) + v_i(s)\right]ds - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{t} e^{-a_i(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p} b_{ij}f_j\left(\varphi_j(s)\right) + v_i(s)\right]ds\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{t} e^{-a_i(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\left[f_j\left(\varphi_j(s+t_n)\right) - f_j\left(\varphi_j(s)\right)\right] + [v_i(s+t_n) - v_i(s)]\right]ds\right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|L\left|\varphi_j(s+t_n) - \varphi_j(s)\right| + |v_i(s+t_n) - v_i(s)|\right]ds.$$

Осыдан барлық $t \in [a,b]$ мен $i = 1,\dots,p$ үшін

$$|\Pi_i\varphi(t+t_n) - \Pi_i\varphi(t)| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{c} e^{-\gamma(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|L\left|\varphi_j(s+t_n) - \varphi_j(s)\right| + |v_i(s+t_n) - v_i(s)|\right]ds +$$

$$+ \int_{c}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|L\left|\varphi_j(s+t_n) - \varphi_j(s)\right| + |v_i(s+t_n) - v_i(s)|\right]ds \le$$

$$\le \frac{2H_0}{\gamma}\left(L\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right| + 1\right)e^{-\gamma(a-c)} + \frac{\varepsilon_\xi}{\gamma}\left(L\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right| + 1\right)$$

теңсіздікті шығарамыз. (3.2) мен (3.3) теңсіздіктері $|\Pi_i\varphi(t+t_n) - \Pi_i\varphi(t)| < \varepsilon$, $t \in [a,b], i = 1,\dots,p$ орындалатынын көрсетеді. Демек, $\Pi\varphi(t)$ функциясы ($U3$) шартын қанағаттандырады. Лемма дәлелденді.

3.3-лемма. *П операторы U кеңстігінде кысушы оператор.*

Дәлелдеуі. $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ мен $(\psi_1, , \dots, \psi_p)$ болатындай $\varphi, \psi \in U$ функцияларын алайық. Бекітілген $t \in \mathbb{R}$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$|\Pi_i\varphi(t) - \Pi_i\psi(t)| \le \int_{-\infty}^{t} e^{-a_i(t-s)} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} \left| f_j\left(\varphi_j(s)\right) - f_j\left(\psi_j(s)\right)\right| ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \sum_{j=1}^{p} \left|b_{ij}\right| L \left|\varphi_j(s) - \psi_j(s)\right| ds \le \frac{1}{\gamma} \max_i \sum_{j=1}^{p} \left|b_{ij}\right| L \, \|\varphi(t) - \psi(t)\|_1.$$

Демек, $||\Pi\varphi(t) - \Pi\psi(t)||_1 \le \frac{1}{\gamma} \max_i \sum_{j=1}^{p} \left|b_{ij}\right| L \, \|\varphi(t) - \psi(t)\|_1$, (C5) шартына сәйкес Π операторы U кеңістігінің ішінде кысушы болады. Лемма дәлелденді.

3.1-теорема. *Егер (3.1) жүйедегі $v = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ күшті болжанбайтын функция болса және (C1)-(C5) шарттары орындалса, онда (3.1)-жүйенің асимптотикалық орнықты, күшті болжанбайтын жалғы шешімі бар болады.*

Дәлелдеуі. Алдымен, U кеңістігінің толықтығын тексерейік. $\mathbb{R}$-де $\phi_k(t) \to \phi(t)$ болатындай, $\mathcal{P}$ кеңістігінен алынған $\phi_k(t)$ Коши теңсіздігін қарастырамыз. Алдыңғы екі қасиетті тексеруге оңай болғандықтан, (U3)-шартынан бастаймыз. Жабық және шектелген $I \subset \mathbb{R}$ интервалын бекітеміз. Сонда

$$\|\phi(t + t_n) - \phi(t)\| \le \|\phi(t + t_n) - \phi_k(t + t_n)\| + \|\phi_k(t + t_n) - \phi_k(t)\| +$$

$$+\|\phi_k(t) - \phi(t)\| \qquad (3.4)$$

теңсіздігін аламыз. Жеткілікті аз $\varepsilon > 0$ мен $t \in I$ үшін (3.4) теңсіздіктің оң жағындағы әрбір қосылғышы $\frac{\varepsilon}{3}$ кіші болатындай, жеткілікті үлкен n мен k сандарын таңдайымыз. Бұдан I интервалында $\phi(t + t_n)$ функциялық тізбегінің $\phi(t)$-ге жинақталатынын аламыз. U кеңістігі толық болатынын көрсеттік. Қысушы бейнелеулер туралы теореманы, 3.2 және 3.3-леммалар мен бірге қолдану арқылы (3.1)-жүйенің жалғыз $\omega(t) \in U$ шешімі болатын дәлелдедік.

Әрі қарай, келесі қатынастарды қолданамыз:

$$\omega_i(t) = \omega_i(s_n) - \int_{s_n}^{t} a_i\omega_i(s)ds + \int_{s_n}^{t} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j(x_j(s))\, ds + \int_{s_n}^{t} v_i(s)ds,$$

және

$$\omega_i(t + t_n) = \omega_i(s_n + t_n) - \int_{s_n}^{t} a_i\omega_i(s + t_n)ds +$$

$$+\int_{s_n}^{t}\sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j(x_j(s+t_n))\,ds+\int_{s_n}^{t} v_i(s+t_n)ds.$$

Олардан

$$\omega_i(t+t_n)-\omega_i(t)=\omega_i(s_n+t_n)-\omega_i(s_n)-\int_{s_n}^{t} a_i\big(\omega_i(s+t_n)-\omega_i(s)\big)ds+$$

$$+\int_{s_n}^{t}\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\left(f_j\left(x_j(s+t_n)\right)-f_j\left(x_j(s)\right)\right)ds+$$

$$+\int_{s_n}^{t}\big(v_i(s+t_n)-v_i(s)\big)ds \tag{3.5}$$

қатынасын аламыз. Келесі теңсіздіктер орындалатындай оң κ және натурал l,k сандарын табуға болады:

$$\kappa<\delta; \tag{3.6}$$

$$\kappa\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{p}\big(a_j+L|b_{ij}|\big)\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\right)\geq\frac{3}{2l}, i=1,\dots,p, \tag{3.7}$$

$$\|\omega(t+s)-\omega(t)\|<\varepsilon_0 min\left\{\frac{1}{k},\frac{1}{4l}\right\}, t\in\mathbb{R}, |s|<\kappa. \tag{3.8}$$

l,k,κ және $n\in\mathbb{N}$, сандары мен $i=1,\dots,p$ бекітілген деп алайық.

$\Delta=|\omega_i(s_n+t_n)-\omega_i(s_n)|$ белгілеуін қолданып, мындай жағдайларды қарастырайық: (i) $\Delta<\varepsilon_0/l$; $\Delta\geq\varepsilon_0/l$ дәлдеудің қалғаны екі бөлікке бөлінеді.

(i) $t\in[s_n,s_n+\kappa]$ үшін

$$\|\omega(t+t_n)-\omega(t)\|\leq\|\omega(t+t_n)-\omega(s_n+t_n)\|+\|\omega(s_n+t_n)-\omega(s_n)\|+$$

$$+\|\omega(s_n)-\omega(t)\|<\frac{\varepsilon_0}{l}+\frac{\varepsilon_0}{k}+\frac{\varepsilon_0}{k}=\varepsilon_0\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)$$

шығады.

Сәйксінше, (3.5)– (3.8), қолдансақ, $t\in\left[s_n+\frac{\kappa}{2},s_n+\kappa\right]$ үшін

$$|\omega_i(t+t_n)-\omega_i(t)|\geq\int_{s_n}^{t}|v_{ij}(s+t_n)-v_{ij}(s)|ds-$$

$$-\int_{s_p}^{t} a_i\left|\omega_i\left(s+t_p\right)-\omega_i(s)\right|ds-$$

$$-\int_{s_n}^{t}\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(x_j(s+t_n)\right)-f_j\left(x_j(s)\right)\right|ds-$$

$$-|\omega_i(s_n+t_n)-\omega_i(s_n)|\geq$$

$$\geq\frac{\kappa}{2}\varepsilon_0-\sum_{j=1}^{p}\left(a_j+L\left|b_{ij}\right|\right)\varepsilon_0\kappa\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{l}=$$

$$=\ \varepsilon_0\kappa\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{p}\left(a_j+L\left|b_{ij}\right|\right)\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\right)-\frac{\varepsilon_0}{l}\geq\frac{\varepsilon_0}{2l}$$

табамыз.
(ii) $\Delta\geq \varepsilon_0/l$ жағдайында, $t\in[s_n-\kappa,s_n+\kappa]$ үшін

$$\|\omega(t+t_n)-\omega(t)\|\leq\|\omega(s_n+t_n)-\omega(s_n)\|-\|\omega(s_n)-\omega(t)\|-$$

$$-\|\omega(t+t_n)-\omega(s_n+t_n)\|\ \geq\ \frac{\varepsilon_0}{l}-\frac{\varepsilon_0}{4l}-\frac{\varepsilon_0}{4l}=\frac{\varepsilon_0}{2l}$$

аламыз.

Сонымен, $\omega(t)$ шешімі күшті болжанбайтын функция болады.

Соңында, $\omega(t)$ шешімінің орнықтылығын дәлелделік. Барлық $i\ =\ 1,2,\dots,p$ үшін мына теңдікті алайық:

$$\omega_i(t)=e^{-a_i(t-t_0)}\omega_i(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-a_i(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p}b_{ij}f_j\left(\omega_j(s)\right)+v_i(s)\right]ds.$$

$y(t)=(y_1(t),y_2(t),\dots,y_p(t))$ (3.1) жүйенің басқа шешімі болсын, онда барлық $i\ =\ 1,2,\dots,p$ үшін

$$y_i(t)=e^{-a_i(t-t_0)}y_i(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-a_i(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p}b_{ij}f_j\left(y_j(s)\right)+v_i(s)\right]ds.$$

Барлық $i\ =\ 1,2,\dots,p$, үшін

$$y_i(t)-\omega_i(t)=e^{-a_i(t-t_0)}\big(y_i(t_0)-\omega_i(t_0)\big)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}e^{-a_i(t-s)}\left[\sum_{j=1}^{p}b_{ij}f_j\left(y_j(s)\right)-\sum_{j=1}^{p}b_{ij}f_j\left(\omega_j(s)\right)\right]ds$$

қатынасын қолдану арқылы мына теңсіздікті аламыз:

$$|y_i(t)-\omega_i(t)|\le e^{-\gamma(t-t_0)}|y_i(t_0)-\omega_i(t_0)|+$$

$$+\int_{t_0}^{t}e^{-\gamma(t-s)}\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(y_j(s)\right)-f_j\left(\omega_j(s)\right)\right|ds\le$$

$$\le e^{-\gamma(t-t_0)}\|y(t_0)-\omega(t_0)\|+L\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\int_{t_0}^{t}e^{-\gamma(t-s)}\|y(s)-\omega(s)\|ds.$$

Осылайша, келесі теңсіздік шығады:

$$||y(t)-\omega(t)||\le\ e^{-\gamma(t-t_0)}||y(t_0)-\omega(t_0)||+G\int_{t_0}^{t}e^{-\gamma(t-s)}||y(s)-\omega(s)||ds,$$

мұндағы $G=L\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|$ және осы теңсіздіктің екі жағын $e^{\gamma t}$ көбейтсек,

$$e^{\gamma t}||y(t)-\omega(t)||\le e^{\gamma t_0}||y(t_0)-\omega(t_0)||+G\int_{t_0}^{t}e^{\gamma s}||y(s)-\omega(s)||ds.$$

Әрі қарай, Гроноулл-Беллман леммасын қолдансақ

$$||y(t)-\omega(t)||\le||y(t_0)-\omega(t_0)||e^{(G-\gamma)(t-t_0)}.$$

Сонымен, (C5)-шарттан $\omega(t)$ функциясының (3.1)-жүйенің асимптотикалық орнықты күшті болжанбайтын жалғыз шешімі екендігі шығады.

3.1-мысал. [2, 88-90 б.] алынған нәтижелерге сәйкес (1.2) логистикалық теңдеудің болжанбайтын шешімі бар болады. $\Omega(t)$ функциясы $\Omega(t)=\psi_i$, $t\in[\,\theta_i,\ \theta_{i+1}),\ i\in\mathbb{Z}$ арқылы анықталған бөлікті-тұрақты функция болсын, мұндағы $\psi_i, i\in\mathbb{Z},\ \ \mu=3.92$ болғандағы (1.2) логистикалық теңдеудің болжанбайтын шешімі. Бұл тізбек [0,1] интервалының ішінде жатады.

Төмендегі интегралды қарастырамыз:

$$\Theta(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-2.5(t-s)}\Omega(s)ds, \tag{3.9}$$

мұндағы $\Omega(t)=\psi_i,\ \ t\in[\theta_i,\ \theta_{i+1}),\ \ i\in\mathbb{Z}$. $\Theta(t)$ функциясы сан түзуінде $\sup_{t\in\mathbb{R}}|\Omega(t)|\leq 2/5$ болатындай шенелген функция. $\Theta(t)$ функциясының болжанбайтындығы [4, 664 б.] жұмыстың 1-мысалына ұқсас дәлелденеді.

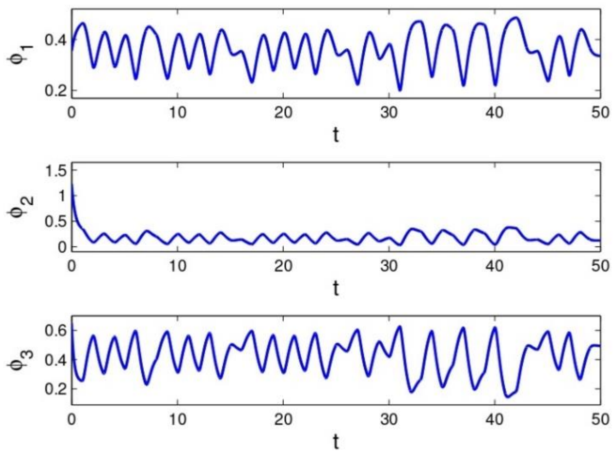
Хопфилд нейрондық желісін енгіземіз

$$x_i'(t)=a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{3}b_{ij}f_j(x_j(t))+v_i(t), \tag{3.10}$$

мұндағы $i\ =\ 1,2,3$ және $a_1\ =2,\ a_2\ =3,\ a_3\ =4,\ f\big(x(t)\big)=\frac{1}{20}arctg(x(t))$,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.02 & 0.03 & 0.02\\ 0.04 & 0.05 & 0.01\\ 0.03 & 0.06 & 0.02\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_1(\mathrm{t})\\ v_2(\mathrm{t})\\ v_{31}(\mathrm{t})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\Theta^3(t)+1\\ -4\Theta(t)+1.5\\ 7\Theta(t)\end{pmatrix}.$$

$(-15\Theta^3(t)+1,-4\Theta(t)+1.5,7\Theta(t))$ қозу функциясы болжанбайтын болады. $\gamma=2,\ L=0{,}05$ болғанда (3.10) жүйе үшін (C1)–(C5) шарттары орындалатыны шығады. Бастапқы шарттары $\phi_1(0)=0.355,\ \ \phi_2(0)=1.235,\ \ \phi_3(0)=0.649$ болатын, (3.10)-жүйенің шешімін моделдеу нәтижесі 3.1-суретте көрсетілген. Уақыт артқан сайын $\phi(t)$ шешімі болжанбайтын $x(t)$ шешіміне жақындайды. Сонымен егер $H=2.8$ деп алсақ, 3.1-теоремадағы барлық шарттар орындалады. Осы теоремаға сәйкес, (3.10)-жүйе асимптотикалық орнықты, жалғыз тербеліске ие болады. Тербелістің біркелкі емес қозғалыспен әрекет етуі (3.10)-жүйенің болжанбайтын шешімі бар екенін білдіреді.



Сурет 3.1 – $\phi(t)$ функциясының координаталары

Кейінгі мысалда, жаңа болжанбайтын қозуларды алу үшін, (3.10)-жүйенің болжанбайтын шешімін қолданамыз.

3.2-мысал. Келесі жүйені қарастыралық

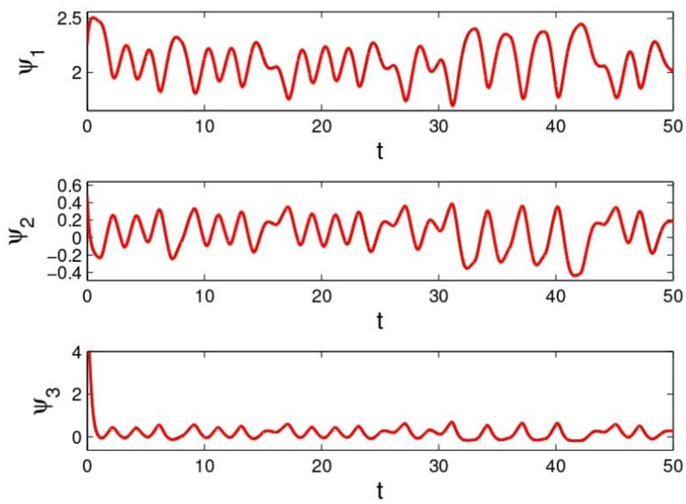
$$y_i'(t) = a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{3} b_{ij} f_j(y_j(t)) + v_i(t), \qquad (3.11)$$

мұндағы $i = 1,2,3$ and $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, $a_3 = 5$, $f\big(x(t)\big) = \frac{3}{50} arctg(z)$,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.01 & 0.04 \\ 0.06 & 0.02 & 0.05 \\ 0.03 & 0.07 & 0.02 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1(\mathrm{t}) \\ v_2(\mathrm{t}) \\ v_{31}(\mathrm{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1(\mathrm{t}) + 4 \\ -15x_2(t) + 3 \\ 20{x_3}^3(\mathrm{t}) - 1 \end{pmatrix},$$

ал $(x_1(\mathrm{t}), x_2(\mathrm{t}), x_3(\mathrm{t}))$ – (3.10)-жүйенің шешімі. $\gamma = 4$, $L = 0{,}06$ және $H = 13$ болғанда (3.11) жүйе үшін (C1)–(C5) шарттар орындалады. Сондықтан, 3.1-теоремаға сәйкес (3.11)-жүйенің асимптотикалық орнықты, жалғыз шешімі бар болады. Егер $H = 13.5$, деп алсақ, (3.11)-жүйенің шешімі теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады.

Бастапқы шарттары $\psi_1(0) = 2.2610$, $\psi_2(0) = 0.4815$, $\psi_3(0) = 3.8226$ болатын, (3.11)-жүйенің шешімін моделдеу нәтижесі 3.2-суретте көрсетілген. 3.1-мысалға ұқсас, уақыт артқан сайын $\psi(t)$ шешімі болжанбайтын $y(t)$ шешіміне жақындайды.



Сурет 3.2 – $\psi(t)$ функциясының координаталары

3.2 Хопфилдтік құрылымды импульсті нейрондық желілердің болжанбайтын тербелістері

Бұл бөлімде, жәй дифференциалдық теңдеумен берілген (3.1) нейрондық желіге секіріс теңдеуін қосу арқылы алынған мына түрдегі импульсті нейрондық желілердің болжанбайтын тербелестері қарастырытырылады

$$x_i'(t) = a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j(x_j(t)) + v_i(t), t \neq \theta_k,$$
$$\Delta x_i|_{t=\theta_k} = \alpha_i x_i(\theta_k) + \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} g_j(x_j(\theta_k)) + W_{ik}, \quad (3.12)$$

мұндағы $t, x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, $k \in \mathbb{Z}$. Жүйенің импульсті бөлігінің элементтерін де (3.1) тендеудің элементтеріне сәйкес сипаттаймыз:

α_i − басқа нейрондармен мен кірістерден оқшауланған кезде өзін-өзі реттейтін немесе нейрондарды өз қалпына келтіретін тұрақты жылдамдықтар;

g_j – соққылардың активациялық векторлары, олар j-ші нейронның кіріс потенциалында соққы әсерін тудырады,

β_{ij} − i-ші нейрон мен j-ші нейрон байланысың синаптикалық салмақтары;

W_{ik} – нейронға сырттан кіретін импульстар.

Бұл бөлімде, $f_j, g_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ активациялық функциялары үзіліссіз, $a_i, \alpha_i, b_{ij}, \beta_{ij}$ коэффициенттері нақты сандар және $v_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функциялары шартты бірқалыпты үзіліссіз функциялар болсын деп аламыз.

(3.12) жүйенің импульсті бөлігі дифференциалдық теңдеумен бірдей құрылымға ие. Жүйенің импульстері де Хопфилд нейрондық желісі теңдеуінің түріне ұқсас болғандықтан, нейрондық желінің өзін *Хопфилдтік құрылымды* деп айтуға болады, яғни, (3.12)-модельді *Хопфилдтік құрылымды импульсті нейрондық желілер* (ХҚИНЖ) деп атаймыз.

Зертеуіміздегі жылдамдықтарды сипаттайтын a_i, $i = 1,2,\dots,p$ коэффициенттері [127, 439 б.; 128, 62 б.; 129, 4175 б.] мақалаларда оң мәнді деп қарастырылған. (3.12) модельдегі бұл коэффициенттер, электр тізбегіндегі теріс сыйымдылықтың әсерінен теріс, оң және нөлдік мәндерді қабылдауы мүмкін. Алғаш рет секіріс теңдеуінде *соққы әсері* және *соққы активациясы* ұғымдары қолданылды.

$\theta_k, k \in \mathbb{Z}$ үзіліс нүктелері 1-бөлімде қарыстылған импульстік жүйенің үзіліс сәттеріне сәйкес анықталады,

$$\theta_k = kT + \gamma_k, k \in \mathbb{Z} \quad (3.13)$$

мұндағы $\gamma_k, k \in \mathbb{Z}$ – болжанбайтын тізбек, ал $T \geq 4$ саны $\sup_{i \in Z} |\gamma_i| < T/h$, $h \geq 3$ шартына қанағаттандырады. (3.13)-тізбектің болжанбайтындығы 1.1-бөлімшеде дәлелденді.

Барлық $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p)$ бөлікті үзіліссіз функцияларының $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ кеңістігін қарастырамыз, мұндағы $\mathcal{F}$ жиыны 1.1-бөлімшеде анықталған бөлікті үзіліссіз функциялар жиыны. Кеңістіктегі норма $\|\psi\|_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\psi(t)\|$ арқылы анықталады.

Кеңістіктің элементері мына қасиеттерге бағынатын болсын:

$(\mathcal{S}1)$ барлық $\psi(t) \in \mathcal{S}$ үшін $\|\psi(t)\|_1 < H_1$ орындалатындай оң H_1 саны табылады;

$(\mathcal{S}2)$ әрбір $\psi(t) \in \mathcal{S}$ үшін әрбір шенелген интервалдағы B-топологияда $\psi(t + t_n)$ функциялық тізбегі $\psi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады, мұндағы $t_n \to \infty,\ n \to \infty$, (3.12) жүйедегі $v(t)$ үшін анықталған тізбекпен бірдей тізбек.

(3.12)- жүйемен байланысқан

$$\begin{aligned} &x_i'(t) = a_i x_i(t), t \neq \theta_k, \\ &\Delta x|_{t=\theta_k} = \alpha_i x_i(\theta_k) \end{aligned} \tag{3.14}$$

жүйесінің фундаменталды шешімін $x_i(t,s)$ арқылы белгілейік, мұндағы $t \in \mathbb{R}$, a_i, b_i, $i = 1,2,\ldots,p$, тұрақтылары нақты сандар.

Фундаменталды шешім төмендегідей

$$x_i(t,s) = e^{a_i(t-s)}(1+\ \alpha_i)^{\,i([s,t))}, t \geq s, \tag{3.15}$$

мұндағы $i([s,t)) - [s,t)$ аралығына тиісті үзіліс нүктелерінің саны.

Әрі қарай зерттеуде келесі шарттар қажет болады:

$(I1)$ әрбір $i = 1,2,\ldots,p$ үшін $\lambda = \max\limits_i \left(a_i + \frac{1}{T}Ln|1+\ \alpha_i|\right) < 0$;

$(I2)$ барлық $i = 1,\ldots,p, |x| < H_1$ үшін $|f_i(x)| \leq m_f,\ |g_i(x)| \leq m_g$ орындалады, мұндағы m_f, m_g оң сандар;

$(I3)$ барлық $i = 1,\ldots,p, |x| < H_1, |y| < H_1$ үшін $|f_i(x) - f_i(y)| \leq l_f^i\|x - y\|$ және $|g_i(x) - g_i(y)| \leq l_g^i\|x - y\|$ теңсізіктері орындалатындай оң l_f^i, l_g^i сандары табылады;

$(I4)$ барлық $i = 1,\ldots,p$ үшін $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|v_i(t)| + \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}|W_{ik}| = M < \infty$ орындалатындай оң M саны табылады.

(3.15) теңдіктен барлық $i = 1,2,\ldots,p$ үшін

$$|x_i(t,s)| \leq K_I e^{\lambda(t-s)}, t \geq s \tag{3.16}$$

теңсіздігі орындалатындай $K \geq 1$ саны табылатындығы шығады.

(3.14) жүйенің болжанбайтын шешімінің жалғыздығы мен асимптотикалық орнықтылығын дәлелдеуде келесі шарттар қолданылады:

$(I5)$ $K_I\left(\frac{1}{|\lambda|}\left(\max\limits_i \sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|m_f + M\right) + \frac{1}{1 - e^{\lambda\underline{\theta}}}\left(\max\limits_i \sum_{j=1}^{p}|\beta_{ij}|m_g + M\right)\right) < H_1$;

$$(I6)\ K_I\left(\frac{1}{|\lambda|}\max_i l_f^i \max_i\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|+\frac{1}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\max_i l_g^i\max_i\sum_{j=1}^{p}|\beta_{ij}|\right)<1;$$

$$(I7)\ K_I\max_i l_f^i \max_i\sum_{j=1}^{p}|b_{ij}|+\frac{1}{\underline{\theta}}ln\left(1+K_I\max_i l_g^i\max_i\sum_{j=1}^{p}|\beta_{ij}|\right)<-\lambda.$$

3.4-лемма. *Егер* $(I1)$ *шарты орындалса, онда барлық* $i=1,2,\ldots,p$ *үшін*

$$|x_i(t+t_n,s+t_n)-x_i(t,s)|\le\ \overline{K}e^{\lambda(t-s)},t\ge s, \qquad (3.17)$$

теңсіздігі шығады, мұндағы $\overline{K}=K_I\ max(1,|\alpha_i|)$.

Лемманың дәлелдеуі 1.1-лемманың дәлелдеу жолына ұқсас.

Әрі қарай, (3.12)-ші ҚХИНЖ-дің үзілісті болжанбайтын тербелістерінің бар болуы мен жалғыздығын зерттеледі.

3.5-лемма. $y(t)=(y_1(t),\ldots,y_p(t))$ *вектор функциясы, барлық* $i=1,2,\ldots,p,k\in\mathbb{Z}$ *үшін* (3.12)*-жүйенің шенелген шешімі болуы үшін*

$$y_i(t)=\int_{-\infty}^{t}x_i(t,s)\left[\sum_{j=1}^{p}b_{ij}f_j\left(y_j(s)\right)+v_i(s)\right]ds+$$

$$+\sum_{\theta_k<t}x_i(t,\theta_k+)\left[\sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}g_j(y_j(\theta_k))+W_{ik}\right]$$

интегралық теңдеудің шешімі болуы қажетті және жеткілікті.

$\mathcal{S}$ жиынында барлық $i=1,2,\ldots,p,k\in\mathbb{Z}$ үшін

$$\Pi_i\psi(t)=\int_{-\infty}^{t}x_i(t,s)\left[\sum_{j=1}^{p}b_{ij}f_j\left(\psi_j(s)\right)+v_i(s)\right]ds+$$

$$+\sum_{\theta_k<t}x_i(t,\theta_k+)\left[\sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}g_j(\psi_j(\theta_k))+W_{ik}\right]$$

болатындай $\Pi\psi(t)=(\Pi_1\psi(t),\Pi_2\psi(t),\ldots,\Pi_p\psi(t))$ операторын еңгізелік.

3.6-лемма. *Егер* $\psi(t)\in\mathcal{S}$ *болса, онда* $\Pi\psi(t)\in\mathcal{S}$.

Дәлелдеуі. Алдымен, $\Pi\psi(t)$ функциясының $(\mathcal{S}1)$ қасиетін қанағаттандыратынын дәлелделік. $\Pi\psi(t)$ функциясы мен барлық $i=1,2,\ldots,p$ үшін

$$|\Pi_i\psi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{t} x_i(t,s)\left[\sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j\left(\psi_j(s)\right) + v_i(s)\right]ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{\theta_k<t} x_i(t,\theta_k+)\left[\sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} g_j(\psi_j(\theta_k)) + W_{ik}\right]\right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} |x_i(t,s)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\psi_j(s)\right)\right| + |v_i(s)|\right]ds +$$

$$+ \sum_{\theta_k<t} |x_i(t,\theta_k+)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left|g_j(\psi_j(\theta_k))\right| + |W_{ik}|\right] \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} K_I e^{\lambda(t-s)}\left(\max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right| m_f + M\right)ds +$$

$$+ \sum_{\theta_k<t} K_I e^{\lambda(t-\theta_k)}\left(\max_i \sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right| m_g + M\right) \le$$

$$\le \frac{K_I}{|\lambda|}\left(\max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right| m_f + M\right) + \frac{K_I}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\left(\max_i \sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right| m_g + M\right)$$

теңсіздігін аламыз. Сонымен, $(I5)$ шарты бойынша $\|\Pi\psi(t)\|_1 < H_1$ орындалады.

$\Pi\psi(t)$-дің Пуассон бойынша орнықтылығы, яғни $(\mathcal{S}2)$ қасиеті орындалатынын тексерелік.

Кез келген оң шенелген $\varepsilon\ [a,b],\ -\infty < a < b < \infty$ интервалын бекітеміз. Жеткілікті үлкен n үшін $[a,b]$ сегментінде $\|\Pi\psi(t+t_n) - \Pi\psi(t)\| < \varepsilon$ орындалатынын дәлелделік. Келесі теңсіздіктер орындалатындай $c < a$ және $\xi > 0$ сандарын таңдап аламыз:

$$\frac{\overline{K}\left(\max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right| m_f + M\right) + 2K_I\left(\max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right| H_1 + M\right)}{|\lambda|} e^{\lambda(a-c)} < \frac{\varepsilon}{5}, (3.18)$$

$$\frac{2K_I\left(\max_i \sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|m_g+\max_i l_g^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|H_1+2M\right)}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}e^{\lambda(a-c)}<\frac{\varepsilon}{5}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\bar{K}\left(\max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|m_f+M\right)+2K_I\left(\max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|H_1+M\right)}{|\lambda|(1-e^{\lambda\underline{\theta}})}\left(e^{\lambda\xi}-1\right)<\frac{\varepsilon}{5}, (3.20)$$

$$\frac{K_I\xi}{|\lambda|}\left(\max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|+1\right)<\frac{\varepsilon}{5} \quad (3.21)$$

және

$$\frac{K_I\xi}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\left(\max_i \sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left(m_g+\max_i l_g^i\right)+M+1\right)<\frac{\varepsilon}{5}. \quad (3.22)$$

$t\in[c,b]$, $\theta_k\in[c,b]$ $k\in\mathbb{Z}$, $i=1,2,\ldots,p$ үшін $\left|\theta_{k+l_n}-t_n-\theta_k\right|<\xi$, $\left|\psi_i(\theta_{k+l_n})-\psi_i(\theta_k)\right|<\xi$, $\left|W_{i\,k+l_n}-W_{ik}\right|<\xi$, $|\psi_i(t+t_n)-\psi_i(t)|<\xi$ және $|v_i(t+t_n)-v_i(t)|<\xi$ теңсіздіктері орындалатын жеткілікті үлкен натурал n санын қарастыралық.

Әрі қарай, жалпылықты жоғалтпай, $m,q\in\mathbb{Z}$ үшін

$$\theta_{m-1}\le c\le\theta_m<\cdots<\theta_q\le t\le\theta_{q+1}$$

теңсіздігін қарастырамыз. Онда барлық $t\in[a,b]$, $i=1,2,\ldots,p$ үшін келесі теңсіздік дұрыс болады:

$$|\Pi_i\psi(t+t_n)-\Pi_i\psi(t)|\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{c}|x_i(t+t_n,s+t_n)-x_i(t,s)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\psi_j(s+t_n)\right)\right|+|v_i(s+t_n)|\right]ds+$$

$$+\sum_{\theta_k<c}\left|x_i\left(t+t_n,\theta_{k+l_n}+\right)-x_i(t,\theta_k+)\right|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left|g_j(\psi_j(\theta_{k+l_n}))\right|+\left|W_{ik+l_n}\right|\right]+$$

$$+\int_{c}^{t}|x_i(t+t_n,s+t_n)-x_i(t,s)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\psi_j(s+t_n)\right)\right|+|v_i(s+t_n)|\right]ds+$$

$$+\sum_{c\le\,\theta_k<t}\left|x_i\left(t+t_n,\theta_{k+l_n}+\right)-x_i(t,\theta_k+)\right|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left|g_j(\psi_j(\,\theta_{k+l_n}))\right|+\left|W_{ik+l_n}\right|\right]+$$

$$+\int_{-\infty}^{c}|x_i(t,s)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\psi_j(s+t_n)\right)-f_j\left(\psi_j(s)\right)\right|+|v_i(s+t_n)-v_i(s)|\right]ds+$$

$$+\sum_{\theta_k<c}|x_i(t,\theta_k+)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left|g_j(\psi_j(\theta_{k+l_n}))-g_j(\psi_j(\theta_k))\right|+\left|W_{ik+l_n}-W_{ik}\right|\right]+$$

$$+\int_{c}^{t}|x_i(t,s)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\psi_j(s+t_n)\right)-f_j\left(\psi_j(s)\right)\right|+|v_i(s+t_n)-v_i(s)|\right]ds+$$

$$+\sum_{c\le\,\theta_k<t}|x_i(t,\theta_k+)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left|g_j(\psi_j(\theta_{k+l_n}))-g_j(\psi_j(\theta_k))\right|+\left|W_{ik+l_n}-W_{ik}\right|\right].$$

3.4-лемманы қолданып, барлық $i=1,2,\ldots,p$ үшін мына бағалауды шығарамыз:

$$\int_{-\infty}^{c}|x_i(t+t_n,s+t_n)-x_i(t,s)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\psi_j(s+t_n)\right)\right|+|v_i(s+t_n)|\right]ds+$$

$$+\sum_{\theta_k<c}\left|x_i\left(t+t_n,\theta_{k+l_n}+\right)-x_i(t,\theta_k+)\right|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left|g_j(\psi_j(\,\theta_{k+l_n}))\right|+\left|W_{ik+l_n}\right|\right]\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{c}\overline{K}e^{\lambda(t-s)}\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|m_f+M\right)ds+\sum_{k=-\infty}^{m-1}2K_Ie^{\lambda(t-\theta_k)}\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|m_g+M\right)<$$

$$<\left(\frac{\overline{K}}{|\lambda|}\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|m_f+M\right)+\frac{2K_I}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|m_g+M\right)\right)e^{\lambda(a-c)}.$$

Әрі қарай, барлық $i=1,2,\ldots,p$ үшін

$$\int_{c}^{t}|x_i(t+t_n,s+t_n)-x_i(t,s)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\psi_j(s+t_n)\right)\right|+|v_i(s+t_n)|\right]ds+$$

$$+\sum_{c\leq\,\theta_k<t}\left|x_i\left(t+t_n,\theta_{k+l_n}+\right)-x_i(t,\theta_k+)\right|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left|g_j(\psi_j(\,\theta_{k+l_n}))\right|+\left|W_{ik+l_n}\right|\right]\leq$$

$$\leq\sum_{k=m}^{q}\int_{\theta_i}^{\theta_{k+l_n}-t_n}\overline{K}e^{\lambda(t-s)}\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|m_f+M\right)ds+$$

$$+\sum_{k=m}^{q}K_Ie^{\lambda(t-\theta_k)}\xi\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|m_g+M\right)<$$

$$<\frac{\overline{K}\left(e^{\lambda\xi}-1\right)}{|\lambda|(1-e^{\lambda\underline{\theta}})}\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|m_f+M\right)+\frac{K_I\xi}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\left(\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|m_g+M\right)$$

бағалауын аламыз. Сондай ақ, барлық $i=1,2,\ldots,p$ үшін

$$\int_{-\infty}^{c}|x_i(t,s)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\psi_j(s+t_n)\right)-f_j\left(\psi_j(s)\right)\right|+|v_i(s+t_n)-v_i(s)|\right]ds+$$

$$+\sum_{\theta_k<c}|x_i(t,\theta_k+)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left|g_j(\psi_j(\theta_{k+l_n}))-g_j(\psi_j(\theta_k))\right|+\left|W_{ik+l_n}-W_{ik}\right|\right]\leq$$

$$\leq\int_{-\infty}^{c}K_Ie^{\lambda(t-s)}\left(\max_i l_f^i\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|2H_1+2M\right)ds+$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{m-1}K_Ie^{\lambda(t-\theta_k)}\left(\max_i l_g^i\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|2H_1+2M\right)<$$

$$\leq\frac{2K_I}{|\lambda|}\left(\max_i l_f^i\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|H_1+M\right)e^{\lambda(a-c)}+$$

$$+\frac{2K_I}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\left(\max_i l_g^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right| H_1+M\right)e^{\lambda(a-c)}$$

теңсіздігі орындалады. Сәйкесінше, барлық $i=1,2,\ldots,p$ үшін

$$\int_c^t |x_i(t,s)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\psi_j(s+t_n)\right)-f_j\left(\psi_j(s)\right)\right|+|v_i(s+t_n)-v_i(s)|\right]ds+$$

$$+\sum_{c\leq\theta_k<t}|x_i(t,\theta_k+)|\left[\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\left|g_j(\psi_j(\theta_{k+l_n}))-g_j(\psi_j(\theta_k))\right|+\left|W_{ik+l_n}-W_{ik}\right|\right]\leq$$

$$\leq\int_c^t K_I e^{\lambda(t-s)}\left(\max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\xi+\xi\right)ds+$$

$$+\sum_{k=m}^{q}\int_{\theta_i}^{\theta_{k+l_n}-t_n} K_I e^{\lambda(t-s)}\left(\max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right| 2H_1+2M\right)ds+$$

$$+\sum_{k=m}^{q}K_I e^{\lambda(t-\theta_k)}\left(\max_i l_g^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\xi+\xi\right)<$$

$$<\frac{K_I\xi}{|\lambda|}\left(\max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|+1\right)+$$

$$+\frac{2K_I\left(e^{\lambda\xi}-1\right)}{|\lambda|(1-e^{\lambda\underline{\theta}})}\left(\max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right| H_1+M\right)+$$

$$+\frac{K_I\xi}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\left(\max_i l_g^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|+1\right)$$

бағалауын аламыз.

(3.19)-(3.22) теңсіздіктерін ескерсек, $\|\Pi\psi(t+t_n)-\Pi\psi(t)\|<\varepsilon,\ t\in[a,b]$ шығады. Демек, шенелген интервалдағы B-топологияда $\Pi\psi(t+t_n),\ n\to\infty$ функциялық тізбегі $\Pi\psi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады. Яғни, $\Pi\psi(t)$ функциясы $(\mathcal{S}2)$-қасиетті қанағаттандырады және $\Pi\psi(t)\in\mathcal{S}$.

3.7-лемма. Π *қысушы оператор, яғни* $\Pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Дәлелдеуі. $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ $\mathcal{S}$ кеңістігінің элементтері болсын. Олай болса,

$$|\Pi_i\varphi(t) - \Pi_i\psi(t)| \le \int_{-\infty}^{t} |x_i(t,s)| \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| \left| f_j\left(\varphi_j(s)\right) - f_j\left(\psi_j(s)\right)\right| ds +$$

$$+ \sum_{\theta_k < c} |x_i(t,\theta_k +)| \sum_{j=1}^{p} |\beta_{ij}| |g_j(\varphi_j(\theta_k)) - g_j(\psi_j(\theta_k))| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} K_I e^{\lambda(t-s)} \max_i \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| \max_i l_f^i \left|\varphi_j(s) - \psi_j(s)\right| ds +$$

$$+ \sum_{\theta_k < c} K e^{\lambda(t-\theta_k)} \max_i \sum_{j=1}^{p} |\beta_{ij}| \max_i l_g^i |\varphi_j(\theta_k) - \psi_j(\theta_k)| \le$$

$$\le \frac{K_I}{|\lambda|} \max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| |\varphi_j(t) - \psi_j(t)| +$$

$$+ \frac{K_I}{1 - e^{\lambda\underline{\theta}}} \max_i l_g^i \max_i \sum_{j=1}^{p} |\beta_{ij}| |\varphi_j(t) - \psi_j(t)| \le$$

$$\le \left(\frac{K_I}{|\lambda|} \max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| + \frac{K_I}{1 - e^{\lambda\underline{\theta}}} \max_i l_g^i \max_i \sum_{j=1}^{p} |\beta_{ij}| \right) \|\varphi(t) - \psi(t)\|_1.$$

теңсіздігі орындалады.

Демек, $(I6)$ шартқа сәйкес Π операторы $\mathcal{S}$-тің ішінде кысушы болады.

3.2-теорема. *Егер* (3.12) *жүйедегі* $(v(t), W_k)$ *жұбы 1.3-анықтама мағынасындағы болжанбайтын жұп болса және* $(I1) - (I7)$ *шарттары орындалса, онда* (3.12) *ҚХИНЖ-дің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Дәлелдеуі. Алдымен, $\mathcal{S}$-тің толық кеңістік екенін көрсетелік. $\mathcal{S}$ кеңістігінде, $\mathbb{R}$-де $\phi(t)$ шектік функциясына жинақталатын $\phi_r(t)$, $r \in \mathbb{N}$ Коши теңсіздігін қарастыралық. $(\mathcal{S}1)$ қасиетінің орындалатындығы оңай тексерілетіндіктен $(\mathcal{S}2)$ қасиетінің орындалатынын көрсетелік. Жабық және шектелген $I \subset \mathbb{R}$ интервалын бекітеміз. Осы интервалда сәйкесінше $\phi(t)$ мен $\phi_r(t)$ функцияларының үзіліс нүктелерін θ_k, $k = j, j+1, \dots, j+m$ арқылы, ал $\phi(t + t_n)$ мен $\phi_r(t + t_n)$ функцияларының үзіліс нүктелерін $\theta_k^n = \theta_{k+l_n} - t_n$,

$i = j, j+1, \dots, \ j+m$, арқылы белгілейік. n саны $|\theta_k^n - \theta_k| < \varepsilon,\ k = j, j+1, \dots,$ $j+m$ орындалатын жеткілікті үлкен сан болсын. Егер r жеткілікті үлкен болса, $\phi_r(t)$ тізбегінің жинактылығынан, $\|\phi(t+t_n) - \phi_r(t+t_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ мен $\|\phi(t) - \phi_r(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ аламыз. $\phi_r(t) \in \mathcal{S}$ тізбегі ($\mathcal{S}2$) шартты қанағаттандыратын болғандықтан, жеткілікті үлкен n үшін $\|\phi_r(t+t_n) - \phi_r(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $t \notin [\widehat{\theta_k,\ \theta_k^n}]$, $|\theta_k^n - \theta_k| < \varepsilon,\ k = j, j+1, \dots,\ j+m$. Сонымен, жеткілікті үлкен n мен r және $t \notin [\widehat{\theta_k,\ \theta_k^n}]$ мен $|\theta_k^n - \theta_k| < \varepsilon, k = j, j+1, \dots,\ j+m$ үшін мына теңсіздік дұрыс болады:

$$\|\phi(t+t_n) - \phi(t)\| \le \|\phi(t+t_n) - \phi_r(t+t_n)\| +$$

$$\|\phi_r(t+t_n) - \phi_r(t)\| + \|\phi(t) - \phi_r(t)\| < \varepsilon.$$

Сонымен, I жиындағы B-топологияда $\phi(t+t_n),\ n \to \infty$ функциялық тізбегі $\phi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталады. $\mathcal{S}$ кеңістігінің толықтығы дәлелденді.

Қысушы бейнелеулер туралы теореманы, 3.6 және 3.7-леммалармен қоса қолданып, (3.12) жүйенің жалғыз $\omega(t) \in \mathcal{S}$ шешімі бар екендігін алуға болады.

Әрі қарай, $\omega(t)$ функциясының үзіліссіздік қасиетке ие болатындығын көрсетеміз.

1.2-анықтамаға сәйкес, $[s_n - \delta,\ s_n + \delta] \subseteq [\widehat{\theta_{m_n},\ \theta_{m_n+l_n}} - t_n]$ интервалында $\omega(t),\ \omega(t+t_n)$ функцияларының үзіліс нүктелері болмайды.

Келесі қатыныстарды

$$\omega_i(t) = \omega_i(s_n) + \int_{s_n}^{t} a_i\omega_i(s)ds + \int_{s_n}^{t} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j\left(\omega_j(s)\right) ds + \int_{s_n}^{t} v_i(s)ds$$

және

$$\omega_i(t+t_n) = \omega_i(s_n+t_n) + \int_{s_n}^{t} a_i\omega_i(s+t_n)ds +$$

$$+ \int_{s_n}^{t} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j\left(\omega_j(s+t_n)\right) ds + \int_{s_n}^{t} v_i(s+t_n)ds,$$

қолданып, бір-бірінен азайту арқылы мына қатынасқа келеміз:

$$\omega_i(t+t_n) - \omega_i(t) = \omega_i(s_n+t_n) - \omega_i(s_n) + \int_{s_n}^{t} a_i[\omega_i(s+t_n) - \omega_i(s)]ds +$$

$$+\int_{s_n}^{t}\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\left(f_j\left(\omega_j(s+t_n)\right)-f_j\left(\omega_j(s)\right)\right)ds+\int_{s_n}^{t}\left(v_i(s+t_n)-v_i(s)\right)ds\,. \quad (3.23)$$

Келесі теңсіздіктер орындалатындай оң κ және натурал l, k сандарын табуға болады,

$$\kappa<\delta, \qquad (3.24)$$

$$\kappa\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{\kappa}\right)\left(\max_i a_i+\max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\right)\right)>\frac{4}{3l}\,, \qquad (3.25)$$

$$\|\omega(t+u)-\omega(t)\|<\varepsilon_0 \min\left(\frac{1}{k},\frac{1}{3l}\right), t\in\mathbb{R}, |s|<\kappa. \qquad (3.26)$$

l, k, κ және $n\in\mathbb{N}$ сандарын бекітілген болсын делік.

$\Delta= ||\vartheta(s_n+t_n)-\vartheta(s_n)||$ белгілеуін қолданып, мына екі жағдайды қарастырамыз: (i) $\Delta\geq \varepsilon_0/l$ және (ii) $\Delta< \varepsilon_0/l$. Сонда дәлдеу екі бөлікке бөлінеді.

(i) (3.26) шарттан, егер $t\in[s_n, s_n+\kappa]$ болса

$$\|\omega(t+t_n)-\omega(t)\|\leq\|\omega(t+t_n)-\omega(s_n+t_n)\|+\|\omega(s_n+t_n)-\omega(s_n)\|+$$

$$+\|\omega(s_n)-\vartheta(t)\|<\frac{\varepsilon_0}{k}+\frac{\varepsilon_0}{l}+\frac{\varepsilon_0}{k}=\varepsilon_0\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)$$

шығады. Сәйкесінше, (3.23) - (3.26) қолданып $t\in\left[s_n+\frac{\kappa}{2}, s_n+\kappa\right]$ үшін

$$|\omega_i(t+t_n)-\omega_i(t)|\geq\int_{s_n}^{t}|v_i(s+t_n)-v_i(s)|ds-\int_{s_n}^{t}a_i|\omega_i(s+t_n)-\omega_i(s)|ds-$$

$$-\int_{s_n}^{t}\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\omega_j(s+t_n)\right)-f_j\left(\omega_j(s)\right)\right|ds-|\omega_i(s_n+t_n)-\omega_i(s_n)|\geq$$

$$\geq\frac{\kappa}{2}\varepsilon_0-\left(\max_i a_i+\max_i l_f^i \max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\right)\varepsilon_0\kappa\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{l}\geq\frac{\varepsilon_0}{3l}=$$

$$\geq \varepsilon_0 \kappa \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{k}\right)\right)\left(\max_i a_i + \max_i l_f^i \max_i \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}|\right) - \frac{\varepsilon_0}{l} \geq \frac{\varepsilon_0}{3l}$$

табамыз.

(ii) $\Delta \geq \varepsilon_0/l$ жағдайында, егер $t \in [s_n - \kappa, s_n + \kappa]$ және $n \in \mathbb{N}$ болғанда

$$\|\omega(t + t_n) - \omega(t)\| \geq \|\omega(s_n + t_n) - \omega(s_n)\| - \|\omega(s_n) - \omega(t)\| -$$

$$-\|\omega(t + t_n) - \omega(s_n + t_n)\| \geq \frac{\varepsilon_0}{l} - \frac{\varepsilon_0}{3l} - \frac{\varepsilon_0}{3l} = \frac{\varepsilon_0}{3l}$$

аламыз. Демек, $\omega(t)$ бөліну шартын қанағаттандырады.

Енді $\omega(t)$ тербелісінің асимптотикалық орнықтылығын дәлелделік. Барлық $i = 1,2,\ldots,p, k \in \mathbb{Z}$ үшін

$$\omega_i(t) = x_i(t, t_0)\omega_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_i(t,s)\left[\sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j\left(\omega_j(s)\right) + v_i(s)\right] ds +$$

$$+ \sum_{t_0 \leq \theta_k < t} x_i(t, \theta_k +)\left[\sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} g_j(\omega_j(\theta_k)) + W_{ik}\right]$$

теңдігі дұрыс болады.

$z(t) = (z_1(t), \ldots, z_p(t))$ – (3.12) жүйенің басқа шешімі болсын. Оны барлық $i = 1,2,\ldots,p, k \in \mathbb{Z}$ үшін былайша жазуға болады:

$$z_i(t) = x_i(t, t_0)z_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_i(t,s)\left[\sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j\left(z_j(s)\right) + v_i(s)\right] ds +$$

$$+ \sum_{t_0 \leq \theta_k < t} x_i(t, \theta_k +)\left[\sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} g_j(z_j(\theta_k)) + W_{ik}\right].$$

Барлық $i = 1,2,\ldots,p, k \in \mathbb{Z}$ үшін мына қатынасты

$$\omega_i(t) - z_i(t) = x_i(t, t_0)\left(\omega_i(t_0) - z_i(t_0)\right) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} x_i(t,s)\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\left[f_j\left(\omega_j(s)\right)-f_j\left(z_j(s)\right)\right]ds+$$

$$+\sum_{t_0\leq\theta_k<t} x_i(t,\theta_k+)\sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}\ \left[g_j\left(\omega_j(\theta_k)\right)-g_j(z_j(\theta_k))\right]$$

қолданып, келесі теңсіздікті аламыз:

$$|\omega_i(t)-z_i(t)|\leq K_I e^{\lambda(t-t_0)}|\omega_i(t_0)-z_i(t_0)|+$$

$$+\int_{t_0}^{t} K_I e^{\lambda(t-s)}\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\left|f_j\left(\omega_j(s)\right)-f_j\left(z_j(s)\right)\right|ds+$$

$$+\sum_{t_0\leq\theta_k<t} K_I e^{\lambda(t-\theta_k)}\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\ \left|g_j\left(\omega_j(\theta_k)\right)-g_j(z_j(\theta_k))\right|\leq$$

$$\leq K_I e^{\lambda(t-t_0)}\|\omega(t_0)-z(t_0)\|+$$

$$+K_I\max_i l_f^i\ \max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|\int_{t_0}^{t} K_I e^{\lambda(t-s)}\|\omega(s)-z(s)\|ds+$$

$$+K_I\max_i l_g^i\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|\sum_{t_0\leq\theta_k<t} K_I e^{\lambda(t-\theta_k)}\|\omega(\theta_k)-z(\theta_k)\|.$$

Енді, бөлікті-үзілссіз функцияға арналған Гроноулл-Беллман леммасын қолдансақ,

$$\|\omega(t)-z(t)\|=K_I\|\omega(t_0)-z(t_0)\|e^{(\lambda+D)(t-t_0)}(1+E)^{k(t_0,t)},$$

мұндағы $D=K_I\max_i l_f^i\ \max_i\sum_{j=1}^{p}\left|b_{ij}\right|$ және $E=K_I\max_i l_g^i\max_i\sum_{j=1}^{p}\left|\beta_{ij}\right|$. Соңғы теңсіздіктен

$$\|\omega(t)-z(t)\|\leq K_I\|\omega(t_0)-z(t_0)\|e^{\left(\lambda+D+\frac{1}{\underline{\theta}}\ln(1+E)\right)(t-t_0)},t\geq t_0\quad(3.27)$$

теңсіздігі шығады.

Сонымен, $(I7)$ шарты бойынша $\omega(t)$ функциясы (3.27) ХҚИНЖ-дің асимптотикалық орнықты үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі екендігі шығады.

3.3-мысал. Келесі теңдеу

$$\theta_k = 5k + \gamma_k, k \in \mathbb{Z} \tag{3.28}$$

арқылы анықталатын $\theta_k, k \in \mathbb{Z}$ тізбегін қарастырайық, мұндағы $\gamma_k, k \in \mathbb{Z} -$ (1.2) логистикалық теңдеуінің болжанбайтын шешімі. (3.28), (1.1)-тізбектің $T = 5$ болғандағы түрі болғандықтан, әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $n \to \infty$ кезде $\max_{i_1<k<i_2} \left|\theta_{k+l_n} - t_n - \theta_k\right|$ нөлге ұмтылатын және әрбір натурал n үшін $\left|\theta_{m_n+l_n} - t_n - \theta_{m_n}\right| \geq \epsilon_0$ теңсіздігі орындалатын оң ε_0 саны және $t_n = 5l_n$, l_n, m_n тізбектері табылады.

$\Phi(t) = \tau_k \;\; t \in [\,\theta_k, \;\theta_{k+1}), k \in \mathbb{Z}$ теңдеуі арқылы анықталған $\Phi(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функциясын қарастырайық, мұндағы $\tau_k, k \in \mathbb{Z}$, 1.1-мысалға ұқсас кездейсоқ анықталған дискетті Бернулли процесінің нәтижесінде алынатын болжанбайтын тізбек. $\Phi(t)$ болжанбайтындығы 1.1-мысалға ұқсас дәлелденеді. Сонымен, $\Phi(t)$ оң ε_0, $\sigma = 2$ сандары және $t_n = 5l_n$, $s_n = \frac{\theta_{m_n} + \theta_{m_n+1}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ тізбектерімен ү.б.ф. болады.

Келесі импульсті нейрондық желіні қарастыралық

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{3} b_{ij} f_j(x_j(t)) + v_i(t), t \neq \theta_k, \\ \Delta x|_{t=\theta_k} &= \alpha_i x_i(\theta_k) + \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} g_j(x_j(\theta_k)) + W_{ik}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

мұндағы $a_1 = -0.2$, $a_2 = 0.02$, $a_3 = -0{,}4$, $\alpha_1 = e^{-6} - 1$, $\alpha_2 = e^{-2.2} - 1$, $\alpha_3 = e^{-3.5} - 1$, $f\big(x(t)\big) = \frac{2}{25} sin(x(t))$, $g\big(x(t)\big) = \frac{1}{20} arctg(x(t))$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08\Phi^3(t) \\ 0.09\Phi(t) - 0.5 \\ -0.18\Phi^3(t) - 0.1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.9 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_{1k} \\ W_{2k} \\ W_{3k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14\tau_k \\ -6\tau_k \\ 17\tau_k - 0.4 \end{pmatrix},$$

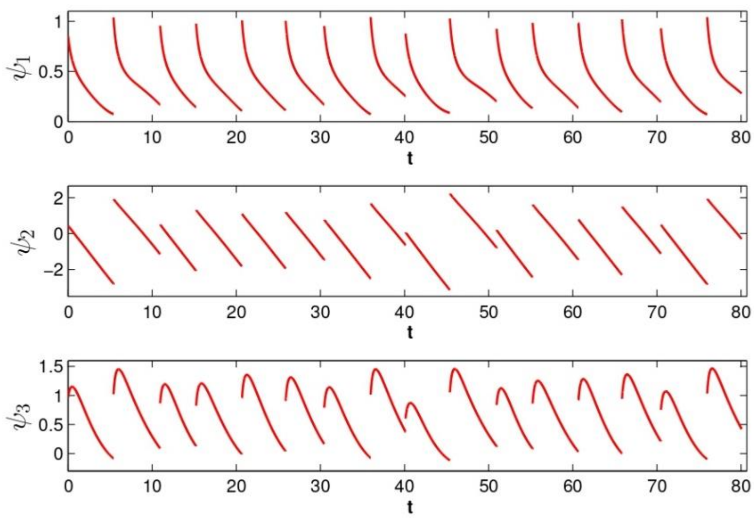
ал τ_k, θ_k болжанбайтын тізбектер. $(v(t), W_k)$ жұбы 1.3-анықтама мағынасындағы үзілісті болжанбайтын жұп болады.

(3.29)-жүйенің меншікті мәндері $\lambda_1 = -1.4$, $\lambda_2 = -0.42$, $\lambda_3 = -1.1$ тең болады және $\lambda = -0.42$, $K_I = 1.4$ болғанда $(I1)$ шарты орындалады. Бұған қоса, $l_f = 0.08$, $l_g = -0.05$, $m_f = 0.012$, $m_g = 0.109$ және $H_1 = 2.8$ болғанда, (3.29) жүйе $(I2)$-$(I7)$ шарттарын қанағаттандырады. 3.2-теоремаға сәйкес (3.29)-жүйенің асимптотикалық орнықты $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)$ жалғыз шешімі бар болады.

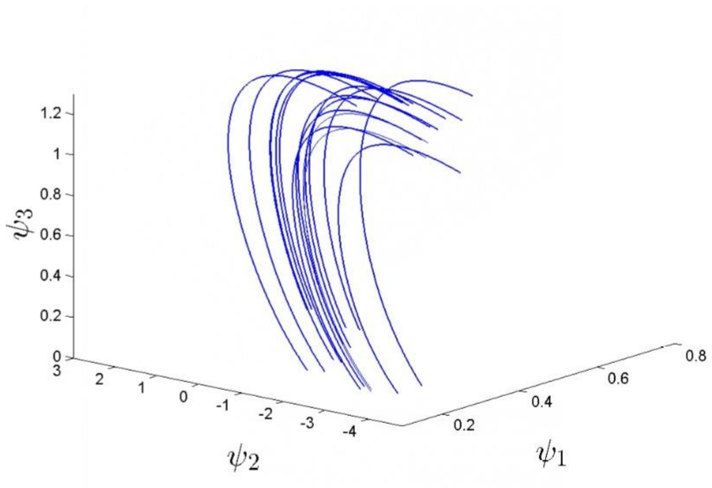
Бастапқы мәндері белгісіз болғандықтан $x(t)$ болжанбайтын функциясының шешімін модельдеу мүмкін емес. Сол себепті, бастапқы мәні $\psi(0) = (0.852,0.447,0.965)$ тең болатын басқа $\psi(t) = \big(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)\big)$ шешімін қарастырамыз. (3.27) қолданып,

$$\|x(t) - \psi(t)\| \leq 1.4e^{-0.38t}\|x(t_0) - \psi(t_0)\|, t > 0$$

аламыз. Соңғы теңсіздік $x(t) - \psi(t)$ айырымы бір-біріне экспоненциалды түрде жақындайтындығын көрсетеді. Демек, уақыт артқан сайын $\psi(t)$ функциясының графигі болжанбайтын $x(t)$ шешімінің графигіне жақындайды. Яғни болжанбайтын тербелісті сипаттайтын қисықтың орнына $\psi(t)$-нің графигін қарастырамыз. 3.3-суретте $\psi(t)$-нің координаталары ал 3.4-суретте тербелістің траекториясы көрсетілген.



Сурет 3.3 –$\psi(t)$ функциясының координаталары



Сурет 3.4 –$\psi(t)$ функциясының траекториясы

3.3 Жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті Хопфилдтік нейрондық желілер үшін болжанбайтын тербелістер

Бөлікті-тұрақты аргументті ХНЖ-дің динамикалық әрекеті зерттелген нәтижелер өте аз кездеседі [142–145]. Соңғы бөлімшеде осы нәтижелер нейрондық желі моделіне жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті енгізу және болжанбайтын функциялар теориясын қолдану арқылы кеңейтілді. Яғни, нейрондық желілердегі хаостық сигналдардың таралуын зерттеуге мүмкіндік беретін болжанбайтын кірістерді қарастыру арқылы алдыңғы әдістері жетілдірілді.

Барлық $k \in \mathbb{Z}$, $|\theta_k| \to \infty, |k| \to \infty$ үшін $\theta_k < \theta_{k+1}$, $\theta_k \le \xi_k \le \theta_{k+1}$ орындалатындай нақты мәнді θ_k, $\xi_k, k \in \mathbb{Z}$ тізбектерін бекітейік. Барлық бүтін $k \in \mathbb{Z}$ үшін $\theta_{k+1} - \theta_k < \theta$ теңсіздігі орындалатындай оң θ саны табылады.

Бөлікті-тұрақты аргументті ХНЖ қарастыралық

$$x_i'(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{p} b_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{p} c_{ij} g_j\left(x_j\big(\gamma(t)\big)\right) + v_i(t), \quad (3.30)$$

мұндағы , $x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots, p,$ $\gamma(t) = \xi_k$, if $\theta_k \le t \le \theta_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$x_i(t) -$ t уақыт мезетіндегі i-ші нейронның күйі;

$a_i > 0 -$ басқа нейрондар мен кірістерден оқшауланған кезде өзін-өзі реттейтін не нейрондарды өз қалпына келтіретін тұрақты жылдамдықтар;

$p -$ желідегі нейрондар саны;

$f_j, g_j - j$-ші нейронның кіріс потенциалдарының активациялық функциялары;

$b_{ij}, c_{ij} -$ i-ші нейрон мен j-ші нейрон байланысың синаптикалық салмақтары;

$v_i(t) -$ сыртқы кіріс функциялары.

b_{ij} мен c_{ij} коэффициенттері нақты сандар, $f_j, g_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ активациялық функциялары үзіліссіз болсын. Сонымен бірге, кез келген $i = 1,2, \ldots, p$ үшін $\lambda \le a_i \le \bar{\lambda}$ орындалатындай оң λ және $\bar{\lambda}$ тұрақтылары табылсын делік.

(3.30) жүйені векторлық түрде жазып алайық,

$$x'(t) = Ax(t) + Bf(x(t)) + Cg(x(\gamma(t))) + v(t), \qquad (3.31)$$

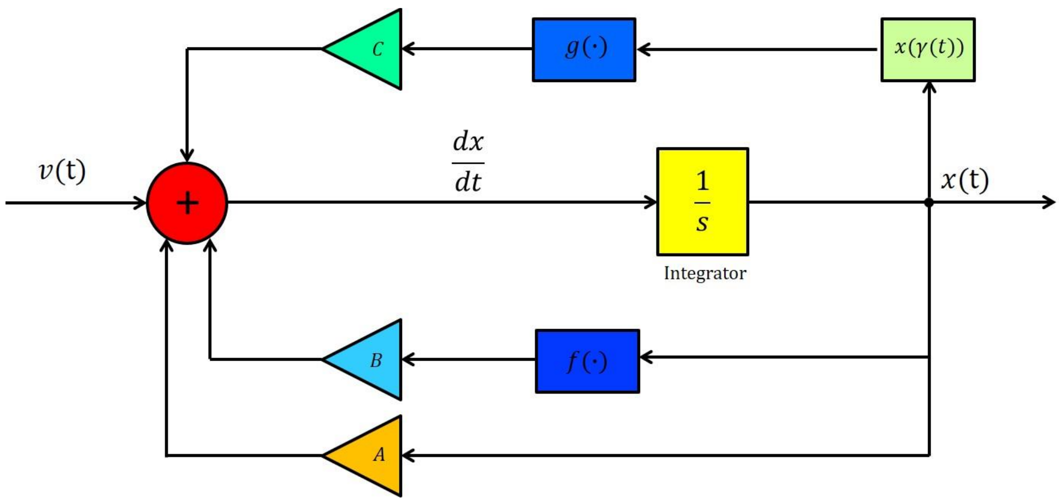
мұндағы $x = colon(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ – нейрон күйін сипаттайтын вектор; $A = diag(-a_1, -a_2, \ldots, -a_p)$, $B = (b_{ij})_{p\times p}$, $C = (c_{ij})_{p\times p}$ – матрицалар; $(x) = colon(f_1(x_1), \ldots, f_p(x_p))$ және $g(x) = colon(g_1(x_1), \ldots, g_p(x_p))$ – активациялар; $v = colon(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ – кіріс векторы.

Нейрондық желілерде келесі сигмоидты функцияларды активациялық функция ретінде қолданады [146]:

$$f(\sigma) = \tanh(\sigma) = \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}, \qquad f(\sigma) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{2\sigma}{\pi}\right).$$

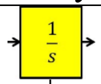
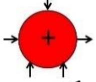
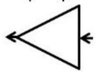
Активациялық функциялар әлсіз сигналдарды күшейтуге мүмкіндік береді де, күшті сигналдарға қанықпайды. Активациялық функция мен шығыс функциясы бірігіп тасымалдаушы функцияны береді. Егер активациялық функция нейронның қабылдайтын жалпы сигналын анықтаса, тасымалдаушы функция кіріс сигналдарын шығыс сигналдарына аударады.

3.5-суретте жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті ХНЖ-нің блок схемасы көрсетілген, ал 1-кестеде блок схемада қолданылған символдар сипатталған.



Сурет 3.5 – (3.31) Хопфилд нейрондық желісі үшін блок схема

Кесте 1 – 3.5-суреттегі блок схема элементерінің сипаттамалары

Белгілеулер	Олардың сипаттамалары
	Integrator блогы
	Sum блогы
	Gain блогы
	Transfer function блогы
	MATLAB function блогы
$v(t)$	Кіріс функциясы
$x(t)$	Шығыс функциясы

Барлық $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ вектор-функцияларының кеңістігін Σ_0 арқылы белгілейік. Ондағы норма $\|\varphi\|_1 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|\varphi(t)\|$ арқылы анықталады. Кеңістіктің элементері мынадай қасиеттерге ие:

$(E1)$ $\varphi(t)$ бірқалыпты үзіліссіз;

$(E2)$ әрбір $\varphi(t) \in \Sigma_0$ үшін $\|\varphi(t)\|_1 < H_2$ орындалатындай оң H_2 саны табылады;

$(E3)$ әрбір $\varphi(t) \in \Sigma_0$ үшін $\mathbb{R}$-дің шенелген интервалында $\varphi(t + t_n)$ функциялар тізбегі $\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталатын $t_n \to \infty$, $n \to \infty$ тізбегі табылады.

Келесі шарттар орындалады деп ұйғарамыз::

$(P1)$ барлық $x, y \in \mathbb{R}$ үшін $\|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\|$, $\|g(x) - g(y)\| \le \bar{L}\|x - y\|$, орындалсын, мұндағы $L, \bar{L}$ – оң тұрақтылар;

$(P2)$ $\sup\limits_{\|x\|<H_2}\|f(x)\| \le m_f$ мен $\sup\limits_{\|x\|<H_2}\|g(x)\| \le m_g$ дұрыс болатындай оң m_f, m_g сандары табылады;

$(P3)$ v - Σ_0 кеңістігінен алынған функция болсын және ол үшін $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|v(t)\| \le m_v$ орындалатын оң m_v саны табылады;

$(P4)$ $\|B\|m_f + \|C\|m_g + m_v < H_2\lambda$;

$(P5)$ $\|B\|L + \|C\|\bar{L} < \lambda$;

$(P6)$ $-\lambda + \|B\|L + N_1\|C\|\bar{L} < 0$, мұнда ыңғайлылық үшін

$$N_1 = \left(1 - \theta\left[\left(\bar{\lambda} + \|B\|L\right)(1 + \|C\|\bar{L})e^{\left(\bar{\lambda}+\|B\|L\right)\theta} + \|C\|\bar{L}\right]\right)^{-1}$$

белгілеуі қолданылды;

$(P7)$ $\theta\left[\left(\bar{\lambda} + \|B\|L\right)(1 + \|C\|\bar{L})e^{\left(\bar{\lambda}+\|B\|L\right)\theta} + \|C\|\bar{L}\right] < 1$;

$(P8)$ кез келген кесіндіде $\theta_{k-\eta_n} + t_n - \theta_k \to 0$, $n \to \infty$ мен $\xi_{k-\eta_n} + t_n - \xi_k \to 0$, $n \to \infty$ шарттары орындалатын $\eta_n \to \infty$, $n \to \infty$ тізбегі табылады, мұндағы t_n 2.1- анықтамадағы тізбек.

3.8-лемма. $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ *фунциясы (3.31)-жүйенің сан түзуінде шенелген шешімі болуы үшін*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} \, [Bf(x(s)) + Cg(x(\gamma(s))) + v(s)]ds$$

интегралық теңдеудің шешімі болуы қажетті және жеткілікті.

Σ_0 кеңістігінде Π операторын енгізелік

$$\Pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} \, [Bf(\varphi(s)) + Cg(\varphi(\gamma(s))) + v(s)]ds.$$

3.9-лемма. $\Pi\Sigma_0 \subseteq \Sigma_0$.

Дәлелдеуі. $\Pi\varphi(t)$ функциясының t бойынша туындысын бағалайық. Ол үшін алдымен

$$\frac{d\Pi\varphi(t)}{dt} = Bf(\varphi(t)) + Cg(\varphi(\gamma(t))) + v(t) +$$

$$+A\int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} \, [Bf(\varphi(s)) + Cg(\varphi(\gamma(s))) + v(s)]ds$$

табамыз. Содан соң

$$\left\|\frac{d\Pi\varphi(t)}{dt}\right\| = \|B\|\|f(\varphi(t))\| + \|BC\|\|g(\varphi(\gamma(t)))\| + \|v(t)\| +$$

$$+\bar{\lambda}\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)} \, \left(\|B\|\|f(\varphi(s))\| + \|C\| \left\|g\left(\varphi\big(\gamma(s)\big)\right)\right\| + \|v(s)\|\right) ds \leq$$

$$= \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)\left(\|B\|m_f + \|C\|m_g + m_v\right)$$

теңсіздігін шығарамыз. $\Pi\varphi(t)$-дің туындысы шектелген функция болғандықтан оның бірқалыпты үзіліссіз екені шығады. Бұл $\Pi\varphi$-дің $(E1)$ қасиетін қанағаттандыратынын білдіреді.

Бұған қоса барлық $\varphi(t) \in \Sigma_0$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\|\Pi\varphi(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)}(\|B\|\|f\varphi(s)\| + \|C\|\|g(\varphi(\gamma(s)))\| + \|v(s)\|)ds \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\left(\|B\|m_f + \|C\|m_g + m_v\right)ds = \frac{1}{\lambda}\left(\|B\|m_f + \|C\|m_g + m_v\right).$$

Соңғы теңсіздік пен $(P4)$ шартынан $\|\Pi\varphi\|_1 < H_2$ теңсіздігінің ақиқат екені шығады. Демек, $\Pi\varphi$ $(E2)$ қасиетін канағаттандырады.

Енді, $(E3)$ қасиетінің $\Pi\varphi$ үшін орындалатынын тексереміз. Яғни, әрбір $\Pi\varphi \in \Sigma_0$ үшін сан түзуінің шенелген интервалында $\Pi\varphi(t+t_n)$ функциялық тізбегі $\Pi\varphi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақталатындай $t_n \to \infty,\ n \to \infty$ сандық тізбегі табылатынын көрсетуіміз қажет. Кез келген оң ε санын және жабық $[a,b],\ a < b,\ a,b \in \mathbb{R}$ интервалын бекітеміз. Бұл жеткілікті үлкен n мен $t \in [a,b]$ үшін $\|\Pi\varphi(t+t_n) - \Pi\varphi(t)\| < \varepsilon$ орындалатынын көрсетеді. Келесі теңсіздіктер орындалатындай $c < a$ және $\epsilon > 0$ сандарын таңдап аламыз:

$$\frac{2}{\lambda}\left(\|B\|LH_2 + \|C\|\bar{L}H_2 + m_v\right)e^{-\lambda(a-c)} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{3.32}$$

$$\frac{\epsilon}{\lambda}(1 + \|B\|L) < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{3.33}$$

$$\frac{2}{\lambda}(m+1)\epsilon\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right)\|C\|\bar{L} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{3.34}$$

$$\frac{2mH_2}{\lambda}\left(e^{\lambda\epsilon} - 1\right)\|C\|\bar{L} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.35}$$

$[c,b]$ интервалында $\|\varphi(t+t_n) - \varphi(t)\| < \epsilon$ және $\|v(t+t_n) - v(t)\| < \epsilon$ орындалатын жеткілікті үлкен натурал n санын алайық. Онда $\varphi \in \Sigma_0$ үшін

$$\|\Pi\varphi(t+t_n) - \Pi\varphi(t)\| =$$

$$= \int_{-\infty}^{t+t_n} e^{A(t+t_n-s)}\ \left[Bf\left(\varphi(s)\right) + Cg\left(\varphi\left(\gamma(s)\right)\right) + v(s)\right]ds -$$

$$- \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}\ \left[Bf\left(\varphi(s)\right) + Cg\left(\varphi\left(\gamma(s)\right)\right) + v(s)\right]ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}\ [B[f((s+t_n)) - f(\varphi(s))] +$$

$$+C\left[g\left(\varphi\left(\gamma(s+t_n)\right)\right) - g\left(\varphi\left(\gamma(s)\right)\right)\right] + v(s+t_n) - v(s)]ds,$$

теңсіздігі орындалады, ал бұдан

$$\|\Pi\varphi(t+t_n)-\Pi\varphi(t)\| \le \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\,[\|B\|L\|\varphi(s+t_n)-\varphi(s)\|+$$

$$+\|C\|\bar{L}\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi(\gamma(s))\|+\|v(s+t_n)-v(s)\|]ds$$

шығады. Егер соңғы интегралды екі интегралға бөлсек, онда $t\in[a,b]$ үшін

$$\|\Pi\varphi(t+t_n)-\Pi\varphi(t)\| \le \int_{-\infty}^{c} e^{-\lambda(t-s)}\,[\|B\|L\|\varphi(s+t_n)-\varphi(s)\|+$$

$$+\|C\|\bar{L}\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi(\gamma(s))\|+\|v(s+t_n)-v(s)\|]ds+$$

$$+\int_{c}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\,[\|B\|L\|\varphi(s+t_n)-\varphi(s)\|+$$

$$+\|C\|\bar{L}\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi(\gamma(s))\|+\|v(s+t_n)-v(s)\|]\,ds\le$$

$$\le\frac{2}{\lambda}[\|B\|LH_2+\|C\|\bar{L}H_2+m_v]e^{-\lambda(a-c)}+\int_{c}^{t} e^{-\lambda(t-s)}[1+\|B\|L]\epsilon ds+$$

$$+\int_{c}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\|C\|\bar{L}\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi(\gamma(s))\|\,ds\le$$

$$\le\frac{2}{\lambda}[\|B\|LH_2+\|C\|\bar{L}H_2+m_v]e^{-\lambda(a-c)}+\frac{1}{\lambda}[1+\|B\|L]\epsilon+$$

$$+\|C\|\bar{L}\int_{c}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi(\gamma(s))\|\,ds.$$

теңсіздікігін аламыз.

Соңғы интегралды жоғарыдан бағалауымыз қажет. Ол үшін интегралды төменде көрсетілгендей, шенелген интегралдардың қосындысы ретінде қарастырамыз. Бекітілген $t\in[a,b]$ үшін жалпылықты жоғалтпай $\theta_i\le\theta_{i-\eta_n}+t_n$ және $\theta_i\le\theta_{i-\eta_n}+t_n=c<\theta_{i+1}<\theta_{i+2}<\cdots<\theta_{i+m}\le\theta_{i+m-\eta_n}+t_n\le t<\theta_{i+m+1}$ болсын деп алайық. Сонда $[c,t]$ интервалында дәл m үзіліс сәттері табылады.

Енді

$$I=\int_{c}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi(\gamma(s))\|ds.$$

белгілеуін енгізіп, оны келесі түрде жазып аламыз:

$$I = \int_{c}^{\theta_{i+1}} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds +$$

$$+ \int_{\theta_{i+1}}^{\theta_{i+1-\eta_n}+t_n} e^{-\lambda(t-s)} \| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s)) \| ds +$$

$$+ \int_{\theta_{i+1-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+2}} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds +$$

$$+ \int_{\theta_{i+2}}^{\theta_{i+2-\eta_n}+t_n} e^{-\lambda(t-s)} \| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi(\gamma(s)) \| ds +$$

$$+ \int_{\theta_{i+2-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+3}} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds +$$

$$\vdots$$

$$+ \int_{\theta_{i+m-\eta_n}+t_n}^{t} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds =$$

$$= \sum_{k=i}^{i+m-1} \int_{\theta_{k-\eta_n}+t_n}^{\theta_{k+1}} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds +$$

$$+ \sum_{k=i}^{i+m-1} \int_{\theta_{k+1}}^{\theta_{k+1-\eta_n}+t_n} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds +$$

$$+ \int_{\theta_{i+m-\eta_n}+t_n}^{t} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds.$$

Соңғы өрнектегі интегралдарды анықталық. Олай болса, $k = i, i+1, \dots, i+m-1$ үшін

$$A_k = \int_{\theta_{k-\eta_n}+t_n}^{\theta_{k+1}} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds$$

және

$$B_k = \int_{\theta_{k+1}}^{\theta_{k+1-\eta_n}+t_n} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds$$

болады. A_k және B_k, белгілеулерін қолданып I интегралын былайша жазамыз:

$$I = \sum_{k=i}^{i+m-1} A_k + \sum_{k=i}^{i+m-1} B_k + \int_{\theta_{i+m-\eta_n}+t_n}^{t} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\gamma(s+t_n)) - \varphi\big(\gamma(s)\big) \right\| ds.$$

$t \in [\theta_{k-\eta_n} + t_n, \theta_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}$ үшін $\gamma(t) = \xi_k$ болатыны белгілі, және $(P8)$ шартынан $\gamma(t+t_n) = \xi_{k+\eta_n}, k = i, i+1, \dots, i+m-1$ шығады. Осы нәтижелерді қолданып,

$$A_k = \int_{\theta_{k-\eta_n}+t_n}^{\theta_{k+1}} e^{-\lambda(t-s)} \left\| \varphi(\xi_{k+\eta_n}) - \varphi(\xi_k) \right\| ds =$$

$$= \int_{\theta_{k-\eta_n}+t_n}^{\theta_{k+1}} e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(\xi_k + t_n + o(1)) - \varphi(\xi_k)\| ds =$$

$$= \int_{\theta_{k-\eta_n}+t_n}^{\theta_{k+1}} e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(\xi_k + t_n) - \varphi(\xi_k) + \varphi(\xi_k + t_n + o(1)) - \varphi(\xi_k + t_n)\| ds =$$

$$= \int_{\theta_{k-\eta_n}+t_n}^{\theta_{k+1}} e^{-\lambda(t-s)} \|\varphi(\xi_k + t_n) - \varphi(\xi_k)\| + \|\varphi(\xi_k + t_n + o(1)) - \varphi(\xi_k + t_n)\| ds =$$

$$= \int_{\theta_{k-\eta_n}+t_n}^{\theta_{k+1}} e^{-\lambda(t-s)} [\epsilon + \|\varphi(\xi_k + t_n + o(1)) - \varphi(\xi_k + t_n)\|] ds$$

бағалауын аламыз. φ бірқалыпты үзіліссіз болғандықтан, $\epsilon > 0$ мен жеткілікті үлкен n үшін $\left|\xi_{k+\eta_n} - \xi_k - t_n\right| < \rho$ болса, $\|\varphi(\xi_k + t_n + o(1)) - \varphi(\xi_k + t_n)\| < \epsilon$ орындалатындай $\rho > 0$ санын таба аламыз. Бұдан мына теңсіздік дұрыс болатынын шығарамыз:

$$A_k \leq 2\epsilon \int_{\theta_{k-1-\eta_n}+t_n}^{\theta_k} e^{-\lambda(t-s)} ds \leq \frac{2\epsilon}{\lambda} \big(1 - e^{-\lambda\theta}\big).$$

Бұған қоса, $(P8)$ шарты бойынша

$$B_k \leq 2H \int_{\theta_k}^{\theta_{k-\eta_n}+t_n} e^{-\lambda(t-s)} ds \leq \frac{2H_2}{\lambda} \big(e^{\lambda\epsilon} - 1\big).$$

бағалауын аламыз. Келесі интегралға A_k интегралын бағалау үшін қолданған тәсілді қолдансақ

$$\int_{\theta_{i+p-\eta_n}+t_n}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\|\varphi(\gamma(s+t_n))-\varphi\big(\gamma(s)\big)\|ds \le \frac{2\epsilon}{\lambda}\big(1-e^{-\lambda\theta}\big).$$

Осылайша,

$$I \le \frac{2(m+1)\epsilon}{\lambda}\big(1-e^{-\lambda\theta}\big)+\frac{2mH_2}{\lambda}\big(e^{\lambda\epsilon}-1\big)$$

теңсіздігі шығады. Осы есептеулердің нәтижесінде барлық $t \in [a,b]$ үшін

$$\|\Pi\varphi(t+t_n)-\Pi\varphi(t)\| \le \frac{2}{\lambda}(\|B\|LH+\|C\|\bar{L}H+m_v)e^{-\lambda(a-c)}+\frac{\epsilon}{\lambda}(1+\|B\|L)+$$

$$+\frac{2(m+1)\epsilon}{\lambda}\big(1-e^{-\lambda\theta}\big)\|C\|\bar{L}+\frac{2mH_2}{\lambda}\big(e^{\lambda\epsilon}-1\big)\|C\|\bar{L}.$$

Сонымен, (3.32) - (3.35) теңсіздіктерінен барлық $t \in [a,b]$ үшін $\|\Pi\varphi(t+t_n)-\Pi\varphi(t)\| < \varepsilon$ екені шығады. Демек, $\Pi\varphi$ функциясы ($E3$) қасиетін қанағаттандырады. Π операторы Σ_0 кеңістігінде инвариантты.

3.10-лемма. *Π операторы Σ_0 кеңстігінде кысушы оператор.*

Дәлелдеуі. φ мен ψ, Σ_0 кеңістігіне тиісті функциялар болсын. Барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін

$$\|\Pi\varphi(t)-\Pi\psi(t)\| =$$

$$= \left\|\int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}\left(B[f(\varphi(s))-f(\psi(s))]+C[g(\varphi(\gamma(s)))-g(\psi(\gamma(s)))]ds\right\|\right. \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)}(\|B\|L\|\varphi(s+t_n)-\varphi(s)\|+\|C\|\bar{L}\|\varphi(\gamma(s))-\psi(\gamma(s))\|)ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)}(\|B\|L\|\varphi(s)-\varphi(s)\|_1+\|C\|\bar{L}\|\varphi(s)-\psi(s)\|_1)ds \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda}(\|B\|L+\|C\|\bar{L})\|\varphi(t)-\psi(t)\|_1.$$

теңсіздігі орынды. Олай болса,

$$\|\Pi\varphi(t)-\Pi\psi(t)\|_1 \le \frac{1}{\lambda}(\|B\|L+\|C\|\bar{L})\|\varphi(t)-\psi(t)\|_1.$$

Сәйкесінше, $(P5)$-шарт $\Pi : \Sigma_0 \to \Sigma_0$ операторының қысушы оператор екенін білдіреді. Лемма дәлелденді.

Келесі лемма шешімнің орнықтылығын дәлелдеу үшін керек болады.

3.11-лемма [5, 73 б.]. *(P1), (P7) шарттары орындалсын және* $z(t)$, $\|z(t)\|_1 < H_2$ *болатындай үзіліссіз функция болсын делік. Егер* $\omega(t)$ *келесі теңдеудің шешімі болса*

$$\omega'(t) = A\omega(t) + B[f(\omega(t)+z(t)) - f(z(t))] +$$

$$+C\left[g\left(\omega(\gamma(t)) + z(\gamma(t))\right) - g\left(z(\gamma(t))\right)\right], \tag{3.36}$$

онда барлық $t \in \mathbb{R}$ *үшін*

$$\|\omega(\gamma(t))\ \| \le N_1\|\omega(t)\| \tag{3.37}$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеуі. $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ болатындай $i \in \mathbb{Z}$ бекітіп, екі жағдайды қарастырамыз: (a) $\theta_i \le \xi_i \le t < \theta_{i+1}$ және (b) $\theta_i \le t < \xi_i < \theta_{i+1}$.

(a) $t \ge \xi_i$ үшін мына теңсіздік дұрыс болады:

$$\|\omega(t)\| = \|\omega(\xi_i)\| + \int_{\xi_i}^{t}(\|A\|\|\omega(s)\| + \|B\|L\|\omega(s)\| + \|C\|\bar{L}\|\omega(\xi_i)\|)ds \le$$

$$\le \|\omega(\xi_i)\| + \int_{\xi_i}^{t}(\bar{\lambda}\|\omega(s)\| + \|B\|L\|\omega(s)\| + \|C\|\bar{L}\|\omega(\xi_i)\|)ds \le$$

$$\le \|\omega(\xi_i)\|(1+\|C\|\bar{L}) + \int_{\xi_i}^{t}(\bar{\lambda} + \|B\|L)\|\omega(s)\|ds.$$

Гронуолл-Беллман леммасы бойынша

$$\|\omega(t)\| \le \|\omega(\xi_i)\|(1+\|C\|\bar{L})e^{(\bar{\lambda}+\|B\|L)\theta}.$$

орындалады. Сонымен қатар, $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ үшін

$$\|\omega(\xi_i)\| \le \|\omega(t)\| + \int_{\xi_i}^{t}(\|A\|\|\omega(s)\| + \|B\|L\|\omega(s)\| + \|C\|\bar{L}\|\omega(\xi_i)\|)ds \le$$

$$\le \|\omega(t)\| + \int_{\xi_i}^{t}(\bar{\lambda} + \|B\|L)\|\omega(s)\| + \|C\|\bar{L}\|\omega(\xi_i)\|)ds \le$$

$$\leq \|\omega(t)\| + \int_{\xi_i}^{t} [(\bar{\lambda} + \|B\|L)(1 + \|C\|\bar{L})e^{(\bar{\lambda}+\|B\|L)\theta}\|\omega(\xi_i)\| + \|C\|\bar{L}\|\omega(\xi_i)\|]ds \leq$$

$$\leq \|\omega(t)\| + \theta\left[\left(\bar{\lambda} + \|B\|L\right)(1 + \|C\|\bar{L})e^{(\bar{\lambda}+\|B\|L)\theta} + \|C\|\bar{L}\right]\|\omega(\xi_i)\|.$$

теңсіздігін аламыз.

Сәйкесінше, $(P7)$-шарттан, $t \in [\theta_i, \theta_{i+1}), i \in \mathbb{Z}$ үшін $\|\omega(\xi_i)\| \leq N_1\|\omega(t)\|$ екендігі шығады. Демек, барлық $\theta_i \leq \xi_i \leq t < \theta_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$ үшін (3.37) шарты дұрыс. (b) $\theta_i \leq t < \xi_i < \theta_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$ жағдайы үшінде осылай дәлелденеді.

Сонымен, барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін (3.37) теңсіздігі ақиқат болады. Лемма дәлелденді.

3.3-теорема *Егер (P1)-(P8) шарттары орындалса және v функциясы болжанбайтын функция болса, онда (3.31) жүйенің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Дәлелдеуі. Алдымен, Σ_0 кеңістігінің толық кеңістік екенін көрсетелік. $\phi_k(t) - \mathbb{R}$-де $\phi_k(t) \to \phi(t)$, $k \to \infty$ болатындай, Σ_0 кеңістігінен алынған Коши теңсіздігі болсын. $\phi(t)$ шектік функциясының бірқалыпты үзіліссіз және шектелген екені белгілі. Сонымен, $\phi(t)$ функциясы $(E1)$ және $(E2)$ қасиеттерін қанағаттандырады. $\phi(t)$ функциясының $(E3)$ қасиетін қанағаттандыратынын көрсету керекпіз. I интервалы $\mathbb{R}$-де жабық және шенелген интервал болсын. Үшбұрыш теңсіздігін қолданып,

$$\|\phi(t + t_n) - \phi(t)\| \leq \|\phi(t + t_n) - \phi_k(t + t_n)\| + \|\phi_k(t + t_n) - \phi_k(t)\| +$$

$$+\|\phi_k(t) - \phi(t)\|$$

теңсіздігін жазайық. Егер жеткілікті аз $\varepsilon > 0$ мен $t \in I$ үшін соңғы теңсіздіктің оң жағындағы әрбір қосылғышы $\frac{\varepsilon}{3}$ -тен кіші болатындай, жеткілікті үлкен n мен k сандарын таңдасақ, онда I-де $\|\phi(t + t_n) - \phi(t)\| \leq \varepsilon$ теңсіздігі шығады. Бұдан I интервалында $\phi(t + t_n)$ функциясының $\phi(t)$-ге жинақталатынын аламыз. Демек, Σ_0 толық кеңістік. 3.9-лемма және 3.10-лемма бойынша Π операторының Σ_0 кеңістігінде инвариантты және қысушы оператор екенін анықтадық. Қысушы бейнелеулер туралы теоремаға сүйенсек, (3.31) жүйенің жалғыз шешімі бар және Π операторының жалғыз $z(t) \in \Sigma_0$ қозғалмайтын нүктесі бар болады. Сонымен шешімнің жалғыздығы дәлелденді.

Енді жалғыз шешімнің болжанбайтын шешім болатынын көрсетелік.

$l, k \in \mathbb{N}$ және κ, келесі теңсіздіктер орындалатындай оң сандар болсын:

$$\kappa < \delta, \tag{3.38}$$

$$\kappa\left[-\left(\bar{\lambda} + \|B\|L\right)\left(\frac{1}{l} + \frac{2}{k}\right) - 2\|C\|\bar{L} + \frac{1}{2}\right] \geq \frac{3}{2l}, \tag{3.39}$$

және

$$\|z(t+s)-z(t)\| < \varepsilon_0 min\left\{\frac{1}{k},\frac{1}{4l}\right\}, t\in\mathbb{R}, |s|<\kappa. \qquad (3.40)$$

l, k, κ және $n \in \mathbb{N}$ сандарын бекітілген сандар деп алайық.

$\Delta = \|z(s_n+t_n)-z(s_n)\|$ деп белгілеп алып, мына екі жағдайды қарастыралық: (i) $\Delta < \frac{\varepsilon_0}{l}$ және (ii) $\Delta \geq \frac{\varepsilon_0}{l}$.

(i) $\Delta \geq \frac{\varepsilon_0}{l}$, $t \in [s_n-\kappa, s_n+\kappa]$ және $n\in\mathbb{N}$ болғанда мына теңсіздікті аламыз:

$$\|z(t+t_n)-z(t)\| \geq \|z(s_n+t_n)-z(s_n)\| - \|z(s_n)-z(t)\| -$$

$$-\|z(t+t_n)-z(u_n+t_n)\| \ \geq \ \frac{\varepsilon_0}{l} - \frac{\varepsilon_0}{4l} - \frac{\varepsilon_0}{4l} = \frac{\varepsilon_0}{2l}.$$

(ii) $t\in[s_n, s_n+\kappa]$ болғанда (3.40) қолдансақ,

$$\|z(t+t_n)-z(t)\| \leq \|z(s_n+t_n)-z(s_n)\| + \|z(s_n)-z(t)\| +$$

$$+\|z(t+t_n)-z(s_n+t_n)\| \ < \frac{\varepsilon_0}{l} + \frac{\varepsilon_0}{k} + \frac{\varepsilon_0}{k} = \left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\varepsilon_0$$

теңсіздігіне келеміз. Төмендегі интегралдық теңдеулерді қолданамыз:

$$z(t) = z(s_n) + \int_{s_n}^{t} [Az(s) + Bf(z(s)) + Cg(z(\gamma(s))) + v(s)]ds$$

және

$$(t+t_n) = z(s_n+t_n) + \int_{s_n}^{t} [Az(s+t_n) + Bf(z(s+t_n)) +$$

$$+Cg(z(\gamma(s+t_n))) + v(s+t_n)]ds.$$

Бірші теңсіздікті екіншісінен азайту арқылы

$$z(t+t_n)-z(t) = z(s_n+t_n) - z(s_n) + \int_{s_n}^{t} [A[z(s+t_n)-z(s)] +$$

$$+B\big[f\big(z(s+t_n)\big) - f\big(z(s)\big)\big] + C[g(z(\gamma(s+t_n))) - g(z(\gamma(s)))] +$$

$$+\ [v(s+t_n)-v(s)]]ds = \ z(s_n+t_n) - z(s_n) + \int_{s_n}^{t} A[z(s+t_n)-z(s)]ds +$$

$$+\int_{s_n}^{t} B\left[f\left(z(s+t_n)\right)-f\left(z(s)\right)\right]ds+\int_{s_n}^{t} C\left[g(z(\gamma(s+t_n)))-g(z(\gamma(s)))\right]ds+$$

$$+\int_{s_n}^{t}[v(s+t_n)-v(s)]ds$$

қатынасын аламыз. Сонда, $t\in\left[s_n+\frac{\kappa}{2},s_n+\kappa\right]$ үшін мына теңсіздікті алуға болады:

$$\|z(t+t_n)-z(t)\|\geq-\|z(s_n+t_n)-z(s_n)\|-\int_{s_n}^{t}\bar{\lambda}\|z(s+t_n)-z(s)\|ds+$$

$$-\int_{s_n}^{t}\|B\|\left\|f\left(z(s+t_n)\right)-f\left(z(s)\right)\right\|ds-\int_{s_n}^{t}\|C\|\|g(z(\gamma(s+t_n)))-g(z(\gamma(s)))\|ds+$$

$$+\int_{s_n}^{t}\|v(s+t_n)-v(s)\|ds\geq-\frac{\varepsilon_0}{l}-\bar{\lambda}\kappa\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\varepsilon_0-\|B\|L\kappa\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\varepsilon_0-$$

$$-\|C\|\bar{L}\int_{s_n}^{t}\left\|z\left(\gamma(s+t_n)\right)-z\left(\gamma(s)\right)\right\|ds+\frac{\kappa}{2}\varepsilon_0.$$

$t\in\left[s_n+\frac{\kappa}{2},s_n+\kappa\right]$ үшін $\theta_{i-\eta_n}+t_n\leq s_n<s_n+\frac{\kappa}{2}\leq t\leq s_n+\kappa<\theta_{i+1}$, $i\in\mathbb{Z}$ орындалатындай жеткілікті аз κ-ны таңдап аламыз. Сонда, $(P8)$ шартының негізінде $\gamma(t)=\xi_i$, $t\in\left[s_n+\frac{\kappa}{2},s_n+\kappa\right]$ және $\gamma(t+t_n)=\xi_{i+\eta_n}$ мәндерін аламыз. $z(t)\in\Sigma_0$ бірқалыпты үзіліссіз функция болады. Егер $\left\|\xi_{i+\eta_n}-\xi_i-t_n\right\|<\rho$ болса, $\varepsilon_0>0$ мен жеткілікті үлкен n үшін

$$\int_{s_n}^{t}\left\|z\left(\gamma(s+t_n)\right)-z\left(\gamma(s)\right)\right\|ds=\int_{s_n}^{t}\left\|z\left(\xi_{i+\eta_n}\right)-z(\xi_i)\right\|ds\leq$$

$$\leq\int_{s_n}^{t}\|z(\xi_i+t_n)-z(\xi_i)\|ds+\int_{s_n}^{t}\left\|z\left(\xi_i+t_n+o(1)\right)-z(\xi_i+t_n)\right\|ds\leq$$

$$\leq 2\varepsilon_0\kappa$$

орындалатындай $\rho>0$ санын таба аламыз. Осылайша, $J<2\kappa\varepsilon_0$ болады. Нәтижесінде (3.38) теңсіздіктен келесі бағалау шығады:

$$\|z(t+t_n)-z(t)\|\geq-\frac{\varepsilon_0}{l}-\bar{\lambda}\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\kappa\varepsilon_0-$$

$$-\|B\|L\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}\right)\kappa\varepsilon_0-2\|C\|\bar{L}\kappa\varepsilon_0+\frac{\kappa}{2}\varepsilon_0 \geq -\frac{\varepsilon_0}{l}+\frac{3\varepsilon_0}{2l} \geq \frac{\varepsilon_0}{2l}.$$

(i) мен (ii) жағдайларында алынған теңсіздіктерге сүйенсек, $z(t)$ болжанбайтын шешім болады. Болжанбайтын функция болуы үшін қажет Пуассон тізбегі мен бөліну тізбегі, сәйкесінше $\bar{s}_n = s_n + \frac{3\kappa}{4}$ мен $\bar{\delta} = \frac{\kappa}{4}$ мәндеріне тең болуы керек.

Соңында, $z(t)$ шешімінің орнықтылығын қарастырамыз. Ол үшін $\omega(t) = y(t) - z(t)$ белгілеуін қолданамыз, ал $y(t) = colon(y_1(t), \dots, y_p(t))$ – (3.31) жалпыланған бөлікті тұрақты аргументті нейрондық желінің басқа шешімі. Олай болса, $\omega(t) = colon(\omega_1(t), \dots, \omega_p(t))$ (3.35)-жүйенің шешімі болады және мына теңсіздік орындалады:

$$\|\omega(t)\| \leq e^{-\lambda(t-t_0)}\|\omega(t_0)\| +$$

$$+\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\left[\|B\|L\|\omega(s)\| + \|C\|\bar{L}\left\|\omega\big(\gamma(s)\big)\right\|\right]ds. \tag{3.41}$$

(3.37) шартты (3.41) теңсіздікке қолданып,

$$\|\omega(t)\| \leq e^{-\lambda(t-t_0)}\|\omega(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}[\|B\|L\|\omega(s)\| + N_1\|C\|\bar{L}\|\omega(s)\|]ds$$

теңсіздігін аламыз. Сонымен бұдан

$$\|\omega(t)\| \leq e^{-\lambda(t-t_0)}\|\omega(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}(\|B\|L + N_1\|C\|\bar{L})\|\omega(s)\|ds$$

теңсіздігін алып, оны келесі түрде жазуға болады:

$$e^{\lambda t}\|\omega(t)\| \leq e^{\lambda t_0}\|\omega(t_0)\| + (\|B\|L + N_1\|C\|\bar{L})\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\|\omega(s)\|ds.$$

Егер соңғы теңсіздікке Гронуолл-Беллман леммасын қолдансақ, оны мына түрге келтіреміз:

$$\|\omega(t)\| \leq \|\omega(t_0)\|e^{(-\lambda+\|B\|L+N_1\|C\|\bar{L})(t-t_0)}.$$

немесе

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\|e^{(-\lambda+\|B\|L+N_1\|C\|\bar{L})(t-t_0)}.$$

Сонымен, $(P6)$ шарттың негізінде, (3.31) жүйенің болжанбайтын $z(t)$ шешімінің бірқалыпты, экспоненциалды орнықты болатынын көрсеттік. Теорема дәлелденді.

3.4-мысал. Нейрондық желінің сыртқы кірістері болжанбайтын функциялар болғандықтан, алдымен соларды анықтап алайық. (1.2) логистикалық бейнелеуінің $[3+(2/3)^{1/2},4]$ аралығынан алынған әрбір μ үшін болжанбайтын шешімдері болады. $\psi_i, i\in\mathbb{Z}$, $\mu=3.92$ болғандағы, (1.2) логистикалық теңдеудің болжанбайтын шешімі болсын делік.

Сыртқы кірістер ретінде интегралдық теңдеумен анықталған келесі болжанбайтын функцияны қолданамыз:

$$\Theta(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-4(t-s)}\Omega(s)ds\,, t\in\mathbb{R}, \qquad (3.42)$$

мұндағы $\Omega(t)=\psi_i,\ \ t\in[\,\theta_i,\ \theta_{i+1}),\ \ i\in\mathbb{Z}$. Функция барлық нақты сандар жиынында $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\Theta(t)|\le 1/3$ болатындай шенелген функция.

Сондай-ақ, бөлікті-тұрақты $\gamma(t)=\xi_k$ аргумент функциясы, $\theta_k=k$, $\xi_k=\frac{\theta_k+\theta_{k+1}}{2}+\psi_k=\frac{(2k+1)}{2}+\psi_k, k\in\mathbb{Z}$ тізбектері арқылы анықталады.

Мысал ретінде, келесі жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті нейрондық желіні қарастыралық

$$x_i'(t)=-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{3}b_{ij}f_j\left(x_j(t)\right)+\sum_{j=1}^{3}c_{ij}g_j\left(x_j\big(\gamma(t)\big)\right)+v_i(t), \quad (3.43)$$

мұндағы $a_1=0.5$, $a_2=0.2$, $a_3=0{,}25$, және $f_i\big(x_i(t)\big)=0.1tanh(\frac{x_i(t)}{8})$, $g_i\left(x_i\big(\gamma(t)\big)\right)=0.05\,arctg(\frac{x_i(\gamma(t))}{6}),\ i\ =\ 1{,}2{,}3,$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.1 & 0.3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}01 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.2 & 0.2\\ 0.1 & 0.3 & 0.1\end{pmatrix},$$

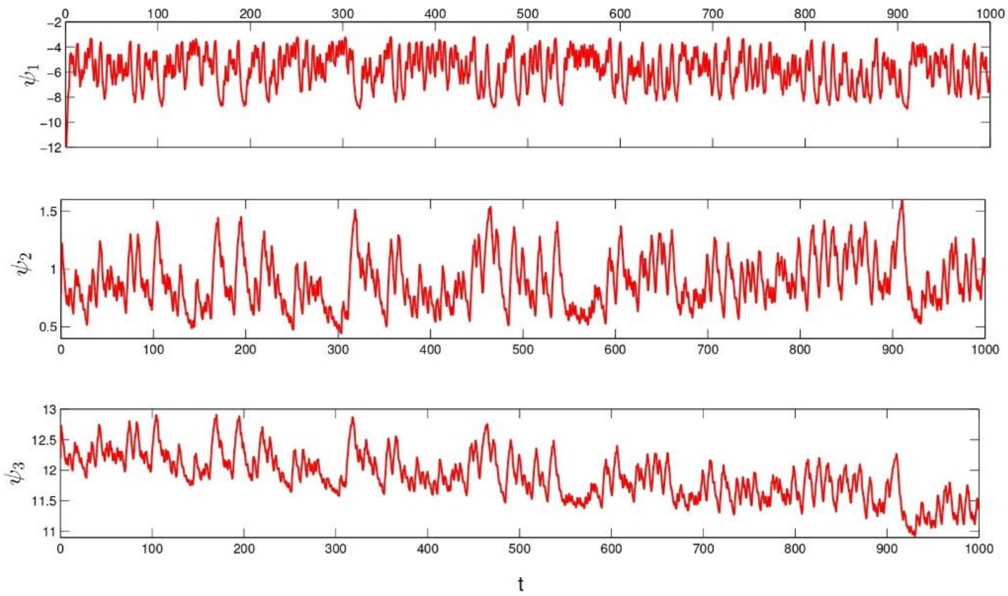
$$\begin{pmatrix} v_1(t)\\ v_2(t)\\ v_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\Theta(t)-0.04\\ 48\Theta^3(t)+0.05\\ 58\Theta^3(t)+0.03\end{pmatrix}.$$

$v_1(\mathrm{t})=-24\Theta(t)-0.04$, $v_2(\mathrm{t})=48\Theta^3(t)+0.05$, $v_3(\mathrm{t})=58\Theta^3(t)+0.03$ функциялары болжанбайтын функциялар.

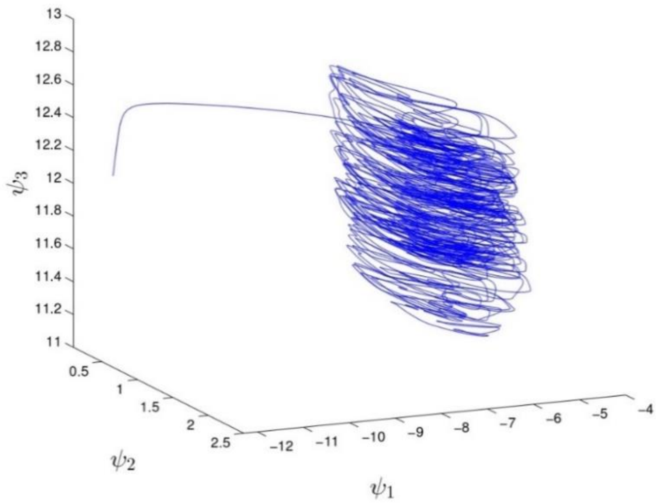
$\lambda=0.2$, $\bar{\lambda}=0.5$, $L_j=0.0125$, $\bar{L}_j=0.0083, m_f=0.1, m_g=0.05$, $m_v=6.04$, $K=1.1648$ болғанда (3.43) нейрондық желісі үшін $(P1)$ -$(P8)$ шарттары орындалады. Сонымен, 3.3-теоремаға сәйкес (3.43)-жүйенің экспоненциалды орнықты $x(t)$ жалғыз шешімі бар болады.

Бастапқы мәндері белгісіз болғандықтан болжанбайтын функцияның шешімін модельдеу өте күрделі мәселе. Сол себепті, болжанбайтын $x(t)$ шешімінің орнына бастапқы мәні $\psi(0) = (-12.4956, 0.7828, 12.1987)$ тең болатын көршілес $\psi(t) = \big(\psi_1(t),\, \psi_2(t),\, \psi_3(t)\big)$ шешімін қарастырамыз.

Уақыт артқан сайын $\psi(t)$ функциясының графигі болжанбайтын $x(t)$ шешімінің графигіне жақындайды. Яғни болжанбайтын шешімді сипаттайтын қисықтың орнына $\psi(t)$ графигін қарастырамыз. 3.6-суретте $\psi(t)$ тербелісінің координаталары, ал 3.7-суретте тербелістің траекториясы көрсетілген.

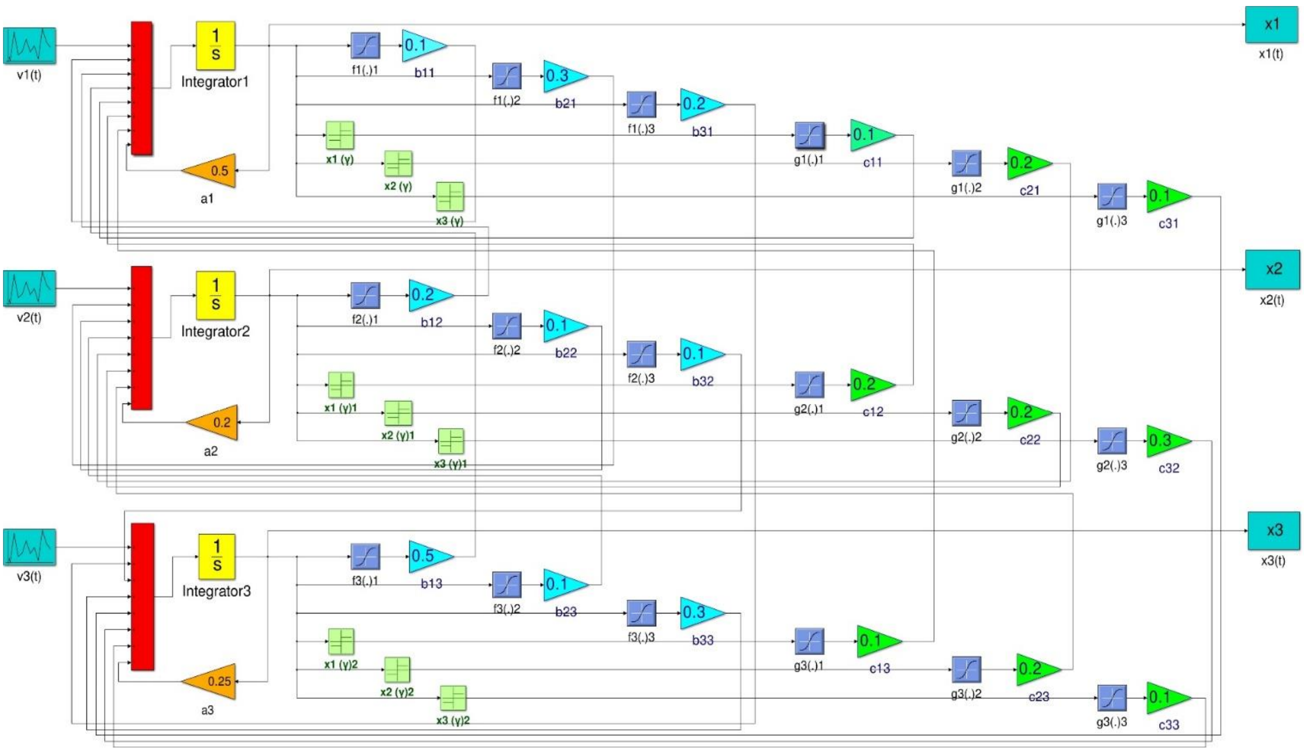


Сурет 3.6 – $\psi(t)$ функциясының координаталары



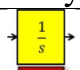
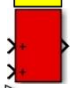
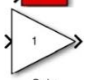
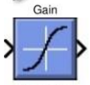
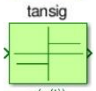
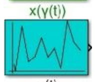
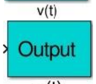
Сурет 3.7 –$\psi(t)$ функциясының траекториясы

Әрі қарай, біз MATLAB Simulink бағдарламасының көмегімен ұсынылған Хопфилдтік нейрондық желінің схемалық іске асыру жолын келтірілген. 3.8-суретте (3.43)-жүйенің Simulink моделі бейнеленген және 2-кестеде блок схеманың шартты белгілеулері сипатталған.



Сурет 3.8 – (3.43) жүйесі үшін блок схема

Кесте 2 – 3.8-суреттегі блок схема элементерінің сипаттамалары

Белгілеулер	Сипаттамалар
	Integrator блогы
	Sum блогы
	Gain блогы, $a_i, b_{ij}, c_{ij}, i, j = 1,2,3$ мәндерімен
	Transfer function блогы, f_j және g_j, $j = 1,2,3$
	MATLAB function блогы, $\gamma(t)$ бөлікті-тұрақты функциямен
	Кіріс функциясы
	Шығыс функциясы

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық зерттеу нәтижелері бойынша қысқаша қорытындылар. Диссертация импульсті дифференциалдық теңдеулер, жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер және Хопфильдтік нейрондық желілердің болжанбайтын үзілісті және үзіліссіз тербелістерін зерттеуге арналған.

Диссертацияда болжанбайтын тізбек, болжанбайтын дискретті жиын, болжанбайтын функция, үзілісті болжанбайтын функция және болжанбайтын жұп ұғымдары берілді. Болжанбайтын үзілісті және үзіліссіз функциялардың мысалдары құрылды.

Сонымен, зерттеу кезінде келесі нәтижелер алынды:

- сызықтық ИДТ жүйесінің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы;
- квазисызықтық ИДТ жүйесінің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы;
- квазисызықтық ЖБТАДТ жүйесінің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы;
- ХНЖ-дің асимптотикалық орнықты қатты болжанбайтын тербелістерінің бар болуы мен жалғыздығы;
- ХҚИНЖ-дің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын тербелістерінің бар болуы мен жалғыздығы;
- жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті ХНЖ-дің экспоненциалды орнықты, болжанбайтын тербелістерінің бар болуы мен жалғыздығы;
- болжанбайтын үзілісті және үзіліссіз функциялардың қасиеттері.

Қойылған міндеттерді шешу толықтығын бағалау. Диссертацияда сызықтық және квазисызықтық импульсті дифференциалдық теңдеулер, жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті, квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер және Хопфилдтік нейрондық желілер қарастырылды. Жалпыланған бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулердің болжанбайтын, үзіліссіз, импульсті дифференциалдық теңдеулердің болжанбайтын, үзілісті шешімдерінің бар болуы туралы мәселелер және осы теңдеулерді шешудің сандық әдістері зерттелді.

Нәтижелерін нақты қолдану бойынша ұсыныстар мен бағдарларын дамыту. Диссертациялық жұмыс дифференциалдық теңдеулер жүйесінің орнықтылық теориясына қосылған қомақты үлес болып табылады және автономды емес функционалдық теңдеулердің, функционалдық-дифференциалдық теңдеулердің және дербес туындылы теңдеулердің болжанбайтын шешімдерін зерттеу үшін теориялық негіз бола алатындай жаңа ғылыми нәтижелер жиынтығын қамтиды.

Сонымен қатар, жұмыста дәлелденген тұжырымдар мен алынған нәтижелерді университеттердің физика-математикалық мамандықтарының магистранттары мен докторанттарына арналған элективтік курстар жүргізу үшін пайдалануға болады.

Осы саладағы ең жақсы жетістіктермен салыстырғанда орындалған жұмыстың ғылыми деңгейін бағалау. Барлық нәтижелер Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулер бойынша гранттық зерттеу жобалары (№ AP08955400, № AP08856170 және № AP09258737) аясында орындалып, ғылыми жұмыстың нәтижелері ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған журналда, Scopus, Web of Science мәліметтер базасында индекстелген журналдарда және халықаралық конференциялар материалдарында жарияланды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Akhmet M., Fen M.O. Unpredictable points and chaos // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2016. – Vol. 40. – P. 1-5.

2 Akhmet M., Fen M.O. Poincare chaos and unpredictable functions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2017. – Vol. 48. – P. 85-94.

3 Akhmet M., Fen M.O. Existence of unpredictable solutions and chaos // Turkish Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 41.- P. 254–266.

4 Akhmet M., Fen M.O. Non-autonomous equations with unpredictable solutions // Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 59.– P. 657-670.

5 Akhmet M. Nonlinear Hybrid Continuous/Discrete-Time Models. – Paris: Atlantis Press, 2011. – 231 p.

6 Savkin A.V., Evans R.J. Hybrid dynamical systems: controller and sensor switching problems. – Berlin, Birkhauser Basel, 2002. – 153 p.

7 van der Schaft A.J., Schumacher J.M. An introduction to hybrid dynamical systems. – London, Springer, 2000. – 174 p.

8 Malkin I.G. Some problems in the theory of non-linear oscillations. – M.: L., 1956. – 173 p.

9 Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. – Delhi: Hindustan Publication Company, 1961. – 548 p.

10 Minorski N. Nonlinear oscillations. – Princeton: Van Nostrand, 1962. – 714 p.

11 Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. Theory of oscillations. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 815 p.

12 Hayashi C. Nonlinear oscillations in physical systems. – NY.: McGraw-Hill, 1964. – 392 p.

13 Schmidt G., Tondl A. Non-linear vibrations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1967. – 420 p.

14 Urabe M. Nonlinear autonomous oscillations. Analytical theory – NY.: Academic Press, 1967. – 320 p.

15 Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. – NY.: Wiley, 1979. – 720 p.

16 Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equations. – Princeton; NJ, USA: Princeton University Press, 1960. – 523 p.

17 Fink A.M. Almost periodic differential equations. – NY.: Springer-Verlag, 1974. – 342 p.

18 Levitan B.M., Zhikov V.V. Almost periodic functions and differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1983. – 224 p.

19 Farkas M. Periodic Motion. – NY.: Springer-Verlag, 1994. – 577 p.

20 Corduneanu C. Almost Periodic Oscillations and Waves. – NY.: Springer Verlag, 2009. – 313 p.

21 Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. - Paris, 1899. - vol. III; reprint (Dover, New York, 1957). – 408 p.
22 Birkhoff, G.D. Dynamical Systems. – USA: American Mathematical Society, 1927. – 305 p.
23 Sell, G.R. Topological dynamics and ordinary differential equations. – London:Van Nostrand Reinhold Company, 1971. – 199 p.
24 Bohl P. Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten. - Dorpat, Thesis, 1893.
25 Bohl P. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie // Grelles Journal. - 1906. - Vol.131. – P. 268–321.
26 Esclangon E. Les fonctions quasi-périodiques – Paris: Gauthier-Villars, 1904. – 306 p.
27 Bohr H. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I // Acta Mathematica. – 1925. - Vol. 45. – P. 29–127.
28 Bohr H. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II // Acta Mathematica. – 1925. - Vol. 6. – P. 101–214.
29 Bohr H. Almost-Periodic Functions. – New York: Chelsea Publishing Company, 1951. – 113 p.
30 Bogolyubov N.N. On some arithmetic properties of almost periods. – Akademiya Nauk Ukrainian SSR, 1939. - Vol. 4. – P. 185–194.
31 Besicovitch A.S. Almost Periodic Functions. – Cambridge: Dover, 1954. – 180 p.
32 Bohner S. A new approach to almost periodicity // Proceedings of the National Academy of Science, USA. – 1962. - Vol. 48, № 12. – P. 2039-2043.
33 Stepanov V.V. Sur quelques géneralisations des fonctions presque périodiques // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. -1925. - Vol. 181. – P. 90–92.
34 Bohner S. Abstrakte fastperiodische Funktionen // Acta Mathematica, – 1933. - № 61. – P. 149–184.
35 Bohr H., Neugebauer O. Über lineare Differentialgleichung mit konstanten Koefficienten und fastperiodischen rechber Seite // Göttingen Nachrichten. – 1926. – P. 8–22.
36 Жаутыков О.А. Распространение теорем Пуанкаре на бесконечные системы дифференциальных уравнений // В книге: Математическая физика. – Киев, 1966. – С. 3-22.
37 Zhautykov O.A. On the application of the shortening method to the problems of oscillations of elastic systems // Annuaire/Des ecoles superieures Mecanigue technique. – 1977. – Vol. l. – P. 7-14.
38 Харасахал А.Х. Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1970. – 200 с.
39 Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Алма-Ата: Наука, 1979. – 204 с.

40 Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных систем. – Алма-Ата: Наука, 1990. – 184 с.

41 Умбетжанов Д.У., Бержанов А.Б. О голоморфном почти многопериодическом решении интегро-дифференциального уравнения в частных производных // Вестник Академии наук Казахской ССР, физикоматематическая серия. – 1977. – №5. – С. 61-66.

42 Умбетжанов Д.У., Сартабанов Ж.А. О необходимом и достаточном условии многопериодичности решения одной системы дифференциальных уравнений в частных производных с одной и той же главной частью // В книге: Математика и Механика. – Алма-Ата, 1972. – № 7, часть 2. – С. 22-27.

43 Асанова А.Т. Почти периодическое решение решения полулинейного параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1998. – № 34:12. – С. 1697-1698.

44 Абдикаликова Г.А. Построение почти периодического решения одной квазилинейной параболической системы // Вестник Министерства образования и науки Республики Казахстан, физико-математическая серия. – 2002. – №3. – С. 3-7.

45 Sartabanov Z.A., Kulzhumiyeva A.A. On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal. – 2017. - Vol. 8, №1. – P. 67-75.

46 Oinarov R., Adiyeva A. Weighted inequality and oscillatory properties of a class of fourth order differential equations // Nonlinear Studies. – 2019. – Vol. 26, №4. – P. 741-753.

47 Oinarov R., Rakhimova S.Y. Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2010. - № 49. – P. 1-15.

48 Asanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T. Solvability of a periodic problem for the fourth order system of partial differential equations with time delay // Kazakh Mathematical Journal. – 2019. – tom 19. - № 2. – P. 14-21.

49 Tleubergenov M.I. On the inverse stochastic reconstruction problem // Differential Equations. – 2014. - № 2. – P. 274–278.

50 Василина Г.К., Тлеубергенов М.И. Об оптимальной стабилизации интегрального многообразия // Нелинейные колебания. – Киев, 2017. – Т. 20, № 1. – С. 53-65.

51 Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, - Vol. 1,2. - Paris: Gauthier-Villars, 1892. – 408 p.

52 Bener P.R. Recurrent solutions to systems of ordinary differential equations // Journal of Differential Equations. – 1969. – №5. – P. 271-282.

53 Pokrovskii A.V., Abodayeh K., McInerney J. Recurrent oscillations in systems with hysteresis nonlinearities // Physica B: Condensed Matter. – 2001. – Vol. 306, №1-4. – P. 191-194.

54 Hino Y. Recurrent solutions for linear almost periodic systems // Funkcialaj Ekvacioj. – 1985. – №28. – P. 117-119.

55 Kumar A., Bhagat R.P. Poisson stability in product of dynamical systems // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 1987. – Vol. 10, №3. – P. 613-614.
56 Knight R.A. Recurrent and Poisson stable flows // Proceedings of the American mathematical society. – 1981. – Vol. 83, №1. – P. 49-53.
57 Shcherbakov B.A., Cheban D. Poisson asymptotic stability of motions of dynamical systems and their comparability with regard to the recurrence property in the limit // Differential Equations. – 1997. – Vol. 13, №5. – P. 898-906.
58 Miller A. Unpredictable points and stronger versions of Ruelle–Takens and Auslander–Yorke chaos // Topology and its Applications. – 2019. – Vol. 253. – P. 7–16.
59 Thakur R., Das R. Strongly Ruelle–Takens, strongly Auslander–Yorke and Poincaré chaos on semiflows // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2020. – Vol. 81. – 105018.
60 Thakur R., Das R. Sensitivity and chaos on product and on hyperspatial semiflows // Journal of Difference Equations and Applications. – 2021. – Vol. 27, №1. – P. 1-15.
61 Akhmet M., Fen M.O, Tleubergenova M., Zhamanshin A. Unpredictable solutions of linear differential and discrete equations // Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43.– P. 2377-2389.
62 Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A. Quasilinear differential equations with strongly unpredictable solutions. // Carpathian Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 36, №3.– P. 341-349.
63 Akhmet M., Fen M.O., Alejaily E.M. Dynamics with Chaos and Fractals. – Cham:Springer, 2020. – 223 p.
64 Akhmet M. Domain structured dynamics: Unpredictability, chaos randomness, fractals, differential equations and neural. – UK: IOP Publishing, 2021. – 197 p.
65 Akhmet M., Fen M.O., Alejaily E.M. A randomly determined unpredictable function // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20, №2. – P. 30-36.
66 Akhmet M. Principles of Discontinuous Dynamical Systems. – New York: Springer, 2010. – 189 p.
67 Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. –Киев: Вища школа, 1987. – 287 с.
68 Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific, 1989. – 288 p.
69 Мильман В.Д., Мышкис А.Д. Об устойчивости движения при наличии толчков // Сибирский математический журнал. – 1960. - Том 1. – №2.– Р. 233-237.
70 Stanzhyts'kyi O.M. Asymptotic equivalence of impulsive systems // Ukrainian Mathematical Journal. – 2007. – Vol. 59, №4. – P. 577-587.
71 Stanzhyts'kyi O.M., Mogyluova V., Shovkoplyas T. Application of the averaging method to optimal control problems of systems with impulse action in non-fxed moments of times // International Workshop QUALITDE. – 2019.– P. 184-188.

72 Erbe L.H., Liu, X. Existence of periodic solutions of impulsive differential systems // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 1991. – Vol. 4., №2.– P. 137-146.
73 Fe´ckan M. Existence of almost periodic solutions for jumping discontinuous systems // Acta Mathematica Hungarica. – 2000. - Vol.86, №4. – P. 291-303.
74 Liu J.W., Zhang C.Y. Existence and stability of almost periodic solutions for impulsive differential equations // Advances in Difference Equations. – 2012. – Vol. 4. – P. 1-14.
75 Bonotto E., Jimenez M. On impulsive semidynamical systems: minimal, recurrent and almost periodic motions // Topological Methods in Nonlinear Analysis. – 2014. – Vol. 44, № 1. – P. 121-141.
76 Li X., Bohner M., Wang C.-K. Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications // Automatica. – 2015. – Vol. 52. – P. 173-178.
77 Akhmet M., Kashkynbayev A. Bifurcation in Autonomous and Nonautonomous Differential Equations with Discontinuities. – Singapore: Springer, 2017. – 175 p.
78 Girel S., Crauste F. Existence and stability of periodic solutions of an impulsive differential equation and application to CD8 T-cell differentiation // Journal of Mathematical Biology. – 2018. – Vol. 76, №7. – P. 1765-1795.
79 d'Onofrio A. On pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model with vertical transmission // Applied Mathematics Letters. – 2005. – Vol. 18. – P. 729-732.
80 Fen M.O., Tokmak Fen F. SICNNs with Li-Yorke chaotic outputs on a time scale // Neurocomputing. – 2017. – Vol. 237. – P. 158-165.
81 Ghosh P., Peters J.F. Impulsive differential equation model in methanol poisoning detoxification // Journal of Mathematical Chemistry. – 2020. – Vol. 58. – P. 126-145.
82 Haddad W.M. Condensed matter physics, hybrid energy and entropy principles, and the hybrid first and second laws of thermodynamics // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2020. - № 83. 105096.
83 Liu X. Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models // Dynamics and Stability of Systems. – 1994. – Vol. 9, №2. – P. 163-174.
84 Zhao Z., Li Q., Chen L. Effect of rhizosphere dispersal and impulsive input on the growth of wetland plant // Mathematics and Computers in Simulation. – 2018. – Vlo.152. – P. 69-80.
85 Halanay A., Wexler D. Teoria calitativà a sistemelor cu impulsuri. – Bucharest: Editura Academiei, 1968. –312 p.
86 Akhmet M.U. On the integral manifolds of the differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations at the Florida Institute of Technology. – 2005. – P. 11-20.
87 Akhmet M.U. Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Nonlinear Analysis. – 2007. – Vol. 66. – P. 367-383.

88 Akhmet M.U. On the reduction principle for differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – Vol.336, №1. – P. 646-663.

89 Akhmet M.U. Stability of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2008. – Vol.68, № 4. – P. 794-803.

90 Akhmet M.U. Almost periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. – 2008. – Vol. 2, № 2. – P. 456-467.

91 Akhmet M.U., Aru˘gaslan D. Lyapunov-Razumikhin method for differential equations with piecewise constant argument // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A. – 2009. – Vol. 25, № 2. – P. 457-466.

92 Pinto M. Asymptotic equivalence of nonlinear and quasi linear differential equations with piecewise constant arguments // Mathematical and Computer Modelling. – 2009. – Vol. 49, № 9-10. – P. 1750-1758.

93 Castillo S., Pinto M. Existence and stability of almost periodic solutions to differential equations with piecewise constant argument // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. - № 58. – P. 1-15.

94 Coronel A., Maulén Ch., Pinto M., Sepúlveda D. Dichotomies and asymptotic equivalence in alternately advanced and delayed differential systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2017. – Vol. 450. – P. 1434-1458.

95 Zou Ch., Xia Y., Pinto M., Shi J., Bai Y. Boundness and linearization of a class of differential equations with piecewise constant argument // Qualitative Theory of Dynamical Systems. – 2019. – Vol. 18, №2. – P. 495–531.

96 Xi Q. Razumikhin-type theorems for impulsive differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Advances in Difference Equations. – 2018. - № 267. – P. 1-16.

97 Veloz T., Pinto M. Existence, computability and stability for solutions of the diffusion equation with general piecewise constant argument // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2015. – Vol. 426. – P. 330-339.

98 Castillo S., Pinto M., Torres R. Asymptotic formulae for impulsive differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Electronic Journal of Differential Equations. – 2019. – Vol. 40. – P. 1-22.

99 Cooke K.L., Wiener J. Retarded differential equations with piecewise constant delays // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1984. – Vol. 99. – P. 265-297.

100 Wiener J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations. – World Scientific: Singapore, 1993. 410 p.

101 Shah S.M., Wiener J. Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 1983. – Vol. 6, № 4. – P. 671–703.

102 Aftabizadeh A.R., Wiener J. Differential inequalities for delay differential equations with piecewise constant argument // Applied Mathematics and Computation. – 1987. – Vol. 24, № 3. – P. 183–194.

103 Hopfield J.J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 1982. – Vol. 79, №8. – P. 2554-2558.

104 Bouzerdoum A., Pinter R., Shunting inhibitory cellular neural networks: derivation and stability analysis // IEEE Transactions on Circuits Systems I Fundamental Theory and Applications. – 1993. – Vol .40, №3. – P. 215-221.

105 Cohen M.A., Grossberg S. Absolute stability and global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks // Advances in Psychology. – 1987. – Vol.42. – P. 288-308.

106 Wheeler D., Schieve W. Stability and chaos in an inertial two-neuron system // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1997. – Vol. 105, №4. – P. 267-284.

107 Ke Q., Oommen J. Logistic Neural Networks: Their chaotic and pattern recognition propertie // Neurocomputing. – 2014. – Vol. 125. – P. 184-194.

108 Pajares G. A Hopfield Neural Network for Image Change Detection // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2006. – Vol. 17, №5. – P. 1250-1264.

109 Ramya C., Kavitha G., Shreedhara K.S. Recalling of images using Hopfield neural network model // National Conference on Computers, Communication and Controls. – 2011. - № 11. – P. 2-7.

110 Soni N., Sharma E.K., Kapoor A. Application of Hopfield neural network for facial image recognition // International Journal of Recent Technology and Engineering. – 2019. - Vol. 8, №1. – P. 3101-3105.

111 Koss J.E., Newman F.D. Johnson T.K. Kirch D.L. Abdominal organ segmentation using texture transforms and a Hopfield neural network // IEEE Transactions on Medical Imaging. – 1999. – Vol. 18, №7. – P. 640 – 648.

112 Muscinelli, S.P.; Gerstner,W.; Schwalger, T. How single neuron properties shape chaotic dynamics and signal transmission in random neural networks // PLOS Computational Biology. – 2019. – Vol. 15, №6. e1007122.

113 Akhmet M., Yilmaz E. Neural networks with discontinuous/impact activations. - New-York: Springer, 2013. – 176 p.

114 Preetham V.V. Mathematical foundation for Activation Functions in Artificial Neural Networks // URL: https://medium.com/autonomous-agents/mathematical-foundation-for-activation-functions-in-artificial-neural-networks-a51c9dd7c089: (дата обращения: 26.05.2021).

115 Arbib M. The handbook of brain theory and neural networks. - Cambridge, MA: MIT Press, 2003. – 1308 p.

116 Koepsell K., Wang X., Hirsch J., Sommer F. Exploring the function of neural oscillations in early sensory systems // Frontiers in Neuroscience. -2010. – Vol. 4. – P. 53.

117 Maguire M., Abel A. What changes in neural oscillations can reveal about developmental cognitive neuroscience: language development as a case in point // Developmental Cognitive Neuroscience. – 2013. – Vol. 6. – P. 125–136.

118 Ward L. Synchronous neural oscillations and cognitive processes // Trends in Cognitive Sciences. – 2003. – Vol. 7, №12. – P. 553–559.

119 Akhmet M. Almost periodicity, chaos, and asymptotic equivalence. – Springer, 2020. – 368 p.

120 Cherif F. Existence and global exponential stability of pseudo almost periodic solution for SICNNs with mixed delays // Journal of Applied Mathematics and Computing. – 2012. – Vol. 39. – P. 235–251.

121 Akhmet M., Arugaslan D., Yilmaz E. Stability analysis of recurrent neural networks with piecewise constant argument of generalized type // Neural Networks. - 2010. – Vol. 23, №8. – P. 305–311.

122 Xiang H., Yan K.-M., Wang B.-M. Existence and global exponential stability of periodic solutions for delayed high-order Hopfield-type neural networks // Physics Letters A. – 2006. – Vol. 352, №4-5. – P. 341–349.

123 Pan L., Cao J. Anti-periodic solutions for delayed cellular neural networks with impulsive effects// Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2011. – Vol. 12, №6. – P. 3014–3027.

124 Yu Y., Cai M. Existence and exponential stability of almost-periodic solutions for high-order Hopfield neural networks // Mathematical and Computer Modelling. – 2008. – Vol. 47, №9-10. – P. 943–951.

125 Huang Z. Almost periodic solutions for fuzzy cellular neural networks with multi-proportional delays // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. – 2017. – Vol. 8, №4. – P. 1323–1331.

126 Kashkynbayev A., Cao J., Suragan D. Global Lagrange stability analysis of retarded SICNNs // Chaos, Solitons and Fractals. – 2021. – Vol. 145. – 110819.

127 Akca H., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E. Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2004. – Vol. 290. – P. 436 – 451.

128 Li Y., Lu L. Global exponential stability and existence of periodic solution of Hopfield-type neural networks with impulses // Physics Letters A. – 2004. – Vol. 333. – P. 62–67.

129 Pinto M., Robledo G. Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models // Applied Mathematics and Computation. – 2010. - Vol 217. – P. 4167–4177.

130 Akhmet M., Fen M.O, Tleubergenova M., Nugayeva Z. Unpredictable solutions of linear impulsive systems // Mathematics. – 2020. – Vol.8, №10. – 1798.

131 Akhmet M., Tleubergenova M., Nugayeva Z. Strongly unpredictable Oscillations of Hopfield-type neural networks // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, №10. – 1791.

132 Akhmet M., D. Arugaslan Çinçin, Tleubergenova M., Nugayeva Z. Unpredictable oscillations for Hopfield-type neural networks with delayed and advanced arguments // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, №5. – 571.

133 Akhmet M., Tleubergenova M., Nugayeva Z. An impulsive system with unpredictable oscillations // Kazakh Mathematical Journal. – 2021. Vol. 21, №1. – P. 25–37.

134 Akhmet M.U., Tleubergenova M., Nugayeva Z. Poincare chaos in impulsive systems // Материалы V международной научно-практической

конференции "Информатика и прикладная математика», – Алматы. – 2020. – С. 75-81.

135 Akhmet M.U., Tleubergenova M., Nugayeva Z. Linear systems with unpredictable impulses // Тезисы докладов традиционной международной апрельской научной конференции. – Алматы. – 2021. – С. 67-68.

136 Akhmet M.U., Tleubergenova M., Nugayeva Z. Unpredictable oscillations of impulsive neural networks with Hopfield structure // Trends in Data Engineering Methods for Intelligent Systems. Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence and Applied Mathematics in Engineering (ICAIAME 2020). – 2021. – Vol. 76. – P. 1–18.

137 Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. – Cambridge, USA: Cambridge University Press, 2013. – 662 p.

138 Khan A., Salahuddin S. Negative capacitance in ferroelectric materials and implications for steep transistors // IEEE SOI-3D-Subthreshold Microelectronics Technology Unified Conference (S3S). – 2015.

139 Khan A.I., Chatterjee K., Duarte J.P. Lu Z., Sachid A., Khandelwal S., Ramesh R., Hu C., Salahuddin S. Negative Capacitance in Short-Channel FinFETs Externally Connected to an Epitaxial Ferroelectric Capacitor // IEEE Electron Device Letters. – 2016. – Vol. 37. – P. 111–114.

140 Hale J., Kocak H. Dynamics and bifurcations. – New York: Springer-Verlag, 1991. – 574 p.

141 Hartman P. Ordinary Differential Equations. – New York: John Wiley, 1964. – 624 p.

142 Akhmet M., Yilmaz E. Hopfield-type neural network system with piecewise constant argument // International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications. – 2009. – Vol.3, №1-2. – P. 8–14.

143 Wan L., Wu A. Stabilization control of generalized type neural networks with piecewise constant argument // Journal of Nonlinear Sciences and Applications. – 2016. – Vol.9, № 6. – P. 3580-3599.

144 Pinto M., Sepúlveda D., Torres R. Exponential periodic attractor of impulsive Hopfield-type neural network system with piecewise constant argument // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2018. - № 34. – P. 1-28.

145 Torres R., Pinto M., Castillo S., Kostić M. Uniform approximation of impulsive Hopfield cellular neural networks by piecewise constant arguments on $[\tau, \infty)$ // Acta Applicandae Mathematicae. – 2021. – Vol.171, №8.

146 Danciu D. Qualitative behavior of the time delay Hopfield type neural networks with time varying stimulus // Annals of the University of Craiova, Series: Philology, English. – 2002. – Vol. 26. – P. 72-82.