ИСЕНОВА АККЕНЖЕ АЛТМЫШЕВНА

УИТТЕКЕР ТЕКТІ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ШЕШІМДЕРІН ЕРЕКШЕ НҮКТЕЛЕР МАҢАЙЫНДА ҚҰРУ

6D060100 – Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның

АННОТАЦИЯСЫ

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен (бірінші бөлімде 3 бөлімше және 5 тармақ, екінші бөлімде 5 бөлімше және 4 тармақ, үшінші бөлімде 2 бөлімше және 10 тармақ), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Суреттер, кестелер мен әдебиеттер саны. Жұмыста 93 әдебиет пайдаланылды.

Кілттік сөздер. Ранг, антиранг, қалыпты-регулярлы шешім, ерекше қисықтар, Фробениус-Латышева әдісі, Уиттекер типті жүйе, Горн типті жүйе, Бессель типті жүйе, туындалған гипергеометриялық функция, Лагерра көпмүшелері, Аппель функциялары, Лауричелла қатарлары, Художников функциялары, Гумберт функциясы, анықтаушы теңдеулер жүйесі.

Диссертацияның өзектілігі. Дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық теориясы О. Коши, Л. Фукс, Г. Фробениус, К. Гаусс, Я. Горн және т. б. зерттеулерден бастау алады. Айнымалылы коэффициентті дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық теориясы бойынша іргелі зерттеулерді Л. Фукс жасаған.

Л. Фукс пен Л. Томе жұмыстарының идеяларын А. Пуанкаре дамыта отырып, функциялардың асимптотикалық жіктеу мәселесін зерттеді. Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық жүйелеріне Фробениус-Латышева әдісінің дамуы, сондай-ақ арнайы қисықтардың маңайында қарастырылатын теңдеулер шешімдерін зерттеу – маңызды қызығушылық тудырады.

Бір айнымалы функциялар жағдайында Люси Дж. Слейтер, «туындалған гипергеометриялық функциялар деп төрт функцияны атаған: Куммер функциялары ${}_1F_1(\alpha;\beta;x)$, онымен байланысқан екінші шешім $U(\alpha,\beta;x)$ және екі Уиттекер функциялары $M_{k,m}(x)$ мен $W_{k,m}(x)$».

Математикалық физикада қолданылатын функциялардың көпшілігі, соның ішінде Вебер және Бессель функциялары осы функциялардың ерекше жағдайлары болып табылады. Олардың барлығы кейбір екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің қалыпты дербес шешімдері болады. Бұл теңдеулердің ерекше нүктелері бар: $x=0$ нүктеде регулярлы және $x=\infty$ нүктеде иррегулярлы. Куммер теңдеуі мен Уиттекер теңдеуі осындай ерекшеліктерге ие.

Ерекшеліктерді регулярлы және иррегулярлы деп классификациялау – осы ерекше нүктелер нүктелер маңайында шешімдердің қандай болатынын зерттеуге мүмкіндік береді. Бұл жұмыста біз К.Я. Латышеваның классификациясын А. Пуанкаре енгізген ранг және Л. Томе енгізген антиранг ұғымдары арқылы қолданамыз.

Куммер мен Уиттекер теңдеулері, сондай-ақ олардан әртүрлі түрлендірулер арқылы алынған туыстас теңдеулер арасындағы байланыс ең көп зерттелген. Жоғарыда аталған теңдеулермен ортақ қасиеттерге ие бола отырып, туыстас теңдеулер ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Сондықтан қарапайым дифференциалдық теңдеулер теориясына арналған әдебиеттерде Куммер, Бессель, Уиттекер, Лагерра, Якоби және т. б. теңдеулердің белгілі қосымшалары бар туыстас теңдеулер тізімі келтірілген.

Екі айнымалының гипергеометриялық функциялары жағдайында қарастырылатын қасиеттер шеңбері кеңейеді. Зерттеу күрделене түседі, егер қарапайым жағдайда бір ғана туындалған гипергеометриялық теңдеу болса, онда екі айнымалы жағдайда 20 туындалған гипергеометриялық функция пайда болады. Олардың барлығы негізінен Аппельдің $F_1 - F_4$ төрт гипергеометриялық функциясынан шекке көшу арқылы алынады. Я. Горн олардың екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің дербес 20 шешімдері екенін анықтады. Олардың ішінде, қарапайым жағдайдағыдай, кейбір ортақ қасиеттермен байланысқан жүйелерді туыстас жүйелер деп атаймыз. Мысалы, ортақ қасиетке бір жүйені екіншісінен шығаруға болатын түрлендіру жатады, мұндағы түрлендірудегі $Q(x_1,\dots,x_n)$ n айнымалыдан тәуелді көпмүшелік, сондай-ақ олардың шешімдері арасында екі айнымалының туындалған гипергеометриялық функциялары түрінде байланыс орнату. М. Лауричелла Аппельдің екі айнымалылы төрт гипергеометриялық функцияларын жалпылап, F_A, F_B, F_C, F_D төрт гипергеометриялық функцияларын қарастыруға енгізді. Әрі қарай, олардың әртүрлі қасиеттері және шекке көшу арқылы алынған n айнымалылы туындалған гипергеометриялық функциялары зерттелді.

Әртүрлі салалардағы маңызды қолданысына байланысты гипергеометриялық функциялардың интегралды берілуі енгізілді және зерттелді. Гипергеометриялық функциялардың кейбір қасиеттері туындалған теңдеулерді зерттеуде кеңінен қолданылады.

Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориялық физиканың әртүрлі салаларының, электродинамика, радиоэлектроника, математикалық физика, статистика, проективті дифференциалдық геометрияның қолданбалы есептері арқылы сипатталатыны мәлім. Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Фробениус-Латышева әдісінің дамуы айтарлықтай қызығушылық тудыратынын атап өтуге болады.

Айнымалы көлденең қимасы бар денелердегі жылу алмасуды модельдеуге арналған электр контактілеріндегі жылу және массаны тасымалдау теориясында, шекаралық шарттағы функциялар аналитикалық функциялар болса, қарастырылып отырған есептің шешімін арнайы функциялар, Лагерра көпмүшеліктері және туындалғанған гипергеометриялық функция бойынша қатарлар түрінде беруге болады.

Зерттеудің өзектілігі, бір жағынан, көптеген айнымалылардың арнайы функциялар теориясында, сондай-ақ математикалық физиканың қолданбалы есептерінде және көпөлшемді туындалған теңдеулерде кеңінен қолданылатын екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің туындалған гипергеометриялық жүйелерін терең зерттеу қажеттілігіне байланысты. Екінші жағынан, Бессель, Лагерра, Уиттекер типті әртүрлі туыстас жүйелерді құру және олардың шешімдерінің ерекше қисықтар маңайында зерттеу қажеттілігі туындайды.

Бессель типті және онымен туыстас жүйелер, сондай-ақ негізгі туындалған жүйелердің түрлері аз зерттелген. Шешімдері екі айнымалының ортогональды көпмүшелері болып табылатын және 20 туындалған жүйенің қайсысымен байланысты болатын жүйелердің болуы да анықталмаған және зерттеудің жалпы әдісі жоқ. Мұндай жүйелерді, екі теңдеуден тұратын жүйені зерттеу үшін Ж.Н. Тасмамбетов жалпылаған Фробениус-Латышева әдісі қолданылады. Бұл әдісті екінші ретті дербес туындылы n дифференциалдық теңдеулерден тұратын жүйеге жалпылау және ерекше қисықтардың маңайында қалыпты, қалыпты-регулярлы, ақырлы шешімдерді құру теориясын жасау қажет.

Диссертациялы зерттеу ерекше қисықтар маңайында туындалған гипергеометриялық жүйелердің шешімдерін құруға және Бессель, Уиттекер, Лагерра типті бірқатар жаңа жүйелерді, сондай-ақ олардың шешімдерінің өзара байланысын зерттеуге арналған.

Туындалған гипергеометриялық жүйелерді зерттеу кезінде екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі

$$\left.\begin{aligned} P^{(0)}(x,y)\cdot Z_{xx}+P^{(1)}(x,y)\cdot Z_{y}+P^{(2)}(x,y)\cdot Z=0 \\ Q^{(0)}(x,y)\cdot Z_{yy}+Q^{(1)}(x,y)\cdot Z_{x}+Q^{(2)}(x,y)\cdot Z=0 \end{aligned}\right\} \qquad (0.1)$$

маңызды рөл атқарады, мұндағы $P^{(i)}(x,y)$ және $Q^{(i)}(x,y)$ $i=\overline{0,2}$ – аналитикалық функциялар немесе екі айнымалылы көпмүшеліктер.

(0.1) жүйесі мына түрдегі туындалған Горн жүйесімен

$$x_j\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}+(\gamma_j-x_j)\frac{\partial F}{\partial x_j}-\sum_{k\neq j}x_k\frac{\partial F}{\partial x_k}-\lambda F=0,\ j=\overline{1,n} \qquad (0.2)$$

және

$$x_j\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2}-x_j\frac{\partial U}{\partial x_j}-\sum_{r\neq j}x_r\frac{\partial U}{\partial x_r}+\left[\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{r\neq j}x_r+rx_j+\frac{1}{4}-\mu_j^2\right]U=0,\ j=\overline{1,n} \qquad (0.3)$$

жүйесімен байланысты.

(0.3) жүйесі (0.2) жүйесінен мына түрдегі түрлендіру арқылы алынады:

$$F(x_1,...,x_n) = \exp Q(x_1,...,x_n)U(x_1,...,x_n), \tag{0.4}$$

$$Q(x_1,...,x_n) = \frac{\alpha_{p0...0}}{p} x_1^p + ... + \frac{\alpha_{0...0p}}{p} x_n^p + ... + \alpha_{10...0} x_1 + ... + \alpha_{0...01} x_n \tag{0.5}$$

мұндағы $F = F(x_1, x_2,..., x_n)$ – (0.2) жүйесінің ортақ белгісіз функциясы.

(0.5) көпмүшеліктің және $U(x_1, x_2,..., x_n)$ дәрежелік қатарының $\alpha_{p,0,...,0}, \alpha_{0,0,...,p},..., \alpha_{1,0,...,0}, \alpha_{0,0,...,1}$ белгісіз коэффициенттері Фробениус-Латышева әдісімен анықталады. Зерттеу барысындағы Бессель, Лагерра, Уиттекер туыстас жүйелері (0.1)-(0.3) жүйелерінен шекке көшу арқылы және (0.4) түрлендіруінің көмегімен алынады.

Зерттеудің мақсаты. Жұмыстың мақсаты – екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің туындалған гипергеометриялық жүйелерін терең зерттеу, Горн және Уиттекер жүйелерімен туыстас Бессель, Лагерра сияқты бірқатар жаңа жүйелерді құру, олардың шешімдерін регулярлы және иррегулярлы ерекше қисықтар маңайында құрудың тиімді алгоритмдерін жасау. Лауричелла жүйелерінен шекке көшу арқылы алынған туындалған гипергеометриялық жүйелердің қалыпты-регулярлы шешімдерінің болу мүмкіндігін зерттеу.

Зерттеудің міндеттері:

а) екінші ретті екі теңдеуден тұратын Горн тізіміндегі барлық 20 белгілі туындалған жүйелердің сипаттамалық ерекшеліктерін талдау негізінде жалпы бастапқы туыстас жүйені құру;

б) Горн, сондай-ақ Уиттекер жүйелерімен байланысты Бессель типті жүйелерді құру және олардың жалпы қасиеттерін екінші ретті n теңдеулерден тұратын туындалған гипергеометриялық жүйелерге жалпылау;

в) туыстас жүйелердің қалыпты, қалыпты-регулярлы және ақырлы шешімдерін құрудың тиімді алгоритмдерін құру;

г) Горн жүйелерімен туыстас Лагерра типті жүйелерді құру және регулярлы және қалыпты-регулярлы шешімдер арасындағы байланысты зерттеу;

д) Лауричелла жүйесінен алынған туындалған гипергеометриялық жүйелердің қалыпты-регулярлы шешімдерінің қажетті шарттарының бар болуын зерттеу;

е) Горн, Гумберт, Бессель, Лагерра және Художников функцияларымен байланыс орнату, туындалған гипергеометриялық жүйелердің шешімін ретінде көп айнымалылы қалыпты-регулярлы шешімдері арқылы табу және соның негізінде жаңа функцияларды алу.

Зерттеу әдістері: Диссертациялық жұмыста арнайы функциялардың аналитикалық теориясының, екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің белгілі әдістері және нәтижелері кеңінен қолданылады.

Диссертацияда қойылған есептерді зерттеу мен шешудің негізгі әдісі – Фробениус-Латышева әдісі және Ж.Н. Тасмамбетовтың еңбектеріндегі әдісті жалпылау бойынша жұмыс әдістері қарастырылады.

Зерттеу нысаны: екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің деградацияланған гипергеометриялық туыстас жүйелерін тағайындау есептері.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің туындалған гипергеометриялық жүйелерін зерттеу үшін Фробениус-Латышеваның жалпыланған әдісін енгізу.

Туыстас жүйелерді құруға байланысты нақты міндеттерді шешу үшін ұсынылған жалпыланған әдісті негіздеу және дамыту, сондай-ақ пайдалану мақсатында ғылыми жаңалықты айқындайтын нәтижелер алынды:

а) Уиттекер типті жүйенің жаңа қасиеттері орнатылды, оның басқа туыстас жүйелермен байланысы табылды;

б) Горн типті жүйе үшін Куммер теоремаларының орындалуы және олардың басқа туыстас жүйелердің шешімдерін құруға қолданылуы және Гумберт функцияларымен байланысы негізделді;

в) Уиттекер және Горн типті туыстас жүйелердің қалыпты-регулярлы шешімдерін құру алгоритмі ұсынылды;

г) Горн және Уиттекер жүйелерімен туыстас Бессель типті жүйелердің регулярлы және қалыпты-регулярлы шешімдері құрылды;

д) Фробениус-Латышеваның жалпыланған әдісі қолданылып, Лагерра типті жүйелерді орнатып, көп өлшемді ақырлы шешімдерінің жаңа қасиеттері алынды;

е) Лауричелла (F_D) жүйесінен алынған туындалған гипергеометриялық жүйелердің қалыпты-регулярлы және ақырлы шешімдерінің бар болуы үшін қажетті шарттары тағайындалды;

ж) көп айнымалылы туындалған гипергеометриялық туыстас жүйелер үшін қалыпты-регулярлы шешімдері түрінде жаңа функциялар алынды және олардың Горн, Гумберт, Бессель, Лагерра, Художников $\Phi_{D,n}^{k,l}(0 \le k, l \le n, n-1 \le k \le n)$ функцияларымен байланысы орнатылды.

Қорғауға ұсынылатын негізгі нәтижелер:

– Куммер теоремасын Горн типті жүйелерге жалпылау және оның басқа туыстас жүйелердің шешімін құруға қолданылуы;

– туыстас жүйелердің әртүрлі ерекше қисықтар маңайында шешімін құруда Фробениус-Латышеваның жалпыланған әдісін қолдану ерекшеліктері;

– регулярлы және иррегулярлы ерекшеліктерді ескере отырып, Бессель типті жүйелердің қалыпты-регулярлы шешімдерін құру алгоритмдері;

–туыстас жүйелердің регулярлы және қалыпты-регулярлы шешімдерінің бар болуының қажетті шарттары;

– Лагерра туыстас жүйелерінің ақырлы шешімдерін құру және жаңа шешімдер құру алгоритмі;

– Уиттекер және Горн типті туыстас жүйелерден түрлендіру арқылы алынған Бессель типті жүйелердің шешімдерін құру; жаңа туыстас жүйелерді құру ерекшеліктері;

– Художников $\Phi_{D,n}^{k,l}\left(0 \le k, l \le n, n-1 \le k \le n\right)$ функциялары мен шекке көшу арқылы алынған Лауричелла $\left(F_D\right)$ типті көп айнымалылы туындалған жүйенің қалыпты-регулярлы шешімдері арасында байланыс орнату және Фробениус-Латышеваның жалпыланған әдісін қолдану ерекшеліктері.

Докторанттың қосқан жеке үлесі. Диссертацияда келтірілген барлық нәтижелер автордың жеке өзінің қатысуымен алынды. Қосалқы авторлар мен ғылыми кеңесшілер мәселенің қойылымына және алынған нәтижелерді талқылауға ғана үлестерін қосты.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі семинарлар мен ғылыми конференцияларда баяндалды және талқыланды:

– VIII Халықаралық ғылыми конференция "Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері". Ақтөбе, 1 қараша, 2018;

– ҚР ҰҒА академигі С. Н. Хариннің 80 жылдық мерейтойына арналған "Problems of modelling processes in electrical contacts" атты Қазақстан Республикасы Ғылым қызметкерлері күніне және Workshop-қа арналған дәстүрлі сәуір математикалық конференциясы. Алматы, 3-5 сәуір, 2019;

– ф.-м.ғ.д., профессор М.И. Рамазановтың 70 жылдығына арналған "Математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы мәселелері" атты Халықаралық ғылыми конференция. Қарағанды, 12-13 маусым, 2019;

– "Eurasian Mathematical Journal" журналының шығарылғанына 10 жыл толуына арналған "Анализдің, дифференциалдық теңдеулер мен алгебраның өзекті мәселелері" (EMJ-2019) халықаралық конференциясы. Нұр-сұлтан, 16-19 қазан, 2019;

– Әбу Насыр Әл-Фарабидің 1150 жылдығына және математика және математикалық модельдеу институтының 75 жылдығына арналған ҚР Ғылым қызметкерлері күніне арналған дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы. Алматы, 5-8 сәуір, 2020;

– ҚР ҰҒА академигі Т.Ш. Кальменовтың 75 жылдығына арналған Қазақстан Республикасының Ғылым қызметкерлері күніне арналған дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы. Алматы, 5-8 сәуір, 2021;

– IX Халықаралық ғылыми конференция "Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері". Ақтөбе, 24-28 мамыр, 2022;

– Академик Н.К. Надировтың туғанына 90 жыл толуына және академик М.О. Өтелбаевтың 80 жылдық мерейтойына арналған "Ғылым, техника және білім берудегі есептеу және ақпараттық технологиялар" (CITech-2022) халықаралық конференциясы. Алматы, 12-15 қазан, 2022;

– ҚР Ғылым қызметкерлері күніне арналған дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы. Алматы, 4-8 сәуір, 2023;

– «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, математика кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Ж.А. Сартабанов).

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша негізгі ғылыми тұжырымдар 16 ғылыми жұмыста жарияланды, оның 2-і Scopus мәліметтер қорында индекстелген ғылыми журналда, ғылыми қызметтің негізгі ғылыми нәтижелерін жариялау үшін 3 жарияланым ҚР ҒЖБМ ҒЖБССҚК ұсынған ғылыми басылымдарда, 11 жарияланым халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында.