ТУТКУШЕВА ЖАЙЛАН САЛАВАТОВНА

БІРНЕШЕ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР ТЕГІС ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ГЛОБАЛДЫҚ МИНИМУМДАРЫН ЖОҒАРЫ ДӘЛДІКПЕН АНЫҚТАУ

6D060100 – Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның

АННОТАЦИЯСЫ

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, негізгі 3 бөлімнен (бірінші бөлімде 7 бөлімше, екінші бөлімде 3 бөлімше, үшінші бөлімде 4 бөлімше), қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен және қосымшалардан тұрады.

Суреттер, кестелер мен әдебиеттер саны. Жұмыста 142 әдебиетке сілтеме берілген, 7 кесте және 12 сурет бар.

Кілттік сөздер. Көмекші функция, глобалдық экстремум, глобалдық минимум, детерминирленген әдістер, глобалдық оптималдау әдістері, көпэкстремалды оптималдау, көмекші функцияның қасиеттері, көп айнымалылы оптималдау.

Диссертацияның өзектілігі соңғы уақытта ғылым мен техниканың, халық шаруашылығының әр түрлі салаларында глобалдық оптималдау есептерін шешуге сұраныстың артуына, әмбебап глобалдық оптималдау әдістерінің тапшылығына және компьютерлік технологиялардың қарқынды дамуына тікелей байланысты. Глобалдық оптималдау мәселесі – қазіргі таңда қолданбалы және есептеу математикасының ең маңызды мәселелерінің бірі. Осы кезге дейін глобалдық оптималдау әдістері мен проблемалары туралы көп мәлімет белгілі болды және жарияланды. Дегенмен, сан-алуан практикалық мәселелерді шешуге және зерттеуге байланысты глобалдық оптималдау есептері ғылым мен практиканың әр түрлі салаларында ылғида туындап отырады. Әмбебап алгоритмдер болмағандықтан, үнемі жаңа әдіс-тәсілдер құру қажеттілігі сезіліп отырады.

Қазіргі уақытта глобалдық оптималдаудың барлық белгілі әдістерін екі категорияға бөлуге болады: детерминирленген әдістер және стохастикалық әдістер. Оптималдаудың детерминирленген әдістері – алынған глобалдық минмум мәні шынымен ең жақсы нәтиже екеніне теориялық кепілдік беретін әдістер тобы. Диссертациялық жұмыста детерминирленген әдіс қаралады.

Әдетте, функцияның глобалдық экстремумын анықтау кезінде көптеген қиыншылықтар кездеседі. Негізгі қиындықтар зерттелетін функцияның көпэкстремалды, көп айнымалылы және табылған мәннің глобалдық экстремумге қаншалықты жақын екеніне нақты баға бере алмауына байланысты туындайды. Осындай қиындықтарды шешу мәселелеріне көптеген ғалымдар өз еңбектерін арнады.

Диссертациялық жұмыста көп айнымалылы, көпэкстремалды, үзіліссіз $F(x)$ функциясының глобалдық минимумын табудың тиімді және үнемді әдісі қарастырылды. Бұл мәселені шешу үшін жаңадан маңызды, арнайы функция құрылып, «көмекші функция» деп аталды. Көмекші функция идеясына негізделген конструктивті алгоритм ұсынылды.

Зерттеудің негізгі объектісі еселі интегралдың көмегімен бастапқы $F(x)$ мақсаттық функцияны түрлендіру арқылы құрылған бір α айнымалылы көмекші функция болып табылады:

$$g_m(F,\alpha) = \int_E [|F(x)-\alpha| - F(x) + \alpha]^m dx,\ m \in N, m > 1, \qquad (0.1)$$

мұндағы: $F(x)$ - мақсаттық функцияны, $E \subset R^n$ – мақсаттық функцияны анықталу облысы. (0.1) функция мақсаттық функцияның айнымалылар санына байланысты еселі интеграл болып табылады. Ал еселі интегралды сандық әдістермен есептеу үшін С.Л. Соболевтің[1] «тұрақты шекаралық қабаты бар» кубтық формулалары қолданылды. М. Д. Рамазанов[2] үзіліссіз функциялар үшін соболевтік кубтық формулалардың дәлдігіне баға берді және торлы кубтық формулалар көмегімен кез-келген формадағы облыс бойынша интегралдау алгоритмін құрды.

n нақты айнымалыдан тәуелді $\varphi(x)$ функциясының

$$I(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x)dx$$

интегралының жуық мәнін С.Л. Соболевтің «тұрақты шекаралық қабаты бар» кубтық формулалары көмегімен есептеу үшін [1], $I(\varphi)$ интегралының жуық мәні $\varphi(x)$ функциясының $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ нүктелердегі мәндерінің сызықтық комбинациясы түрінде ізделеді:

$$K_N(\varphi(x)) = h^n \sum_{s=1}^{N} C_s \varphi(x^{(s)}).$$

Мұндағы: N – функцияның анықталу жиынын x векторының әр компонентасы бойынша бөлетін интервалдар саны, $x^{(s)}$ – соболевтік кубтық формуланың түйіндері. C_s – шекаралық қабат коэффициенттері.

Негізгі мәселе – N шексіздікке ұмтылғанда, $I(\varphi)$ интегралы $K_N(\varphi(x))$ мәніне жылдам жуықтайтындай $\{C_s\}$ коэффициенттерін анықтау.

1. Соболев С.Л. Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Математический университет Соболева, 1996. – 484 с.

2. Рамазанов М. Д. Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. – Уфа: ДизайнПолиграфСервис, 2009. – 178 с.

Анықталған коэффициенттерді ескеріп, кубтық формуланы қайта жазсақ:

$$\int_{\Omega} \varphi(x)dx \approx h^n \sum_{s=1}^{N} C_s \varphi(x^{(s)}),\ N = 1,2, \dots . \quad (0.2)$$

Мұндағы: N – түйіндер саны, h^n - элементар ұяшықтың көлемін анықтайтын, масштабтық көбейткіш, $\varphi(h \cdot s)$ – берілген функцияның түйіндегі мәні.

(0.2) формуласы интегралдық күрделі $g_m(F, \alpha)$ көмекші функциясының мәндерін үлкен дәлдікпен есептеу үшін негізгі құрал болып табылады. Осы кубтық формуладағы $\varphi(x)$ орнына $g_m(F, \alpha)$ функциясындағы интеграл астындағы өрнекті қойсақ:

$$g_m(F, \alpha) = \int_{Q} [|F(x) - \alpha| - (F(x) - \alpha)]^m dx \approx$$

$$\approx h^n \sum_{s=1}^{N} C_s \, [|F(h \cdot s) - \alpha| - (F(h \cdot s) - \alpha)]^m.$$

Диссертациялық жұмыста қарастырылған жаңа әдіс С.Л. Соболев, М.Д. Рамазанов және басқа да ғалымдар зерттеген кубтық формулалар теориясын қолдану арқылы жүзеге асты.

Зерттеу барысында (0.1) көмекші функциясының қолайлы қасиеттері айқындалып, дәлелденді: бірқалыпты үзіліссіз, дифференциалданады, қатаң дөңес, монотонды өспелі, терісемес.

0.1-теорема. $g_m(F, \alpha)$ *функциясы* $\forall \alpha_0 \geq \hat{\alpha}$ *үшін кез-келген* $(\alpha_0\,,\ \alpha_0 + h)$, $h > 0$ *шектелген аралығында бірқалыпты үзіліссіз*, мұндағы $m \in N$, $m > 1$.

Теореманы дәлелдеу үшін $(\alpha_0\,,\ \alpha_0 + h)$ аралығынан α_1 және α_2 мәндері алынып, осы мәндердегі көмекші функциялардың айырмасының модулі зерттелді.

0.2-теорема. $g_m(F, \alpha)$ *көмекші функция* $(\hat{\alpha}; +\infty)$ *аралығындағы әрбір* α *нүктесінде дифференциалданады, мұндағы* $\hat{\alpha} = globmin_E\, F(x)$.

Теореманы дәлелдеуі үшін көмекші функцияның өсімшесін қаралды. Көмекші функция дифференциалдау реті m көрсеткішке байланысты. m – көмекші функцияның қаншалықты тегіс болатынына әсер етеді.

0.1-салдар. *Кез-келген натурал* $m > 1$ *саны үшін көмекші функцияның* m *ретті туындысы*

$$\frac{d^m g_m}{d\alpha^m} = (2)^m m!\, \mu(E(F, \alpha)).$$

Оптималдау теориясында маңызды болып келетін функция қасиеті – функцияның дөңестігі. Дөңес оптималдау теориясының мәселелері шешімін тапқан. Сондықтан көпэкстремалды функцияны дөңес функцияға келтіру мәселенің шешімі табылатының білдіреді.

0.3-теорема. $g_m(F, \alpha\,)$ *функциясы* $(\hat{\alpha}, \infty)$ *аралығында қатаң дөңес, мұндағы* $m \in N, m > 1$.

Теореманы дәлелдеу үшін

$$g_m\left(F, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(g_m(F, \alpha_1) + g_m(F, \alpha_2\,)\right)$$

теңсіздігінің дұрыстығы дәлелдену керек. Теңсіздіктің сол жағы көмекші функция анықтамасы бойынша ашып, Коши теңсіздігі қолданып дәлелденді.

Көмекші функцияның өзгеру тәртібіне қатысты келесі екі теорема да маңызды ақпарат береді.

0.4-теорема. $g_m(F, \alpha)$ *функциясы* $(\hat{\alpha}, +\infty)$ *аралығында өспелі*, мұндағы $m \in N, m > 1$.

0.5-теорема. *Егер* $glob \min_E F(x) = \hat{\alpha}$, $r > s$, $r, s \in N, r > 1$, $s > 1$ *болса, онда*

А) $\forall \alpha,\ \alpha \le \hat{\alpha}$, *үшін* $g_r(F, \alpha) = g_s(F, \alpha) = 0$;

Ә) $\forall \alpha,\ \hat{\alpha} < \alpha \le \frac{1}{2}$, *үшін* $g_r(F, \alpha) \le g_s(F, \alpha)$.

Мақсатты функцияның локалды минимумдар санына, айнымалылар санына қарамастан, алынатын көмекші функция бір ғана α параметріне тәуелді, бірқалыпты үзіліссіз, туындылары табылатын, дөңес, теріс емес, өспелі болады.

Көп айнымалылы көпэкстремалды функцияның глобалдық минимумының қажетті және жеткілікті оптималдық шарттары алынды және дәлелденді. Алынған шарттар мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу есебінен көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу есебіне өтуге әкелді.

0.6-теорема. *Егер* $glob\ min_E\, F = \hat{\alpha}$, *болса, онда*

$$g_m(F, \hat{\alpha}) = 0, \tag{0.3}$$

мұндағы $m \in N, m > 1$.

0.2-салдар. F мақсаттық функцияның глобалдық минимумы $\mathrm{g_m(F, \alpha)}$ көмекші функцияның нөлі болады.

0.7-теорема. *Егер* $max_\alpha\{\alpha \in \mathbb{R}: g_m(F, \alpha) = 0\} = \hat{\alpha}$ *болса, онда* $glob\ min_E\, F = \hat{\alpha}$.

0.3-салдар. $\hat{\alpha}$ - $g_m(F, \alpha)$ *көмекші функциясының ең үлкен нөлі F мақсаттық функциясының глобалдық минимумының дәл мәніне тең.*

Диссертациялық жұмыстың ең негізгі нәтижесі – 0.6, 0.7 теоремаларда дәлелденген, берілген үзіліссіз көп айнымалылы функцияның ізделінді глобалдық минимум мәні көмекші функцияның «ең үлкен нөліне» тең болатыны.

Ендігі мәселе көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» анықтау. Диссертациялық жұмыста $g_m(F,\alpha)$ функциясының «ең үлкен нөлін» әр түрлі сандық әдістерді бейімдеп қолдану қарастырылды: дихотомия, алтын қима, градиентпен түсу, жанамалар әдісі, модификацияланған хордалар әдісі. Осы әдістердің жылдамдықтарын зерттеу және есептеу тәжірибелерін өткізу барысында симметриялық әдістердің тиімділігі анықталды.

Диссертациялық жұмыста көмекші функцияның негізгі қасиеттері айқындалды және дәлелденді, глобалдық минимумның қажетті және жеткілікті шарттары анынды.

С++ бағдарламалау ортасында оптималдау әдістерін зерттеп тексеруге арналған арнайы әр түрлі қиындықтағы тесттік функциялар (Растригин, Экли функциялары –локалдық минимумдарының көптігімен ерекшеленеді, Изоми функциясы – глобалдық минимумның жазық беттің кішкене бөлігінде орналасуымен, Бил, Химмельблау функциялары – глобалдық минимумның жыра тәрізді бетте орналасуымен ерекшеленеді) үшін есептеу тәжірибелері орындалды. Бұл функциялар бір, екі және үш айнымалылы. Глобалдық минимум мәндері 10^{-10} дәлдігімен алынды.

Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер $g_m\left(F,\alpha\right)$ функциясының маңызды қасиеттері мақсаттық функцияның айнымалыларының санынан да, локалдық экстремумдар санынан да тәуелді емес екені және оның глобалдық минимумының қажетті және жеткілікті шарттары анықталды, яғни глобалдық минимумды жоғары дәлдікпен анықтау үшін үнемді әдіс құрылды.

Алынған нәтижелердің практикалық және теориялық маңыздылығы. Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер теориялық сипатқа ие: бірнеше айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның глобалдық минимумын табу үшін көмекші функция арқылы жаңа әдіс құрылуы; ұсынылған әдістің жинақтылығының дәлелденуі; көмекші функцияның маңызды қасиеттерінің (терісеместігі, қатаң дөңестігі, бірқалыпты үзіліссіздігі, дифференциалданатындығы және т.б.) анықталды; көп айнымалылы көпэкстремалды мақсаттық функцияның глобалдық минимумының қажетті және жеткілікті шарттарынын тұжырымдалуы. Ұсынылған әдіс пен алгоритм маңызды қосымшалар ретінде оптималдау теориясы мен сандық әдістер бөлімінің одан әрі дамуына және олардың қолданыс аясын кеңейтуге оң ықпал етуі әбден мүмкін. Сонымен қатар, кері есептерді шешуде, дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуде есептеу құралы ретінде қоладнылады.

Диссертациялық жұмыс нәтижелерін физика-математика, инженер, компьютерлік инженерия, есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету және т.б. мамандықтары студенттеріне, магистранттарына және докоранттарына элективті курстар жасақтауда пайдалануға болады.

Зерттеу мақсаты. Көп айнымалылы көпэкстремалды үзіліссіз функцияның глобалдық минимумын жоғары дәлдікпен табудың жаңа тиімді әдісін құру.

Зерттеу міндеттері:

а) көп айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның глобалдық экстремумын табу есебін шешу үшін жаңа «көмекші функция» енгізіп глобалдық оптималдау әдісін құру және оның жинақтылыған дәлелдеу;

ә) көп айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның глобалдық экстремумы координаталарын табу алгоритмін құру;

б) еселі интеграл түріндегі көмекші функция мәндерін тұрақты шекаралық қабаты бар соболевтік кубтық формулаларды қолданып есептеу;

в) көмекші функцияның маңызды қасиеттерін: терісеместігін, қатаң дөңестігін, монотондылығын, бірқалыпты үзіліссіздігін, дифференциалдануын зерттеу;

г) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының қажетті шартын алу;

ғ) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының жеткілікті шартын алу;

д) көмекші функция тәртібінің өз дәрежелік көрсеткішіне қатысты өзгеруін зерттеу;

е) жаңа әдіс негізінде көп айнымалылы тесттік функциялардың глобалдық минимумдарын С++ программалау ортасында есептеу тәжірибесі өткізілді.

Зерттеу әдістері: Диссертациялық жұмыста көпөлшемді математикалық талдау мен сандық әдістер теориясының негізгі қағидалары; Соболевтың «тұрақты шекаралық қабаты бар» кубтық формулалары; трансценденттік теңдеулердің түбірлерін анықтауға және дөңес функцияның минимумын табуға арналған сандық әдістері.

Зерттеу нысандары – үзіліссіз мақсаттық функция; бастапқы мақсаттық функцияны түрлендіру арқылы құрылған, еселі интеграл түрінде өрнектелген бір айнымалылы көмекші функция; көмекші функция негізінде құрылған глобалдық оптималдау әдісі.

Ғылыми жаңалығы. Диссертациялық жұмыста үзіліссіз функцияның глобалдық экстремумын табу үшін алғаш рет құрылған арнайы көмекші функция енгізіліп зерттелді.

а) көп айнымалылы үзіліссіз функцияның глобалдық экстремумын табу үшін жаңа глобалдық оптималдау әдісі құрылды және оның жинақтылығы дәлелденді;

ә) үзіліссіз функцияның глобалдық минимумның координаталарын табудың накты алгоритмі құрылды;

б) құрылған әдіспен глобалдық минимумды табу үшін қажетті итерациялар саны алдын-ала берілген дәлдікке сәйкес анықталды;

в) көмекші функцияның мәнің есептеу үшін «тұрақты шекаралық қабаты бар соболевтік кубтық» формулалардың қолданып есептеу;

г) көмекші функцияның маңызды қасиеттері (терісеместігі, қатаң дөңестігі, шектелген аралықта бірқалыпты үзіліссіздігі, дифференциалданатындығы және т.б.) зерттелді және дәлелденді;

ғ) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының қажетті шарты алынды;

д) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының жеткілікті шарты алынды;

е) жаңа әдіс негізінде көп айнымалылы тесттік функциялардың глобалдық минимумдарын С++ программалау ортасында есептеу тәжірибесі өткізілді.

Қорғауға ұсынылатын негізгі нәтижелер:

а) көп айнымалылы үзіліссіз функцияның глобалдық экстремумын табуға арналған жаңа глобалдық оптималдау әдісі және оның жинақтылығы;

ә) көп айнымалылы үзіліссіз мақсаттық функцияның глобалдық экстремумы координаталарын табу алгоритмі;

б) еселі интеграл түріндегі көмекші функция мәндерін тұрақты шекаралық қабаты бар соболевтік кубтық формулаларды қолданып есептеу;

в) көмекші функцияның қасиеттері: терісеместігі, қатаң дөңестігі, монотондылығы, бірқалыпты үзіліссіздігі, дифференциалданатындығы;

г) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының қажетті шарты;

ғ) көп айнымалылы функцияның глобалдық экстремумының жеткілікті шарты;

д) С++ ортасында жаңа әдіспен көп айнымалылы тесттік функциялардың глобалдық минимумдарын табу бағдарламасы.

Докторанттың қосқан жеке үлесі. Диссертацияда келтірілген барлық нәтижелерді автордың өзіне тиесілі. Қосалқы авторлар және ғылыми кеңесшілер мәселенің қойылуына және алынған нәтижелерді талқылауға үлестерін қосты.

Алынғын нәтижелерді апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

- дәстүрлі халықаралық сәуір ғылыми конференциясы, ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты (Алматы, Қазақстан, 5- 8 сәуір 2021 ж.);

-«Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалеры» IX халықаралық ғылыми конференциясы, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті (Ақтөбе, Қазақстан, 24-28 мамыр 2022 ж.);

-дәстүрлі халықаралық сәуір ғылыми конференциясы, ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты (Алматы, Қазақстан, 4- 8 сәуір 2022 ж.);

-«Дифференциалдық теңдеулерді зерттеудің сапалы және жуықтау әдістері» ғылыми семинары, ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор А.Т. Асанова);

-«Математиканың заманауи мәселелері» ғылыми семинары, М.В. Ломоносов атындағы ММУ-дың Қазақстандағы филиалының математика және информатика кафедрасы, Астана, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Е. Д. Нурсултанов);

- «Жаратылыстану ғылымының математикалық мәселелері. Кері және қате есептер» қалалық ғылыми семинары, Әль-Фараби атындағы ҚҰУ, Алматы, Қазақстан (семинар жетекшілері – ф.-м.ғ.д., профессор М.А. Бектемесов);

-«Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті математика кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Ж.А. Сартабанов);

- «Семинар по вычислительной математике и смежным вопросам» ғылыми семинары, Уфа, РФ (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Я. Ш. Ильясов);

- «Обратные и некорректные задачи в естествознании и искусственный интеллект» атты халықаралық Евразиялық ғылыми конференциясы (Алматы, Қазахстан, 17-20 сәуір 2024 ж.).

Жарияланымдар. Диссертациялық жұмыс нәтижелері 10 еңбекте жарияланды. Оның ішінде 2 мақала Scopus мәліметтер базасында индекстелген рейтингтік ғылыми журналда, 4 мақала ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған отандық басылымдарда, 4 жұмыс Қазақстанда және шет елдерде өткізілген Халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында жарияланды.