Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова

УДК 517.95 На правах рукописи

ЖҰМАҒАЗИЕВ ӘМІРЕ ХАЛИҰЛЫ

Многопериодические решения систем уравнений с различными операторами дифференцирования

6D060100 - Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественные научные консультанты:
д.ф.-м.н., профессор Сартабанов Ж.
к.ф.-м.н., доцент Абдикаликова Г.А.

Зарубежный научный консультант:
д.ф.-м.н., профессор Султанаев Я.Т.
(Россия, Республика Башкортостан)

Республика Казахстан
Актобе, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

R	– множество действительных чисел;
R^m	– m-мерное вещественное евклидово пространство, $R^m = R \times \ldots \times R$;
(τ, t)	– временные переменные, $\tau = t_0 \in R,\ t = (t_1,\ \ldots,\ t_m) \in R^m$;
$\langle a, b \rangle$	– скалярное произведение векторов a и b;
$C_t^{(e)}(R^m)$	– класс гладких в R^m функций порядка e;
e	– единичный m-вектор $e = (1, \ldots, 1)$;
Z	– множество целых чисел;
Z^m	– множество m-мерных целочисленных векторов, $Z^m = Z \times \ldots \times Z$;
q	– m-мерные целочисленные векторы $q = (q_1, \ldots, q_m) \in Z^m$;
(θ, ω)	– вектор-период $(\theta, \omega) = (\theta, \omega_1, \ldots, \omega_m),\ \theta > 0,\ \omega > 0$;
E	– единичная матрица;
$\left[\frac{\tau}{\theta}\right]$	– целая часть числа $\frac{\tau}{\theta}$;
$s^*(\tau)$	– неубывающая ступенчатая функция с одинаковыми шагами и скачками в точках $\tau_j = j\theta$ при целых $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $s^*(\tau) = \left[\frac{\tau}{\theta}\right]\theta$;

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. Диссертационное исследование посвящено изучению многопериодических решений систем уравнений в частных производных первого порядка, главные части которых определяются линейными соотношениями

$$D_j x_j = \frac{\partial x_j}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^k \frac{\partial x_j}{\partial t_k}, \ j = \overline{1,n}, \tag{0.1}$$

где $x_j = x_j(\tau, t)$ – неизвестные функции переменных $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$ и $t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$; $a_{ji}^k = a_{ji}^k(\tau, t)$ – заданные функции.

Положив $x = (x_1, ..., x_n)$, оператор (0.1) можно представить в виде

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k(\tau, t) \frac{\partial x}{\partial t_k}, \tag{0.2}$$

где $D = (D_1, ..., D_n)$ – векторный оператор; $A_k(\tau, t) = [a_{ji}^k(\tau, t)]$ – квадратная матрица.

Тогда общий вид исследуемой системы можно записывать в форме квазилинейного векторного уравнения

$$Dx = B(\tau, t)x + f(\tau, t, x). \tag{0.3}$$

В данной работе исследуются вопросы упрощения оператора (0.2), разрабатывается метод интегрирования и изучения многопериодических решений, когда матрицы A_k и B являются постоянными.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки новых эффективных методов исследования многопериодических решений систем уравнений с различными операторами дифференцирования.

Методы интегрирования систем квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью, изложены в фундаментальных трудах [1-4].

Если обратимся к истории вопроса интеграции уравнений (0.3) с оператором (0.2), то он в аналитическом случае исследован С.В. Ковалевской в 1874-1885 годы методом мажорации. Таким образом, получила широкую известность теорема Коши-Ковалевской о решении начальной задачи для уравнений (0.2)-(0.3).

После появления классических трудов Л. Эйлера (1768-1770) и Ж. Лагранжа (1774) по созданию вариационного исчисления, в частности, по интегрированию уравнений в частных производных, С.В.Ковалевская в 1888 году получила фундаментальные результаты по решению задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, которые были удостоены премии Парижской Академии наук. В связи с этим, следует обратить внимание на важность исследования колебательных решений уравнений со многими частотами, которые сводятся к уравнениям вида (0.2)-(0.3).

Основы общей теории систем уравнений в частных производных первого порядка в гладком случае, заложены в работах И.Г. Петровского [1, с. 7-83]. Главным способом решения таких систем является метод характеристик Коши, суть которого заключается в сведении задачи к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Сведение такого характера Лагранж назвал *искусством*.

Одним из приемов реализации метода характеристик является приведение оператора (0.2) с двумя переменными к каноническому виду, приведенному в [1, с. 80]. В этой работе уравнение (0.3) названо эллиптическим, если матрица коэффициентов $A_1 = A(\tau,t)$ не имеет действительных корней. В случае неэллиптичности уравнения (0.3), но приводимости к каноническому виду, названо гиперболическим.

Если каждая из матриц $A_k(\tau,t)$ имеет n действительных и различных собственных значений, то уравнение (0.3) называется гиперболическим в узком смысле [4, с. 24]. Метод исследования данной работы тесно связан с методами теории уравнений в частных производных, когда матрицы $A_k(\tau,t)$ оператора (0.2) в скалярном случае (0.1) обладают свойствами

$$a_{ji}^k(\tau,t) = \begin{cases} b_j^k(\tau,t) \neq 0, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases} \quad b_j^k(\tau,t) = \lambda_{kj}(\tau,t) \neq 0, \quad i,j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m}. \quad (0.4)$$

При выполнении условия (0.4) канонический вид D^* оператора D имеет форму

$$D^* = diag\left[D_\pi^*, \ldots, D_\pi^*\right], \quad D_\pi^* = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(\tau,t) \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad (0.5)$$

то есть, все уравнения системы (0.3) после приведения имеют один и тот же оператор дифференцирования D_π^*.

В частности, при $\lambda_k = 1,\ k = \overline{1,m}$ из (0.5) имеем оператор

$$D_e^* = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_k} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \quad (0.6)$$

где $\frac{\partial}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial t_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$ – векторный оператор; $e=(1,\ldots,1)$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – знак скалярного произведения.

Известно, что основа теории многопериодических решений систем уравнений в частных производных с одним оператором дифференцирования заложена в работах [5-15].

Многопериодические решения уравнений с оператором (0.6) исследованы в работе В.Х. Харасахала [5, с. 73-195].

Специальный случай (0.4) оператора D приводимый к линейному оператору с оператором (0.5) в многопериодическом случае достаточно полно исследован в работах Д.У. Умбетжанова, Ж.А. Сартабанова, А.Б. Бержанова [16-18] и др. [19-26].

В данной диссертационной работе эти исследования развиты для уравнений вида (0.3) с оператором (0.2) в узкогиперболическом случае на основе новых разработанных методов.

Говоря об актуальности темы диссертационного исследования, нельзя не упомянуть фундаментальные труды по теории колебаний.

Известно, что теория периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений разработана в трудах А.М. Ляпунова [27] и А. Пуанкаре [28].

Развитие этой теории по исследованию многочастотных периодических колебаний, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, связанных с методами усреднения и интегральных многообразий, освещено в фундаментальных трудах Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского, А.М. Самойленко [29-32] и их последователей.

Бурное развитие методов многочастотных колебаний получило в связи с созданием КАМ-теории А.Н.Колмогорова, В.И. Арнольда и Ю. Мозера [33-37].

Начиная со второй половины двадцатого столетия развиваются методы исследования многочастотных колебаний, основанные на переходе от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям в частных производных первого порядка и от исследования квазипериодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений к исследованию многопериодических решений уравнений в частных производных. Такой переход реализуем благодаря теореме Бора [38] о глубокой связи непрерывных квазипериодических функций одной переменной с непрерывными периодическими функциями от многих переменных. Этот своеобразный метод берет свое начало с работ В.Х. Харасахала и развит Д.У. Умбетжановым и их последователями Ж.А. Сартабановым, А.Б. Бержановым и др. Основные результаты по многопериодическим решениям уравнений в частных производных относятся к системам уравнений с одинаковым оператором дифференцирования, когда матричный оператор дифференцирования является параболическим. Вопрос развития методов исследования многопериодических решений систем уравнений в частных производных гиперболического типа поднят Д.У. Умбетжановым [7, с. 146], но он остался на начальном этапе развития. Им исследован вопрос существования и единственности многопериодического решения системы, когда ее соответствующая линейная система образует самостоятельные подсистемы с параболическими оператороми дифференцирования.

Исследование данной диссертационной работы по части многопериодических решений посвящено разработке методов интегрирования и изучения вопросов существования многопериодических решений узкогиперболических квазилинейных уравнений с матричными операторами дифференцирования по переменным произвольного количества и с произвольной матрицей коэффициентов.

Актуальность исследования связана с приложениями уравнений вида (0.3) с квазилинейными матричными операторами дифференцирования

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k(\tau, t, x)\frac{\partial x}{\partial t_k}. \tag{0.7}$$

Рассмотрим нелинейную систему *уравнений Эйлера движения жидкости*

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + \dfrac{1}{\rho} p_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \dfrac{1}{\rho} p_y = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \\ \left(\dfrac{p}{\rho^{\vartheta}}\right)_t + u\left(\dfrac{p}{\rho^{\vartheta}}\right)_x + v\left(\dfrac{p}{\rho^{\vartheta}}\right)_y = 0, \end{cases} \tag{0.8}$$

где $u = u(x, y, t)$ – x-компонента скорости; $v = v(x, y, t)$ – y-компонента скорости; $\rho = \rho(x, y, t)$ – плотность жидкости; $p = p(x, y, t)$ – давление в жидкости; через u_t, u_x, u_y обозначены производные по t, x, y функции u соответственно, аналогично обозначены производные остальных функций v, ρ, p; t – время, (x, y) – точка плоскости, $z = z_0$, ϑ – $const$.

Система (0.8) описывает динамику жидкостей на плоскости, причем первое уравнение означает сохранение импульса вдоль оси x, второе – сохранение импульса вдоль оси y, третье – сохранение массы, а четвертое – сохранение энергии.

Общим случаем системы (0.8) является векторно-матричное уравнение вида (0.3) с оператором (0.7). Следовательно, уравнение вида (0.3) с операторами дифференцирования (0.2), (0.5) и (0.6) относятся к простейшим случаям системы (0.8).

Систему (0.8) более подробно можно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+\rho^{-1}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+\rho^{-1}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}-\vartheta\rho^{-1}p\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial p}{\partial x}-\vartheta u\rho^{-1}p\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+v\dfrac{\partial p}{\partial y}-\vartheta v\rho^{-1}p\dfrac{\partial \rho}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Далее, систему запишем в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta\rho^{-1}p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \rho_t \\ p_t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & u & 0 & 0 \\ \rho & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta u\rho^{-1}p & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \\ \rho_x \\ p_x \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & \rho & v & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta v\rho^{-1}p & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \\ \rho_y \\ p_y \end{pmatrix}=0.$$

Положив $w=(u,v,\rho,p)$,

$$R_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta\rho^{-1}p & 1 \end{pmatrix},\ P_1=\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & u & 0 & 0 \\ \rho & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta u\rho^{-1}p & u \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1=\begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & \rho & v & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta v\rho^{-1}p & v \end{pmatrix}$$

и вычислив матрицы

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta\rho^{-1}p & 1 \end{pmatrix}, \ P = R_1^{-1}P_1 = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & u & 0 & 0 \\ \rho & 0 & u & 0 \\ \vartheta p & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$\Phi = R_1^{-1}\Phi_1 = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & \rho & v & 0 \\ 0 & \vartheta p & 0 & v \end{pmatrix} \qquad (0.9)$$

нелинейную систему уравнений Эйлера (0.8) в векторно-матричной форме представим в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + P(w)\frac{\partial w}{\partial x} + \Phi(w)\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

с коэффициентами $P = P(w)$ и $\Phi = \Phi(w)$, определенными соотношением (0.9).

В качестве другого примера прикладного характера, рассмотрим *уравнение конвективной диффузии*

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu_x, \qquad (0.10)$$

связанное с распространением температурных волн на бесконечной прямой x по времени t, где $b > 0$ и a – постоянные.

Положив $u_t = v$, $u_x = w$, имеем $u_{tx} = v_x$, $w_t = v_x$, $u_{xx} = w_x$. Следовательно, уравнение (0.10) можно представить в виде системы

$$\begin{cases} v_x = w_t, \\ w_x = \dfrac{b}{a^2}w + \dfrac{1}{a^2}v. \end{cases}$$

Если определим вектор $y = (v, w)$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{b}{a^2} \end{pmatrix},$$

то имеем векторное уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial x}+A\frac{\partial y}{\partial t}=By$$

с постоянным матричным оператором $D=\frac{\partial}{\partial x}+A\frac{\partial}{\partial t}$.

Далее, рассмотрим каноническое уравнение гиперболического типа [39]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\left(t,x,\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Положим

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-a\frac{\partial u_1}{\partial x}=u_2.$$

Вычислим

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+a\frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}-a\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]+a\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}-a\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]=$$
$$=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x}+a\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x}-a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=f(t,x,u_2).$$

Тогда положив $\bar{u}=(u_1,u_2)$ и определив матрицы

$$A_1=\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

и вектор-функцию $\varphi(t,x,\bar{u})=(0,f(t,x,u_2))$ получим векторно-матричное уравнение

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+A_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=\varphi(t,x,\bar{u})$$

с постоянным матричным A_1 оператором дифференцирования

$$D=\frac{\partial}{\partial t}+A_1\frac{\partial}{\partial x}.$$

В частности, *телеграфное уравнение* [40]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu, \qquad a,b,c - const,$$

заменами $u = u_1$, $\frac{\partial u_1}{\partial t} + a\frac{\partial u_1}{\partial x} = u_2$, сводится к системе уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a\frac{\partial u_1}{\partial x} = u_2,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a\frac{\partial u_2}{\partial x} = b\left[u_2 - a\frac{\partial u_1}{\partial x}\right] + cu_1 = -ab\frac{\partial u_1}{\partial x} + cu_1 + bu_2,$$

которая с помощью матриц

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ ab & -a \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & b \end{pmatrix}$$

и вектора $\bar{u} = (u_1, u_2)$ представляется в виде векторно-матричного уравнения

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + A_2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = B_2\bar{u}$$

с матричным оператором дифференцирования

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + A_2\frac{\partial}{\partial x}.$$

Известно, что уравнения гиперболического типа называют волновыми уравнениями. Во многих случаях прикладного характера их решения связаны с периодично бегущими волнами (например формула Даламбера). Следовательно, определенный интерес представляют вопросы, связанные с многопериодичностью решений по всем переменным или по их частям.

Таким образом, актуальность диссертационного исследования обоснована как в теоретическом, так и в прикладном аспекте.

Современное состояние темы. Исследование систем с матричным оператором дифференцирования начинается с упрощения самого оператора дифференцирования по независимым переменным (τ, t), где $t = (t_1, \ldots, t_m)$. Этот вопрос был решен для $m = 1$ [1, с. 73-92], а для случая $m > 1$ вопрос упрощения матричного оператора, в общем случае, оставался открытым. В диссертационном исследовании приводится решение этой проблемы.

Проблемы многопериодических решений квазилинейных систем оставались не исследованными, когда оператор дифференцирования состоит из двух параболических компонентов, а линейная часть системы, соответственно, не является диагонально-блочной. В данном исследовании развивается подход работ [41, 42] к изучению многопериодических решений квазилинейных систем.

За исключением некоторых частных случаев, в общем виде не был исследован вопрос о развитии метода характеристик по решению начальной задачи для случая систем гиперболического типа с матричным оператором дифференцирования при $m>1$, включая случай гиперболичности в узком смысле. В диссертационной работе разработан метод исследования узкогиперболической системы с любым количеством независимых переменных и решается задача о ее многопериодических решениях.

Целью настоящей работы является разработка метода упрощения оператора дифференцирования, методики интегрирования и исследования многопериодических решений линейных и квазилинейных систем с различными операторами дифференцирования, а также краевой задачи для линейной гиперболической в узком смысле системы.

Задачи исследования:

а) разработать метод приведения матричного оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к линейному оператору с матричным оператором дифференцирования по m переменным;

б) установить существование многопериодических нулей оператора дифференцирования с постоянными коэффициентами в узкогиперболическом случае;

в) разработать методику интегрирования линейных систем с двумя различными операторами дифференцирования и установить достаточные условия существования многопериодических решений в некритическом случае;

г) на основе разработанного метода получить достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с двумя различными операторами дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы;

д) получить достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и установить достаточные условия существования единственного многопериодического решения этих уравнений;

е) получить достаточные условия разрешимости краевой задачи для системы уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

ж) на основе разработанной методики получить достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы.

Объектом исследования являются решения линейных и квазилинейных систем от многих независимых переменных с различными операторами дифференцирования и их многопериодичность.

Предметом исследования являются вопросы существования и построения многопериодических решений и решений начально-краевых задач для линейных и квазилинейных систем с различными операторами дифференцирования; проблемы упрощения матричных операторов дифференцирования; разработка метода дополнительных переменных и метода проекторов по решению задач для узкогиперболических систем.

Научная новизна:

а) разработан метод приведения матричного оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к линейному оператору с матричным оператором дифференцирования по m переменным, основанный на переходе вдоль характеристики одной из переменных;

б) установлено существование бесконечного множества многопериодических нулей оператора дифференцирования с постоянными коэффициентами в узкогиперболическом случае;

в) разработан подход к интегрированию линейных систем с двумя различными операторами дифференцирования и установлены достаточные условия существования многопериодических решений в некритическом случае;

г) на основе разработанного метода получены достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с двумя различными операторами дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы;

д) разработан метод введения дополнительных переменных для линейных уравнений с гиперболическим оператором дифференцирования в узком смысле;

е) разработан метод проекторов перехода от одной переменной к другой для системы гиперболической в узком смысле, получены достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и установлены достаточные условия существования единственного многопериодического решения этих уравнений;

ж) получены достаточные условия разрешимости краевой задачи для системы уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

з) на основе разработанного метода получены достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы.

Положения, выносимые на защиту:

– метод приведения матричного оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к линейному оператору с матричным оператором дифференцирования по m переменным, основанный на переходе вдоль характеристики одной из переменных;

– существование бесконечного множества многопериодических нулей оператора дифференцирования с постоянными коэффициентами в узкогиперболическом случае;

– методика интегрирования линейных систем с двумя различными операторами дифференцирования и достаточные условия существования многопериодических решений в некритическом случае;

– достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с двумя различными операторами дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы;

– метод введения дополнительных переменных для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

– метод проекторов перехода от одной переменной к другой для системы гиперболической в узком смысле, достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и достаточные условия существования единственного многопериодического решения этих уравнений;

– достаточные условия разрешимости краевой задачи для системы уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

– достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы.

Достоверность и обоснованность. В диссертационной работе широко применяются методы и результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории колебания и теории операторов. Основным методом исследования и решения задач, рассматриваемых в диссертации, являются методы Харасахала-Умбетжанова и методы работ Ж.А. Сартабанова по их развитию.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты диссертации носят, в основном, теоретический характер. Научная значимость работы заключается в разработке методов по упрощению матричного оператора дифференцирования и по реализации метода характеристик на узкогиперболичесие квазилинейные системы с матричными операторами дифференцирования, а также, в установлении достаточных условий их многопериодических решений и решений начально-краевых задач. Разработанные методы имеют широкую перспективу в теории уравнений в частных производных.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Квазилинейными аналогами уравнений данной работы записываются разнообразные волновые процессы, связанные с системами, отвечающими средам из невзаимодействующих частиц, относящимися к различным типам систем уравнений, в частности к узкогиперболическому.

При исследовании систем таких видов переходя от поля сплошной среды к частицам во многих случаях удается обнаруживать тесную связь их с системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод сведения такого характера является искусством решения задач для систем уравнений в частных производных. Этим принципам придерживается значительная часть исследователей задач данного направления, например [43-47]. В связи с этим, в качестве примера, можно отметить подход исследования [48], который базируется на методе годографа.

Исследования гиперболических, сильно гиперболических, полулинейных гиперболических систем, как выше отмечено, представляют определенный интерес в связи с тем, что они часто находят применение в прикладных задачах. С системами такого вида можно сталкиваться и при проведении теоретических разработок. Ради справедливости этого суждения отметим, что в работе [49-52] эти системы появляются при исследовании задач о многообразиях.

Рассматриваемая нами задача связана с волновыми процессами, которые описываются их глобально определенными решениями, обладающими колебательными свойствами [53-62], в частности, периодическими, полупериодическими и многопериодическими, отметим работы [63-81].

Личный вклад автора заключается в том, что все результаты, приведенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Участие научных консультантов заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- VIII Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актобе, 1 ноября, 2018;

- Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts» посвященный 80-летнему юбилею академика НАН РК С.Н. Харина. Алматы, 3-5 апреля, 2019;

– Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», приуроченная к 70-летию д.ф.-м.н., профессора М.И.Рамазанова. Караганда, 12-13 июня, 2019;

- Международная конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019), посвященная 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal». Нур-Султан, 16-19 октября, 2019;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки РК. Алматы, 5-8 апреля, 2020;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш.Кальменова. Алматы, 5-8 апреля, 2021;

– VI Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 5-9 декабря, 2021;

– IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актобе, 24-28 мая, 2022;

– Научный семинар кафедры математики АРУ им.К. Жубанова «Проблемы прикладной математики и информатики» (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Сартабанов Ж.А.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ, в том числе 1 публикация [82] в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе Scopus, 4 публикации [83-86] в научных изданиях, входящих в перечень, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 8 публикаций [87-94] в материалах международных конференций.

Краткое содержание работы. В подразделе 1.1 **первого раздела** работы приводится понятие оператора D, который действует на n-векторную функцию $x = x(\tau, t)$ аргументов $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$, $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$ соотношением вида

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k(\tau, t) \frac{\partial x}{\partial t_k}, \qquad (0.11)$$

с $n \times n$-матричными коэффициентами $A_k(\tau, t) = \lfloor a_{ji}(\tau, t) \rfloor$, $j, i = \overline{1, n}$. Оператор (0.11) называется матричным оператором дифференцирования.

Чтобы исследовать оператор (0.11), в подразделе 1.2 предварительно исследуется оператор с постоянными коэффициентами, в частности, оператор с двумя независимыми перменными

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + A \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad (0.12)$$

где A – постоянная матрица, t является скалярным.

Определяется нуль оператора (0.12) удовлетворяющий уравнению

$$Dx = 0 \qquad (0.13)$$

с начальным условием

$$x\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t) \in C^{(1)}(R) \qquad (0.14)$$

и доказывается следующая теорема.

Теорема 0.1. *Оператор* (0.12) *имеет единственный нуль, удовлетворяющий начальному условию* (0.14), *то есть задача* (0.13)-(0.14) *однозначно разрешима, причем она допускает бесконечное множество многопериодических по* (τ,t) *нулей с заранее заданными периодами* (γ,δ), *где* $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_m)$, $\delta_0=\gamma$, $\delta_1,\ldots,\delta_m$ *– произвольные постоянные.*

В подразделе 1.3 приводится проблема интегрирования уравнений с матричными операторами дифференцирования, затем рассматривается матричный оператор дифференцирования

$$D_{(m+1)}x=\frac{\partial x}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m+1}A_k\frac{\partial x}{\partial t_k},$$

с постоянными матрицами A_k.

Решается проблема приведения матричного оператора дифференцирования $D_{(m+1)}x$ к оператору дифференцирования

$$D_{(m)}w=\frac{\partial w}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial w}{\partial t_k}.$$

Доказывается следующая теорема редукции.

Теорема 0.2 (Теорема редукции). *Оператор дифференцирования* $D_{(m+1)}x(\tau,t,t_{m+1})$ *приводим к оператору дифференцирования* $D_{(m)}w(\tau,t)$, *где функции* x *и* w *связаны соотношением*

$$x\left(\tau,t,h_{m+1}\left(\tau,\tau^0,\bar t^{\,0}_{m+1}\right)\right)=w(\tau,t),$$

где $h_{m+1}\left(\tau,\tau^0,\bar t^{\,0}_{m+1}\right)=\left(h_{m+1,1}\left(\tau,\tau^0,t^0_{m+1,1}\right),\ldots,h_{m+1,n}\left(\tau,\tau^0,t^0_{m+1,n}\right)\right)$ – *характеристики оператора* $D_{(m+1)}x(\tau,t,t_{m+1})$.

В подразделе 1.4 рассматривается приведение к каноническому виду многопериодических матричных операторов дифференцирования и существование нулей этих операторов.

Во **втором разделе** исследуются многопериодические решения линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами и различными операторами дифференцирования.

В подразделе 2.1 приводится представление многопериодических решений линейных систем с двумя операторами дифференцирования на основе проекторов.

Рассматривается линейная система

$$Dx=Bx+f(\tau,t), \tag{0.15}$$

где $x=(x_1,x_2)$ – искомая вектор-функция, x_i – n_i-вектор, $n_1+n_2=n$, $D=(D_1,D_2)$ – оператор дифференцирования с различными компонентами

$$D_1=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle a_1,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle, \tag{0.16}$$

$$D_2=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle a_2,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle, \tag{0.17}$$

где $\left\langle a_i,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$ – скалярное произведение векторов a_i и $\frac{\partial}{\partial t}$; $a_1\neq a_2$ – постоянные m-векторы; $\frac{\partial}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$; $B=\lfloor B_{ij}\rfloor_{i,j=1,2}$ – постоянная блочная $n\times n$-матрица с блоками B_{ij} размерности $n_i\times n_j$, которую можно записать в виде

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},$$

$f(\tau,t)=(f_1(\tau,t),f_2(\tau,t))$ – заданная n-вектор-функция с векторными компонентами $f_i(\tau,t)$ размерности n_i, $i=\overline{1,2}$, (τ,t) – независимые переменные, $\tau\in(-\infty,+\infty)=R$, $t=(t_1,\dots,t_m)\in R\times\dots\times R=R^m$.

Ставится задача о разработке методики интегрирования, об установлении условий существования (θ,ω)-периодических решений системы (0.15) и об их интегральных представлениях.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 0.3. *При условии*

$$f(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R\times R^m)$$

единственное решение x *линейной неоднородной системы* (0.15), *удовлетворяющее начальному условию* $x|_{\tau=\tau^0}=x^0(t)\in C_t^{(e)}(R^m)$ *определяется соотношением*

$$x(\tau,t)=X(\tau-\tau^0)Px^0(h(\tau^0,\tau,t))+\int\limits_{\tau^0}^{\tau}X(\tau-s)Pf(s,h(s,\tau,t))ds,$$

где $X(\tau)=\begin{pmatrix} X_{11}(\tau) & X_{12}(\tau) \\ X_{21}(\tau) & X_{22}(\tau)\end{pmatrix}$ – *матрицант однородной системы соответствующей системе* (0.15), P *– проекторы, определяющие функцию на соответствующей характеристике,* $h(\tau,\tau^0,t^0)\in H=\{h_1(\tau,\tau^0,t^0),h_2(\tau,\tau^0,t^0)\}$.

Пусть вектор-функции $f_i(\tau,t)$, $i=1,2$ обладают (θ,ω)-периодичностью и $C_{\tau,t}^{(0,e)}(R\times R^m)$ – свойством гладкости порядка $(0,e)=(0,1,\ldots,1)$ по $(\tau,t)=(\tau,t_1,\ldots,t_m)\in R\times R\times\ldots\times R=R\times R^m$:

$$f_i(\tau+\theta,t+q\omega)=f_i(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R\times R^m),\ \ q\in Z^m, \tag{0.18}$$

где $(\theta,\omega)=(\theta,\omega_1,\ldots,\omega_m)$ – период с рационально несоизмеримыми координатами $\omega_0=\theta,\omega_1,\ldots,\omega_m$, $q\omega=(q_1\omega_1,\ldots,q_m\omega_m)$ – кратные периоды с целочисленными векторами $(q_1,\ldots,q_m)=q\in Z^m$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 0.4. *При условиях* (0.18) *и*

$$\operatorname{Re}\lambda(B)<0$$

линейная система (0.15) *с различными операторами дифференцирования* (0.16) *и* (0.17) *имеет единственное* (θ,ω)*-периодическое решение* $x^*(\tau,t)$ *с интегральным представлением*

$$x^*(\tau,t)=\int_{-\infty}^{\tau}X(\tau-s)Pf(s,h(s,\tau,t))ds.$$

Далее, в подразделе 2.2 рассматривается линейная система уравнений

$$Dx=Bx+f(\tau,t), \tag{0.19}$$

относительно $x=(x_1,\ldots,x_n)$ с векторно-матричным оператором дифференцирования D вида

$$Dx=\frac{\partial x}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial x}{\partial t_k},$$

где A_k и B – постоянные n-матрицы.

Система (0.19) называется гиперболической в узком смысле, если каждая из матриц A_k является симметрической с различными действительными ненулевыми собственными значениями

$$\lambda_{kj} = \lambda_j(A_k) \neq 0, \quad \lambda_{ki} \neq \lambda_{kj}, \quad i \neq j, \quad \lambda_{kj} \in R, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Линейной неособенной заменой

$$x = Ky,$$

уравнение (0.19) приводится к виду

$$D^* y = Cy + \varphi(\tau, t) \tag{0.20}$$

с оператором дифференцирования

$$D^* \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} J_k \frac{\partial}{\partial t_k}$$

и другими входными данными

$$J_k = K^{-1} A_k K, \quad C = K^{-1} BK, \quad \varphi(\tau, t) = K^{-1} f(\tau, t).$$

Вводится оператор $\Pi = diag[\Pi_1, \ldots, \Pi_n]$, который действует на вектор-функцию $y(\tau, t) = [y_i(\tau, t_1, \ldots, t_m)]$ в виде

$$\Pi y(\tau, t_1, \ldots, t_n) = [\Pi_j y_j(\tau, t_1, \ldots, t_n)] = [y_j(\tau, t_{1j}, \ldots, t_{mj})] = [y_j(\tau, \bar{t}_j)] = y(\tau, \bar{t}),$$

где $\bar{t} = (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$, $\bar{t}_j = (t_{1j}, \ldots, t_{mj})$.

Далее, вводятся операторы $P_i = diag[p_{i1}, \ldots, p_{in}]$, $i = \overline{1, n}$ с проекторами p_{ij} для перехода от переменных j-ой координаты $\bar{t}_j$ к переменным i-ой координаты $\bar{t}_i$.

Действуя оператором Π и проектором P_i на уравнение (0.20) имеем

$$D^* y(\tau, \bar{t}) = C \times y(\tau, \bar{t}) + \varphi(\tau, \bar{t}) \tag{0.21}$$

с постоянной матрицей C и свободным членом

$$\varphi(\tau + \theta, \bar{t} + \overline{\omega}) = \varphi(\tau, \bar{t}) \in C_{\tau, \bar{t}}^{(0, \bar{e})}(R \times R^{mn}), \tag{0.22}$$

где обозначение произведения через «$\times$» означает предварительное снабжение элементов матрицы C проектором P_i при ее произведении с вектор-функцией y.

Доказывается следующая лемма.

Лемма 0.1. *Уравнение* (0.21) *с начальным условием*

$$y(\tau,\bar{t})\Big|_{\tau=\tau^0} = y^0(\bar{t}) \in C_{\bar{t}}^{(\bar{e})}\left(R^{mn}\right),$$

имеет единственное решение вида

$$y\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right) = Y\left(\tau-\tau^0\right)\times y^0\left(\bar{h}\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)\right) + \int_{\tau^0}^{\tau} Y(\tau-s)\times\varphi\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)ds,$$

определенное на основе произведений с проектором 1) нуля оператора D^* *и 2) свободного члена, определенного вдоль характеристики с матрицантом* $Y(\tau-s)$.

На основе леммы 0.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 0.5. *При условиях* $\det\left[Y(\theta)-E\right]\neq 0$ и (0.22) *уравнение* (0.21) *допускает единственное* $(\theta,\bar{\omega})$*-периодическое решение вида*

$$y^*(\tau,\bar{t}) = \int_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G(s,\tau)\times\varphi\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)ds$$

и справедлива оценка

$$\left\|y^*\right\| \le \gamma\left\|\varphi\right\|,$$

где $G(s,\tau)$ *– матричная функция типа Грина;* $s^*(\tau) = \left[\dfrac{\tau}{\theta}\right]\theta$, $[\cdot]$ *– знак целой части;* $\left\|y^*\right\| = \max\limits_{j=\overline{1,n}}\sup\limits_{R\times R^n}\left|y_j^*\left(\tau,\bar{t}_j\right)\right|$, $y^* = \left(y_1^*(\tau,\bar{t}_1),\ldots,y_n^*(\tau,\bar{t}_n)\right)$.

Далее в этом подразделе применяется метод введения дополнительных переменных к исследованию краевой задачи для линейной гиперболической в узком смысле системы

$$Dx = B(\tau,t)x + f(\tau,t) \tag{0.23}$$

и граничным условием

$$\Gamma_0(t)x(0,t) - \Gamma_\theta(t)x(\theta,t) = 0, \tag{0.24}$$

где D – оператор дифференцирования

$$Dx \equiv \frac{\partial x}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k\frac{\partial x}{\partial t_k}$$

с постоянными матрицами $A_1,\ldots,A_m$, все собственные значения каждой из них $\lambda_{kj}=\lambda_j(A_k)$, $k=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ составляют спектр с простыми элементарными делителями

$$(\lambda_{kj},\ldots,\lambda_{kn})\in \text{СПЭД}; \tag{0.25}$$

$B(\tau,t)$ – $n\times n$-матрица, обладающая свойствами (θ,ω)-периодичности и гладкости порядка $(0,e)$ по (τ,t)

$$B(\tau+\theta,t+\omega)=B(\tau,t)\in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R\times R^m) \tag{0.26}$$

с m-вектором $e=(1,\ldots,1)$; вектор-функция $f(\tau,t)=(f_1(\tau,t),\ldots,f_n(\tau,t))$ удовлетворяет аналогичному условию

$$f(\tau+\theta,t+\omega)=f(\tau,t)\in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R\times R^m) \tag{0.27}$$

с периодом $\theta>0$ по τ и вектор-периодом $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m)$, причем $\omega_0=\theta,\omega_1,\ldots,\omega_m$ – рационально несоизмеримые; $\Gamma_0(t)$ и $\Gamma_\theta(t)$ – $n\times n$-матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\Gamma_0(t+\omega)=\Gamma_0(t)\in C^{(e)}_t(R^m),\qquad \Gamma_\theta(t+\omega)=\Gamma_\theta(t)\in C^{(e)}_t(R^m). \tag{0.28}$$

При $\Gamma_0(t)=\Gamma_\theta(t)=E$ условие (0.24) обращается в условие многопериодичности решения периодов (θ,ω).

Предполагается, что гладкая ω-периодическая по $t\in R^m$ матрица

$$\Gamma_0(t)-\Gamma_\theta(t)X(\theta,t)=\Gamma(t)\in C^{(e)}_t(R^m)$$

обратима, то есть, существует матрица $\Gamma^{-1}(t)$.

Основная задача заключается в выяснении условий дополнительных к условиям (0.25)-(0.28), обеспечивающих разрешимость задачи (0.23)-(0.24).

Доказывается следующая теорема.

Теорема 0.6. *При условиях* (0.25)-(0.28) *и* $\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t)=E$ *краевая задача* (0.23)-(0.24) *имеет единственное решение вида*

$$x^*(\tau,t)=\int_{\tau^0}^{\tau}G(s,\tau,t)f(s,h(s,\tau,t))ds.$$

В **третьем разделе** исследуются многопериодические решения квазилинейных систем уравнений с различными операторами дифференцирования.

В подразделе 3.1 рассматривается квазилинейная система уравнений

$$Dx = Bx + f(\tau, t, x) \tag{0.29}$$

с начальным условием

$$x(\tau, t)\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t+\omega) = x^0(t) \in C_t^{(e)}(R^m),$$

где $x = (x_1, x_2)$; $D = (D_1, D_2)$ векторно-матричный оператор дифференцирования вида (0.16) и (0.17); $f(\tau, t, x) = (f_1(\tau, t, x), f_2(\tau, t, x))$ – вектор-функция независимых переменных $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$, $t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$ и искомого вектора $x \in R_\Delta^n = \left\{ x \in R^n : |x| = \max\limits_{j=\overline{1,2}} |x_j| \le \Delta \right\}$, $\Delta - const > 0$, удовлетворяющая условию

$$f(\tau + \theta, t + \omega, x) = f(\tau, t, x) \in C_{\tau, t, x}^{(0, e, \hat{e})}(R \times R^m \times R_\Delta^n). \tag{0.30}$$

с рационально несоизмеримыми периодами $\theta, \omega_1, ..., \omega_n$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, e и $\hat{e}$ есть m-мерный и n-мерный векторы с единичными компонентами соответственно.

Из условия (0.30) вытекают следующие свойства

$$|f(\tau + \theta, t + \omega, \tilde{x}) - f(\tau, t, x)| \le l|\tilde{x} - x|, \ l > 0, \ \tilde{x}, x \in R_\Delta^n;$$
$$|f(\tau, t, 0)| \le \mu, \quad |f(\tau, t, x)| \le |f(\tau, t, 0) + l|x|| \le \mu + l|x|, \ \mu > 0, \ x \in R_\Delta^n.$$

Вводится пространство $S_{\delta,\Delta}^{\omega}(R_\delta \times R^m)$ n-вектор-функций $x(\tau, t)$, непрерывных по $(\tau, t) \in R_\delta \times R^m$, ω-периодических по $t \in R^m$ и ограниченных по норме $|x - x^0| \le \Delta$ при $\tau \in R_\delta = \{\tau \in R : |\tau - \tau^0| \le \delta\}$, $\delta = const > 0$, $\tau^0 \in R$.

Для $\delta|B| < 1$ при $|\tau - \tau^0| \le \delta$ имеем

$$|X(\tau - \tau^0) - E| \le 2\delta, \quad |X(\tau - s)| \le \exp[2\delta|B|] = \beta.$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 0.7. *При условиях* (0.30), $\operatorname{Re}\lambda(B)<0$ *и* $\beta(\mu+l\Delta)<\Delta$ *квазилинейное уравнение* (0.29) *имеет единственное многопериодическое решение* $x^*(\tau,t)$ *в пространстве* $S_{\Delta}^{\theta,\omega}(R\times R^m)$.

В подразделе 3.2 методом введения дополнительных переменных исследуются многопериодические решения квазилинейных гиперболических в узком смысле систем уравнений с постоянными коэффициентами

$$Dx = Bx + f(\tau,t,x) \tag{0.31}$$

относительно $x=(x_1,\ldots,x_n)$ с векторно-матричным оператором дифференцирования D вида

$$Dx \equiv \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{\partial x}{\partial t_k},$$

с начальным условием

$$x(\tau,t)\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t+\omega) = x^0(t) \in C_t^{(e)}(R^m), \tag{0.32}$$

где A_k и B – постоянные $n\times n$-матрицы; $f(\tau,t,x)=(f_1(\tau,t,x),\ldots,f_n(\tau,t,x))$ – вектор-функция независимых переменных $\tau\in R=(-\infty,+\infty)$, $t=(t_1,\ldots,t_m)\in R\times\ldots\times R=R^m$ и искомого вектора $x\in R_{\Delta}^n=\left\{x\in R^n : |x|=\max\limits_{j=\overline{1,n}}|x_j|\le\Delta\right\}$.

Действуя оператором Π и проектором P на гиперболическую в узком смысле систему (0.31) и начальное условие (0.32) имеем систему

$$D^* y(\tau,\bar t) = C\times y(\tau,\bar t) + (\varphi\otimes y)(\tau,\bar t)$$

с начальным условием

$$y(\tau,\bar t)\big|_{\tau=\tau^0} = y^0(\bar t+\overline{\omega}) = y^0(\bar t)\in C_{\bar t}^{(\bar e)}(R^{mn}),\quad \left|y^0\right|\le\Delta^0 - const>0,$$

где вектор-функция $\varphi(\tau,\bar t,y)=[\varphi_i(\tau,\bar t_i,y)]\in\mathbf{S}$ обладает свойством

$$\varphi(\tau+\theta,\bar t+\overline{\omega},y)=\varphi(\tau,\bar t,y)\in C_{\tau,\bar t,y}^{(0,\bar e,\hat e)}\left(R\times R^{mn}\times R_{\Delta^*}^n\right); \tag{0.33}$$

$R_{\Delta^*}^n=\left\{y\in R^n : |y|\le\Delta^*\right\}$, $\Delta^*=const>0$, $\Delta^0=const>0$, $|\cdot|$ – одна из известных трех видов нормы вектора; обозначение композиции через «$\otimes$» означает предварительное снабжение элементов вектор-функции φ проектором P при ее композиции с вектор-функцией y.

Отметим следствия условия (0.33) при $(\tau,\bar{t})\in\left(R\times R^{mn}\right)$:

$$|\varphi(\tau,\bar{t},\tilde{y})-\varphi(\tau,\bar{t},y)|\le\ell|\tilde{y}-y|,\ \ \tilde{y},y\in R^n_{\Delta^*};$$
$$|\varphi(\tau,\bar{t},0)|\le\kappa,\ \ |\varphi(\tau,\bar{t},y)|\le|\varphi(\tau,\bar{t},0)|+\ell|y|\le\kappa+\ell|y|,\ \ y\in R^n_{\Delta^*},$$

где ℓ, κ – положительные постоянные.

Вводим пространство $\mathbf{S}^{\theta,\varpi}_{\Delta^*}\left(R\times R^{mn}\right)$ n-вектор-функций $y(\tau,\bar{t})$, непрерывных по $(\tau,\bar{t})\in R\times R^{mn}$, (θ,ϖ)-периодических по $(\tau,\bar{t})$ и ограниченных по норме $|y|\le\Delta^*$.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 0.8. *При условиях* $\det[Y(\theta)-E]\ne0$, (0.33) *и* $\gamma\left(\kappa+\ell\Delta^*\right)<\Delta^*$ *квазилинейное уравнение* (0.31) *имеет единственное решение* $y^*(\tau,\bar{t})$ *в пространстве* $\mathbf{S}^{\theta,\varpi}_{\Delta^*}\left(R\times R^{mn}\right)$.

Диссертационное исследование посвящено трем взаимосвязанным вопросам. *Первое* из них – вопрос редукции оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к оператору дифференцирования по m переменным на основе приведения коэффициентных матриц к каноническим видам и постепенного перехода к характеристикам одной из переменных. Этот раздел связан с интегрированием уравнений с оператором матричного дифференцирования общего вида, когда оператор имеет многопериодические коэффициенты. Предложенный в данной работе новый метод упрощения оператора применим независимо от типов уравнений. Ранее в исследованиях такого характера рассматривался случай $m=1$, при $m>1$ вопрос о приведении оператора изучался только при выполнении свойства коммутативности коэффициентных матриц.

Вторым вопросом является интегрирование и исследование многопериодических решений уравнений узкогиперболического типа с постоянными матрицами методом блочных матриц в случае двух переменных. В данном случае оператор дифференцирования D определяется одной постоянной матрицей A и имеет вид $D=\frac{\partial}{\partial\tau}+A\frac{\partial}{\partial t}$. Матрица A делится на четыре блока A_{ij} $(i,j=1,2)$ в виде

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}.$$

Деление матрицы на блоки оправдано, когда $A_{12} = O_{12}$ и $A_{21} = O_{21}$ – нулевые блоки. При этом частично решаются размерностные трудности систем. Если A_{11} и A_{22} являются параболическими, то есть, каждая из них имеет по одному собственному значению λ_1 и λ_2, соответственно, с простыми элементарными делителями, то в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$ уравнение имеет два различных оператора дифференцирования. Далее, развивается теория уравнений с такими двумя операторами дифференцирования. Эту теорию можно развивать и в случае когда $A_{12} \neq O_{12}$ и $A_{21} \neq O_{21}$ при некоторых дополнительных условиях относительно блоков матрицы. Такой подход исследования называется методом блочных матриц.

В данном исследовании изучается вопрос реализуемости метода блочных матриц. Как правило, деление на блоки матрицы производится по свойствам блоков, а не матрицы. В работе устанавливается, что существуют два деления на блоки и соответственно развиваются две методики реализации этого метода по решению вопросов интегрирования и проблем существования и построения многопериодических решений.

Третий основной вопрос посвящен разработке общего метода интегрирования уравнений с оператором дифференцирования по многим переменным с постоянными матричными коэффициентами гиперболического типа в узком смысле и проблем их многопериодических решений. Этот вопрос изучен для случая двух переменных, то есть когда t является одномерным. Метод данного исследования пригоден для решения основного вопроса при любом $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $m \geq 1$. При этом каждое уравнение системы имеет свой оператор дифференцирования. Этот метод интегрирования в сочетании с методом первого раздела можно развивать для системы гиперболического типа с переменными матричными коэффициентами. Метод имеет широкую перспективу применения в теории уравнений с частными производными, представляемых при помощи матричных операторов дифференцирования.

Из описания изученных вопросов и полученных результатов заметно, что диссертационное исследование посвящено приоритетным задачам теории систем уравнений с частными производными первого порядка.

1 ЛИНЕЙНЫЙ МАТРИЧНЫЙ ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО МНОГИМ ПЕРЕМЕННЫМ

1.1 Понятие о матричном операторе дифференцирования и задачи, связанные с такими операторами

Линейные дифференциальные операторы по $(\tau, t) = (\tau, t_1, \ldots, t_m)$ имеют вид

$$L^{(\tau,t)} \equiv \tilde{A}_0(\tau,t)\frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m}\tilde{A}_k(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t_k} + C(\tau,t).$$

Если хотя бы одна из матриц $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$ имеет отличный от нуля детерминант, например, $\det\tilde{A}_0 \neq 0$, то умножив этот оператор на $\tilde{A}_0^{-1}(\tau,t)$ слева, можно рассмотреть приведенный оператор

$$\Lambda^{(\tau,t)} = \frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m}A_k(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t_k} + B(\tau,t).$$

Такой дифференциальный оператор называется *неособенным*.

Часть линейного дифференциального оператора $L^{(\tau,t)}$ с операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial\tau}$, $\frac{\partial}{\partial t_1}$, ..., $\frac{\partial}{\partial t_m}$ называется его главной частью или, для краткости, назовем *оператором дифференцирования* вида

$$D^{(\tau,t)} = \tilde{A}_0(\tau,t)\frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m}\tilde{A}_k(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t_k}.$$

В приведенном случае оператор дифференцирования имеет вид

$$D = \frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m}A_k(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t_k}.$$

Таким образом, линейный оператор $L^{(\tau,t)}x$ состоит из суммы главной части оператора дифференцирования $D^{(\tau,t)}x$ и алгебраической части $C(\tau,t)x$:

$$L^{(\tau,t)}x = D^{(\tau,t)}x + C(\tau,t)x.$$

В частности, приведенный оператор в неособенном случае имеет вид

$$\Lambda^{(\tau,t)} = Dx + B(\tau,t)x.$$

Если все матрицы $A_0, A_1, \ldots, A_m$ имеют определители равные нулю, то есть

$$\det A_0(\tau, t) = \ldots = \det A_m(\tau, t) = 0$$

во всех точках (τ, t) рассматриваемой области, то $L^{(\tau,t)}$ называется *оператором с особенностями*.

Особенность оператора называется гиперболической, если все матрицы A_k гиперболичны.

Например, оба вида канонических уравнений гиперболического типа представимы в виде линейных дифференциальных операторов с гиперболическими особенностями.

I. Рассмотрим первый канонический вид уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} + du,$$

где a, b, c, d – некоторые постоянные.

Положим

$$\begin{cases} D_1 u_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = u_2, \\ D_2 u_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - a \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = u_3, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x} + a \dfrac{\partial u_3}{\partial y} \equiv D_1 u_2 = b \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + c \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + du_1. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -b & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 \lambda = 0$$

и найдем собственные значения

$$\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Тогда, положив $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, определим уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -c & 0 & a \end{pmatrix}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\overline{u}$$

или

$$A_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+A_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=B\overline{u},$$

где $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -c & 0 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, но $\det A_1=\det A_2=0$.

Уравнение имеет особенность – гиперболическую (гиперболическая особая точка) так как собственные значения $\lambda_1(A_1)=0$, $\lambda_2(A_1)=\lambda_3(A_1)=1$, $\lambda_1(A_2)=0$, остальные – действительные $\lambda_2(A_2)=\lambda_3(A_2)=a$.

II. Рассмотрим второй канонический вид уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu.$$

Пологая $u=u_1$, запишем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x}=u_2, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y}=au_2+b\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+cu_1. \end{cases}$$

Тогда, положив $\overline{u}=(u_1,u_2)$, уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & a \end{pmatrix}\overline{u}$$

или

$$A_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+A_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=B\overline{u},$$

имеет гиперболическую особую точку, так как $\det A_1 = \det A_2 = 0$, причем A_1 и A_2 имеют действительные собственные значения:

$$\lambda_{11} = 0,\ \lambda_{12} = 1\ \ (A_1),$$
$$\lambda_{21} = 0,\ \lambda_{22} = 1\ \ (A_2).$$

Теперь рассмотрим вопрос о приведении оператора D к каноническому виду.

Пусть оператор D действует на n-вектор-функцию $x = x(\tau, t)$ аргументов $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$, $t = (t_1, \ldots, t_m) \in R \times \ldots \times R = R^m$ соотношением вида

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k(\tau, t)\frac{\partial x}{\partial t_k}, \tag{1.1.1}$$

с $n \times n$-матричными коэффициентами $A_k(\tau, t) = \lfloor a_{ij}(\tau, t) \rfloor$, $i, j = \overline{1, n}$.

Оператор D называется *матричным* оператором дифференцирования.

Вопрос о приведении к каноническому виду систем с оператором (1.1.1) в случае $m = 1$ рассмотрен в [1, с. 73-82], где введены понятия каноничности системы, ее эллиптичности и гиперболичности, а также гиперболичности в узком смысле.

В данной работе рассматривается случай, когда все матрицы A_k являются постоянными.

В работе [3, с. 214-221] на важность исследования систем с квазилинейным оператором D обращается особое внимание и приводится методика решения векторного уравнения

$$Dx = 0 \tag{1.1.2}$$

с постоянными матрицами A_k, когда $k = 1$.

Задачи различных направлений для систем вида

$$Dx = f(\tau, t, x), \tag{1.1.3}$$

рассмотрены многими авторами [2, с. 96], [4, с. 55], [39, с. 26].

В работе [7, с. 146-170] изучаются вопросы теории колебаний для систем с оператором D с постоянными матрицами.

Данная работа посвящена развитию этих исследований.

Очевидно, что изучение всякой задачи для векторного уравнения (1.1.3) начинается с исследования решений однородного уравнения (1.1.2) – нулей оператора D.

Основным методом решения таких уравнений является метод приведения оператора к каноническому виду. Реализация этого метода при $m>1$ является нерешенной проблемой. Об этой проблеме, суть которой сводится к вопросу отсутствия матрицы преобразования, одновременно приводящей к каноническим видам все матрицы $A_1,\ldots,A_m$, подробно изложено в [7, с. 159-166].

Отметим, что в связи с этой проблемой в диссертационной работе рассматриваются системы с каноническими операторами дифференцирования.

Если все матрицы A_k имеют действительные собственные значения, то уравнение (1.1.3) называется *гиперболическим*.

В частности, если у каждой матрицы A_k действительные и различные, то уравнение (1.1.3) называется гиперболическим в узком смысле. В данных исследованиях рассматриваем задачи для такого случая.

1.2 О нулях матричного оператора дифференцирования с двумя независимыми переменными

Сначала рассмотрим случай оператора D, когда t является скалярным.

Рассмотрим оператор

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + A\frac{\partial x}{\partial t}. \qquad (1.2.1)$$

Чтобы привести этот оператор к каноническому виду, положим

$$x = Ky \qquad (1.2.2)$$

и матрицу K выберем так, чтобы матрица

$$K^{-1}AK = J \qquad (1.2.3)$$

была жордановой канонической формой матрицы A. Тогда оператор (1.2.1) примет вид

$$D^* y = \frac{\partial y}{\partial \tau} + J\frac{\partial y}{\partial t}, \qquad (1.2.4)$$

где $y = (y_1,\ldots,y_n)$.

Оператор D^*, определенный соотношением вида (1.2.4) называется каноническим для оператора D.

В случае узкой гиперболичности оператора D матрица J имеет диагональный вид:

$$J = diag[\lambda_1,...\lambda_n], \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Следовательно, оператор (1.2.4) можно представить в координатной форме $D^* = \left(D_1^*,...,D_n^*\right)$:

$$D_j^* y_j = \frac{\partial y_j}{\partial \tau} + \lambda_j \frac{\partial y_j}{\partial t}, \; j = \overline{1,n}. \tag{1.2.5}$$

Решения уравнения

$$Dx = 0 \tag{1.2.6}$$

называются нулями оператора D.

Чтобы решить уравнение (1.2.6) в соответствии с (1.2.2)-(1.2.5) приводим к каноническому виду

$$D^* y = 0 \tag{1.2.7}$$

или в координатной форме

$$D_j^* y_j = 0, \tag{1.2.8}$$

который является системой несвязанных между собой уравнений

$$\frac{\partial y_j}{\partial \tau} + \lambda_j \frac{\partial y_j}{\partial t} = 0. \tag{1.2.9}$$

Для решения уравнений (1.2.9), согласно общей теории уравнений с частными производными составим характеристические уравнения

$$\frac{dt}{d\tau} = \lambda_j.$$

Отсюда имеем решения

$$t = t^0 + \lambda_j\left(\tau - \tau^0\right), \tag{1.2.10}$$

исходящие из точки $\left(\tau^0, t^0\right) \in R \times R$, которые обозначим через

$$h_j\left(\tau, \tau^0, t^0\right) = t^0 + \lambda_j\left(\tau - \tau^0\right). \tag{1.2.11}$$

Функции $h_j\left(\tau,\tau^0,t^0\right)$, определенные соотношением (1.2.11) называются характеристиками оператора D_j^* или уравнений (1.2.9), а следовательно, уравнений (1.2.8) и векторного уравнения (1.2.7).

Из (1.2.10) и (1.2.11) легко определить, что

$$t^0 = h_j\left(\tau^0,\tau,t\right),$$

которые называются базовыми первыми интегралами или базовыми характеристическими интегралами оператора D^*, причем вектор-функция

$$h\left(\tau^0,\tau,t\right) = \left(h_1\left(\tau^0,\tau,t\right),\ldots,h_n\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)$$

удовлетворяет тождесту

$$D^* h\left(\tau^0,\tau,t\right) = 0$$

при $\tau^0 \in R$, $(\tau,t) \in R \times R$.

Если $y^0(t) = \left(y_1^0(t),\ldots,y_n^0(t)\right)$ произвольная дифференцируемая при $t \in R$ вектор-функция, то сложная вектор-функция вида

$$y\left(\tau^0,\tau,t\right) = \left(y_1^0\left(h_1\left(\tau^0,\tau,t\right)\right),\ldots,y_n^0\left(h_n\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)\right)$$

является нулем оператора D^*:

$$D^* y\left(\tau^0,\tau,t\right) \equiv \left(D_1^* y_1^0\left(h_1\left(\tau^0,\tau,t\right)\right),\ldots,D_n^* y_n^0\left(h_n\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)\right) \equiv 0$$

при $\left(\tau^0,\tau,t\right) \in R \times R \times R$, $y_j\left(\tau^0,\tau,t\right) = y_j^0\left(h_j\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)$.

Если допустим, что $y^0(t)$ многопериодическая гладкая вектор-функция, то в силу линейности характеристических интегралов $h_j\left(\tau^0,\tau,t\right)$ функции $y_j^0\left(h_j\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)$ являются также многопериодическими, но периоды могут быть другими.

Следовательно, нули оператора D^* могут быть многопериодическими по (τ,t).

В частности, $y^0(t)$ можно подобрать так, чтобы нули оператора D^* имели нужные периоды.

Например, если $\left(\alpha_j,\beta_j\right)$ – постоянные векторы, то сдвигая точку (τ,t) на $\left(\alpha_j,\beta_j\right)$ из характеристик имеем

$$h_j\left(\tau^0,\tau+\alpha_j,t+\beta_j\right)=t+\beta_j-\lambda_j\left(\tau+\alpha_j-\tau^0\right)=$$
$$=h_j\left(\tau^0,\tau,t\right)+\beta_j-\lambda_j\alpha_j\,.$$

Так как D^* является оператором дифференцирования, то сдвигом (τ,t) на постоянный вектор $\left(\alpha_j,\beta_j\right)$ получаем опять же характеристику этого оператора.

Нули $y^0\left(h\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)$ этого оператора, полученные ω_j-периодическими начальными функциями $y^0(t)$, являются многопериодическими, если выберем постоянные $\beta_j=q_j\omega_j$ и α_j удовлетворяющими условию $\lambda_j\alpha_j=q_j^0\omega_j$, где $q_j^0,q_j\in Z$.

Следовательно,

$$\alpha_j=q_j^0\frac{\omega_j}{\lambda_j},\ \text{при}\ \lambda_j\neq 0 \qquad (1.2.12)$$

и α_j могут быть любым числом, если $\lambda_j=0$, а

$$\beta_j=q_j\omega_j\,. \qquad (1.2.13)$$

Таким образом, $y_j\left(\tau^0,\tau,t\right)=y_j^0\left(h_j\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)$ являются $\left(\alpha_j,\beta_j\right)$-периодическими по (τ,t). Далее, изменив период ω_j по t функции $y_j^0(t)$, в силу произвольности ее, легко получить из условий (1.2.12) и (1.2.13) нужные нам периоды $\left(\alpha_j,\beta_j\right)$ по (τ,t).

В частности, периоды $\left(\alpha_j,\beta_j\right)$ можно сделать постоянными относительно $j=\overline{1,n}$, то есть, можем иметь $\left(\alpha_j,\beta_j\right)=(\gamma,\delta)$ для всех $j=\overline{1,n}$.

В этом случае имеем двоякопериодические по (τ,t) нули оператора D^*:

$$D^*y\left(\tau^0,\tau,t\right)=0,$$
$$y\left(\tau^0,\tau+\gamma,t\right)=y\left(\tau^0,\tau,t+\delta\right)=y\left(\tau^0,\tau,t\right).$$

Множество таких нулей – бесконечное.

Тогда согласно преобразованию (1.2.2) имеем решение уравнения (1.2.6)

$$x\left(\tau^0,\tau,t\right)=Ky\left(\tau^0,\tau,t\right),$$

которое является (γ,δ)-периодическим нулем оператора D, причем множество таких нулей является бесконечным.

Таким образом, оператор D имеет единственный нуль $x(\tau,t)$, удовлетворяющий начальному условию

$$x\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t) \in C^{(1)}(R), \tag{1.2.14}$$

причем этот оператор может иметь бесконечное множество (γ,δ)-периодических по (τ,t) нулей $x^*(\tau+\gamma,t) = x^*(\tau,t+\delta) = x^*(\tau,t)$: $Dx^*(\tau,t) = 0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Оператор* (1.2.1) *имеет единственный нуль, удовлетворяющий начальному условию* (1.2.14), *то есть задача* {(1.2.6), (1.2.14)} *однозначно разрешима, причем она допускает бесконечное множество многопериодических по (τ,t) нулей с заранее заданными периодами (γ,δ), где $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_m)$, $\gamma=\delta_0$, $\delta_1,\ldots,\delta_m$ – произвольные постоянные.*

1.3 Приведение матричного оператора дифференцирования с $m+1$ независимыми переменными к оператору с m переменными

Рассмотрим вопрос о проблеме интегрирования уравнения (1.1.3) с оператором (1.1.1), представленного в виде

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{\partial x}{\partial t_k} = f(\tau,t,x). \tag{1.3.1}$$

Относительно решения этого вопроса сложилось мнение об обязательном приведении уравнения (1.3.1) к каноническому виду

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} J_k \frac{\partial y}{\partial t_k} = \varphi(\tau,t,y), \tag{1.3.2}$$

где J_k жордановые формы матриц A_k. Следовательно,

$$J_k = K_k^{-1} A_k K_k, \tag{1.3.3}$$

где K_k – некоторые неособенные постоянные матрицы.

Также приведение возможно, если существует общая неособенная матрица K такая, что

$$J_k = K^{-1} A_k K \text{ при } m>1. \tag{1.3.4}$$

Но из курса линейной алгебры известно [95], что это возможно, если только матрицы A_k коммутативные

$$A_k A_l = A_l A_k,\ k,l=\overline{1,m}. \tag{1.3.5}$$

Соотношения (1.3.3)-(1.3.5) относительно приведения уравнения (1.3.1) к (1.3.2) приводят к отысканию других путей приводимости этих уравнений.

Такой путь нами найден, который предложен далее.

Рассмотрим матричный оператор дифференцирования

$$D_{(m)}x = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{\partial x}{\partial t_k}, \tag{1.3.6}$$

с постоянными матрицами A_k.

Определим нули этого оператора.

Как было отмечено выше, оператор (1.3.6) одним линейным преобразованием не приводится к каноническому виду

$$D^*_{(m)}y = \frac{\partial y}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} J_k \frac{\partial y}{\partial t_k},$$

где J_k – жордановые формы матриц A_k,

$$J_k = K_k^{-1} A_k K_k.$$

Следовательно, для решения поставленной задачи возникает проблема о разработке нового подхода, упрощающего оператора (1.3.6).

В связи с этим, для начала, вернемся к рассмотрению случая $m=1$ вида

$$D_{(1)}x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \tau} + A_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_1},$$

который преобразованием

$$x_1 = K_1 y_1$$

приводится к виду

$$D^*_{(1)}y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial \tau} + J_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_1}, \tag{1.3.7}$$

где $y_1 = y_1(\tau, \bar{t}_1) \equiv y_1(\tau, t_{11}, \ldots, t_{1n})$, $\bar{t}_1 = (t_{11}, \ldots, t_{1n})$.

Далее, определим характеристики $t_{1j} = h_{1j}(\tau, \tau^0, t_{1j}^0)$, $j=\overline{1,n}$ и составим вектор-характеристику

$$h_1 = h_1\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0\right) = \left(h_{11}\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0\right), \ldots, h_{1n}\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0\right)\right) \tag{1.3.8}$$

из решений характеристического уравнения

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dt_{11}}{d\tau} \\ \ldots \\ \dfrac{dt_{1n}}{d\tau} \end{pmatrix} = J_1. \tag{1.3.9}$$

Здесь $t_{11} = \ldots = t_{1n} = t_1$, $J_1 = diag[\lambda_{11}, \ldots . \lambda_{1n}]$.

Тогда функция $D^*_{(1)} y_1(\tau, t_1)$ вдоль характеристик (1.3.8) уравнения (1.3.9) обращается в полную производную $\dfrac{d}{d\tau} y_1(\tau, h_1)$:

$$D^*_{(1)} y_1(\tau, \bar{t}_1)\Big|_{\bar{t}_1 = h_1\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0\right)} = \frac{d}{d\tau} y_1\left(\tau, h_1\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0\right)\right). \tag{1.3.10}$$

Следовательно, из характеристик $\bar{t}_1 = h_1\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0\right)$ получим $\bar{t}_1^0 = h_1\left(\tau^0, \tau, \bar{t}_1\right)$, причем имеет место свойство характеристик вида

$$h_1\left(s, \tau^0, h_1\left(\tau^0, \tau, \bar{t}_1\right)\right) = h_1(s, \tau, \bar{t}_1), \tag{1.3.11}$$

позволяющий обратный переход от $\left(\tau^0, \bar{t}_1^0\right)$ к $(\tau, \bar{t}_1)$.

Из (1.3.10) при $\bar{t}_1^0 = h_1\left(\tau^0, \tau, \bar{t}_1\right)$ получим тождество

$$D^*_{(1)} y_1(\tau, \bar{t}_1)\Big|_{\bar{t}_1 = h_1\left(\tau, \tau^0, h_1\left(\tau^0, \tau, \bar{t}_1\right)\right)} = \frac{d}{d\tau} y_1\left(\tau, h_1\left(\tau, \tau^0, h_1\left(\tau^0, \tau, \bar{t}_1\right)\right)\right),$$

которое переходит в тождество

$$D^*_{(1)} y_1(\tau, \bar{t}_1) \equiv \frac{d}{d\tau} y_1\left(\tau, h_1\left(\tau, \tau^0, h_1\left(\tau^0, \tau, \bar{t}_1^0\right)\right)\right)\Big|_{\bar{t}_1^0 = h_1\left(\tau^0, \tau, \bar{t}_1\right)}, \tag{1.3.12}$$

согласно свойству (1.3.11).

Таким образом имеем нижеследующую лемму.

Лемма 1.3.1. *Оператор дифференцирования* (1.3.7) *и оператор полной производной* $\frac{d}{d\tau}$ *связаны соотношениями перехода* (1.3.10) *и* (1.3.12).

Чтобы найти нуль $y(\tau,\bar{t}_1)$ оператора $D^*_{(1)}$ с начальной функцией $y^0(\bar{t}_1)$ при $\tau=\tau^0$ достаточно определить сложную функцию

$$y(\tau,\bar{t}_1)=y^0\left(h_1\left(\tau^0,\tau,\bar{t}_1\right)\right).$$

Очевидно, что нуль $x\left(\tau^0,\tau,\bar{t}_1\right)$ оператора $D_{(1)}$ имеет вид $x=K_1 y(\tau,\bar{t}_1)$.

Теперь чтобы решить поставленный вопрос для оператора

$$D_{(2)}x_2=\frac{\partial x_2}{\partial\tau}+A_1\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+A_2\frac{\partial x_2}{\partial t_2} \tag{1.3.13}$$

достаточно последовательно применить этот прием.

А именно, совершив преобразование

$$x_2=K_2 y_2$$

оператор (1.3.13) представим в виде

$$D^*_2 y_2=\frac{\partial y_2}{\partial\tau}+\tilde{A}_1\frac{\partial y_2}{\partial t_1}+J_2\frac{\partial y_2}{\partial t_2}, \tag{1.3.14}$$

где $\tilde{A}_1=K_2^{-1}A_1K_2$.

Далее, заменив $\bar{t}_2$ на $h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^0\right)$ функцию $y_2(\tau,t_1,t_2)=\tilde{y}_2(\tau,t_1,\bar{t}_2)$ представим в виде $\tilde{y}_2\left(\tau,t_1,h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2\right)\right)$.

Тогда оператор (1.3.14) при этом примет вид

$$D^*_{(2)}\tilde{y}_2\left(\tau,t_1,h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^0\right)\right)\equiv\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{y}_2\left(\tau,t_1,h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^0\right)\right)+\tilde{A}_1\frac{\partial}{\partial t_1}\tilde{y}_2\left(\tau,t_1,h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^0\right)\right). \tag{1.3.15}$$

Теперь заменой

$$\tilde{y}_2=K_1\tilde{\tilde{y}}_2$$

оператор (1.3.15) приводим к виду

$$D^{**}_{(2)}\tilde{\tilde{y}}_2\left(\tau,t_1,h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^{\,0}\right)\right)\equiv\frac{\partial\tilde{\tilde{y}}_2\left(\tau,t_1,h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^{\,0}\right)\right)}{\partial\tau}+J_1\frac{\partial\tilde{\tilde{y}}_2\left(\tau,t_1,h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^{\,0}\right)\right)}{\partial t_1}. \quad (1.3.16)$$

Далее, повторив вышеприведенные рассуждения, заменив t_1 на характеристику $h_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^{\,0}\right)$ оператор (1.3.16) представим в виде

$$D^{**}_{(2)}\tilde{\tilde{y}}_2\left(\tau,h_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^{\,0}\right),h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^{\,0}\right)\right)\equiv\frac{d}{d\tau}\tilde{\tilde{\tilde{y}}}_2\left(\tau,\tau^0,h_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^{\,0}\right),h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^{\,0}\right)\right), \quad (1.3.17)$$

где $\tilde{\tilde{\tilde{y}}}_2(\tau)=\tilde{\tilde{y}}_2\left(\tau,h_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^{\,0}\right),h_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_2^{\,0}\right)\right)$.

Тогда, чтобы определить нули оператора (1.3.17) с начальным условием $\tilde{\tilde{y}}_2=\tilde{\tilde{y}}_2^{\,0}\left(\bar{t}_1\right)$ при $\tau=\tau^0$ достаточно определить сложную функцию

$$\tilde{\tilde{y}}_2=\tilde{\tilde{y}}_2^{\,0}\left(h_1\left(\tau^0,\tau,\bar{t}_1\right)\right).$$

Для того, чтобы решить уравнение

$$D_{(2)}x_2=0$$

с начальной функцией $x_2\big|_{\tau=\tau^0}=x_2^0\left(t_1,t_2\right)$ реализуем обратный переход.

В заключении отметим, что приведение соотношениями (1.3.14-1.3.17) оператора $D_{(2)}$ к оператору полной производной $\dfrac{d}{d\tau}$ проведено начиная с замены $t_2=h_2$, а затем перехода к замене $t_1=h_1$. В связи с этим заметим, что такие переходы можно совершить в обратном порядке, то есть, можно начать замену с преобразования $t_1=h_1$, а затем произвести замену $t_2=h_2$.

Теперь переходим к рассмотрению общего случая для определения нулей оператора дифференцирования.

Далее, в общем случае реализуем переход от оператора дифференцирования по переменным $\left(\tau,t_1,...,t_m,t_{m+1}\right)$

$$D_{(m+1)}x=\frac{\partial x}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m+1}A_k\frac{\partial x}{\partial t_k}$$

к оператору дифференцирования по переменным $\left(\tau,t_1,...,t_m\right)$

$$D_{(m)}w=\frac{\partial w}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial w}{\partial t_k}, \quad (1.3.18)$$

где $w(\tau,t_1,...,t_m)=x(\tau,t_1,...,t_m,h_{m+1})$.

Для этого матрицу A_{m+1} приводим к жордановой форме $J_{m+1}=K_{m+1}^{-1}A_{m+1}K_{m+1}=diag[\lambda_{m+1,1},...\lambda_{m+1,n}]$, а оператор $D_{(m+1)}$, в соответствии с этим, приводим к канонической форме относительно матрицы A_{k+1}

$$D_{(m+1)}^{*}y=\frac{\partial y}{\partial \tau}+\sum_{k=1}^{m}K_{m+1}^{-1}A_k K_{m+1}\frac{\partial y}{\partial t_k}+J_{k+1}\frac{\partial y}{\partial t_{k+1}}. \qquad (1.3.19)$$

Тогда положив

$$h_{m+1}(\tau,\tau^0,\bar{t}_{m+1}^0)=(h_{m+1,1}(\tau,\tau^0,t_{m+1,1}^0),...,h_{m+1,n}(\tau,\tau^0,t_{m+1,n}^0)),$$

где $\bar{t}_{m+1}^0=(t_{m+1,1}^0,...,t_{m+1,n}^0)$, $t_{m+1,1}^0=...=t_{m+1,n}^0=t_{m+1}^0$, согласно лемме 1.3.1, положив

$$y(\tau,t_1,...,t_m,h_{m+1}(\tau,\tau^0,\bar{t}_{m+1}^0))=\tilde{w}(\tau,\tau^0,\bar{t}_{m+1}^0,t_1,...,t_m),$$

из (1.3.19) имеем

$$D_{(m)}\tilde{w}=\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau}+\sum_{k=1}^{m}K_{m+1}^{-1}A_k K_{m+1}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t_k}, \qquad (1.3.20)$$

здесь $\frac{\partial}{\partial \tau}$ – оператор полной частной производной по τ от функции $\tilde{w}=y(\tau,t_1,...,t_m,h_{m+1}(\tau,\tau^0,\bar{t}_{m+1}^0))$, которая не зависит от t_{m+1}.

Следовательно, $\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t_{m+1}}\equiv 0$.

Далее, положив

$$\tilde{w}=K_{m+1}^{-1}w$$

из (1.3.20) имеем оператор (1.3.18), где функции x и w связаны соотношением

$$x(\tau,t,h_{m+1}(\tau,\tau^0,\bar{t}_{m+1}^0))=w(\tau,t). \qquad (1.3.21)$$

Таким образом, получим следующую теорему редукции.

Теорема 1.3.1. *Пусть функции x и w связаны соотношением* (1.3.21). *Тогда оператор дифференцирования $D_{(m+1)}x(\tau,t,t_{m+1})$ приводим к оператору дифференцирования $D_{(m)}w(\tau,t)$.*

1.4 Приведение к каноническому виду многопериодических матричных операторов дифференцирования

1.4.1 Приведение матричного оператора дифференцирования с двумя независимыми переменными к оператору полной производной

Рассмотрим многопериодический матричный оператор дифференцирования D, действующий на n-векторную функцию $x = x(\tau, t)$ следующим образом

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + A(\tau, t)\frac{\partial x}{\partial t}, \tag{1.4.1}$$

где $A(\tau, t)$ – $n \times n$-матрица, удовлетворяющая условиям периодичности вектор-периода (θ, ω) и непрерывной дифференцируемости порядка $(1,1)$ по $(\tau, t) \in R \times R$

$$A(\tau + \theta, t + \omega) = A(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{(1,1)}(R \times R), \tag{1.4.2}$$

где $R = (-\infty, +\infty)$; θ – период по τ, ω – период по t, периоды, как правило, несоизмеримые.

Предположим, что характеристический многочлен

$$H(\lambda, \tau, t) = \det[A(\tau, t) - \lambda E] = 0$$

с единичной $n \times n$-матрицей E имеет корни

$$\lambda = \lambda_j(\tau, t), \quad j = \overline{1, n},$$

которые а) либо не пересекаются

$$\lambda_j(\tau, t) \neq \lambda_i(\tau, t) \text{ при } j \neq i,$$

при любом $(\tau, t) \in R \times R$, б) либо тождественно равны

$$\lambda_j(\tau, t) = \lambda_i(\tau, t)$$

при любом $(\tau, t) \in R \times R$ и при некоторых значениях j, i из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Это означает, что кратность n_j каждого j-го корня $\lambda_j(\tau, t)$ постоянная, то есть, не зависит от (τ, t) при фиксированных значениях $j = \overline{1, n_0}$, $n_0 \leq n$.

Следовательно, имеем тождества

$$H\left(\lambda_j(\tau,t),\tau,t\right)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}H\right)\left(\lambda_j(\tau,t),\tau,t\right)\equiv\ldots\equiv\left(\frac{\partial^{n_j-1}}{\partial\lambda^{n_j-1}}H\right)\left(\lambda_j(\tau,t),\tau,t\right)\equiv 0 \qquad (1.4.3)$$

и неравенство

$$\left(\frac{\partial^{n_j}}{\partial\lambda^{n_j}}H\right)\left(\lambda_j(\tau,t),\tau,t\right)\neq 0. \qquad (1.4.4)$$

Кроме того, предположим, что ранги r_j, $j=\overline{1,n_0}$ матриц

$$M_j(\tau,t)=A(\tau,t)-\lambda_j(\tau,t)E,\ j=\overline{1,n_0} \qquad (1.4.5)$$

при фиксированном j были постоянными:

$$r_j=\operatorname{rang}M_j(\tau,t)=const(j),\ j=\overline{1,n_0}. \qquad (1.4.6)$$

Тогда, согласно [1, с. 76], при этих условиях (1.4.3)-(1.4.6) матрицу $A(\tau,t)$ приводим к каноническому виду, то есть, существует неособенная гладкая матрица $K(\tau,t)$, такая что

$$K^{-1}(\tau,t)A(\tau,t)K(\tau,t)=J(\tau,t)=diag\left[J_1,\ldots,J_l\right], \qquad (1.4.7)$$

где $J_k(\tau,t)$ – жорданова клетка, соответствующая собственному значению $\lambda_{jk}(\tau,t)$.

Далее, следует определить вид оператора, полученного из (1.4.1) после замены

$$x=K(\tau,t)y, \qquad (1.4.8)$$

в силу следующих очевидных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(K(\tau,t)y\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau,t)\cdot y+K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial\tau},$$

$$A(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(K(\tau,t)y\right)=A(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t}K(\tau,t)\cdot y+A(\tau,t)K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

имеем

$$D\left(K(\tau,t)y\right)=DK(\tau,t)\cdot y+K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial\tau}+A(\tau,t)K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Отсюда слева умножив обе части равентсва на $K^{-1}(\tau,t)$ имеем

$$K^{-1}(\tau,t)D\left(K(\tau,t)y\right)=$$
$$K^{-1}(\tau,t)\cdot DK(\tau,t)\cdot y+\left[\frac{\partial y}{\partial\tau}+K^{-1}(\tau,t)A(\tau,t)K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right]. \qquad (1.4.9)$$

Тогда в силу (1.4.7) из (1.4.9) получим

$$\frac{\partial y}{\partial\tau}+J(\tau,t)\frac{\partial y}{\partial t}=-K^{-1}(\tau,t)\cdot DK(\tau,t)\cdot y+K^{-1}(\tau,t)\cdot Dy.$$

Далее, обозначив

$$D^{*}y=\frac{\partial y}{\partial\tau}+J(\tau,t)\frac{\partial y}{\partial t}, \qquad (1.4.10)$$

получим связь между оператором D и оператором D^{*} в виде

$$D^{*}y=-K^{-1}(\tau,t)\cdot DK(\tau,t)y+K^{-1}(\tau,t)\cdot Dx. \qquad (1.4.11)$$

Если задается уравнение

$$Dx=f(\tau,t,x), \qquad (1.4.12)$$

то тогда, согласно (1.4.11), заменой (1.4.8) получим уравнение

$$D^{*}y=-K^{-1}(\tau,t)\cdot DK(\tau,t)y+K^{-1}(\tau,t)f\left(\tau,t,K(\tau,t)y\right)\equiv f^{*}(\tau,t,y) \qquad (1.4.13)$$

с каноническим оператором (1.4.10).

Уравнение (1.4.13) в [1, с. 74] называется *каноническим* для уравнения (1.4.12).

Уравнение связи (1.4.11) между исходным D и каноническим D^{*} операторами заимствовано из упомянутой работы [1, с. 82] и здесь изложено в терминах операторов при дополнительном условии многопериодичности матрицы $A(\tau,t)$ по (τ,t). Также в обыкновенном случае по части многопериодичности изложено в работе [96].

Также следует отметить, что собственные значения $\lambda_j(\tau,t)$, $j=\overline{1,n_0}$ определяются как неявные функции из характеристического многочлена.

Следовательно, они обладают свойством гладкости того же порядка, что и матрица $A(\tau,t)$, то есть $\lambda_j(\tau,t)\in C^{(1,1)}_{\tau,t}(R\times R)$.

Из единственности неявной функции, как следствие, имеем (θ,ω)-периодичность собственных значений $\lambda_j(\tau,t)=\lambda_j(\tau+\theta,t+\omega),\ j=\overline{1,n_0}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.4.1. *При условиях* (1.4.2), (1.4.3)-(1.4.6) *матрица* $A(\tau,t)$ *имеет собственные значения* $\lambda_j(\tau,t),\ j=\overline{1,n_0}$, *обладающие свойством*

$$\lambda_j(\tau,t)=\lambda_j(\tau+\theta,t+\omega),\ j=\overline{1,n_0}$$

и многопериодический гладкий оператор дифференцирования D *вида* (1.4.1) *представляется через канонический многопериодический гладкий оператор* D^* *вида* (1.4.10) *по формуле* (1.4.11).

В заключении, еще раз отметим, что вопросы существования и гладкости собственных значений $\lambda_j(\tau,t)$ и приведение D к D^* относится к результатам работы Петровского И.Г., а утверждения по части многопериодичности принадлежит данному исследованию.

Теперь предположим, что оператор D является гиперболическим в узком смысле.

Следовательно, $\lambda_j(\tau,t),\ j=\overline{1,n}$ действительные и различные.

Тогда легко определить характеристики

$$\bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0)\equiv\left(h_{11}(\tau,\tau^0,t_{11}^0),\ldots,h_{1n}(\tau,\tau^0,t_{1n}^0)\right)$$

выходящие из точки $\bar{t}_1^0=\left(t_{11}^0,\ldots,t_{1n}^0\right)\in R\times\ldots\times R=R^n$ при $\tau=\tau^0$, где $t_{1j}=h_{1j}(\tau,\tau^0,t_{1j}^0),\ j=\overline{1,n}$ определены из характеристической системы

$$\frac{dt_{1j}}{d\tau}=\lambda_j(\tau,t_{1j}),\quad j=\overline{1,n}$$

с исходной точкой $(\tau^0,\bar{t}_1^0)$. Заметим, что здесь $t_{11}=\ldots=t_{1n}=t_1$.

Вдоль этих характеристик канонический оператор (1.4.10) обращается в полную производную

$$D^*y(\tau,\bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0))=\left[\frac{\partial}{\partial\tau}+J(\tau,\bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0))\frac{\partial}{\partial t}\right]y(\tau,\bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0))=$$
$$=\frac{d}{d\tau}w(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0),\qquad(1.4.14)$$

где $w\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0\right)=y\left(\tau,\overline{h}_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0\right)\right)$.

Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.4.2. *При условиях теоремы* 1.4.1 *канонический оператор* (1.4.10) *оператора* (1.4.1) *со свойством* (1.4.2) *вдоль характеристик* $\bar{t}_1=\overline{h}_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0\right)$ *переходит в полную производную функции* $w\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0\right)=y\left(\tau,\overline{h}_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0\right)\right)$, *которая определяется соотношением* (1.4.14).

Следовательно, нули оператора D, определяемые уравнением $Dx=0$, на основе (1.4.11), связаны с нижеследующим линейным оператором

$$\frac{d}{d\tau}w\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0\right)=-K^{-1}\left(\tau,\overline{h}_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0\right)\right)DK\left(\tau,\overline{h}_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0\right)\right)w\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0\right). \quad (1.4.15)$$

Определив решение уравнения (1.4.15), заменой $\bar{t}_1^0=\overline{h}_1\left(\tau^0,\tau,\bar{t}_1\right)$ из его решения получим $y\left(\tau,\bar{t}_1\right)=w\left(\tau,\tau^0,\overline{h}_1\left(\tau^0,\tau,\bar{t}_1\right)\right)$.

Далее, заменой (1.4.8) определим нули оператора D.

Таким образом, согласно соотношениям (1.4.8) и (1.4.11), нули оператора D находим из уравнений

$$\begin{gathered} x\left(\tau,t_1\right)=K\left(\tau,t_1\right)y\left(\tau,t_1\right), \\ K\left(\tau,t_1\right)D^*y\left(\tau,t_1\right)+DK\left(\tau,t_1\right)y\left(\tau,t_1\right)=0, \end{gathered} \quad (1.4.16)$$

где $y\left(\tau,\bar{t}_1\right)=w\left(\tau,\tau^0,\overline{h}_1\left(\tau^0,\tau,\bar{t}_1\right)\right)\Big|_{t_{1j}=t_1}$ определяется соотношениями (1.4.14) и (1.4.15); $\bar{t}_1=\left(t_{11},\ldots,t_{1n}\right)$, $t_{11}=\ldots=t_{1n}=t_1$.

Теорема 1.4.3. *Нули оператора* (1.4.1) *при условиях теоремы* 1.4.2 *определяются соотношением* (1.4.16).

1.4.2 Приведение матричного оператора дифференцирования с тремя независимыми переменными к оператору дифференцирования с двумя переменными

Рассмотрим оператор дифференцирования с тремя независимыми переменными в узкогиперболическом случае

$$Dx=\frac{\partial x}{\partial\tau}+A_1\left(\tau,t_1,t_2\right)\frac{\partial x}{\partial t_1}+A_2\left(\tau,t_1,t_2\right)\frac{\partial x}{\partial t_2} \quad (1.4.17)$$

с матрицами

$$A_k\left(\tau+\theta,t_1+\omega_1,t_2+\omega_2\right)=A_k\left(\tau,t_1,t_2\right)\in C^{(1,1,1)}_{\tau,t_1,t_2}\left(R\times R\times R\right); \quad (1.4.18)$$

$$K_k^{-1}(\tau,t_1,t_2)A_k(\tau,t_1,t_2)K_k(\tau,t_1,t_2)=J_k(\tau,t_1,t_2),$$
$$J_k(\tau,t_1,t_2)=diag[\lambda_{k1}(\tau,t_1,t_2),....\lambda_{kn}(\tau,t_1,t_2)],\ k=\overline{1,2}. \qquad (1.4.19)$$

Наша задача состоит в представлении оператора (1.4.17) через оператор D^*.

Составим характеристические системы

$$\begin{cases}\dfrac{dt_{1j}}{d\tau}=\lambda_{1j}(\tau,t_{1j},t_{2j}),\\ \dfrac{dt_{2j}}{d\tau}=\lambda_{2j}(\tau,t_{1j},t_{2j}),\end{cases}\quad j=\overline{1,n} \qquad (1.4.20)$$

из которых определим характеристики

$$\bar{t}_1=\bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0)\equiv\left(h_{11}(\tau,\tau^0,t_{11}^0,t_{21}^0),...,h_{1n}(\tau,\tau^0,t_{1n}^0,t_{2n}^0)\right)$$
$$\bar{t}_2=\bar{h}_2(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0)\equiv\left(h_{21}(\tau,\tau^0,t_{11}^0,t_{21}^0),...,h_{2n}(\tau,\tau^0,t_{1n}^0,t_{2n}^0)\right) \qquad (1.4.21)$$

причем в силу (1.5.23) имеем

$$\frac{d}{d\tau}\bar{h}_k(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0)=J_k\left(\tau,\bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0),\bar{h}_2(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0)\right),$$

где $t_{k1}=...=t_{kn}=t_k$, $\bar{t}_k=(t_{k1},...,t_{kn})$, $\bar{t}_k^0=(t_{k1}^0,...,t_{kn}^0)$, $k=\overline{1,2}$.

Очевидно, что согласно теореме существования и единственности для характеристической системы (1.4.20) характеристики (1.4.21) обладают групповым свойством

$$\bar{h}_k\left(\tau,\tau^0,\bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1,\bar{t}_2),\bar{h}_2(\tau,\tau^0,\bar{t}_1,\bar{t}_2)\right)=\bar{h}_k(\tau,\tau^0,\bar{t}_1,\bar{t}_2)=\bar{t}_k.$$

Далее, на основе (1.4.19), наряду с оператором (1.4.17) рассмотрим оператор

$$\frac{\partial y(\tau,t_1,t_2)}{\partial\tau}+J_2(\tau,t_1,t_2)\frac{\partial y(\tau,t_1,t_2)}{\partial t_2}+K_2^{-1}(\tau,t_1,t_2)A_1(\tau,t_1,t_2)K_2(\tau,t_1,t_2)\frac{\partial y(\tau,t_1,t_2)}{\partial t_1}+$$
$$+K_2^{-1}(\tau,t_1,t_2)\left[A_1(\tau,t_1,t_2)\frac{\partial}{\partial t_1}K_2(\tau,t_1,t_2)+A_2(\tau,t_1,t_2)\frac{\partial}{\partial t_2}K_2(\tau,t_1,t_2)\right]y(\tau,t_1,t_2),$$

который вдоль характеристик по переменной t_2 вида

$$\bar{t}_2 = \bar{h}_2\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0, \bar{t}_2^0\right)$$

представляется через вектор-функцию

$$w\left(\tau, t_1, \tau^0, \bar{t}_1^0, \bar{t}_2^0\right) = y\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0, \bar{t}_2^0\right)\right) \qquad (1.4.22)$$

в виде

$$\frac{\partial w\left(\tau, t_1, \tau^0, \bar{t}_1^0, \bar{t}_2^0\right)}{\partial \tau} + \tilde{K}_2^{-1}\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\tilde{A}_1\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\tilde{K}_2\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\frac{\partial w\left(\tau, t_1 \tau^0, \bar{t}_1^0, \bar{t}_2^0\right)}{\partial t_1} +$$

$$+ \tilde{K}_2^{-1}\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\left[\tilde{A}_1\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\frac{\partial}{\partial t_1}\tilde{K}_2\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right) + \right.$$

$$\left. + \tilde{A}_2\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}\tilde{K}_2\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\right] w\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right), \qquad (1.4.23)$$

где $\frac{\partial w}{\partial \tau}$ является полной частной производной сложной функции (1.4.22) по τ, $\tilde{A}_1\left(\tau, t_1, \bar{t}_2\right) = A_1\left(\tau, t_1, \langle \alpha, \bar{t}_2 \rangle\right)$, $\tilde{K}_2\left(\tau, t_1, \bar{t}_2\right) = \tilde{K}_2\left(\tau, t_1, \langle \alpha, \bar{t}_2 \rangle\right)$, с вектор-параметром $\alpha = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$, причем $0 < \alpha_j < 1$, $\sum_j^n \alpha_j = 1$, $\bar{t}_2 = \left(t_{21}, \ldots, t_{2n}\right)$.

Таким образом, соотношение (1.4.23) в более компактной форме записывается в виде

$$\frac{\partial w\left(\tau, t_1\right)}{\partial \tau} + A_1^*\left(\tau, t_1\right)\frac{\partial w\left(\tau, t_1\right)}{\partial t_1} + C^*\left(\tau, t_1\right)w\left(\tau, t_1\right) \equiv D^* w\left(\tau, t_1\right) + C^*\left(\tau, t_1\right)w\left(\tau, t_1\right), \; (1.4.24)$$

где $A_1^*\left(\tau, t_1\right)$ и $C^*\left(\tau, t_1\right)$ имеют вид

$$A_1^*\left(\tau, t_1\right) = \tilde{K}_2^{-1}\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\tilde{A}_1\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\tilde{K}_2\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right),$$

$$C^*\left(\tau, t_1\right) = \tilde{K}_2^{-1}\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\left[\tilde{A}_1\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\frac{\partial}{\partial t_1}\tilde{K}_2\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right) + \tilde{A}_2\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}\tilde{K}_2\left(\tau, t_1, \bar{h}_2\right)\right]$$

с вектор-функцией $\bar{h}_2 = \bar{h}_2\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0, \bar{t}_2^0\right)$.

Итак, имеет место теорема.

Теорема 1.4.4. *При условиях теоремы 1.4.1 относительно матриц* (1.4.18) *и* (1.4.19) *узкогиперболический оператор дифференцирования* (1.4.17) *по переменным* $\left(\tau, t_1, t_2\right)$ *приводим к линейному оператору* (1.4.24) *с узкогиперболическим оператором* D^* *по переменным* $\left(\tau, t_1\right)$.

Узкогиперболичность оператора D^* следует из того, что матрица $A_1^*(\tau,t_1)$ имеет собственные значения $\tilde{\lambda}_1(\tau,t_1)=\lambda_1\left(\tau,t_1,\left\langle\alpha,\bar{h}_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right)\right\rangle\right)$, где $\lambda_1(\tau,t_1,t_2)$ – собственные значения матрицы $A_1(\tau,t_1,t_2)$.

В заключении отметим, что данную теорему можно обобщить на случай произвольного числа переменных $(\tau,t)=(\tau,t_1,...,t_m)$ (m – любое натуральное число) по описанной выше методике.

Также заметим, что приведенные операторы, вообще говоря, не являются периодическими по переменной τ.

Отметим также, что для приведенной методики условие узкогиперболичности является необязательным.

1.4.3 Приведение многопериодического оператора дифференцирования с $m+1$ независимыми переменными к оператору дифференцирования с m переменными

Рассмотрим оператор дифференцирования узкогиперболического типа с $m+1$ независимыми переменными

$$D_{(m)}x=\frac{\partial x}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m}A_k(\tau,t)\frac{\partial x}{\partial t_k} \tag{1.4.25}$$

с коэффициентными матрицами $A_k(\tau,t)$, каждая из них удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1, причем

$$A_k(\tau+\theta,t+\omega)=A_k(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(0,e)}\left(R\times R^m\right), \tag{1.4.26}$$

$$\begin{gathered}K_k^{-1}(\tau,t)A_k(\tau,t)K_k(\tau,t)=J_k(\tau,t),\\ J_k=diag[\lambda_{k1}(\tau,t),....\lambda_{kn}(\tau,t)].\end{gathered} \tag{1.4.27}$$

Поставим задачу о приведении оператора (1.4.25) к линейному оператору

$$D_{(m-1)}y=\frac{\partial y}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m-1}B_k(\tau,t)\frac{\partial y}{\partial t_k}+C^*(\tau,t)y\,, \tag{1.4.28}$$

на основе линейного преобразования и замены независимых переменных, где $B_k(\tau,t)$, $k=\overline{1,m-1}$ и $C^*(\tau,t)$ – гладкие порядка $(0,e)$ по $(\tau,t)\in R\times R^m$ матрицы.

Теорема 1.4.5. *Пусть выполнены условия* (1.4.26) *и* (1.4.27). *Тогда при условиях теоремы* 1.4.1 *относительно* $A_k(\tau,t)$, $k=\overline{1,m}$, *многопериодический матричный оператор* (1.4.25) *приводим к матричному оператору дифференцирования вида* (1.4.28).

Доказательство. Доказательство теоремы 1.4.5 проводится по схеме аналогично методу доказательства теоремы 1.4.4. Следует отметить, что оно открывает путь к лагранжевому *искусству* по интегрированию уравнений с переменными операторами матричного дифференцирования.

В заключении отметим, что метод, предложенный в данном разделе по приведению матричного оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к каноническому оператору дифференцирования с m переменным может иметь широкую перспективу в решении вопроса интегрирования уравнений с частными производными. Теорема 1.4.5 является началом одного из перспективных направлений развития исследования данной работы.

2 МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РАЗЛИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Во втором разделе разрабатывается метод проекторов для системы с различными операторами дифференцирования.

2.1 Представление многопериодических решений линейных систем с двумя операторами дифференцирования на основе проекторов

Системы с двумя операторами дифференцирования обуславливают введение понятия проектора для управления действий этих операторов в процессе исследований и в представлении их решений. Это является главным отличием от известных методов и новизной исследования блочно-матричных систем.

Одним из путей преодоления трудности, связанный с размерностью системы является разбиение ее на подсистемы. Разбиение такого характера связано, в первую очередь с оператором дифференцирования D, который легко представляется в виде двумерного векторного оператора $D=(D_1,D_2)$ с размерностями n_1 и n_2, $n_1+n_2=n$. Тогда все матрицы оператора квазилинейной системы разбиваются на четыре блока B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} размерностей $n_{11}=n_1\times n_1$, $n_{12}=n_1\times n_2$, $n_{21}=n_2\times n_1$, $n_{22}=n_2\times n_2$ соответственно.

Этот тип разбиения можно назвать главным (операторным) принципом разбиения.

В некоторых случаях систему можно разбить исходя из ее алгебраической части, в силу удобства для построения матрицантов подсистем. Например, если матрица имеет вид $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, где B_{11} и B_{22} являются постоянными или диагонально переменными, то в некритическом случае исследуемая общая задача о многопериодических решениях несколько упрощается и облегчается реализация матрично-блочного метода.

Расщепление систем такого вида можно назвать разбиением по принципу построения фундаментальных матриц.

Реализация матрично-блочного метода становится более эффективной, если эти принципы сочетаются при разбиении систем на подсистемы.

Рассмотрим линейную систему

$$Dx = Bx + f(\tau,t), \tag{2.1.1}$$

где $x=(x_1,x_2)$ – искомая вектор-функция, x_i – n_i-вектор, $n_1+n_2=n$; $D=(D_1,D_2)$ – оператор дифференцирования с различными компонентами

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a_1, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \tag{2.1.2}$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a_2, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \tag{2.1.3}$$

$\left\langle a_i, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ – скалярное произведение векторов a_i и $\frac{\partial}{\partial t}$, $a_1 \neq a_2$ – постоянные m-векторы; $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$; $B = \lfloor B_{ij} \rfloor_{i,j=1,2}$ – постоянная блочная $n \times n$-матрица с блоками B_{ij} размерности $n_i \times n_j$, которую можно записать в виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}; \tag{2.1.4}$$

$f(\tau, t) = (f_1(\tau, t), f_2(\tau, t))$ – заданная n-вектор-функция с векторными компонентами $f_i(\tau, t)$ размерности n_i, $i = \overline{1,2}$, (τ, t) – независимые переменные, $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$, $t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$.

Из характеристической системы

$$\frac{dt}{d\tau} = a_i, \; i = 1,2$$

имеем решения

$$t = t^0 + a_i(\tau - \tau^0) \equiv h_i(\tau, \tau^0, t^0), \; i = 1,2$$

с произвольным начальным данным $(\tau^0, t^0) \in R \times R$.

В дальнейшем, предположим, что характеристическая переменная $h = h(\tau, \tau^0, t^0)$ изменяется на множестве вышеопределенных характеристик $H = \{h_1(\tau, \tau^0, t^0), h_2(\tau, \tau^0, t^0)\}$.

Заметим, что $h_i(\tau^0, \tau, t) = t^0$, $i = 1,2$, являются первыми интегралами характеристической системы. Следовательно, вектор-функции $x^0(h_i(\tau^0, \tau, t))$, $i = 1,2$ являются нулями операторов D_i, $i = 1,2$ соответственно, где $x^0(t) \in C_t^{(e)}(R^m)$ – произвольная функция, $e = (1, ..., 1)$ – m-вектор.

Поставим задачи о разработке методики интегрирования, об установлении условий существования (θ, ω)-периодических решений системы (2.1.1) и их интегральных представлениях.

В связи с введением оператора дифференцирования с различными компонентами (2.1.2) и (2.1.3) система (2.1.1) представляется блоками матричной и векторной функций входных данных, которые требуют нового подхода к вопросу ее интегрирования.

2.1.1 Построение матрицанта системы методом разбиения на блоки

Рассмотрим однородную систему

$$Dx = Bx, \tag{2.1.5}$$

соответствующую системе (2.1.1), которую запишем, учитывая представления (2.1.2)-(2.1.4), в виде

$$\begin{aligned} D_1 x_1 &= B_{11} x_1 + B_{12} x_2, \\ D_2 x_2 &= B_{21} x_1 + B_{22} x_2. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Поставим задачу о построении матрицанта $X(\tau)$ системы (2.1.5), представленной в виде системы (2.1.6), в соответствии с разбиением на блоки матрицы $B = \lfloor B_{ij} \rfloor_{i,\, j=1,2}$.

А. Рассмотрим блочно-треугольный случай, когда $B_{12} = O_{12}$ – нулевой блок:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & O_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.1.7}$$

При этом систему (2.1.6) запишем в виде

$$D_1 x_1 = B_{11} x_1, \tag{2.1.8}$$

$$D_2 x_2 = B_{21} x_1 + B_{22} x_2. \tag{2.1.9}$$

По методике работ Харасахала-Умбетжанова-Сартабанова построим матрицант $X_{11}(\tau)$ системы (2.1.8) с условием $X_{11}(0) = E_1$, исходя из интегрального матричного уравнения

$$X_{11}(\tau) = E_1 + \int_0^\tau B_{11} X_{11}(s)\,ds, \tag{2.1.10}$$

где E_1 – единичная матрица.

Решение интегрального уравнения (2.1.10) ищем в виде ряда

$$X_{11}(0)=\sum_{k=0}^{\infty} X_{11}^{(k)}, \tag{2.1.11}$$

где члены определяются из рекуррентных соотношений

$$X_{11}^{(0)}(\tau)=E_1,$$

$$X_{11}^{(k)}(\tau)=\int_0^{\tau} B_{11}X_{11}^{(k-1)}(s)ds,\ k=1,2,.. \tag{2.1.12}$$

Непосредственно можно показать, что ряд (2.1.11) сходится абсолютно и равномерно $\forall t\in R$ и $\tau\in[0,T]$, где T – любое достаточно большое положительное число.

Действительно, на основе ограниченности матрицы B_{11} по норме некоторым числом $\widetilde{B}_{11}$ из соотношений (2.1.12) получим оценки

$$\left\|X_{11}^{(k)}(\tau)\right\|\le \widetilde{B}_{11}^{k}\frac{\tau^k}{k!},\ k=\overline{1,n},$$

где $|B_{11}|\le\widetilde{B}_{11}$.

Если при этом ограничиться условием $0\le\tau\le T$, то ряд (2.1.11) мажорируется сходящимся положительным рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{B}_{11}^{k}T^k}{k!}=e^{\widetilde{B}_{11}T}.$$

Сдедовательно, матричный ряд (2.1.11) сходится абсолютно и равномерно при $0\le\tau\le T$.

Далее, определим решение $X_{22}=X_{22}(\tau)$ с начальным условием $X_{22}(0)=E_2$ из матричного уравнения

$$D_2X_{22}=B_{21}X_{11}(\tau)+B_{22}X_{22},$$

где E_2 – единичная матрица, которая вместе с матрицей E_1 составляет единичную $n\times n$-матрицу $E=diag[E_1,E_2]$.

Очевидно, что такая начальная задача эквивалентна интегральному матричному уравнению

$$X_{22}(\tau)=E_2+\int_0^{\tau}X_{22}(\tau-s)B_{21}X_{11}(s)ds. \tag{2.1.13}$$

Решение $X_{22}(\tau)$ уравнения (2.1.13) строится по той же методике, по которой построена матрица $X_{11}(\tau)$.

Таким образом, матрицант $X(\tau)$ системы (2.1.9) представляется в виде

$$X(\tau) = diag[X_{11}(\tau), X_{22}(\tau)]. \tag{2.1.14}$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 2.1.1. *Если матрица* B *имеет вид* (2.1.7)*, то матрицант* $X(\tau)$ *системы* (2.1.8)-(2.1.9) *представим в виде* (2.1.14)*, где диагональные блоки определяются интегральными уравнениями* (2.1.10) *и* (2.1.13).

Б. Построение матрицанта однородной линейной системы в общем случае при произвольном разбиении оператора на два оператора.

Заменой

$$x = Ky \tag{2.1.15}$$

с неособой постоянной n-матрицей K систему (2.1.5) приведем к виду

$$Dy = Jy \tag{2.1.16}$$

с жордановой матрицей $J = diag(J_1,...,J_k)$, где J_j – блоки матрицы J порядков l_j с поддиагональными единицами, $j = \overline{1,k}$, $l_1 + \ldots + l_k = n_1 + n_2 = n$, определяется в соответствии с компонентами D_1, D_2 оператора D; неизвестная вектор-функция y имеет координаты y_1, y_2.

В связи с равенством $l_1 + \ldots + l_k = n_1 + n_2$ следует различать два случая:

I. $l_1 + \ldots + l_{k_1} = n_1$, $l_{k_1+1} + \ldots + l_{k_1+k_2} = n_2$, где $k_1 + k_2 = k$.

II. $l_1 + \ldots + l_{k_1-1} + l_{k_1'} = n_1$, $l_{k_1''} + l_{k_1+1} + \ldots + l_{k_1+k_2} = n_2$, где $l_{k_1'} + l_{k_1''} = l_{k_1}$, $l_{k_1'} > 0$, $l_{k_1''} > 0$, $k_1 + k_2 = k$.

Таким образом, имеем два вида разбиения на блоки.

В случае I система (2.1.16) имеет вид

$$D_1 y_1 = J' y_1,$$
$$D_2 y_2 = J'' y_2,$$

где $J' = diag(J_1,...,J_{k_1})$, $J'' = diag(l_{k_1+1} \ldots + l_{k_1+k_2})$.

Тогда ее матрицант определяется в диагональной форме

$$Y(\tau) = diag(Y_1(\tau), Y_2(\tau)) \tag{2.1.17}$$

с n_i-блоками $Y_i(\tau)$, которые строятся по известной методике Харасахала-Умбетжанова-Сартабанова построения матрицантов систем с одним оператором дифференцирования.

В случае II жордановый блок J_{k_1} расщепляется на сумму двух подблоков J'_{k_1}, J''_{k_1} и связывающий их подблок J'''_{k_1} порядков l'_{k_1} и l''_{k_1}, $l'_{k_1}+l''_{k_1}=l_{k_1}$ и система (2.1.16) представляется в виде

$$D_1 y_1 = J' y_1, \tag{2.1.18}$$

$$D_1 y'_{k_1} = J'_{k_1} y'_{k_1}, \ \ D_2 y''_{k_1} = J'''_{k_1} y'_{k_1} + J''_{k_1} y''_{k_1}, \tag{2.1.19}$$

$$D_2 y_2 = J'' y_2, \tag{2.1.20}$$

где $\left(y'_{k_1}, y''_{k_1}\right) = y_{k_1}$, $J' = diag\left(J_1,\ldots,J_{k_1-1}\right)$, $J'' = diag\left(J_{k_1+1},\ldots,J_{k_1+k_2}\right)$, $J_k = diag\left(J'_{k_1}, J''_{k_1}\right)$, $k_1 + k_2 = k$.

Матрицанты $Y_1(\tau)$, $Y_3(\tau)$, соответственно систем (2.1.18) и (2.1.20), строятся по методике построения матрицантов систем с одним оператором дифференцирования в случае I.

Для того чтобы определить матрицант системы (2.1.19), соответствующий блоку J_{k_1}, который представляется в подблоках J'_{k_1}, J''_{k_1} и J'''_{k_1}, запишем эту систему в виде

$$\begin{pmatrix} D_1 w \\ D_2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J'_{k_1} & O \\ J'''_{k_1} & J''_{k_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, \tag{2.1.21}$$

где $w = y'_{k_1}$, $v = y''_{k_1}$, а полагая $\lambda_{k_1} = \mu$, блоки имеют вид

$$J'_{k_1} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \mu & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \mu \end{pmatrix}, \ J''_{k_1} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mu & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}, \ J'''_{k_1} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему (2.1.21) в координатной форме:

$$\begin{array}{ll} D_1 w_1 = \mu\, w_1 & D_2 v_1 = \boldsymbol{w_{k'_1}} + \mu\, v_1 \\ D_1 w_2 = w_1 + \mu\, w_2 & D_2 v_2 = v_1 + \mu\, v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_1 w_{k'_1} = w_{k'_1-1} + \mu\, \boldsymbol{w}_{k'_1} & D_2 v_{k'_1+k''_1} = v_{k'_1+k''_1-1} + \mu\, v_{k'_1+k''_1} \end{array} \tag{2.1.22}$$

Так как система (2.1.21) а, следовательно, система (2.1.22) имеет блочно треугольный вид, то ее матрицант $Y_2(\tau)$ построим на основе доказанной леммы 2.1.1.

И так, в случае II имеем матрицант вида

$$Y(\tau) = diag[Y_1(\tau), Y_2(\tau), Y_3(\tau)]. \qquad (2.1.23)$$

Следовательно, из преобразования (2.1.15) имеем матрицант системы (2.1.5)

$$X(\tau) = KY(\tau)K^{-1}, \qquad (2.1.24)$$

где $Y(\tau)$ – определяется соотношениями (2.1.17) и (2.1.23).

Таким образом, в данном подразделе указан своеобразный подход к построению матрицанта однородной линейной блочно-матричной системы (2.1.6) а, следовательно, системы (2.1.5) в соответствии с разбиениями I и II на блоки.

Теорема 2.1.1. *Матрицант линейной однородной системы* (2.1.5) *с блочной постоянной матрицей* (2.1.4) *представим в виде* (2.1.24)*, где матрица* $Y(\tau)$ *имеет вид* (2.1.17) *или* (2.1.23).

2.1.2 Представление решения начальной задачи системы

Рассмотрим систему (2.1.5) с матрицантом $X(\tau)$ при помощи блочных матриц $X_{ij}(\tau)$ в виде

$$X(\tau) = \begin{pmatrix} X_{11}(\tau) & X_{12}(\tau) \\ X_{21}(\tau) & X_{22}(\tau) \end{pmatrix}, \qquad (2.1.25)$$

где $X_{ij}(\tau)$ – $n_i \times n_j$-матрицы, $i, j = 1,2$.

Пусть операторы P_i действуют на вектор-функцию $x^0(t)$, определенную на одной из двух характеристик $t = h_i(\tau, \tau^0, t^0)$ следующим образом

$$P_i x^0(h(\tau, \tau^0, t^0)) = x^0(h_i(\tau, \tau^0, t^0)),\ i = 1,2, \qquad (2.1.26)$$

где $h(\tau, \tau^0, t^0) \in H = \{h_1(\tau, \tau^0, t^0), h_2(\tau, \tau^0, t^0)\}$.

Операторы P_i называются *проекторами*, определяющими функцию на соответствующей характеристике.

Введем оператор P, связанный с проекторами P_1 и P_2, действующий на матрицант $X(\tau)$ справа, следующим соотношением

$$X(\tau)P = \lfloor X_{ij}(\tau)P_i \rfloor,\ i, j = 1,2\,,$$

где блоки $X_{ij}(\tau)$ и проекторы P_i определены формулами (2.1.25) и (2.1.26), соответственно.

Поставим задачу о построении решения x системы (2.1.5) с начальным условием $x\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t) \in C_t^{(e)}(R^m)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что поставленная задача имеет единственное решение вида

$$x(\tau,t) = X(\tau-\tau^0)Px^0(h(\tau^0,\tau,t)), \tag{2.1.27}$$

где $X(\tau)$ – матрицант системы (2.1.5), P – проектор, $h(\tau,\tau^0,t^0) \in H$.

Действительно, действуя оператором D на обе части равенства (2.1.27) и учитывая $DX = BX$ получим следующую цепочку равенств

$$\begin{gathered} Dx(\tau,t) = D\left(X(\tau-\tau^0)Px^0(h(\tau^0,\tau,t))\right) = \\ = D\left(X(\tau-\tau^0)P\right)x^0(h(\tau^0,\tau,t)) + X(\tau-\tau^0)D\left(x^0(h(\tau^0,\tau,t))\right) = \\ = BX(\tau-\tau^0)Px^0(h(\tau^0,\tau,t)) = Bx(\tau,t), \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} D\left(x^0(h(\tau^0,\tau,t))\right) = \frac{\partial x^0(h(\tau^0,\tau,t))}{\partial\tau} + a_i\frac{\partial x^0(h(\tau^0,\tau,t))}{\partial t} = \\ = \frac{\partial x^0(h(\tau^0,\tau,t))}{\partial h}\frac{\partial h(\tau^0,\tau,t)}{\partial\tau} + a_i\frac{\partial x^0(h(\tau^0,\tau,t))}{\partial h}\frac{\partial h(\tau^0,\tau,t)}{\partial t} = \\ = \frac{\partial x^0(h(\tau^0,\tau,t))}{\partial h}\cdot(-a_i + a_i) = 0\,. \end{gathered}$$

В результате имеем следующую теорему.

Теорема 2.1.2. *Линейная однородная система* (2.1.5) *с различными операторами дифференцирования* D_1 *и* D_2 *имеет единственное решение вида* (2.1.27), *удовлетворяющее начальному условию* $x\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t),\ x^0(t) \in C_t^{(e)}(R^m)$.

Пусть вектор-функции $f(\tau,t)$ обладают свойством гладкости порядка $(0,e) = (0,1,\ldots,1)$:

$$f(\tau,t) \in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R \times R^m). \tag{2.1.28}$$

Теорема 2.1.3. *При условии* (2.1.28) *единственное решение* x *линейной неоднородной системы* (2.1.1), *удовлетворяющее начальному условию* $x\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t) \in C_t^{(e)}(R^m)$ *определяется соотношением*

$$x(\tau,t) = X(\tau - \tau^0)Px^0\left(h(\tau^0,\tau,t)\right) + \int_{\tau^0}^{\tau} X(\tau - s)Pf\left(s,h(s,\tau,t)\right)ds. \qquad (2.1.29)$$

Доказательство. Очевидно, что второе слагаемое равенства (2.1.29) при условии (2.1.28) является решением неоднородной системы (2.1.1), а первое слагаемое, в своответствии с теоремой 2.1.2, является решением однородной системы (2.1.5), удовлетворяющим заданному начальному условию. Следовательно, соотношение (2.1.29) представляет решение системы (2.1.1). Единственность следует из теоремы 2.1.2.

2.1.3 Интегральное представление многопериодического решения системы

Пусть вектор-функции $f_i(\tau,t)$, $i = 1,2$, обладают (θ,ω)-периодичностью и $C_{\tau,t}^{(0,e)}(R \times R^m)$ – свойством гладкости порядка $(0,e) = (0,1,\ldots,1)$ по $(\tau,t) = (\tau,t_1,\ldots,t_m) \in R \times R \times \ldots \times R = R \times R^m$:

$$f_i(\tau + \theta, t + q\omega) = f_i(\tau,t) \in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R \times R^m),\ q \in Z^m, \qquad (2.1.30)$$

где $(\theta,\omega) = (\theta,\omega_1,\ldots,\omega_m)$ – период с рационально несоизмеримыми координатами $\omega_0 = \theta, \omega_1,\ldots,\omega_m$, $q\omega = (q_1\omega_1,\ldots,q_m\omega_m)$ – кратный период с целочисленным вектором $(q_1,\ldots,q_m) = q \in Z^m$.

Заметим, что если $x = x(\tau,t)$ является решением системы (2.1.1), то $\hat{x}(\tau,t) = x(\tau + \theta, t + q\omega)$ при $q \in Z^m$, в силу условия (2.1.30), также удовлетворяет системе (2.1.1), а их разность $z(\tau,t) = \hat{x}(\tau,t) - x(\tau,t)$ является решением однородной системы (2.1.5).

Очевидно, что если начальная функция $x^0(t)$ решения $x(\tau,t)$ системы (2.1.1) обладает свойством $x^0(t) = x^0(t + q\omega) \in C_t^{(e)}(R^m)$, $q \in Z^m$, то $x(\tau,t)$ является ω-периодическим по $t \in R^m$ и обратно. В дальнейшем, будем предполагать, что это условие выполняется.

Если начальные условия решений $x(\tau,t)$ и $\hat{x}(\tau,t)$ при $\tau = 0$ одинаковые [8, с. 24]:

$$x(0,t) = x(\theta,t), \qquad (2.1.31)$$

то эти решения тождественно равны, причем

$$x(\tau,t) = x(\tau+\theta, t+q\omega),\ q\in Z^m.$$

Обратно, если решение $x(\tau,t)$ является θ-периодическим по τ, то выполняется условие (2.1.31).

Таким образом, если учтем зависимость решения $x(\tau,t)$ от начальной функции $x^0(t)$, то в силу теоремы 2.1.3, имеем $x(\tau,t)=\hat{\varphi}(\tau,t,x^0(h(0,\tau,t)))$, причем $x(0,t)=x^0(t)$ и $x(\theta,t)=\hat{\varphi}(\theta,t,x^0(h(0,\theta,t)))\equiv\hat{\varphi}(\theta,t,x^0(t+\Delta(t)))$, где $\Delta(t)=h(0,\theta,t)-t$. Следовательно, условие (2.1.31) в зависимости от начальной функции $x^0(t)$ имеет вид

$$x^0(t)=\hat{\varphi}(\theta,t,x^0(t+\Delta(t))). \qquad (2.1.32)$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.4. *Пусть выполнено условие* (2.1.30). *Тогда для* (θ,ω)*-периодичности решения* $x(\tau,t)=\hat{\varphi}(\tau,t,x^0(h(0,\tau,t)))$ *системы* (2.1.1) *с начальной функцией* $x^0(t)$*, необходимо и достаточно, чтобы функционально-разностная система* (2.1.32) *была разрешима в классе* ω*-периодических гладких функций* $x^0(t)=x^0(t+q\omega)\in C_t^{(e)}(R^m)$, $q\in Z^m$.

Далее, приступим к построению многопериодического решения системы (2.1.1).

В силу структуры общего решения (2.1.29) система (2.1.32) имеет вид

$$x^0(t)=X(\theta)Px^0(t+\Delta(t))+\psi(t), \quad \Delta(t)=-a\theta, \qquad (2.1.33)$$

где свободный член определяется ω-периодической по t функцией

$$\psi(t)=\int_0^\theta X(\theta-s)Pf(s,h(s,\theta,t))ds.$$

В случае когда действительные части всех собственных значений $\lambda(B)$ матрицы B отрицательные

$$\mathrm{Re}\,\lambda(B)<0, \qquad (2.1.34)$$

после некоторого числа k итераций систему (2.1.33) можно привести к эквивалентной системе

$$x^0(t)=X(k\theta)Px^0(t+k\Delta(t))+\psi_k(t) \qquad (2.1.35)$$

с матрицей $X(k\theta)$, которая по норме ограничена постоянной β из промежутка $0<\beta<1$. Следовательно, имеем

$$\|X(k\theta)\|\le\beta<1. \qquad (2.1.36)$$

Тогда методом последовательных приближений в силу условий (2.1.34), (2.1.36) получим, что система (2.1.35), а следовательно, система (2.1.33) имеет единственное гладкое ω-периодическое решение $x^0(t)$, которое имеет вид

$$x^0(t)=\int_{-\infty}^{0}X(\theta-s)Pf(s,h(s,\theta,t))ds\,. \qquad (2.1.37)$$

Отсюда ясно, что соответствующая однородная система (2.1.5) с различными операторами дифференцирования (2.1.1) и (2.1.2) при условии (2.1.34) имеет только нулевое (θ,ω)-периодическое решение.

Учитывая зависимость решения $x(\tau,t)$ от начальной функции $x^0(t)$, подставляя (2.1.37) в формулу общего решения (2.1.29) имеем интегральное представление единственного (θ,ω)-периодического решения

$$x^*(\tau,t)=\int_{-\infty}^{\tau}X(\tau-s)Pf(s,h(s,\tau,t))ds\,. \qquad (2.1.38)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.1.5. *При условиях* (2.1.30) *и* (2.1.34) *линейная система* (2.1.1) *с различными операторами дифференцирования* (2.1.2) *и* (2.1.3) *имеет единственное* (θ,ω)*-периодическое решение* $x^*(\tau,t)$ *с интегральным представлением* (2.1.38).

2.2 Многопериодические решения линейных гиперболических в узком смысле систем с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$Dx=Bx+f(\tau,t) \qquad (2.2.1)$$

относительно $x=(x_1,\ldots,x_n)$ с векторно-матричным оператором дифференцирования D вида

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{\partial x}{\partial t_k}, \tag{2.2.2}$$

где A_k и B – постоянные $n \times n$-матрицы; $f(\tau,t) = (f_1(\tau,t),\ldots,f_n(\tau,t))$ – вектор-функция независимых переменных $\tau \in R = (-\infty;+\infty)$, $t = (t_1,\ldots,t_m) \in R \times \ldots \times R = R^m$.

Предположим, что каждая из матриц A_k является симметрической с различными действительными ненулевыми собственными значениями

$$\lambda_{kj} = \lambda_j(A_k) \neq 0, \quad \lambda_{ki} \neq \lambda_{kj}, \quad i \neq j, \quad \lambda_{kj} \in R, \quad i, j = \overline{1,n}. \tag{2.2.3}$$

При условии (2.2.3) уравнение (2.2.1) является гиперболическим в узком смысле.

Матрицант $X(\tau) = \exp[B\tau]$ уравнения (2.2.1) удовлетворяет условию

$$\det[X(\theta) - E] \neq 0,$$

где E – единичная матрица.

Вектор-функция $f(\tau,t)$ обладает свойствами (θ,ω)-периодичности по (τ,t), непрерывности и гладкости степени $(0,e)$ по $(\tau,t) \in R \times R^m$:

$$f(\tau+\theta, t+\omega) = f(\tau,t) \in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R \times R^m)$$

с рационально несоизмеримыми периодами $\omega_0 = \theta, \omega_1,\ldots,\omega_m$, $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_m)$, где $C_{\tau,t}^{(0,e)}(R \times R^m)$ – класс многопериодических функций f периодов (θ,ω) и гладкости $(0,e)$ по $(\tau,t) \in R \times R^m$, $e = (1,\ldots,1) - m$-вектор.

Основная задача заключается в установлении существования решения начальной задачи и задачи о многопериодических решениях уравнения (2.2.1) и разработке методов их построения соответственно с условиями

$$x(\tau,t)\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t+\omega) = x^0(t) \in C_t^{(e)}(R^m), \tag{2.2.4}$$

$$x(\tau+\theta, t+\omega) = x(\tau,t) \in C_{\tau,t}^{(1,e)}(R \times R^m), \quad |x| \leq \Delta_*, \quad \Delta_* - const. \tag{2.2.5}$$

Исследование поставленной задачи проводится для уравнений с оператором, приведенным к каноническому виду D^* оператора (2.2.2).

С этой целью, линейной неособенной заменой

$$x = Ky, \tag{2.2.6}$$

уравнение (2.2.1) приводится к виду

$$D^* y = Cy + \varphi(\tau, t) \tag{2.2.7}$$

с оператором дифференцирования

$$D^* \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} J_k \frac{\partial}{\partial t_k}, \tag{2.2.8}$$

где

$$J_k = K^{-1} A_k K, \quad C = K^{-1} B K, \quad \varphi(\tau, t) = K^{-1} f(\tau, t).$$

Приведение системы (2.2.1) к системе (2.2.7) также можно реализовать методом приведенным в разделе 1.

Заметим, что одновременное приведение матриц A_k к каноническим видам J_k одной матрицей преобразования K, в силу условия (2.2.3), всегда возможно.

Используя замену (2.2.6), условия (2.2.4) и (2.2.5) запишем в виде

$$y(\tau, t)\big|_{\tau=\tau^0} = K^{-1} x^0(t) = y^0(t) \in C_t^{(e)}(R^m), \tag{2.2.9}$$

$$y(\tau + \theta, t + \omega) = y(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(1,e)}(R \times R^m), \quad |y| \le \Delta^*, \tag{2.2.10}$$

где $\Delta^* = \Delta_* / |K|$, $|K| = \left|\left[k_{ij}\right]\right| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|k_{ij}\right|$.

Из характеристических уравнений

$$\frac{dt_{kj}}{d\tau} = \lambda_{kj},$$

в силу условия (2.2.3), имеем характеристики

$$t_{kj} = t_{kj}^0 + \lambda_{kj}\left(\tau - \tau^0\right) = h_{kj}\left(\tau, \tau^0, t_{kj}^0\right)$$

и оператор D^* распадается на n самостоятельных операторов D_j^*

$$D_j^* \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{kj} \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad j = \overline{1, n}.$$

2.2.1 Метод введения дополнительных переменных

Сведение интегрирования уравнений в частных производных первого порядка к обыкновенным Лагранж назвал искусством. Этот вопрос в общем виде был решен О.Коши для уравнений параболического типа, при котором систему независимых переменных можем определить изменяющимися вдоль своей характеристической полосы, определяемой элементами прикосновения интегральной поверхности.

Элементы прикосновения состоят из координат точек и угловых коэффициентов касательной плоскости к поверхности в рассматриваемой точке. В случае однозначного соответствия между неизвестной вектор-функции и элементами прикосновения точки начальная задача решается методом характеристик Коши. А в нашей задаче такого однозначного соответствия нет. Здесь каждой точке соответствует несколько систем угловых коэффициентов в зависимости от координат искомой функции, то есть каждая координата неизвестной функции имеет свою характеристическую полосу со своими элементами прикосновения.

Для такого случая не было метода сведения задачи для уравнений с частными производными к задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, была поставлена задача о разработке нового способа, реализующего метод характеристик на случай точек с несколькими системами элементов прикосновения.

В данном разделе диссертационного исследования предложен интересный метод решения этой проблемы, который можно назвать методом введения дополнительных (тождественных) переменных с проекторами перевода одних (из них) к другим.

Суть этого метода заключается в нижеследующем.

Во-первых, скалярной перменной t_k, $k=\overline{1,m}$ поставим в соответствие n переменных $t_{k1},\ldots,t_{kn}$, которые являются тождественными $t_{k1}=\ldots=t_{kn}=t_k$. Также соответствие определяется оператором $\Pi_{kj}t_k=t_{kj}$, $j=\overline{1,n}$.

Например, этот оператор Π_{kj} также можно получить в виде $t_k=\alpha_1^k t_{k1}+\ldots+\alpha_n^k t_{kn}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^k t_{kj}$, где α_j^k действительные параметры из промежутка $0<\alpha_j^k<1$, $\sum_{j}^{n}\alpha_j^k=1$.

Очевидно, что скаляру t_k поставлен вектор $\bar{t}_j=(t_{1j},\ldots,t_{mj})$. Функции $x(\tau,t)$ можно поставить в соответствие функцию $v(\tau,\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_m)=x\left(\tau,\sum_{j}^{n}\alpha_j^1,\ldots,\sum_{j}^{n}\alpha_j^m\right)\equiv\tilde{x}(\tau,\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_m)=\tilde{x}(\tau,\bar{t})$. Отмечаем, что это соответствие однозначно обратимо.

Далее, *во-вторых*, каждое j-ое уравнение системы снабжено проектором p_{jk}, переводящим t_{ki} на t_{kj}, при $t_{kj} = p_{jk}t_{ki}$.

Вообще, если объяснить это более подробно, то проектор определен в виде $P = diag[P_1,...,P_n]$, который на вектор-функцию $f = (f_1,...,f_n)$ действует в форме $Pf = (P_1 f_1,...,P_n f_n)$.

Далее, если $f_j = f_j(t_{1j},...,t_{mj})$, то оператором $P_j = diag\lfloor p_{j1},...,p_{jm} \rfloor$ из нее получим $P_j f_j = f_j(p_{j1}t_{1j},...,p_{jm}t_{mj})$, где p_{jk} – проекторы [97, 98], обладающие свойствами $p_{jk}^2 = p_{jk}$ и $p_{jk}p_{ik} = 0$, $i \neq j$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$.

Тогда при $t_{kj} = p_{jk}t_{ki}$ из $p_{jk}t_{kj}$ в силу последних свойств проекторов получим

$$p_{jk}t_{kj} = p_{jk}p_{ik}t_{ki} = \begin{cases} p_{jk}^2 t_{kj} = p_{jk}t_{kj}, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}$$

Эти тождественные переменные и проекторы перевода одних из них к другим связан с определением композиции функций на j-ом уравнении и переводом переменных других j-ых уравнений, появляющихся при композиции на переменные j-ого уравнения.

Все это, в конечном счете, связано с интегрированием и дифферецнированием $\tilde{x}_j(\tau, \bar{t}_j)$ каждой j-ой координаты $\tilde{x}_j$ по переменным $(\tau, \bar{t}_j)$.

В-третьих, после такого перехода от $t = (t_1,...,t_m)$ к $\bar{t} = (\bar{t}_1,...,\bar{t}_m)$ и снабжения проектором $P_j = diag\lfloor p_{j1},...,p_{jm} \rfloor$ в системе реализуется метод характеристик Коши.

Вот, таков алгоритм нового метода, разработанного в данном исследовании.

Следует отметить, что при переходе от векторно-матричной формы уравнения (2.2.7) к скалярной форме, каждая координата y_i имеет свой оператор дифференцирования D_i^* по переменным $(\tau, t_1,...,t_m)$. Следовательно, согласно методу характеристик Коши, решения определяются путем интегрирования вдоль характеристик h_{kj}, соответствующих как переменным t_k так и операторам D_j^*. Такое обстоятельство диктует, чтобы каждая координата искомого решения имела свои независимые переменные с проекторами перехода от них к переменным других координат. В связи с этим, вводимые независимые переменные должны быть занумерованными в соответствии с номерами собственных значений.

Тогда имеем mn переменных t_{kj}, $k=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ которые соответствуют собственным значениям λ_{kj} и получаются от исходных переменных t_k согласно таблице 2.2.1.

Таблица 2.2.1 – Дополнительные переменные

$\bar{t}$ \ t	t_1	t_2	$\dots$	t_k	$\dots$	t_m
$\bar{t}_1$	t_{11}	t_{21}	$\dots$	t_{k1}	$\dots$	t_{m1}
$\bar{t}_2$	t_{12}	t_{22}	$\dots$	t_{k2}	$\dots$	t_{m2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\bar{t}_j$	t_{1j}	t_{2j}	$\dots$	t_{kj}	$\dots$	t_{mj}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\bar{t}_n$	t_{1n}	t_{2n}	$\dots$	t_{kn}	$\dots$	t_{mn}

Таким образом, вводим оператор $\Pi = diag[\Pi_1,\dots,\Pi_n]$, который действует на вектор-функцию $y(\tau,t)=[y_i(\tau,t_1,\dots,t_m)]$ в виде

$$\Pi y(\tau,t_1,\dots,t_m)=\lfloor \Pi_j y_j(\tau,t_1,\dots,t_m)\rfloor=\lfloor y_j(\tau,t_{1j},\dots,t_{mj})\rfloor=\lfloor y_j(\tau,\bar{t}_j)\rfloor=y(\tau,\bar{t}),$$

где $\bar{t}=(\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_n)$, $\bar{t}_j=(t_{1j},\dots,t_{mj})$.

Очевидно, что оператор Π обратим и Π^{-1} определяется цепочкой равенств:

$$\Pi^{-1}y(\tau,\bar{t})=\Pi^{-1}\lfloor y_i(\tau,\bar{t}_j)\rfloor=\Pi^{-1}\lfloor y_i(\tau,t_{1j},\dots,t_{mj})\rfloor=$$
$$=\lfloor \Pi_j^{-1} y_j(\tau,t_{1j},\dots,t_{mj})\rfloor=\lfloor y_j(\tau,t_1,\dots,t_m)\rfloor=y(\tau,t).$$

Еще раз заметим, что суть оператора Π заключается в снабжении переменной $(t_1,\dots,t_n)$ j-ой координаты y_j вектор-функции y вторым индексом j и, в итоге, переходим от переменных $(t_1,\dots,t_n)$ к переменным $(t_{1j},\dots,t_{mj})=\bar{t}_j$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbf{S}$ векторно-матричных функций переменных $(\tau,\bar{t})$, которые в случае вектор-функции имеют вид $x(\tau,\bar{t})=[x_i(\tau,\bar{t}_i)]$, а в случае матрицы записываются в виде $X(\tau,\bar{t})=\lfloor x_{ij}(\tau,\bar{t}_i)\rfloor$, где i-ая строка матриц выражается через $(\tau,\bar{t}_i)\in R\times R^n$.

Вводим операторы $P_i = diag[p_{i1},\dots,p_{in}]$, $i=\overline{1,n}$ с проекторами p_{ij} для перехода от переменных j-ой координаты $\bar{t}_j$ к переменным i-ой координаты $\bar{t}_i$ функций из пространства $\mathbf{S}$: $p_{ij}\bar{t}_j=\bar{t}_i$.

Далее, приведем правила действия операторов $P_i = diag[p_{i1},...,p_{in}]$ необходимые при произведении и композиции векторно-матричных функций из $\mathbf{S}$.

(a) Проекторы p_{ik} на скалярную координатную функцию $x_j(\tau,\bar{t}_j)\in\mathbf{S}$ действуют в виде $p_{ij}x_j(\tau,\bar{t}_j)=x_j(\tau,p_{ij}\bar{t}_j)=x_j(\tau,\bar{t}_i)$. Матричный проектор P_i на вектор-функцию $x(\tau,\bar{t})=[x_i(\tau,\bar{t}_i)]$ действует в виде

$$P_i x(\tau,\bar{t})=[p_{ik}x_k(\tau,\bar{t}_k)]=[x_k(\tau,p_{ik}\bar{t}_k)]=[x_k(\tau,\bar{t}_i)].$$

(b) Произведение матрицы $X(\tau,\bar{t})\in\mathbf{S}$ и вектор-функции $x(\tau,\bar{t})\in\mathbf{S}$ с проектором $P_i = diag[p_{i1},...,p_{in}]$ определяется в виде

$$y(\tau,\bar{t})=X(\tau,\bar{t})\times x(\tau,\bar{t})=P_i\lfloor x_{ij}(\tau,\bar{t}_i)\rfloor\cdot[x_i(\tau,\bar{t}_i)]=\lfloor x_{ij}(\tau,\bar{t}_i)p_{ij}\rfloor\cdot[x_i(\tau,\bar{t}_i)]=$$
$$=\left[\sum_j x_{ij}(\tau,\bar{t}_i)p_{ij}x_j(\tau,\bar{t}_j)\right]=\left[\sum_j x_{ij}(\tau,\bar{t}_i)x_j(\tau,\bar{t}_i)\right]=[y_{ij}(\tau,\bar{t}_i)]\in\mathbf{S},$$

где обозначение произведения через «×» означает предварительное снабжение элементов матрицы X проектором P_i при ее произведении с вектор-функцией x.

(c) Произведение $Z(\tau,\bar{t})$ матриц $X(\tau,\bar{t})\in\mathbf{S}$ и $Y(\tau,\bar{t})\in\mathbf{S}$ определяется соотношением

$$Z(\tau,\bar{t})=X(\tau,\bar{t})\times Y(\tau,\bar{t})=\lfloor x_{ij}(\tau,\bar{t}_i)\rfloor\times\lfloor y_{ij}(\tau,\bar{t}_i)\rfloor=P_i\lfloor x_{ij}(\tau,\bar{t}_i)\rfloor\cdot\lfloor y_{ij}(\tau,\bar{t}_i)\rfloor=$$
$$=\left[\sum_{r=1}^{n} x_{ir}(\tau,\bar{t}_i)p_{ir}y_{rj}(\tau,\bar{t}_r)\right]=\left[\sum_{r=1}^{n} x_{ir}(\tau,\bar{t}_i)y_{rj}(\tau,\bar{t}_i)\right]=[z_{ij}(\tau,\bar{t}_i)]\in\mathbf{S},$$

(d) Композиция $\varphi = f\otimes x$ с проектором P_i вектор-функции $f(\tau,\bar{t},x)=[f_i(\tau,\bar{t}_i,x)]\in\mathbf{S}$ и вектор-функции $x=x(\tau,\bar{t})=[x_i(\tau,\bar{t}_i)]\in\mathbf{S}$ в пространстве $\mathbf{S}$ определяется соотношением

$$\varphi(\tau,\bar{t})=(f\otimes x)(\tau,\bar{t})=(P_i f\circ x)(\tau,\bar{t})=[f_i(\tau,\bar{t}_i,P_i x(\tau,\bar{t}))]=\lfloor f_i(\tau,\bar{t}_i,P_i\lfloor x_j(\tau,\bar{t}_j)\rfloor)\rfloor=$$
$$=\lfloor f_i(\tau,\bar{t}_i,\lfloor p_{ij}x_j(\tau,\bar{t}_j)\rfloor)\rfloor=\lfloor f_i(\tau,\bar{t}_i,\lfloor x_j(\tau,p_{ij}\bar{t}_j)\rfloor)\rfloor=\lfloor f_i(\tau,\bar{t}_i,\lfloor x_j(\tau,\bar{t}_i)\rfloor)\rfloor=[\varphi_i(\tau,\bar{t}_i)]\in\mathbf{S},$$

где обозначение композиции через «$\otimes$» означает предварительное снабжение элементов вектор-функции f проектором P_i при ее композиции с вектор-функцией x.

Теперь определим векторно-матричные функции из пространства $\mathbf{S}$ вдоль характеристик $\bar{h}_i(s,\tau,\bar{t}_i)$ операторов дифференцирования D_i.

(e) Вектор-функция $x = x(\tau,\bar{t}) = [x_i(\tau,\bar{t}_i)] \in \mathbf{S}$ на характеристике определяется присвоением вида $(\tau,\bar{t}_i) := (s,\bar{h}_i(s,\tau,\bar{t}_i))$, где $\bar{h}_i(\tau^0,\tau,\bar{t}_i) = (h_{1i}(\tau^0,\tau,t_{1i}),\ldots,h_{ni}(\tau^0,\tau,t_{ni}))$ и имеет место

$$x(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})) = [x_i(s,\bar{h}_i(s,\tau,\bar{t}_i))] \in \mathbf{S}.$$

(f) Вдоль характеристики матрица $X(\tau,\bar{t}) = [x_{ij}(\tau,\bar{t}_i)] \in \mathbf{S}$ определяется соотношением вида

$$X(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})) = [x_{ij}(s,\bar{h}_i(s,\tau,\bar{t}_i))] \in \mathbf{S}.$$

2.2.2 Исследование методом введения дополнительных переменных многопериодического решения гиперболической в узком смысле системы и его интегральное представление

Теперь, на основе понятий из 2.2.1, от задачи с оператором D по переменным (τ,t) переходим к исследованию задачи с оператором D^* по переменным $(\tau,\bar{t})$ в процессе которого раскрывается суть предлагаемого метода проекторов.

Действуя оператором $\Pi = diag[\Pi_1,\ldots,\Pi_n]$ на гиперболическую в узком смысле систему (2.2.7), начальное условие (2.2.9) и условие многопериодичности (2.2.10) с учетом $\Pi y(\tau,t) = y(\tau,\bar{t})$, $\Pi D^* y(\tau,t) = D^* \Pi y(\tau,t) = D^* y(\tau,\bar{t})$, $\Pi\varphi(\tau,t,y) = \varphi(\tau,\bar{t},\Pi y)$ приводим к задаче для уравнения

$$D^* y(\tau,\bar{t}) = Cy(\tau,\bar{t}) + \varphi(\tau,\bar{t})$$

с начальным условием

$$y(\tau,\bar{t})\big|_{\tau=\tau^0} = y^0(\bar{t})$$

и условием многопериодичности

$$y(\tau+\theta,\bar{t}+\bar{\omega}) = y(\tau,\bar{t}) \in C^{(1,\bar{e})}_{\tau,\bar{t}}(R \times R^{mn}), \quad |y| \le \Delta^*,$$

где $\bar{\omega} = \bar{e}\,\omega$, $\bar{e} = (1,\ldots,1)$ – mn-вектор.

С помощью оператора $P = diag[P_1,\ldots,P_n]$, эту задачу приводим к задаче

$$D^* y(\tau,\bar{t}) = C \times y(\tau,\bar{t}) + \varphi(\tau,\bar{t})$$

с начальным условием

$$y(\tau,\bar{t})\Big|_{\tau=\tau^0} = y^0(\bar{t}) \in C_{\bar{t}}^{(\bar{e})}\left(R^{mn}\right). \qquad (2.2.11)$$

Рассмотрим векторное уравнение

$$D^* y(\tau,\bar{t}) = 0\,, \qquad (2.2.12)$$

которое в координатной форме распадается на самостоятельные уравнения

$$D_j^* y_j(\tau,\bar{t}_j) = 0 \qquad (2.2.13)$$

или в скалярном виде

$$D_j^* y_j(\tau,\bar{t}_j) \equiv \frac{\partial y_i(\tau,t_{1j},\ldots,t_{mj})}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_{kj}\frac{\partial y_i(\tau,t_{1i},\ldots,t_{mj})}{\partial t_{kj}} = 0\,.$$

Построим характеристические уравнения

$$\frac{dt_{kj}}{d\tau} = \lambda_{kj}\,,$$

из которых определяются характеристики

$$t_{kj} = t_{kj}^0 + \lambda_{kj}\left(\tau-\tau^0\right) \equiv h_{kj}\left(\tau,\tau^0,t_{kj}^0\right), \qquad (2.2.14)$$

обладающие следующими свойствами

1^0. $h_{kj}(s,\tau,t_{kj})\Big|_{s=\tau} = t_{kj}\,,\ k=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$;
2^0. $h_{kj}(s+\theta,\tau+\theta,t_{kj}) = h_{kj}(s,\tau,t_{kj}),\ k=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$;
3^0. $h_{kj}(s,\tau,t_{kj}+\omega_k) = h_{kj}(s,\tau,t_{kj}) + \omega_k\,,\ k=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$; (2.2.15)
4^0. $h_{kj}\left(s,\tau^0,h_{kj}\left(\tau^0,\tau,t_{kj}\right)\right) = h_{kj}(s,\tau,t_{kj}),\ k=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$;
5^0. $D_j^* h_{kj}(s,\tau,t_{kj}) = 0\,,\ k=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Доказательства свойств (2.2.15):

1^0. $h_{kj}(s,\tau,t_{kj})\Big|_{s=\tau} = \left[t_{kj} - \lambda_{kj}(\tau-s)\right]_{s=\tau} = t_{kj} - \lambda_{kj}(\tau-\tau) = t_{kj}$.
2^0. $h_{kj}(s+\theta,\tau+\theta,t_{kj}) = t_{kj} - \lambda_{kj}(\tau+\theta-(s+\theta)) = t_{kj} - \lambda_{kj}(\tau+\theta-s-\theta) =$

$$= t_{kj} - \lambda_{kj}(\tau - s) = h_{kj}(s,\tau,t_{kj}).$$

3^0. $h_{kj}(s,\tau,t_{kj}+\omega_k) = (t_{kj}+\omega_k) - \lambda_{kj}(\tau - s) = t_{kj} - \lambda_{kj}(\tau - s) + \omega_k = h_{kj}(s,\tau,t_{kj}) + \omega_k$.

4^0. $h_{kj}(s,\tau^0,h_{kj}(\tau^0,\tau,t_{kj})) = h_{kj}(\tau^0,\tau,t_{kj}) - \lambda_{kj}(\tau^0 - s) = t_{kj} - \lambda_{kj}(\tau-\tau^0) - \lambda_{kj}(\tau^0 - s) =$

$= t_{kj} - \lambda_{kj}\tau + \lambda_{kj}s = t_{kj} - \lambda_{kj}(\tau - s) = h_{kj}(s,\tau,t_{kj})$.

5^0. $D_j^* h_{kj}(s,\tau,t_{kj}) = \dfrac{\partial h_{kj}(s,\tau,t_{kj})}{\partial \tau} + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_{kj} \dfrac{\partial h_{kj}(s,\tau,t_{kj})}{\partial t_{kj}} = -\lambda_{kj} + \lambda_{kj} = 0$.

Так как из вида характеристик (2.2.14) имеем равенство $\bar t_j = (t_{1j},\ldots,t_{kj}) = (h_{1j}(\tau,\tau^0,t_{1j}^0),\ldots,h_{kj}(\tau,\tau^0,t_{kj}^0)) = \bar h_j(\tau,\tau^0,\bar t_j^0)$, то $\bar t_j^0 = \bar h_j(s,\tau,\bar t_j)$ при $\tau^0 = s$ из (2.2.15) следуют следующие свойства

$$
\begin{aligned}
&1^0.\ \bar h_j(s,\tau,\bar t_j)\big|_{s=\tau} = \bar t_j, \\
&2^0.\ \bar h_j(s+\theta,\tau+\theta,\bar t_j) = h_{kj}(s,\tau,\bar t_j), \\
&3^0.\ \bar h_j(s,\tau,\bar t_j+\omega) = \bar h_j(s,\tau,\bar t_j) + \omega, \\
&4^0.\ \bar h_j(s,\tau^0,\bar h_j(\tau^0,\tau,\bar t_j)) = \bar h_j(s,\tau,\bar t_j), \\
&5^0.\ D_j^* \bar h_j(s,\tau,\bar t_j) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.2.16}
$$

Доказательства свойств (2.2.16) аналогичны доказательствам свойств (2.2.15).

Если $y_j^0(\bar t_j) \in C_{\bar t_j}^{(e)}(R^n)$ – произвольная дифференцируемая функция вектор-переменной $\bar t_j$, то, в силу 1^0 и 5^0 соотношений (2.2.16), функция

$$y_j(\tau^0,\tau,\bar t_j) = (y_j^0 \circ \bar h_j)(\tau^0,\tau,\bar t_j) = y_j^0(\bar h_j(\tau^0,\tau,\bar t_j)) \tag{2.2.17}$$

является решением уравнения (2.2.13), удовлетворяющим условию (2.2.11), где $\bar h_j(\tau^0,\tau,\bar t_j) = (\bar h_1(\tau^0,\tau,\bar t_1),\ldots,\bar h_n(\tau^0,\tau,\bar t_n))$.

Тогда, учитывая (2.2.17), имеем решение

$$y(\tau^0,\tau,\bar t) = (y_1(\tau^0,\tau,\bar t_1),\ldots,y_n(\tau^0,\tau,\bar t_n)) \tag{2.2.18}$$

векторного уравнения (2.2.12), удовлетворящее начальному условию

$$y(\tau^0,\tau^0,\bar t) = (y_1^0(\bar t_1),\ldots,y_n^0(\bar t_n)) \in C_{\bar t_1,\ldots\bar t_n}^{(e,\ldots,e)}(R^m \times \ldots \times R^m) = C_{\bar t}^{(\bar e)}(R^{mn}).$$

Результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 2.2.1. *Задача* (2.2.12), (2.2.11) *разрешима и ее решение представимо соотношением* (2.2.18).

Теперь исследуем вопрос о (θ, ω)-периодичности решений этой задачи.

В силу свойства 3^0 из (2.2.16) видно, что для ω-периодичности решения (2.2.17), необходимо и достаточно, чтобы начальная функция $\tilde{y}_j^0(\bar{t}_j) \in C_{\bar{t}_j}^{(e)}(R^n)$ была ω-периодической по $\bar{t}_j$:

$$\tilde{y}_j^0(\bar{t}_j + \omega) = \tilde{y}_j^0(\bar{t}_j) \in C_{\bar{t}_j}^{(e)}(R^n). \qquad (2.2.19)$$

Итак, имеет место нижеследующая лемма.

Лемма 2.2.2. *Для того, чтобы решение векторно-матричного уравнения* (2.2.12) *было* ω*-периодическим по* $\bar{t}_j$*, необходимо и достаточно, чтобы начальная функция была* ω*-периодической по* $\bar{t}_j$, $j = \overline{1,n}$.

Так как, начальная функция $\tilde{y}_j^0(\bar{t}_j) \in C_{\bar{t}_j}^{(e)}(R^n)$ ω-периодична, то в силу свойства 2^0 из (2.2.16) и $\tilde{y}_j^0 \neq const$ для θ-периодичности по τ решения (2.2.17), необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lambda_{kj}\theta = l_{kj}\omega_k, \ l_{kj} \in Z. \qquad (2.2.20)$$

В дальнейшем, мы ограничимся рассмотрением случаев, когда условие (2.2.20) выполняется для всех собственных значений λ_{kj} матрицы A_k, либо не выполняется ни для одного из λ_{kj}.

Очевидно, любое постоянное решение $y_j = const$ уравнения (2.2.13), которое порождается начальной функцией $y_j^0 = c_j = const$, является его (θ, ω)-периодическим решением.

Наряду с этими решениями, при выполнении условий (2.2.19) и (2.2.20), имеем отличные от постоянных (θ, ω)-периодические решения $y_j^*(\tau, \bar{t}_j)$, определяемые соотношением (2.2.17):

$$y_j^*(\tau, \bar{t}_j) = \tilde{y}_j^0\left(\bar{h}_j(s, \tau, \bar{t}_j)\right),$$

где $s = \tau^0$ – любое начальное значение переменной τ.

Ясно, что в случае $y_j^0 - const$ (при фиксированном j) получим постоянные (θ, ω)-периодические решения

$$y = (c_1, \ldots, c_n) = c, \qquad (2.2.21)$$

а в случае выполнения условия (2.2.20), имеем (θ, ω)-периодические решения, определяемые формулой (2.2.18) с начальной функцией (2.2.19) в виде

$$y^*(\tau,\bar t)=\left(y_1^*(\tau,\bar t_1),\dots,y_n^*(\tau,\bar t_n)\right). \qquad (2.2.22)$$

Таким образом, доказана нижеследующая лемма.

Лемма 2.2.3. *Пусть выполняются условия леммы* 2.2.2. *Если условие* (2.2.20) *не выполняется, то* (θ,ω)*-периодическими решениями векторно-матричного уравнения* (2.2.12) *являются только постоянные вектора* (2.2.21), *а в случае выполнения условия* (2.2.20), *наряду с постоянными решениями существуют и непостоянные решения вида* (2.2.22).

Теперь рассмотрим однородное линейное векторно-матричное уравнение

$$D^* y(\tau,\bar t)=C\times y(\tau,\bar t) \qquad (2.2.23)$$

с постоянной матрицей C.

Очевидно, что матрица $Y(\tau)=\exp[C\tau]$ удовлетворяет уравнению (2.2.23):

$$D^*Y(\tau)=CY(\tau),\ Y(0)=E \qquad (2.2.24)$$

и ее назовем его матрицантом.

Нетрудно проверить, что если $y^0(\bar t)\in C^{(e,\dots,e)}_{\bar t_1,\dots\bar t_n}(R^m\times\ldots\times R^m)=C^{(\bar e)}_{\bar t}(R^{mn})$, то $y^0(\bar h(\tau^0,\tau,\bar t))=\left[y_j^0(\bar h_j(\tau^0,\tau,\bar t_j))\right]\in \mathbf{S}$ является нулем оператора D^*:

$$D^* y^0(\bar h(\tau^0,\tau,\bar t))=0. \qquad (2.2.25)$$

Тогда в силу (2.2.24) и (2.2.25)

$$y(\tau^0,\tau,\bar t)=Y(\tau-\tau^0)\times y^0(\bar h(\tau^0,\tau,\bar t)) \qquad (2.2.26)$$

является решением начальной задачи для (2.2.23) с условием

$$y(\tau,\bar t)\big|_{\tau=\tau^0}=y^0(\bar t)\in C^{(\bar e)}_{\bar t}(R^{mn}). \qquad (2.2.27)$$

Лемма 2.2.4. *Задача* (2.2.23), (2.2.27) *имеет единственное решение вида* (2.2.26), *определяемое на основе “произведения с проектором” матрицанта и нуля оператора* D^*.

Далее, исследуем $(\theta,\overline{\omega})$-периодические решения уравнения (2.2.23), отвечающие многопериодическим нулям оператора D^*.

В связи с этим, согласно лемме 2.2.3, рассмотрим решение (2.2.26) задачи (2.2.23), (2.2.27) с $\overline{\omega}$-периодическими по $\bar t$ начальными функциями:

$$y^0(\bar t+\overline{\omega})=y^0(\bar t)\in C^{(\bar e)}_{\bar t}(R^{mn}) \qquad (2.2.28)$$

с периодом $\overline{\omega} = (\omega, ..., \omega)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.2.1. *Для того, чтобы решение* (2.2.26) *при выполнении* (2.2.28) *было* $(\theta, \overline{\omega})$*-периодическим, необходимо и достаточно, выполнение условия*

$$[Y(\theta) - E] \times y^0(\bar{t}) = 0. \qquad (2.2.29)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть решение (2.2.26) $(\theta, \overline{\omega})$-периодическое:

$$y(\tau^0, \tau + \theta, \bar{t} + \overline{\omega}) = y(\tau^0, \tau, \bar{t}). \qquad (2.2.30)$$

Тогда из (2.2.30) при $\tau = \tau^0$ имеем условие (2.2.29).

Достаточность. Допустим выполняется условие (2.2.29). Докажем выполнение тождества (2.2.30).

Наряду с решением (2.2.26) рассмотрим решение

$$\begin{gathered}\tilde{y}(\tau^0, \tau, \bar{t}) = y(\tau^0, \tau + \theta, \bar{t} + \overline{\omega}) = Y(\tau + \theta - \tau^0) \times y^0\left(\overline{h}(\tau^0, \tau + \theta, \bar{t} + \overline{\omega})\right) = \\ = Y(\tau + \theta - \tau^0) \times y^0\left(\overline{h}(\tau^0, \tau, \bar{t})\right).\end{gathered}$$

Отсюда, при $\tau = \tau^0$ в силу условия (2.2.29) имеем

$$\begin{gathered}\tilde{y}(\tau^0, \tau, \bar{t})\Big|_{\tau=\tau^0} = Y(\theta) \times y^0(\bar{t}) = [(Y(\theta) - E) + E] \times y^0(\bar{t}) = \\ = (Y(\theta) - E) \times y^0(\bar{t}) + y^0(\bar{t}) = y^0(\bar{t}).\end{gathered}$$

Следовательно, решения $y(\tau^0, \tau, \bar{t})$ и $\tilde{y}(\tau^0, \tau, \bar{t})$ удовлетворяют одному и тому же начальному условию. Тогда в силу свойства единственности решения $\tilde{y}(\tau^0, \tau, \bar{t}) \equiv y(\tau^0, \tau, \bar{t})$ или $y(\tau^0, \tau + \theta, \bar{t} + \overline{\omega}) \equiv y(\tau^0, \tau, \bar{t})$.

Что и требовалось доказать.

Следствие 2.2.1. *Для того, чтобы при условиях теоремы 2.2.1 векторно-матричное уравнение* (2.2.23) *имело только нулевое* $(\theta, \overline{\omega})$*-периодическое решение, необходимо и достаточно, выполнение условия*

$$\det[Y(\theta) - E] \neq 0. \qquad (2.2.31)$$

Доказательство следствия следует из эквивалентности условия (2.2.31) и отутствия нетривиального решения уравнения (2.2.29).

В качестве примера однородного векторно-матричного уравнения, допускающего $(\theta, \overline{\omega})$-периодическое решение по τ и $\bar{t}$, рассмотрим случай, когда матрица C имеет чисто мнимые собственные значения $\mu_j = 2\pi\nu_j^0$, $j = \overline{1, l}$

с простыми делителями, где частоты ν_j^0, $j=\overline{1,l}$ рационально несоизмеримые, а остальные собственные значения имеют ненулевые действительные части. В этом случае матрицант имеет вид

$$Y(\tau)=L^{-1}diag[Y_1(\tau),\ldots,Y_l(\tau),Y_*(\tau)]L \qquad (2.2.32)$$

с некоторой неособенной постоянной матрицей L,

$$Y_j(\tau)=\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -2\pi\nu_j^0 \\ 2\pi\nu_j^0 & 0 \end{pmatrix}\tau\right],\ j=\overline{1,l};\qquad Y_*(\tau)=\exp[C_*\tau], \qquad (2.2.33)$$

где C_* постоянная $(n-2l)$-матрица, у которой все собственные значения имеют ненулевые действительные части.

Тогда, аналогично теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, векторно-матричное уравнение (2.2.23) имеет l семейств S_r, $r=\overline{1,l}$ периодческих решений по τ периодов $\theta_r^0=\dfrac{1}{\nu_r^0}$. В частности, если среди частот ν_r^0 существуют удовлетворяющие условию

$$\nu_{r_0}^0\theta=q_{r_0}\in Z \qquad (2.2.34)$$

частота $\nu_{r_0}^0$ с целым q_{r_0}, то семейство S_{r_0} окажется θ-периодическим по τ.

Очевидно, при условии (2.2.34) матрицант (2.2.32)-(2.2.33) удовлетворяет условию (2.2.29) с ненулевым собственным вектором $y^0(\bar{t})$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Векторно-матричное уравнение* (2.2.23) *при условиях* (2.2.32)-(2.2.34) *имеет одно семейство* $(\theta,\overline{\omega})$*-периодических по* $(\tau,\bar{t})$ *решений вида* (2.2.26).

Далее рассмотрим неоднородное линейное векторно-матричное уравнение

$$D^*y(\tau,\bar{t})=C\times y(\tau,\bar{t})+\varphi(\tau,\bar{t}) \qquad (2.2.35)$$

с постоянной матрицей C и свободным членом

$$\varphi(\tau+\theta,\bar{t}+\overline{\omega})=\varphi(\tau,\bar{t})\in C_{\tau,\bar{t}}^{(0,\bar{e})}(R\times R^{mn}). \qquad (2.2.36)$$

Ясно, что решение $y\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)$ уравнения (2.2.35) с начальным условием (2.2.11) состоит из суммы решения (2.2.26) соответствующего однородного уравнения (2.2.23) и решения неоднородного уравнения (2.2.35) с нулевым начальным условием

$$\tilde{y}\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)=\int_{\tau^0}^{\tau} Y(\tau-s)\times\varphi\left(s,\bar{h}\left(s,\tau,\bar{t}\right)\right)ds. \qquad (2.2.37)$$

В том, что вектор-функция (2.2.37) удовлетворяет уравнению (2.2.35) можно убедиться непосредственной проверкой.

Следовательно,

$$y\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)=Y\left(\tau-\tau^0\right)\times y^0\left(\bar{h}\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)\right)+\int_{\tau^0}^{\tau} Y(\tau-s)\times\varphi\left(s,\bar{h}\left(s,\tau,\bar{t}\right)\right)ds \qquad (2.2.38)$$

является решением уравнения (2.2.35) с начальным условием (2.2.11).

Таким образом, имеем лемму.

Лемма 2.2.5. *Задача* (2.2.35), (2.2.11) *имеет единственное решение вида* (2.2.38), *определяемое на основе “произведений с проектором” матрицанта* $Y(\tau-s)$ *с нулем оператора* D^* *и свободного члена, определенных вдоль характеристики*.

Отметим, что в прикладных вопросах особый интерес представляет определение многопериодического решения неоднородного уравнения, отвечающего единственному тривиальному решению однородного уравнения.

Следовательно, согласно следствию 2.2.1, предположим выполненным условие (2.2.31).

Согласно конструктивному методу Харасахала-Умбетжанова-Сартабанова, предположив существование единственного многопериодического решения $y^*\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)$ неоднородного уравнения (2.2.35), из соотношения (2.2.38) постараемся определить начальную функцию $y_*^0\left(\bar{t}\right)$, отвечающую этому решению, при которой $y_*^0\left(\bar{h}\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)\right)$ является $(\theta,\bar{\omega})$-периодическим нулем оператора D^*. В связи с этим, имеем решение

$$y^*\left(\tau,\bar{t}\right)=Y\left(\tau-\tau^0\right)\times y_*^0\left(\bar{h}\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)\right)+\int_{\tau^0}^{\tau} Y(\tau-s)\times\varphi\left(s,\bar{h}\left(s,\tau,\bar{t}\right)\right)ds. \qquad (2.2.39)$$

С целью построения этого решения, сдвинув τ на θ из соотношения (2.2.39) имеем

$$y^*\left(\tau,\bar{t}\right)=y^*\left(\tau+\theta,\bar{t}\right)=$$

$$= Y\left(\tau+\theta-\tau^0\right)\times y_*^0\left(\bar h\left(\tau^0,\tau+\theta,\bar t\right)\right)+\int_{\tau^0}^{\tau+\theta} Y(\tau+\theta-s)\times\varphi\left(s,\bar h(s,\tau+\theta,\bar t)\right)ds =$$

$$= Y\left(\tau+\theta-\tau^0\right)\times y_*^0\left(\bar h\left(\tau^0,\tau,\bar t\right)\right)+\int_{\tau^0}^{\tau+\theta} Y(\tau+\theta-s)\times\varphi\left(s,\bar h(s,\tau,\bar t)\right)ds\,.$$

Далее, заменив s на $s+\theta$ получим

$$y^*(\tau,\bar t)= Y\left(\tau+\theta-\tau^0\right)\times y_*^0\left(\bar h\left(\tau^0,\tau,\bar t\right)\right)+\int_{\tau^0-\theta}^{\tau} Y(\tau-s)\times\varphi\left(s,\bar h(s,\tau,\bar t)\right)ds\,. \quad (2.2.40)$$

Умножив (2.2.40) и (2.2.39) слева на матрицы $Y^{-1}\left(\tau+\theta-\tau^0\right)$ и $Y^{-1}\left(\tau-\tau^0\right)$ соответственно имеем

$$Y^{-1}\left(\tau+\theta-\tau^0\right)\times y^*(\tau,\bar t)= y_*^0\left(\bar h\left(\tau^0,\tau,\bar t\right)\right)+$$
$$+Y^{-1}\left(\tau+\theta-\tau^0\right)\cdot\int_{\tau^0-\theta}^{\tau} Y(\tau+\theta-\theta-s)\times\varphi\left(s,\bar h(s,\tau,\bar t)\right)ds\,, \quad (2.2.41)$$

$$Y^{-1}\left(\tau-\tau^0\right)\times y^*(\tau,\bar t)= y_*^0\left(\bar h\left(\tau^0,\tau,\bar t\right)\right)+$$
$$+Y^{-1}\left(\tau-\tau^0\right)\cdot\int_{\tau^0}^{\tau} Y(\tau-s)\times\varphi\left(s,\bar h(s,\tau,\bar t)\right)ds\,. \quad (2.2.42)$$

Далее, исключив из системы уравнений (2.2.41)-(2.2.42) начальную функцию $y_*^0\left(\bar h\left(\tau^0,\tau,\bar t\right)\right)$, получим

$$\left[Y^{-1}\left(\tau+\theta-\tau^0\right)-Y^{-1}\left(\tau-\tau^0\right)\right]\times y^*(\tau,\bar t)=$$
$$=\int_{\tau^0-\theta}^{\tau} Y\left(\tau^0-\theta-s\right)\times\varphi\left(s,\bar h(s,\tau,\bar t)\right)ds+\int_{\tau}^{\tau^0} Y\left(\tau^0-s\right)\times\varphi\left(s,\bar h(s,\tau,\bar t)\right)ds\,. \quad (2.2.43)$$

В силу условия (2.2.31), имеем

$$\det\left[Y^{-1}\left(\tau+\theta-\tau^0\right)-Y^{-1}\left(\tau-\tau^0\right)\right]=\det\left[Y^{-1}\left(\tau-\tau^0\right)\left(E-Y(\theta)\right)Y^{-1}(\theta)\right]\neq 0\,.$$

Тогда искомое решение (2.2.43) можно представить в виде

$$y^*(\tau,\bar t)=\left[Y^{-1}\left(\tau+\theta-\tau^0\right)-Y^{-1}\left(\tau-\tau^0\right)\right]^{-1}\left[\int_{\tau^0-\theta}^{\tau} Y\left(\tau^0-\theta-s\right)\times\varphi\left(s,\bar h(s,\tau,\bar t)\right)ds+\right.$$
$$\left.+\int_{\tau}^{\tau^0} Y\left(\tau^0-s\right)\times\varphi\left(s,\bar h(s,\tau,\bar t)\right)ds\right].$$

Так как

$$\left[Y^{-1}\left(\tau+\theta-\tau^{0}\right)-Y^{-1}\left(\tau-\tau^{0}\right)\right]^{-1}=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y^{-1}\left(\tau^{0}\right),$$
$$Y\left(\tau^{0}-\theta-s\right)=Y^{-1}\left(\tau^{0}\right)Y(s+\theta),$$

то окончательно имеем

$$y^{*}(\tau,\bar{t})=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left[\int\limits_{\tau^{0}-\theta}^{\tau}Y^{-1}(s+\theta)\times\varphi\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)ds+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\tau}^{\tau^{0}}Y^{-1}(s)\times\varphi\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)ds\right]. \qquad (2.2.44)$$

Ясно, что $y^{*}(\tau,\bar{t})$, определенное соотношением (2.2.44), является решением уравнения (2.2.35) и чтобы оно было θ-периодическим по τ, нам необходимо соответствующим образом выбрать τ^{0}.

С этой целью, в рассмотрение введем функцию $s^{*}(\tau)=\left[\dfrac{\tau}{\theta}\right]\theta$, где $[s]$ – целая часть величины s. Очевидно, что $s^{*}(\tau)$ дифференцируема при $\tau\neq\nu\theta$, $\nu\in Z$, причем $\dot{s}^{*}(\tau)=0$, и точки $\tau=\nu\theta$ устранимые особые точки производной $\dot{s}^{*}(\tau)$.

Если положим $\dot{s}^{*}(\tau)\big|_{\tau=\nu\theta}=0$, то устраняется особенность производной и имеем $\dot{s}^{*}(\tau)=0$ при $\tau\in R$. Очевидно, что $s^{*}(\tau)$ обладает свойством $s^{*}(\tau+\nu\theta)=s^{*}(\tau)+\nu\theta$.

В дальнейшем, рассмотрим параметр s, изменяющийся от $s^{*}(\tau)$ включительно до $s^{*}(\tau)+\theta-0=s^{*}(\tau+\theta-0)$. Далее, как показано в рисунке 2.2.1, этот промежуток $\left[s^{*}(\tau),s^{*}(\tau+\theta-0)\right]$ разобьем с помощью точки τ на два промежутка $\left[s^{*}(\tau),\tau\right]$ и $\left(\tau,s^{*}(\tau+\theta-0)\right]$.

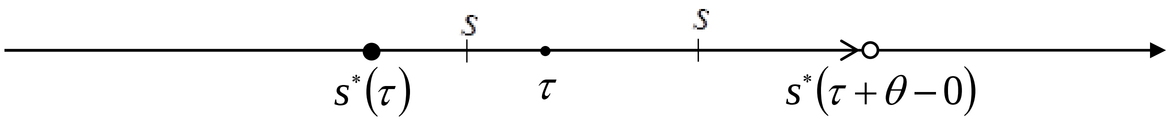

Рисунок 2.2.1 – Графическое представление функции $s^{*}(\tau)$

Фактически параметр $\dfrac{s}{\theta}$ изменяется в окрестности $\dfrac{\tau}{\theta}$: слева до своей целой части включительно, а справа до следующего целого числа.

Так как $s^*(\tau+\theta-0)$ есть условное обозначение $s^*(\tau)$, то в силу непрерывности функции $\varphi(\tau,\bar{t})$ имеем

$$\varphi\left(s^*(\tau+\theta-0),\bar{h}\left(s^*(\tau+\theta-0),\tau,\bar{t}\right)\right)=\varphi\left(s^*(\tau),\bar{h}\left(s^*(\tau),\tau,\bar{t}\right)\right).$$

Теперь, если учтем $\dot{s}^*(\tau)=0$, то при $\tau^0=s^*(\tau+\theta-0)$ соотношение (2.2.44) остается решением уравнения (2.2.35) вида

$$y^*(\tau,\bar{t})=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left[\int\limits_{s^*(\tau)}^{\tau}Y^{-1}(s+\theta)\times\varphi\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)ds+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\tau}^{s^*(\tau+\theta-0)}Y^{-1}(s)\times\varphi\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)ds\right], \tag{2.2.45}$$

причем θ-периодическим по τ. В этом можно убедиться непосредственной проверкой.

Далее, для компактного представления решения (2.2.45) введем матричную функцию

$$G(s,\tau)=\begin{cases}\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y^{-1}(s+\theta), & s^*(\tau)\le s\le\tau,\\ \left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y^{-1}(s), & \tau<s\le s^*(\tau+\theta-0)\end{cases} \tag{2.2.46}$$

с помощью которой решение (2.2.45) представляется в виде

$$y^*(\tau,\bar{t})=\int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)}G(s,\tau)\times\varphi\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)ds. \tag{2.2.47}$$

Построенную функцию (2.2.46) можно назвать *матричной функцией типа Грина* поскольку она обладает свойствами, характерными для таких функций:

$$\begin{aligned}
&1^0.\ D^*G(s,\tau)=CG(s,\tau),\ s\ne\tau;\\
&2^0.\ G(\tau-0,\tau)-G(\tau+0,\tau)=G(\tau,\tau+0)-G(\tau,\tau-0)=E;\\
&3^0.\ G\left(s^*(\tau+\theta-0),\tau\right)-G\left(s^*(\tau),\tau\right)=0;\\
&4^0.\ G(s+\theta,\tau+\theta)=G(s,\tau);\\
&5^0.\ \left|\int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)}\left|G(s,\tau)\right|ds\right|\le\gamma,
\end{aligned} \tag{2.2.48}$$

где C – постоянная $n \times n$-матрица; E – единичная матрица; $|\cdot|$ – одна из известных трех видов норм; $\gamma > 0$ – постоянная, зависящая от матрицы C и периода θ.

Доказательства свойств (2.2.48):

1^0. Учитывая, что $Y(\tau) = \exp[C\tau]$, покажем следующее

$$D^*G(s,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \tau}\left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}(s+\theta), \ s^*(\tau) \le s \le \tau, \\ \dfrac{\partial}{\partial \tau}\left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}(s), \ \tau < s \le s^*(\tau+\theta-0) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-2}(-C)\left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right] Y^{-1}(s+\theta), \ s^*(\tau) \le s \le \tau, \\ -\left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-2}(-C)\left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right] Y^{-1}(s), \ \tau < s \le s^*(\tau+\theta-0) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} C\left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}(s+\theta), \ s^*(\tau) \le s \le \tau, \\ C\left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}(s), \ \tau < s \le s^*(\tau+\theta-0) \end{cases} =$$

$$= C\begin{cases} \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}(s+\theta), \ s^*(\tau) \le s \le \tau, \\ \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}(s), \ \tau < s \le s^*(\tau+\theta-0) \end{cases} = CG(s,\tau), \ s \ne \tau.$$

2^0. Пользуясь видом матричной функции (2.2.46), имеем

$$G(\tau-0,\tau) - G(\tau+0,\tau) =$$
$$= \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}(\tau+\theta) - \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}(\tau) =$$
$$= \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right] = E.$$

3^0. На основе вида матричной функции (2.2.46), имеем

$$G(s^*(\tau+\theta-0),\tau) - G(s^*(\tau),\tau) =$$
$$= \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}\left(s^*(\tau+\theta-0)+\theta\right) - \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}\left(s^*(\tau)\right) =$$
$$= \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}\left(s^*(\tau)+\theta-0+\theta\right) - \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}\left(s^*(\tau)\right) =$$
$$= \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}\left(s^*(\tau)\right) - \left[Y^{-1}(\tau+\theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1} Y^{-1}\left(s^*(\tau)\right) = 0.$$

4^0. Пользуясь свойствами матриканта $Y(\tau) = \exp[C\tau]$, получим следующее

$$G(s+\theta,\tau+\theta)=\begin{cases}\left[Y^{-1}(\tau+2\theta)-Y^{-1}(\tau+\theta)\right]^{-1}Y^{-1}(s+2\theta), & s^*(\tau)\le s\le\tau,\\ \left[Y^{-1}(\tau+2\theta)-Y^{-1}(\tau+\theta)\right]^{-1}Y^{-1}(s+\theta), & \tau<s\le s^*(\tau+\theta-0)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\left[Y^{-1}(\tau+\theta)Y^{-1}(\theta)-Y^{-1}(\tau)Y^{-1}(\theta)\right]^{-1}Y^{-1}(\theta)Y^{-1}(s+\theta), & s^*(\tau)\le s\le\tau,\\ \left[Y^{-1}(\tau+\theta)Y^{-1}(\theta)-Y^{-1}(\tau)Y^{-1}(\theta)\right]^{-1}Y^{-1}(\theta)Y^{-1}(s), & \tau<s\le s^*(\tau+\theta-0)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y(\theta)Y^{-1}(\theta)Y^{-1}(s+\theta), & s^*(\tau)\le s\le\tau,\\ \left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y(\theta)Y^{-1}(\theta)Y^{-1}(s), & \tau<s\le s^*(\tau+\theta-0)\end{cases}=G(s,\tau).$$

5^0. Сначала проинтегрируем функцию (2.2.46)

$$\int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)}G(s,\tau)ds=$$

$$=\int\limits_{s^*(\tau)}^{\tau}\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y^{-1}(s+\theta)ds+\int\limits_{\tau}^{s^*(\tau+\theta-0)}\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y^{-1}(s)ds=$$

$$=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left\{\int\limits_{s^*(\tau)}^{\tau}Y^{-1}(s)Y^{-1}(\theta)ds+\int\limits_{\tau}^{s^*(\tau+\theta-0)}Y^{-1}(s)ds\right\}=$$

$$=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left\{Y^{-1}(\theta)\int\limits_{s^*(\tau)}^{\tau}Y^{-1}(s)ds+\int\limits_{\tau}^{s^*(\tau+\theta-0)}Y^{-1}(s)ds\right\}=$$

$$=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left\{Y^{-1}(\theta)\left(-C^{-1}\right)Y^{-1}(s)\Big|_{s^*(\tau)}^{\tau}+\left(-C^{-1}\right)Y^{-1}(s)\Big|_{\tau}^{s^*(\tau+\theta-0)}\right\}=$$

$$=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left(-C^{-1}\right)\left\{Y^{-1}(\theta)\left[Y^{-1}(\tau)-Y^{-1}(s^*(\tau))\right]+\right.$$
$$\left.+\left[Y^{-1}(s^*(\tau+\theta-0))-Y^{-1}(\tau)\right]\right\}=$$
$$=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left(-C^{-1}\right)\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(s^*(\tau)+\theta)+\right.$$
$$\left.+Y^{-1}(s^*(\tau)+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]=$$
$$=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left(-C^{-1}\right)\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]=-C^{-1}.$$

Зная значение последнего интеграла можно его оценить

$$\left|\int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)}\left|G(s,\tau)\right|ds\right|\le\left|\left(s^*(\tau+\theta-0)-s^*(\tau)\right)\left(-C^{-1}\right)\right|=\left|-\theta\cdot C^{-1}\right|\le\gamma.$$

Отметим, что свойство 4^0, связанное с пределами интеграла, следует из равенства

$$G\left(s^*(\tau+\theta-0),\tau\right)=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y^{-1}\left(s^*(\tau+\theta-0)\right)=$$

$$=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y^{-1}\left(s^*(\tau+\theta)\right)=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}Y^{-1}\left(s^*(\tau)+\theta\right)=G\left(s^*(\tau),\tau\right).$$

Следовательно, в силу свойства 5^0 из (2.2.48), решение (2.2.47) подчиняется оценке по норме

$$\left\|y^*\right\|\le\gamma\|\varphi\|, \tag{2.2.49}$$

где $\left\|y^*\right\|=\max\limits_{j=\overline{1,n}}\sup\limits_{R\times R^n}\left|y_j^*\left(\tau,\bar{t}_j\right)\right|$, $y^*=\left(y_1^*\left(\tau,\bar{t}_1\right),\ldots,y_n^*\left(\tau,\bar{t}_n\right)\right)$.

Поскольку разность двух $(\theta,\overline{\omega})$-периодических решений уравнения (2.2.35) является многопериодическим решением соответствующего однородного уравнения (2.2.23), то в силу условия (2.2.31) они совпадают. Следовательно, уравнение (2.2.35) имеет единственное $(\theta,\overline{\omega})$-периодическое решение.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.3. *При условиях* (2.2.31) *и* (2.2.36) *уравнение* (2.2.35) *допускает единственное* $(\theta,\overline{\omega})$*-периодическое решение вида* (2.2.47) *и справедлива оценка* (2.2.49).

Рассмотрим пример на построение матриканта и нахождение решения системы уравнения с помощью проекторов.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial\tau}+A\frac{\partial x}{\partial t}=Bx, \tag{2.2.50}$$

где $x=(x_1,x_2)$, $A=\begin{pmatrix}-4 & -6\\ 9 & 11\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-8 & -4\\ 9 & 4\end{pmatrix}$.

Запишем (2.2.50) в виде

$$\frac{\partial x}{\partial\tau}+\begin{pmatrix}-4 & -6\\ 9 & 11\end{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial t}=\begin{pmatrix}-8 & -4\\ 9 & 4\end{pmatrix}x. \tag{2.2.51}$$

В системе (2.2.51) произведем замену

$$x=Ky \tag{2.2.52}$$

с неособой ($|K|\ne 0$, $\exists K^{-1}$) постоянной матрицей

$$K=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Тогда получим следующую систему

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial t} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y .$$

Обе части последней системы умножаем слева на $K^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial t} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y . \qquad (2.2.53)$$

Упростив (2.2.53), получим

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial t} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y . \qquad (2.2.54)$$

Система (2.2.54) в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial \tau} + 2\dfrac{\partial y_1}{\partial t_1} = -2y_1, \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial \tau} + 5\dfrac{\partial y_2}{\partial t_2} = y_1 - 2y_2, \end{cases} \qquad (2.2.55)$$

здесь $D_1 = \dfrac{\partial}{\partial \tau} + 2\dfrac{\partial}{\partial t_1}$, $D_2 = \dfrac{\partial}{\partial \tau} + 5\dfrac{\partial}{\partial t_2}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Запишем систему (2.2.55) в симметрической форме и найдем характеристики

$$\frac{dt_1}{d\tau} = 2, \quad h_1 = t_1 - 2\tau, \; t_1 = h_1 + 2\left(\tau - \tau^0\right),$$
$$\frac{dt_2}{d\tau} = 5, \quad h_2 = t_2 - 5\tau, \; t_2 = h_2 + 5\left(\tau - \tau^0\right),$$

которые графически представляются в рисунке 2.2.2.

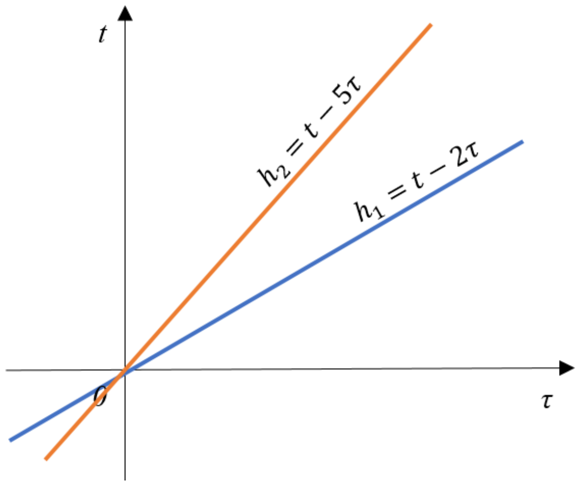

Рисунок 2.2.2 – Построение характеристик

Вдоль характеристик система (2.2.55) перейдет в систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\tau} = -2y_1, \\ \dfrac{dy_2}{d\tau} = y_1 - 2y_2. \end{cases} \tag{2.2.56}$$

Примем за начальное условие

$$y\Big|_{\tau=\tau^0} = \begin{pmatrix} \sin(h) \\ \cos(h) \end{pmatrix}$$

при $t_1\Big|_{\tau=\tau^0} = h_1$, $t_2\Big|_{\tau=\tau^0} = h_2$.

Пользуясь формулой (2.1.27) решения однородной системы, запишем общий вид решения системы (2.2.54)

$$y_1 = Y_{11}(\tau - \tau^0)P_1 \sin(h) + Y_{12}(\tau - \tau^0)P_1 \cos(h),$$
$$y_2 = Y_{21}(\tau - \tau^0)P_2 \sin(h) + Y_{22}(\tau - \tau^0)P_2 \cos(h).$$

Определим матрицант $Y(\tau)$. Для этого составим характеристическое уравнение системы (2.2.56)

$$\det|J - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решая уравнение

$$\left(\lambda+2\right)^2=0,$$

находим собственные значения матрицы J

$$\lambda_{1,2}=-2.$$

Так как характеристический многочлен это $\left(\lambda+2\right)^2$, то алгебраическая кратность равна 2, а геометрическая кратность равна 1, поскольку ранг матрицы $J-\lambda E$ равен 1.

Тогда матрицант системы (2.2.56) запишем в виде

$$Y(\tau)=\begin{pmatrix} e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} & 0 \\ \left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} & e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} \end{pmatrix}. \qquad (2.2.57)$$

Исходя из преобразования (2.2.52) имеем матрицант

$$X(\tau)=KY(\tau)K^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} & 0 \\ \left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} & e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}-2\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} & -2e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} \\ -e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}+3\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} & 3e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}-6\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} & -4\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} \\ 9\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} & e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}+6\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)} \end{pmatrix}. \qquad (2.2.57)$$

Введем проектор P, который обладает следующими свойствами:

1) $P^2=P$;

2) Пусть Ω – класс дифференцируемых вектор-функций $x^0(h)$.

Линейный оператор $P:\Omega\to\Omega$ является проектором, тогда и только тогда, когда существует подкласс $\overline{\Omega}$ функций класса Ω, при этом $Px^0(h)=x^0(h)$;

3) Пусть P_1 и P_2 проекторы, заданные в классе Ω, и проецирующие на подклассы $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ соответственно. Тогда P_1+P_2 проектор в подклассе $\overline{\Omega}_1\otimes\overline{\Omega}_2$, в том и только том случае когда $P_1P_2=P_2P_1=0$.

Действие проектора P на начальную функцию $x^0(h)$ можно показать графически в рисунке 2.2.3.

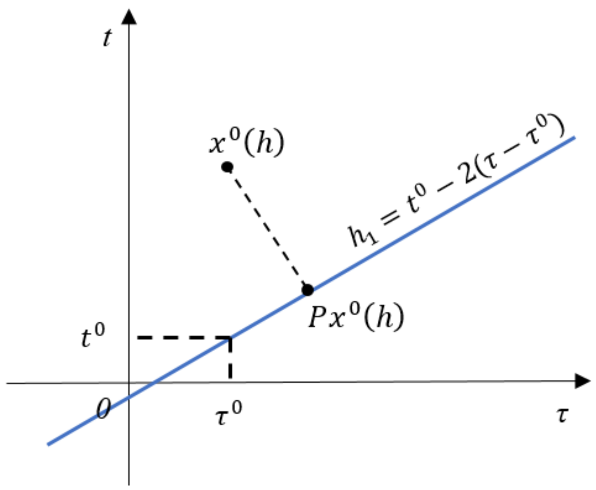

Рисунок 2.2.3 – Графическое представление действия проектора P

Общее решение системы (2.2.50) определяется соотношением

$$x(\tau, t-2\tau, t-5\tau) = X(\tau) P x^0 (t-2\tau, t-5\tau), \tag{2.2.58}$$

с произвольными дифференциальными вектор-функциями $x^0(h_1, h_2) = x^0(h) = (x_1^0(h), x_2^0(h))$ и оператором P действующим по правилу $X(\tau)P = \lfloor X_{ij}(\tau) P_i \rfloor$ с проекторами $P_i x_j^0(h) = x_j^0(h_i)$, $(i, j = 1,2)$, где $h_i = t - a_i \tau$,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$P_1 x_1^0(h) = x_1^0(h_1),\ P_1 x_2^0(h) = x_2^0(h_1),$$
$$P_2 x_1^0(h) = x_1^0(h_2),\ P_2 x_2^0(h) = x_2^0(h_2).$$

Из последнего

$$P_1 \sin(h) = \sin(h_1),\ P_1 \cos(h) = \cos(h_1),$$
$$P_2 \sin(h) = \sin(h_2),\ P_2 \cos(h) = \cos(h_2).$$

Следовательно, в силу (2.2.57) и (2.2.58) решение системы (2.2.50) представим в виде

$$x_1(\tau, t-2\tau) = \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} - 6(\tau-\tau^0) e^{-2(\tau-\tau^0)}\right) P_1 x_1^0(h) - 4(\tau-\tau_0) e^{-2(\tau-\tau^0)} P_1 x_2^0(h) =$$
$$= \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} - 6(\tau-\tau^0) e^{-2(\tau-\tau^0)}\right) x_1^0(t-2\tau) - 4(\tau-\tau^0) e^{-2(\tau-\tau^0)} x_2^0(t-2\tau),$$
$$x_2(\tau, t-5\tau) = 9(\tau-\tau^0) e^{-2\tau} P_2 x_1^0(h) + \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} + 6(\tau-\tau^0) e^{-2(\tau-\tau^0)}\right) P_2 x_2^0(h)$$
$$= 9(\tau-\tau^0) e^{-2(\tau-\tau^0)} x_1^0(t-5\tau) + \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} + 6(\tau-\tau^0) e^{-2(\tau-\tau^0)}\right) x_2^0(t-5\tau).$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
x_1(\tau, t-2\tau) = X_{11}(\tau) P_1 \sin(h) + X_{12}(\tau) P_1 \cos(h) = \\
= X_{11}(\tau)\sin(h_1) + X_{12}(\tau)\cos(h_1) = X_{11}(\tau)\sin(t-2\tau) + X_{12}(\tau)\cos(t-2\tau), \\
x_2(\tau, t-5\tau) = X_{21}(\tau) P_2 \sin(h) + X_{22}(\tau) P_2 \cos(h) = \\
= X_{21}(\tau)\sin(h_2) + X_{22}(\tau)\cos(h_2) = X_{11}(\tau)\sin(t-5\tau) + X_{12}(\tau)\cos(t-5\tau).
\end{gathered}
$$

Таким образом, система (2.2.50) имеет решение вида

$$
\begin{gathered}
x_1(\tau, t-2\tau) = \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} - 6(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)}\right) P_1 \sin(h) - 4(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)} P_1 \cos(h) = \\
= \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} - 6(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)}\right)\sin(h_1) - 4(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)}\cos(h_1) = \\
= \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} - 6(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)}\right)\sin(t-2\tau) - 4(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)}\cos(t-2\tau), \\
x_2(\tau, t-5\tau) = 9(\tau-\tau^0)e^{-2\tau} P_2 \sin(h) + \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} + 6(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)}\right) P_2 \cos(h) = \\
= 9(\tau-\tau^0)e^{-2\tau}\sin(h_2) + \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} + 6(\tau-\tau^0)\right)e^{-2(\tau-\tau^0)}\cos(h_2) = \\
= 9(\tau-\tau^0)\sin(t-5\tau) + \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} + 6(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)}\right)\cos(t-5\tau).
\end{gathered}
$$

Приступим к рассмотрению примера для неоднородной системы уравнений

$$
\frac{\partial x}{\partial \tau} + A\frac{\partial x}{\partial t} = Bx + f(\tau, t), \tag{2.2.59}
$$

где $x = (x_1, x_2)$, $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$, $f(\tau, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\pi\tau \cdot \cos 2t \end{pmatrix}$.

Запишем (2.2.59) в виде

$$
\frac{\partial x}{\partial \tau} + \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\pi\tau \cdot \cos 2t \end{pmatrix}.
$$

Решение однородной системы соответствующей системе (2.2.59) имеет вид

$$
\begin{gathered}
x_1(\tau, t-2\tau) = \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} - 6(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)}\right) h_1(t-2\tau) - 4(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)} h_2(t-2\tau), \\
x_2(\tau, t-5\tau) = 9(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)} h_1(t-5\tau) + \left(e^{-2(\tau-\tau^0)} + 6(\tau-\tau^0)e^{-2(\tau-\tau^0)}\right) h_2(t-5\tau).
\end{gathered}
$$

Далее,

$$
x\left(\tau, t, \tau^0, h(\tau^0, \tau, t)\right) = X(\tau-\tau^0) P x^0\left(h(\tau^0, \tau, t)\right) + \tilde{x}(\tau^0, \tau, t) \tag{2.2.60}
$$

представляет собой общее решение системы (2.2.59), где $\tilde{x}\left(\tau^0,\tau,t\right)=\int\limits_{\tau^0}^{\tau} X(\tau-s)Pf(s,h(s,\tau,t))ds$ – частное решение системы (2.2.59), $x^0(h)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Подставив входные данные в (2.2.60) и используя свойства проектора P имеем общее решение уравнения (2.2.59)

$$x_1\left(\tau,t,\tau^0,h\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)=\left(e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}-6\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}\right)x_1^0(t-2\tau+2s)-$$

$$-4\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}x_2^0(t-2\tau+2s)-\int\limits_{\tau^0}^{\tau}4(\tau-s)e^{-2(\tau-s)}\cos\pi s\cos[2(t-2\tau+2s)]ds,$$

$$x_2\left(\tau,t,\tau^0,h\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)=9\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}x_1^0(t-5\tau+5s)+$$

$$+\left(e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}+6\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}\right)x_2^0(t-5\tau+5s)+$$

$$+\int\limits_{\tau^0}^{\tau}\left(e^{-2(\tau-s)}+6(\tau-s)e^{-2(\tau-s)}\right)\cos\pi s\cos[2(t-5\tau+5s)]ds.$$

Далее, вычислив интералы получим общее решение уравнения (2.2.59) в виде

$$x_1\left(\tau,t,\tau^0,h\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)=\left(e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}-6\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}\right)x_1^0\left(t-2\tau+2\tau^0\right)-$$

$$-4\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}x_2^0\left(t-2\tau+2\tau^0\right)+$$

$$+2\tau e^{-2\tau}\left\{\frac{4+\pi}{4+(4+\pi)^2}\left[e^{2\tau}\sin(2t+\pi\tau)-e^{2\tau^0}\sin\left(2t-4\tau+(4+\pi)\tau^0\right)\right]+\right.$$

$$\frac{2}{4+(4+\pi)^2}\left[e^{2\tau}\cos(2t+\pi\tau)-e^{2\tau^0}\cos\left(2t-4\tau+(4+\pi)\tau^0\right)\right]+$$

$$+\frac{4-\pi}{4+(4-\pi)^2}\left[e^{2\tau}\sin(2t-\pi\tau)-e^{2\tau^0}\sin\left(2t-4\tau+(4-\pi)\tau^0\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{2}{4+(4-\pi)^2}\left[e^{2\tau}\cos(2t-\pi\tau)-e^{2\tau^0}\cos\left(2t-4\tau+(4-\pi)\tau^0\right)\right]\right\}-$$

$$-4e^{-2\tau}\left\{\left(\frac{(4+\pi)\tau}{4+(4+\pi)^2}-\frac{4(4+\pi)}{\left(4+(4+\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau}\sin(2t+\pi\tau)+\right.$$

$$+\left(\frac{2\tau}{4+(4+\pi)^2}+\frac{(4+\pi)^2-4}{\left(4+(4+\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau}\cos(2t+\pi\tau)+$$

$$+\left(-\frac{(4+\pi)\tau^0}{4+(4+\pi)^2}+\frac{4(4+\pi)}{\left(4+(4+\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau^0}\sin\left(2t-4\tau+(4+\pi)\tau^0\right)+$$

$$+\left(-\frac{2\tau^0}{4+(4+\pi)^2}+\frac{4-(4+\pi)^2}{\left(4+(4+\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau^0}\cos\left(2t-4\tau+(4+\pi)\tau^0\right)+$$

$$+\left(\frac{(4-\pi)\tau}{4+(4-\pi)^2}-\frac{4(4-\pi)}{\left(4+(4-\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau}\sin(2t-\pi\tau)+$$

$$+\left(\frac{2\tau}{4+(4-\pi)^2}+\frac{(4-\pi)^2-4}{\left(4+(4-\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau}\cos(2t-\pi\tau)+$$

$$+\left(-\frac{(4-\pi)\tau^0}{4+(4-\pi)^2}+\frac{4(4-\pi)}{\left(4+(4-\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau^0}\sin\left(2t-4\tau+(4-\pi)\tau^0\right)+$$

$$+\left.\left(-\frac{2\tau^0}{4+(4-\pi)^2}+\frac{4-(4-\pi)^2}{\left(4+(4-\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau^0}\cos\left(2t-4\tau+(4-\pi)\tau^0\right)\right\},$$

$$x_2\left(\tau,t,\tau^0,h\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)=9\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}x_1^0(t-5\tau+5s)+$$

$$+\left(e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}+6\left(\tau-\tau^0\right)e^{-2\left(\tau-\tau^0\right)}\right)x_2^0(t-5\tau+5s)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}e^{-2\tau}+3\tau e^{-2\tau}\right)\left\{\frac{10+\pi}{4+(10+\pi)^2}\left[e^{2\tau}\sin(2t+\pi\tau)-e^{2\tau^0}\sin\left(2t-10\tau+(10+\pi)\tau^0\right)\right]+\right.$$

$$+\frac{2}{4+(10+\pi)^2}\left[e^{2\tau}\cos(2t+\pi\tau)-e^{2\tau^0}\cos\left(2t-10\tau+(10+\pi)\tau^0\right)\right]+$$

$$+\frac{10-\pi}{4+(10-\pi)^2}\left[e^{2\tau}\sin(2t-\pi\tau)-e^{2\tau^0}\sin\left(2t-10\tau+(10-\pi)\tau^0\right)\right]+$$

$$+\left.\frac{2}{4+(10-\pi)^2}\left[e^{2\tau}\cos(2t-\pi\tau)-e\,\tau^0\cos\left(2t-10\tau+(10-\pi)\tau^0\right)\right]\right\}-$$

$$+3e^{-2\tau}\left\{\left(\frac{(10+\pi)\tau}{4+(10+\pi)^2}-\frac{4(10+\pi)}{\left(4+(10+\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau}\sin(2t+\pi\tau)+\right.$$

$$+\left(\frac{2\tau}{4+(10+\pi)^2}+\frac{(10+\pi)^2-4}{\left(4+(10+\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau}\cos(2t+\pi\tau)+$$

$$+\left(-\frac{2\tau^0}{4+(10+\pi)^2}+\frac{4-(10+\pi)^2}{\left(4+(10+\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau^0}\cos\left(2t-10\tau+(10+\pi)\tau^0\right)+$$

$$+\left(-\frac{(10+\pi)\tau^0}{4+(10+\pi)^2}+\frac{4(10+\pi)}{\left(4+(10+\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau^0}\sin\left(2t-10\tau+(10+\pi)\tau^0\right)+$$

$$+\left(\frac{(10-\pi)\tau}{4+(10-\pi)^2}-\frac{4(10-\pi)}{\left(4+(10-\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau}\sin(2t-\pi\tau)+$$

$$+\left(\frac{2\tau}{4+(10-\pi)^2}+\frac{(10-\pi)^2-4}{\left(4+(10-\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau}\cos(2t-\pi\tau)+$$

$$+\left(-\frac{(10-\pi)\tau^0}{4+(10-\pi)^2}+\frac{4(10-\pi)}{\left(4+(10-\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau^0}\sin\left(2t-10\tau+(10-\pi)\tau^0\right)+$$

$$\left.+\left(-\frac{2\tau^0}{4+(10-\pi)^2}+\frac{4-(10-\pi)^2}{\left(4+(10-\pi)^2\right)^2}\right)e^{2\tau^0}\cos\left(2t-10\tau+(10-\pi)\tau^0\right)\right\}.$$

Далее рассмотрим пример трехмерного уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}+A\frac{\partial x}{\partial t}=Bx, \tag{2.2.61}$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)$, $A=\begin{pmatrix}18 & 24{,}5 & 14{,}5\\ 16 & 19 & 13\\ -48 & -61 & -39\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 8 & 4\\ 16 & 20 & 13\\ -32 & -39 & -24\end{pmatrix}$.

В системе (2.2.61) произведем замену

$$x=Ky \tag{2.2.62}$$

с неособой постоянной матрицей $K=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}$.

Слева умножаем обе части уравнения (2.2.61) на $K^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & -5{,}5 & -3{,}5\\ 3 & 3{,}5 & 2{,}5\\ 2 & 2{,}5 & 1{,}5\end{pmatrix}$.

Имеем

$$\begin{pmatrix}-4 & -5{,}5 & -3{,}5\\ 3 & 3{,}5 & 2{,}5\\ 2 & 2{,}5 & 1{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$J = K^{-1}AK = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = K^{-1}BK = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, уравнение (2.2.61) примет вид

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + J\frac{\partial y}{\partial t} = Cy$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y. \tag{2.2.63}$$

Запишем (2.2.63) в координатной форме

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial \tau} - 2\dfrac{\partial y_1}{\partial t} = y_1, \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial \tau} - 2\dfrac{\partial y_2}{\partial t} = -y_2, \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial \tau} + 2\dfrac{\partial y_3}{\partial t} = 3y_3 \end{cases} \tag{2.2.64}$$

здесь $D_1 = D_2 = \dfrac{\partial}{\partial \tau} - 2\dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_3 = \dfrac{\partial}{\partial \tau} + 2\dfrac{\partial}{\partial t}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Система (2.2.64) имеет характеристики

$$h_1 = t_1 + 2\tau, \quad h_2 = t_2 + 2\tau, \quad h_3 = t_3 - 2\tau.$$

Матрицант системы (2.2.63) представляется в виде

$$Y(\tau)=\begin{pmatrix} e^{(\tau-\tau^0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(\tau-\tau^0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3(\tau-\tau^0)} \end{pmatrix}. \tag{2.2.65}$$

Общее решение системы (2.2.61) определяется соотношением

$$y(\tau,t+2\tau,t+2\tau,t-2\tau)=Y(\tau)Py^0(t+2\tau,t+2\tau,t-2\tau), \tag{2.2.66}$$

с произвольными дифференциальными вектор-функциями $y^0(h_1,h_2,h_3)=y^0(h)=\left(y_1^0(h),y_2^0(h),y_3^0(h)\right)$ и оператором P действующим по правилу $Y(\tau)P=\lfloor Y_{ij}(\tau)P_i\rfloor$ с проекторами $P_i y_j^0(h)=y_j^0(h_i)$, $i,j=1,2,3$, где $h_i=t-a_i\tau$,

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу (2.2.65) и (2.2.66) решение системы (2.2.63) представим в виде

$$\begin{gathered} y_1(\tau,h)=e^{(\tau-\tau^0)}P_1y_1^0(h)=e^{(\tau-\tau^0)}y_1^0(h_1), \\ y_2(\tau,h)=e^{-(\tau-\tau^0)}P_2y_2^0(h)=e^{-(\tau-\tau^0)}y_2^0(h_2), \\ y_3(\tau,h)=e^{3(\tau-\tau^0)}P_3y_1^0(h)=e^{3(\tau-\tau^0)}y_3^0(h_3), \end{gathered}$$

в векторной форме

$$y(\tau,h)=Y(\tau)Py^0(h)=\begin{pmatrix} e^{(\tau-\tau^0)}y_1^0(h_1) \\ e^{-(\tau-\tau^0)}y_2^0(h_2) \\ e^{3(\tau-\tau^0)}y_3^0(h_3) \end{pmatrix}.$$

Используя замену (2.2.62) получим

$$x(\tau,h)=Ky(\tau,h)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(\tau-\tau^0)}y_1^0(h_1) \\ e^{-(\tau-\tau^0)}y_2^0(h_2) \\ e^{3(\tau-\tau^0)}y_3^0(h_3) \end{pmatrix}=$$

$$
=\begin{pmatrix} 2e^{(\tau-\tau^0)}y_1^0(h_1)+e^{-(\tau-\tau^0)}y_2^0(h_2)+3e^{3(\tau-\tau^0)}y_3^0(h_3) \\ -e^{(\tau-\tau^0)}y_1^0(h_1)-2e^{-(\tau-\tau^0)}y_2^0(h_2)+1e^{3(\tau-\tau^0)}y_3^0(h_3) \\ -e^{(\tau-\tau^0)}y_1^0(h_1)+2e^{-(\tau-\tau^0)}y_2^0(h_2)-5e^{3(\tau-\tau^0)}y_3^0(h_3) \end{pmatrix}.
$$

Примем за начальное условие

$$
y^0(h)=\begin{pmatrix} \sin h \\ \sin 2h \\ \sin 3h \end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$
x(\tau,h)=Ky(\tau,h)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(\tau-\tau^0)}\sin h_1 \\ e^{-(\tau-\tau^0)}\sin 2h_2 \\ e^{3(\tau-\tau^0)}\sin 3h_3 \end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix} 2e^{(\tau-\tau^0)}\sin h_1+e^{-(\tau-\tau^0)}\sin 2h_2+3e^{3(\tau-\tau^0)}\sin 3h_2 \\ -e^{(\tau-\tau^0)}\sin h_1-2e^{-(\tau-\tau^0)}\sin 2h_2+1e^{3(\tau-\tau^0)}\sin 3h_2 \\ -e^{(\tau-\tau^0)}\sin h_1+2e^{-(\tau-\tau^0)}\sin 2h_2-5e^{3(\tau-\tau^0)}\sin 3h_2 \end{pmatrix}.
$$

2.2.3 Применение метода введения дополнительных переменных к исследованию краевой задачи для гиперболической в узком смысле системы

Искомая вектор-функция $x(\tau,t)=(x_1(\tau,t),\ldots,x_n(\tau,t))$ переменной $\tau\in R=(-\infty,+\infty)$ и вектор-переменной $t=(t_1,\ldots,t_m)\in R\times\ldots\times R=R^m$ определяется системой

$$
Dx=B(\tau,t)x+f(\tau,t) \qquad (2.2.67)
$$

и граничным условием

$$
\Gamma_0(t)x(0,t)-\Gamma_\theta(t)x(\theta,t)=0, \qquad (2.2.68)
$$

где D – оператор дифференцирования

$$
Dx\equiv\frac{\partial x}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial x}{\partial t_k} \qquad (2.2.69)
$$

с постоянными матричными коэффициентами $A_1,\dots,A_m$, все собственные значения каждой из них $\lambda_{kj}=\lambda_j(A_k)$, $k=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ составляют спектр с простыми элементарными делителями

$$(\lambda_{k1},\dots,\lambda_{kn})\in \text{СПЭД}; \qquad (2.2.70)$$

$B(\tau,t)$ – $n\times n$-матрица, обладающая свойствами (θ,ω)-периодичности и гладкости порядка $(0,e)$ по (τ,t)

$$B(\tau+\theta,t+\omega)=B(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(0,e)}\left(R\times R^m\right) \qquad (2.2.71)$$

с m-вектором $e=(1,\dots,1)$; вектор-функция $f(\tau,t)=(f_1(\tau,t),\dots,f_n(\tau,t))$ удовлетворяет аналогичному условию

$$f(\tau+\theta,t+\omega)=f(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(0,e)}\left(R\times R^m\right) \qquad (2.2.72)$$

с периодом $\theta>0$ по τ и вектор-периодом $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_m)$, причем $\omega_0=\theta,\omega_1,\dots,\omega_m$ – рационально несоизмеримые; $\Gamma_0(t)$ и $\Gamma_\theta(t)$ – $n\times n$-матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\Gamma_0(t+\omega)=\Gamma_0(t)\in C_t^{(e)}\left(R^m\right), \qquad \Gamma_\theta(t+\omega)=\Gamma_\theta(t)\in C_t^{(e)}\left(R^m\right), \qquad (2.2.73)$$

которые при $\Gamma_0(t)=\Gamma_\theta(t)=E$-единичной матрице условие (2.2.68) обращают в условие многопериодичности решения периодов (θ,ω).

Основная задача заключается в выяснении условий дополнительных к условиям (2.2.70)-(2.2.73), обеспечивающих разрешимость задачи (2.2.67)-(2.2.68) с оператором (2.2.69).

В силу условия (2.2.70), линейной заменой

$$x=Ky, \qquad (2.2.74)$$

задачу представим в виде

$$D^*y=C(\tau,t)y+\varphi(\tau,t), \qquad (2.2.75)$$

$$T_0(t)y(0,t)-T_\theta(t)y(\theta,t)=0 \qquad (2.2.76)$$

с оператором дифференцирования

$$D^* \equiv \frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m} J_k \frac{\partial}{\partial t_k}, \qquad (2.2.77)$$

где $J_k = K^{-1} A_k K$, $C(\tau,t) = K^{-1} B(\tau,t) K$, $\varphi(\tau,t) = K^{-1} f(\tau,t)$, $T_0(t) = K^{-1}\Gamma_0(t) K$, $T_\theta(t) = K^{-1}\Gamma_\theta(t) K$, причем $J_k = diag[\lambda_{k1},...,\lambda_{kn}]$.

Для исследования задачи (2.2.75)-(2.2.76) с оператором (2.2.77) будем пользоваться методом, описанным в подразделе 2.2.2.

Оператором $\Pi = diag[\Pi_1,...,\Pi_n]$ вводим переменные $t_{k1} = t_{k2} = ... = t_{kn} = t_k$ и оператор (2.2.77) запишем в виде

$$D_j^* \equiv \frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m} J_k \frac{\partial}{\partial t_{kj}}, \ j = \overline{1,n}. \qquad (2.2.78)$$

Определим характеристики оператора (2.2.78) уравнениями

$$\frac{dt_{kj}}{\partial\tau} = \lambda_{kj}. \qquad (2.2.79)$$

Из уравнений (2.2.79) получим

$$h_{kj}\left(\tau, \tau^0, t_{kj}^0\right) = \lambda_{kj}\left(\tau - \tau^0\right) + t_{kj}^0. \qquad (2.2.80)$$

Введем операторы $P = diag[P_1,...,P_n]$, где P_j действует на $(t_{1i},...,t_{mi}) = \bar{t}_i$ в виде

$$P_j \bar{t}_i = P_j(t_{1i},...,t_{mi}) = (t_{1j},...,t_{mj}) = \bar{t}_j,$$

причем $P_j \bar{t}_i = \bar{t}_j$.

Очевидно, что проектор P_j вектор-переменную $\bar{t}_i$ переводит на равносильную вектор-переменную $\bar{t}_j = P_j \bar{t}_i$, но следует отметить, что изменение индекса имеет важное значение при определении характеристик $\overline{h}_j = \overline{h}_i$ при $j \neq i$.

Рассматривая задачу (2.2.75)-(2.2.76) с оператором (2.2.77) вдоль характеристик (2.2.80) имеем систему уравнений скалярного вида

$$\frac{d}{\partial s} y_j\left(s, h_{1j}\left(s, \tau^0, t_{1k}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(s, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_{ji}\left(s, h_{1j}\left(s, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(s, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) y_i\left(s, h_{1i}\left(s, \tau^0, t_{1i}^0\right), \ldots, h_{mr}\left(s, \tau^0, t_{mi}^0\right)\right) + \quad (2.2.81)$$
$$+ \varphi_j\left(s, h_{1j}\left(s, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(s, \tau^0, t_{mkj}^0\right)\right)$$

с граничными условиями

$$\sum_{i=1}^{n} T_{ji}\left(h_{1j}\left(0, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(0, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) y_i\left(0, h_{1i}\left(0, \tau^0, t_{1i}^0\right), \ldots, h_{mi}\left(0, \tau^0, t_{mi}^0\right)\right) =$$
$$= \sum_{r=1}^{n} T_{ji}\left(h_{1j}\left(\theta, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(\theta, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) y_i\left(\theta, h_{1i}\left(\theta, \tau^0, t_{1i}^0\right), \ldots, h_{mi}\left(\theta, \tau^0, t_{mi}^0\right)\right) \quad (2.2.82)$$

и оператором дифференцирования

$$\frac{d}{\partial s} y_j\left(s, h_{1j}\left(s, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(s, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) = D_j^* y_j\left(\tau, t_{1j}, \ldots, t_{mj}\right)\Big|_{\substack{\tau = s \\ t_{kj} = h_{kj}\left(s, \tau^0, t_{kj}^0\right)}}, \quad (2.2.83)$$

где $\lfloor c_{ji}(\tau, t) \rfloor = C(\tau, t)$.

Далее, в выражениях (2.2.81)-(2.2.82), связанные с j-ой строкой системы, вследствии воздействия проектора P_j, временные переменные t_{ki}, $i = \overline{1, n}$ переходят в t_{kj}, $j = \overline{1, n}$. При этом, в частности, t_{ki}^0 переходит в t_{kj}^0.

Тогда после применения проектора P_j задача (2.2.81)-(2.2.82) принимает вид

$$\frac{d}{\partial s} y_j\left(s, h_{1j}\left(s, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(s, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_{ji}\left(s, h_{1j}\left(s, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(s, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) y_i\left(s, h_{1j}\left(s, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(s, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) + \quad (2.2.84)$$
$$+ \varphi_j\left(s, h_{1j}\left(s, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(s, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_{ji}\left(h_{1j}\left(0, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(0, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) y_i\left(0, h_{1j}\left(0, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(0, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} T_{ji}\left(h_{1j}\left(\theta, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(\theta, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) y_i\left(\theta, h_{1j}\left(\theta, \tau^0, t_{1j}^0\right), \ldots, h_{mj}\left(\theta, \tau^0, t_{mj}^0\right)\right) \quad (2.2.85)$$

с той разницей, что t_{ki}^0 заменены на t_{kj}^0.

Условие (2.2.85) с учетом того, что $h_{kj}\left(0,\tau^0,t_{kj}^0\right)=t_{kj}^0$, можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n} T_{ji}\left(t_{1j}^0,\ldots,t_{mj}^0\right) y_i\left(0,t_{1j}^0,\ldots,t_{mj}^0\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} T_{ji}\left(h_{1j}\left(\theta,\tau^0,t_{1j}^0\right),\ldots,h_{mj}\left(\theta,\tau^0,t_{mj}^0\right)\right) y_i\left(\theta,h_{1j}\left(\theta,\tau^0,t_{1j}^0\right),\ldots,h_{mj}\left(\theta,\tau^0,t_{mj}^0\right)\right). \tag{2.2.86}$$

Таким образом, рассматриваемая задача представлена в виде (2.2.84)-(2.2.86) на основе функций y_i переменных $\left(s,\tau^0,t_{1j}^0,\ldots,t_{mj}^0\right)$.

Далее, изучим начальную задачу для системы (2.2.84), а затем перейдем к исследованию краевой задачи (2.2.84), (2.2.86), пользуясь методом характеристик.

Соотношение (2.2.83) показывает, что левая часть системы (2.2.84) является полной производной неизвестной функции вдоль характеристик. Следовательно, интегрирование системы (2.2.84) проводится вдоль первых интегралов $t_{kj}^0=h_{kj}\left(\tau^0,\tau,t_{kj}\right)$.

Тогда учитывая, что $h_{kj}\left(s,\tau^0,h_{kj}\left(\tau^0,\tau,t_{kj}\right)\right)=h_{kj}\left(s,\tau,t_{kj}\right)$ и $h_{kj}\left(\tau,\tau,t_{kj}\right)=t_{kj}$, интегрированием системы (2.2.84) от τ^0 до τ получим

$$y_j\left(\tau,t_{1j},\ldots,t_{mj}\right)=y_j\left(\tau^0,h_{1j}\left(\tau^0,\tau,t_{1j}\right),\ldots,h_{mj}\left(\tau^0,\tau,t_{mj}\right)\right)+$$
$$+\int_{\tau^0}^{\tau}\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\left(s,h_{1j}\left(s,\tau,t_{1j}\right),\ldots,h_{mj}\left(s,\tau,t_{mj}\right)\right) y_i\left(s,h_{1i}\left(s,\tau^0,h_{1j}\left(\tau^0,\tau,t\right)\right),\ldots,h_{mi}\left(s,\tau^0,h_{mj}\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)\right)ds+$$
$$+\int_{\tau^0}^{\tau}\varphi_j\left(s,h_{1j}\left(s,\tau^0,t_{1j}\right),\ldots,h_{mj}\left(s,\tau^0,t_{mj}\right)\right)ds. \tag{2.2.87}$$

Таким образом, получим методику применения метода характеристик к решению задач для систем с матричным оператором дифференцирования.

В подразделе 2.2.2 построена общая теория системы (2.2.75) с оператором (2.2.77), связанная с разрешимостью начальной задачи для нее. На этой основе переходим к исследованию краевой задачи (2.2.75)-(2.2.76).

Очевидно, что операторы Π и P обратимые. Следовательно, из решения интегральной системы (2.2.87) однозначно определяется решение начальной задачи системы (2.2.75).

Отметим, что однозначная разрешимость начальной задачи для системы (2.2.75) с условием

$$y\left(\tau^0,\bar{t}\right)=y^0\left(\bar{t}\right)=y\left(\bar{t}+\overline{\omega}\right)\in C_{\bar{t}}^{(\bar{e})}\left(R^{mn}\right),$$

описанным методом доказана в разделе 2.2.2.

Этот результат применительно к данной задаче можно сформулировать в виде нижеследующей теоремы.

Теорема 2.2.4. *При условиях* (2.2.70)-(2.2.72) *начальная задача для системы* (2.2.67) *с условием*

$$x\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(\bar{t}) \in C_{\bar{t}}^{(\bar{e})}(R^{mn})$$

однозначно разрешима в пространстве гладких при $(\tau,\bar{t}) \in \overline{R}_\delta \times R^{mn}$ *n-вектор-функций, где* $R_\delta = \{\tau : |\tau - \tau^0| < \delta\}$, $\delta = const > 0$, $\overline{R}_\delta$ *– замыкание* R_δ.

Рассматриваемая краевая задача (2.2.67)-(2.2.68) с оператором (2.2.69) исследована в частном случае, когда $A_1 = \ldots = A_m = E$ и Γ_0 и Γ_θ – постоянные в работах Харасахала-Умбетжанова-Сартабанова на основе метода характеристик. В данном случае соотношениями (2.2.74)-(2.2.87) обоснована применимость метода характеристик и в случае матричного оператора дифференцирования (2.2.69). Следовательно, краевая задача (2.2.67)-(2.2.68) исследуется той же методикой, которая применялась в этих работах. В связи с этим предположим, что гладкая ω-периодическая по $t \in R^m$ матрица

$$\Gamma_0(t) - \Gamma_\theta(t)X(\theta,t) = \Gamma(t) \in C_t^{(e)}(R^m) \tag{2.2.88}$$

обратима, то есть, существует матрица $\Gamma^{-1}(t)$, удовлетворяющая соответствующему условию:

$$\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t) = E \tag{2.2.89}$$

где $X(\tau,t)$ – матрицант однородной системы, соответствующей системе (2.2.67); E – единичная матрица.

При условиях теоремы 2.2.4 с дополнительными требованиями (2.2.88)-(2.2.89) нетрудно установить существование матричной функции типа Грина $G(s,\tau,t)$, $s \in [0,\theta]$, $\tau \in [0,\theta]$, $t \in R^m$ данной задачи со свойствами

$$\begin{aligned}
&1^0.\ DG(s,\tau,t) = B(\tau,t)G(s,\tau,t),\ s \neq \tau;\\
&2^0.\ \Gamma_0(t)G(s,0,t) - \Gamma_\theta(t)G(s,\theta,t) = 0;\\
&3^0.\ G(s,s+0,t) - G(s,s-0,t) = E;\\
&4^0.\ G(s+\theta,\tau+\theta,t+\omega) - G(s,\tau,t) = 0
\end{aligned} \tag{2.2.90}$$

и представить искомое решение задачи (2.2.67)-(2.2.68) в виде

$$x^*(\tau,t)=\int\limits_{\tau^0}^{\tau} G(s,\tau,t)f(s,h(s,\tau,t))ds. \qquad (2.2.91)$$

Таким образом, имеем теорему.

Теорема 2.2.5. *При условиях* (2.2.70)-(2.2.73) *и* (2.2.89) *краевая задача* (2.2.67)-(2.2.68) *имеет единственное решение вида* (2.2.91).

Доказательство. Нетрудно проверить, что (2.2.91) удовлетворяет системе (2.2.67) и граничному условию (2.2.68) на основе свойства (2.2.90) функци Грина $G(s,\tau,t)$. Функция Грина строится при помощи матриканта $X(\tau,t)$ системы (2.2.67) и свойств 1^0-4^0. Единственность задачи следует из условия (2.2.89).

Далее, в заключении приводим периодическую краевую задачу для системы гиперболического типа с двумя различными операторами дифференцирования в классе многопериодических решений в широком смысле.

Рассмотрим на $\overline{\Omega}=\{(\tau,t):0\le\tau\le T,\tau\le t\le\tau+\tilde{q}\}$, $T>0$, $\tilde{q}>0$ задачу для системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial x}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\frac{\partial x}{\partial t_k}=B(\tau,t)x+f(\tau,t),\ x\in R^n \qquad (2.2.92)$$

$$x(0,t)-x(T,t+T)=0,\ t\in[0,\tilde{q}]. \qquad (2.2.93)$$

Здесь $x(\tau,t)$ – искомый n-вектор-столбец; Φ_k – постоянные $(n\times n)$-матрицы; $(n\times n)$-матрица $B(\tau,t)$ и n-вектор-функция $f(\tau,t)$ непрерывны по τ и t на $\overline{\Omega}$, многопериодичны по τ, t с вектор-периодом (θ,ω) и выполняется условия

$$B(\tau+p_0\theta,t+p\omega)=B(\tau,t),$$
$$f(\tau+p_0\theta,t+p\omega)=f(\tau,t),$$

где p_i – целые числа, $i=\overline{0,n}$, $p\omega=(p_1\omega_1,p_2\omega_2,...,p_n\omega_n)$ – n-вектор.

Предположим, что в системе уравнений (2.2.92) матрицы Φ_k являются постоянными и имеют вид

$$\Phi_k=diag\left[\underbrace{b_k,...,b_k}_{r},\underbrace{c_k,...,c_k}_{l}\right],\ b_k\ne c_k,\ r+l=n.$$

Введем операторы

$$D_b = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial}{\partial t_k},$$

$$D_c = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial}{\partial t_k},$$

действующие на первые r и на последующие l координат искомой n-вектор-функции $x(\tau,t)$. Тогда система (2.2.92) распадается на две подсистемы с различными операторами дифференцирования.

Тогда задача (2.2.92)-(2.2.93) сводится к задаче для гиперболической системы уравнений с различными операторами дифференцирования и в координатной форме имеет вид

$$\begin{aligned} &D_b x_i = B_i(\tau,t)x_i + f_i(\tau,t),\ x_i \in R^n,\ i=\overline{1,r}, \\ &D_c x_i = B_j(\tau,t)x_j + f_j(\tau,t),\ x_j \in R^n,\ j=\overline{r+1,n}, \end{aligned} \tag{2.2.94}$$

$$\begin{aligned} &x_i(0,t) - x_i(T,t+T) = 0,\ t \in [0,\tilde{q}],\ i=\overline{1,r}, \\ &x_j(0,t) - x_j(T,t+T) = 0,\ t \in [0,\tilde{q}],\ j=\overline{r+1,n}. \end{aligned} \tag{2.2.95}$$

Будем считать, что выполнены условия (Π_0), если: симметрические $(n\times n)$-матрицы $B_i(\tau,t)$, $B_j(\tau,t)$ и n-вектор-функции $f_i(\tau,t)$, $f_j(\tau,t)$, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{r+1,n}$ непрерывны на $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ и многопериодичны по τ, t с вектор-периодом (θ,ω) и выполняются условия

$$\begin{aligned} &B_i(\tau+p_0\theta, t+p\omega) = B_i(\tau,t),\ B_j(\tau+p_0\theta, t+p\omega) = B_j(\tau,t),\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{r+1,n} \\ &f_i(\tau+p_0\theta, t+p\omega) = f_i(\tau,t),\ f_j(\tau+p_0\theta, t+p\omega) = f_j(\tau,t),\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{r+1,n}. \end{aligned}$$

Краевая задача эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &x_i(\tau,h_b) = -\int_0^T \tilde{V}_i^{-1}(\tau,h_b)d\tau \int_0^T \left[\tilde{V}_i(\tau,h_b)\int_t^\tau \left\{\tilde{V}_i(s,h_b)x_i(s,h_b) + \tilde{f}_i(s,h_b)\right\}ds + \tilde{f}_i(\tau,h_b)\right]d\tau, \\ &x_j(\tau,h_c) = \\ &= -\int_0^T \tilde{V}_j^{-1}(\tau,h_b)d\tau \int_0^T \left[\tilde{V}_j(\tau,h_c)\int_t^\tau \left\{\tilde{V}_j(s,h_c)x_j(s,h_c) + \tilde{f}_j(s,h_c)\right\}ds + \tilde{f}_j(\tau,h_c)\right]d\tau, \end{aligned} \tag{2.2.96}$$

где $\tilde{V}_i(\tau,h_b)$, $\tilde{V}_j(\tau,h_c)$ – фундаментальные матрицы решений однородной системы, соответствующей (2.2.94); $h_b = t - b\tau$, $h_c = t - c\tau$.

Задача (2.2.94)-(2.2.95) приводится к периодической задаче семейства обыкновенных дифференциальных уравнений, которая эквивалентна системе интегральных уравнений (2.2.96) и исследуется итерационным методом. Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2.2.6. *Если матрицы* $\widetilde{B}_i(\tau, h_b)$, $\widetilde{B}_j(\tau, h_c)$ *и вектор-функции* $\widetilde{f}_i(\tau, h_b)$, $\widetilde{f}_j(\tau, h_c)$ *непрерывны и многопериодичны, то задача* (2.2.94)-(2.2.95) *имеет* (θ, ω)*-периодическое решение* $x_i^*(\tau, h_b)$, $x_j^*(\tau, h_c)$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{r+1, n}$ *в широком смысле.*

Отметим, что если дополнительно предположить относительно исходных данных и построенного решения в широком смысле непрерывной дифференцируемости по τ и t, то искомая функция $x(\tau, t) = (x_1(\tau, t), x_2(\tau, t), \dots, x_m(\tau, t), x_{m+1}(\tau, t), \dots, x_n(\tau, t)) \in C(\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2, R^n)$, обладающая непрерывными частными производными, удовлетворяющая рассматриваемому уравнению с краевыми условиями является и классическим решением периодической краевой задачи.

3 МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

3.1 Многопериодические решения квазилинейных систем уравнений с постоянными коэффициентами и двумя операторами дифференцирования

Рассмотрим квазилинейную систему уравнений

$$Dx = Bx + f(\tau, t, x) \tag{3.1.1}$$

относительно $x = (x_1, x_2)$, с начальным условием

$$x(\tau, t)\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t+\omega) = x^0(t) \in C_t^{(e)}(R^m), \tag{3.1.2}$$

где $D = (D_1, D_2)$ векторно-матричный оператор дифференцирования вида (1.1.1) и (1.1.2):

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a_1, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle,$$
$$D_2 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a_2, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle;$$

B – постоянная $n \times n$-матрица; $f(\tau, t, x) = (f_1(\tau, t, x), f_2(\tau, t, x))$ – вектор-функция независимых переменных $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$, $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$ и искомого вектора $x \in R^n_{\Delta_*} = \left\{ x \in R^n : |x| = \max\limits_{j=\overline{1,2}} |x_j| \le \Delta_* \right\}$, удовлетворяющая условию

$$f(\tau + \theta, t + \omega, x) = f(\tau, t, x) \in C^{(0,e,\hat{e})}_{\tau,t,x}\left(R \times R^m \times R^n_{\Delta_*}\right) \tag{3.1.3}$$

с рационально несоизмеримыми периодами $\theta, \omega_1, \dots, \omega_n$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Здесь e и $\hat{e}$ есть m и n размерные векторы с единичными компонентами соответственно.

Из условия (3.1.3) вытекает

$$|f(\tau + \theta, t + \omega, \tilde{x}) - f(\tau, t, x)| \le l|\tilde{x} - x|,\ l > 0,\ \tilde{x}, x \in R^n_{\Delta_*}; \tag{3.1.4}$$

$$|f(\tau, t, 0)| \le \mu,\quad |f(\tau, t, x)| \le |f(\tau, t, 0) + l|x|| \le \mu + l|x|,\ \ \mu > 0,\ x \in R^n_{\Delta_*}. \tag{3.1.5}$$

Обобщая результаты подраздела 2.1, приступим к исследованию многопериодических решений системы (3.1.1). Для этого рассмотрим нелинейный оператор

$$Qx(\tau,t) = X\left(\tau-\tau^0\right)Px^0\left(h\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)+\int\limits_{\tau^0}^{\tau} X\left(\tau-s\right)Pf\left(s,h(s,\tau,t),x(s,\tau,h(s,\tau,t))\right)ds \quad (3.1.6)$$

в пространстве $S^{\omega}_{\delta,\Delta_*}\left(R_\delta \times R^m\right)$ n-вектор-функций $x(\tau,t)$, непрерывных по $(\tau,t)\in R_\delta \times R^m$, ω-периодических по $t\in R^m$ и ограниченных по норме $\left|x-x^0\right|\le \Delta_*$ при $\tau\in R_\delta=\left\{\tau\in R:\left|\tau-\tau^0\right|\le\delta\right\}$, $\delta = const > 0$, $\tau^0\in R$, где $X\left(\tau-\tau^0\right)$, P, $h\left(\tau^0,\tau,t\right)$ имеют прежние смыслы, известные из подраздела 2.1.

Полагая $\delta|B|<1$, при $\left|\tau-\tau^0\right|\le\delta$ имеем

$$\left|X\left(\tau-\tau^0\right)-E\right|\le 2\delta, \quad \left|X\left(\tau-s\right)\right|\le \exp\left[2\delta|B|\right]=\beta \quad (3.1.7)$$

и учитывая $\left|x^0\right|\le\hat{\Delta}^0$, $\hat{\Delta}^0 - const > 0$, $|P|=1$, получим следующую цепочку оценок

$$\left|Qx-x^0\right|\le\left|X\left(\tau-\tau^0\right)-E\right|\cdot|P|\cdot\left|x^0\right|+\left|\int\limits_{\tau^0}^{\tau}\left|X\left(\tau-s\right)\right|\cdot\left|f\left(s,h(s,\tau,t),x(s,h(s,\tau,t))\right)\right|ds\right|\le$$

$$\le 2\delta\hat{\Delta}^0+\left|\int\limits_{\tau^0}^{\tau}\beta\left(\mu+l\left|x(s,h(s,\tau,t))\right|\right)ds\right|\le 2\delta\hat{\Delta}^0+\delta\beta\left(\mu+l\Delta_*\right). \quad (3.1.8)$$

Тогда при

$$\delta|B|<1, \quad \delta\left(2\hat{\Delta}^0+\beta\left(\mu+l\Delta_*\right)\right)<\Delta_*, \quad (3.1.9)$$

в силу (3.1.8) имеем

$$\left|Qx-x^0\right|\le\Delta_*. \quad (3.1.10)$$

Так как, отображение Q сохраняет непрерывность по $(\tau,t)\in R_\delta\times R^m$ и ω-периодичность по $t\in R^m$, то в силу (3.1.10) оно переводит $S^{\omega}_{\delta,\Delta_*}\left(R_\delta\times R^m\right)$ в себя.

Из неравенства (3.1.9) следует, что $\hat{q}=\delta\beta l<1$, причем в силу (3.1.4) и (3.1.7) имеем

$$\left|Q\tilde{x}-Qx\right|\le\left|\int_{\tau^0}^{\tau}\left|X(\tau-s)\right|l\left|\tilde{x}-x\right|ds\right|\le\beta l\left|\tau-\tau^0\right|\left\|\tilde{x}-x\right|\le\beta l\delta\left|\tilde{x}-x\right|=\hat{q}\left|\tilde{x}-x\right|.$$

Следовательно, оператор Q при условии (3.1.9) является сжатым. Очевидно, пространство $S^{\omega}_{\delta,\Delta_*}\left(R_\delta\times R^m\right)$ полное и, согласно принципу сжатых отображений, оператор Q в нем имеет единственную неподвижную точку

$$x^*(\tau,t)=Qx^*(\tau,t), \tag{3.1.11}$$

которая дифференцируемая по теореме о существовании непрерывных производных решения интегрального уравнения Вольтерра по параметру.

Следовательно, соотношение (3.1.11) показывает, что уравнение (3.1.6) однозначно разрешимо в пространстве $S^{\omega}_{\delta,\Delta_*}\left(R_\delta\times R^m\right)$.

Таким образом, доказана теорема о разрешимости начальной задачи.

Теорема 3.1.1. *При условиях* (3.1.3)-(3.1.5) *и* (3.1.9) *начальная задача* (3.1.1)-(3.1.2) *однозначно разрешима в пространстве* $S^{\omega}_{\delta,\Delta_*}\left(R_\delta\times R^m\right)$.

Теперь исследуем существование многопериодического решения квазилинейной системы уравнений (3.1.1).

Рассмотрим нелинейный оператор в некритическом случае

$$Q^*x^*(\tau,t)=\int_{-\infty}^{\tau}X(\tau-s)Pf\left(s,h(s,\tau,t),x(s,h(s,\tau,t))\right)ds \tag{3.1.12}$$

в пространстве $S^{\theta,\omega}_{\delta,\Delta_*}\left(R_\delta\times R^m\right)$ n-вектор-функций $x(\tau,t)$, непрерывных по $(\tau,t)\in R\times R^{mn}$, (θ,ω)-периодических по (τ,t) и ограниченных по норме $|x|\le\Delta_*$.

Очевидно, если $x^*(\tau,t)\in S^{\theta,\omega}_{\delta,\Delta_*}\left(R_\delta\times R^m\right)$, то, в силу $\left|X(\tau)\right|\le\beta$ и (3.1.5), оценивая (3.13), имеем

$$\left|Q^*x^*(\tau,t)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\tau}X(\tau-s)Pf\left(s,h(s,\tau,t),x(s,h(s,\tau,t))\right)ds\right|\le$$

$$\le\left|\int_{-\infty}^{\tau}\left|X(\tau-s)\right|ds\|f\|\right|\le\beta\left(\mu+l\left\|x^*\right\|\right)\le\beta\left(\mu+l\Delta_*\right), \tag{3.1.13}$$

здесь $|\cdot|$ – одна из известных трех видов нормы вектора.

Следовательно, при

$$\beta\left(\mu+l\Delta_*\right)<\Delta_* \tag{3.1.14}$$

из неравенства (3.1.13) получим $\left\|Q^* x^*\right\| \leq \Delta_*$. Согласно теореме 2.1.5, имеем $Q^* x^*(\tau,t) \in S_{\delta,\Delta_*}^{\theta,\omega}\left(R_\delta \times R^m\right)$ при $x^*(\tau,t) \in S_{\delta,\Delta_*}^{\theta,\omega}\left(R_\delta \times R^m\right)$.

Тем самым, доказано, что оператор Q^* переводит пространство $S_{\delta,\Delta_*}^{\theta,\omega}\left(R_\delta \times R^m\right)$ в себя.

В силу свойств $|X(\tau)| \leq \beta$ и (3.1.4), для $\tilde{x}^* = \tilde{x}^*(\tau,\bar{t})$ и $x^* = x^*(\tau,\bar{t})$ из пространства $S_{\delta,\Delta_*}^{\omega}\left(R_\delta \times R^m\right)$ имеем

$$\left|Q^*\tilde{x}^* - Q^* x^*\right| \leq \left|\int_{-\infty}^{\tau} |X(\tau - s)| l \left\|\tilde{x}^* - x^*\right\| ds\right| \leq$$

$$\leq \beta l\left|\tilde{x}^* - x^*\right| \leq \beta l\left|\tilde{x}^* - x^*\right| = \hat{q}^*\left|\tilde{x}^* - x^*\right|. \tag{3.1.15}$$

Тогда из условия (3.15) имеем $\hat{q}^* = \beta l < 1$. Следовательно, в силу (3.1.15) оператор Q^* является сжимающим в $S_{\Delta_*}^{\theta,\omega}\left(R \times R^m\right)$ и имеем единственную неподвижную точку

$$x^*(\tau,t) = Q^* x^*(\tau,t). \tag{3.1.16}$$

Из тождества (3.1.16) следует существование единственного решения уравнения (3.1.12) в пространстве $S_{\Delta_*}^{\theta,\omega}\left(R \times R^m\right)$.

Таким образом, доказана следующая теорема о существовании многопериодического решения рассматриваемого уравнения.

Теорема 3.1.2. *При условиях* (3.1.3), (2.1.34) *и* (3.1.14) *квазилинейное уравнение* (3.1.1) *имеет единственное* (θ,ω)*-периодическое решение* $x^*(\tau,t)$ *в пространстве* $S_{\Delta_*}^{\theta,\omega}\left(R \times R^m\right)$.

3.2 Метод введения дополнительных переменных при исследовании многопериодических решений квазилинейных гиперболических в узком смысле систем

Рассмотрим квазилинейную систему уравнений

$$Dx = Bx + f(\tau,t,x) \tag{3.2.1}$$

относительно $x = (x_1,\ldots,x_n)$ с векторно-матричным оператором дифференцирования D вида (2.2.2)

$$Dx \equiv \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{\partial x}{\partial t_k},$$

где A_k и B – постоянные $n \times n$-матрицы; $f(\tau,t,x) = (f_1(\tau,t,x),...,f_n(\tau,t,x))$ – вектор-функция независимых переменных $\tau \in R = (-\infty,+\infty)$, $t = (t_1,...,t_m) \in R \times ... \times R = R^m$ и искомого вектора $x \in R^n_{\Delta_*} = \left\{ x \in R^n : |x| = \max\limits_{j=\overline{1,n}} |x_j| \le \Delta_* \right\}$.

Предполагаем, что уравнение (3.2.1) является гиперболическим в узком смысле и вектор-функция $f(\tau,t,x)$ обладает свойствами (θ,ω)-периодичности по (τ,t), непрерывности и гладкости степени $(0,e,\hat{e})$ по $(\tau,t,x) \in R \times R^m \times R^n_\Delta$:

$$f(\tau+\theta,t+\omega,x) = f(\tau,t,x) \in C^{(0,e,\hat{e})}_{\tau,t,x}\left(R \times R^m \times R^n_\Delta\right)$$

с рационально несоизмеримыми периодами $\theta,\omega_1,...,\omega_m$, $\omega = (\omega_1,...,\omega_m)$, где e и $\hat{e}$ есть m и n размерные векторы с единичными компонентами соответственно.

Ставится задача об установлении условий существования решения начальной задачи и задачи о многопериодических решениях уравнения (3.2.1) соответственно с условиями

$$x(\tau,t)\big|_{\tau=\tau^0} = x^0(t+\omega) = x^0(t) \in C^{(e)}_t\left(R^m\right), \qquad (3.2.2)$$

$$x(\tau+\theta,t+\omega) = x(\tau,t) \in C^{(1,e)}_{\tau,t}\left(R \times R^m\right), \quad |x| \le \Delta_*. \qquad (3.2.3)$$

На основе неособенной замены (2.2.6) и с помощью оператора П уравнение (3.2.1) приводим к виду

$$D^* y(\tau,\bar{t}) = Cy(\tau,\bar{t}) + \varphi(\tau,\bar{t},y(\tau,\bar{t}))$$

с оператором дифференцирования (2.2.8).

Действуя оператором $P = diag[P_1,...,P_n]$, задачу (3.2.1)-(3.2.2) приводим к задаче

$$D^* y(\tau,\bar{t}) = C \times y(\tau,\bar{t}) + (\varphi \otimes y)(\tau,\bar{t}) \qquad (3.2.4)$$

с начальным условием

$$y(\tau,\mathbf{t})\big|_{\tau=\tau^0} = y^0(\mathbf{t}+\boldsymbol{\omega}) = y^0(\mathbf{t}) \in C^{(e)}_{\mathbf{t}}\left(R^{mn}\right), \quad \left|y^0\right| \le \Delta^0, \qquad (3.2.5)$$

где вектор-функция $\varphi(\tau,\bar{t},y) = [\varphi_i(\tau,\bar{t}_i,y)] \in \mathbf{S}$ обладает свойством

$$\varphi(\tau+\theta,\bar{t}+\overline{\omega},y)=\varphi(\tau,\bar{t},y)\in C^{(0,\bar{e},\hat{e})}_{\tau,\bar{t},y}\left(R\times R^{mn}\times R^{n}_{\Delta^*}\right), \qquad (3.2.6)$$

где $R^n_{\Delta^*}=\left\{y\in R^n:|y|\le\Delta^*\right\}$, $\Delta^*=const>0$, $\Delta^0=const>0$, $|\cdot|$ – одна из известных трех видов нормы вектора.

Отметим, что из свойства (3.2.6) при $(\tau,\bar{t})\in\left(R\times R^{mn}\right)$ следуют следующие неравенства

$$\left|\varphi(\tau,\bar{t},\tilde{y})-\varphi(\tau,\bar{t},y)\right|\le\ell\left|\tilde{y}-y\right|,\ \ \tilde{y},y\in R^n_{\Delta^*}; \qquad (3.2.7)$$

$$\left|\varphi(\tau,\bar{t},0)\right|\le\kappa,\quad \left|\varphi(\tau,\bar{t},y)\right|\le\left|\varphi(\tau,\bar{t},0)+\ell|y|\right|\le\kappa+\ell|y|,\ \ y\in R^n_{\Delta^*}, \qquad (3.2.8)$$

где ℓ, κ – положительные постоянные.

Задачу (3.2.4)-(3.2.5) при условии (3.2.6) представим в виде эквивалентного ей интегрального уравнения

$$y(\tau,\bar{t})=Y\left(\tau-\tau^0\right)\times y^0\left(\bar{h}\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)\right)+\int_{\tau^0}^{\tau}Y(\tau-s)\times(\varphi\otimes y)\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)ds. \qquad (3.2.9)$$

Чтобы определить решение уравнения (3.2.9), рассмотрим нелинейный оператор

$$Qy(\tau,\bar{t})=Y\left(\tau-\tau^0\right)\times y^0\left(\bar{h}\left(\tau^0,\tau,\bar{t}\right)\right)+\int_{\tau^0}^{\tau}Y(\tau-s)\times(\varphi\otimes y)\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)ds$$

в пространстве $\mathbf{S}^{\overline{\omega}}_{\delta,\Delta^*}\left(R_\delta\times R^{mn}\right)$ n-вектор-функций $y(\tau,\bar{t})$, непрерывных по $(\tau,\bar{t})\in R_\delta\times R^{mn}$, $\overline{\omega}$-периодических по $\bar{t}\in R^{mn}$ и ограниченных по норме $\left|y-y^0\right|\le\Delta^*$ при $\tau\in R_\delta=\left\{\tau\in R:\left|\tau-\tau^0\right|\le\delta\right\}$, $\delta=const>0$, $\tau^0\in R$.

Полагая $\delta|C|<1$, при $\left|\tau-\tau^0\right|\le\delta$, $|P|=1$ имеем

$$\left|Y\left(\tau-\tau^0\right)-E\right|\le2\delta,\quad \left|Y(\tau-s)\right|\le\exp\left[2\delta|C|\right]\le\alpha, \qquad (3.2.10)$$

и получим следующую оценку

$$\left|Qy-y^0\right|\le\left|Y\left(\tau-\tau^0\right)-E\right|\left|P\right|\cdot\left|y^0\right|+\left|\int_{\tau^0}^{\tau}\left|Y(\tau-s)\right|\left|P\right|\cdot\left|\varphi\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t}),y\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)\right)\right|ds\right|\le$$

$$\le2\delta\Delta^0+\left|\int_{\tau^0}^{\tau}\alpha\left(\kappa+\ell\left|y\left(s,\bar{h}(s,\tau,\bar{t})\right)\right|\right)ds\right|\le2\delta\Delta^0+\delta\alpha\left(\kappa+\ell\Delta^*\right). \qquad (3.2.11)$$

Тогда при

$$\delta|C| < 1,\ \ \delta\left(2\Delta^0 + \alpha\left(\kappa + \ell\Delta^*\right)\right) < \Delta^*, \qquad (3.2.12)$$

в силу (3.2.11) имеем

$$\left|Qy - y^0\right| \le \Delta^*. \qquad (3.2.13)$$

Так как, отображение Q сохраняет непрерывность по $(\tau, \bar{t}) \in R_\delta \times R^{mn}$ и $\overline{\omega}$-периодичность по $\bar{t} \in R^{mn}$, то в силу (3.2.13) оно переводит $\mathbf{S}^{\overline{\omega}}_{\delta,\Delta^*}\left(R_\delta \times R^{mn}\right)$ в себя.

Из неравенства (3.2.12) следует $q = \delta\alpha\ell < 1$, причем в силу (3.2.7) и (3.2.10) имеем

$$|Q\tilde{y} - Qy| \le \left|\int_{\tau^0}^{\tau} |Y(\tau - s)|\ell|\tilde{y} - y|ds\right| \le \alpha\ell\left|\tau - \tau^0\right||\tilde{y} - y| \le \alpha\ell\delta|\tilde{y} - y| = q|\tilde{y} - y|.$$

Следовательно, оператор Q при условии (3.2.12) является сжатым. Очевидно, пространство $\mathbf{S}^{\overline{\omega}}_{\delta,\Delta^*}\left(R_\delta \times R^{mn}\right)$ полное и, согласно принципу сжатых отображений, оператор Q в нем имеет единственную неподвижную точку

$$y^*(\tau, \bar{t}) = Qy^*(\tau, \bar{t}). \qquad (3.2.14)$$

Следовательно, соотношение (3.2.14) показывает, что уравнение (3.2.9) однозначно разрешимо в пространстве $\mathbf{S}^{\overline{\omega}}_{\delta,\Delta^*}\left(R_\delta \times R^{mn}\right)$.

Ясно, что в процессе определения неподвижной точки методом последовательных приближений $\bar{t}$ ведет себя как mn-мерный параметр, причем, так как правая часть уравнения (3.2.9) имеет непрерывные частные производные как по искомой вектор-функции так и по параметру $\bar{t}$, то здесь применима теорема о существовании непрерывных производных решения интегрального уравнения Вольтерра по параметру. Следовательно, при достаточно малых значениях δ из интервала $(0, \delta_1)$, неподвижная точка $y^*(\tau, \bar{t})$ непрерывно дифференцируема по координатам $\bar{t}$, где $\delta_1 = const > 0$.

Решение $y^*(\tau, \bar{t})$ также непрерывно дифференцируемо и по τ, так как, τ служит как переменная перехода от начальной задачи для дифференциального уравнения к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра при достаточно малых значениях δ из интервала $(0, \delta_2)$, где $\delta_2 = const > 0$.

Если условия (3.2.12) выполняются при малых значениях δ из интервала $(0,\delta_0)$, где $\delta_0 = const > 0$, то при $0 < \delta < \delta_* = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ решение $y^*(\tau,\bar{t})$ непрерывно дифференцируемо по $(\tau,\bar{t}) \in R_{\delta_*} \times R^{mn}$.

Таким образом доказана теорема о разрешимости начальной задачи.

Теорема 3.2.1. *При условиях* (3.2.6)-(3.2.8) *и* (3.2.12) *начальная задача* (3.2.4)-(3.2.5) *однозначно разрешима в пространстве* $\mathbf{S}^{\overline{\omega}}_{\delta_*,\Delta^*}\left(R_{\delta_*} \times R^{mn}\right)$, $\delta_* - const > 0$.

Так как теорема 3.2.1 справедлива для всех $\tau^0 \in R$, то поставленная задача имеет единственное решение при всех $\tau \in R$, которое может быть получено путем последовательного продолжения его на δ_*-окрестность каждой точки.

Следствие 3.2.1. *При условиях теоремы* 3.2.1 *задача* (3.2.4)-(3.2.5) *разрешима при всех* $(\tau,\bar{t}) \in R \times R^{mn}$, *причем,* $y^*(\tau,\bar{t}) \in \mathbf{S}^{\overline{\omega}}_{\Delta^*}\left(R \times R^{mn}\right)$.

Доказанная теорема 3.2.1 позволяет распространить теорему 2.2.3 на квазилинейный случай.

В связи с этим, по прежнему предположим выполненным условие следствия 2.2.1 ($\det[Y(\theta) - E] \neq 0$) и в соответствии с интегральным представлением (2.2.47) вводим оператор

$$Q^* y^*(\tau,\bar{t}) = \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G(s,\tau) \times \left(\varphi \otimes y^*\right)\left(s, \overline{h}(s,\tau,\bar{t})\right) ds \tag{3.2.15}$$

в пространстве $\mathbf{S}^{\theta,\overline{\omega}}_{\Delta^*}\left(R \times R^{mn}\right)$ n-вектор-функций $y(\tau,\bar{t})$, непрерывных по $(\tau,\bar{t}) \in R \times R^{mn}$, $(\theta,\overline{\omega})$-периодических по $(\tau,\bar{t})$ и ограниченных по норме $|y| \leq \Delta^*$, где функция $s^*(\tau)$ имеет прежний смысл, что в 2.2.2.

Очевидно, если $y^*(\tau,\bar{t}) \in \mathbf{S}^{\theta,\overline{\omega}}_{\Delta^*}\left(R \times R^{mn}\right)$, то, в силу свойства 4^0 из (2.2.48) и (3.2.8), оценивая (3.2.15) имеем

$$\begin{aligned} \left|Q^* y^*(\tau,\bar{t})\right| &= \left| \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G(s,\tau) \times \left(\varphi \otimes y^*\right)\left(s, \overline{h}(s,\tau,\bar{t})\right) ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} |G(s,\tau)| ds \, \|\varphi\| \right| \leq \gamma\left(\kappa + \ell \left\|y^*\right\|\right) \leq \gamma\left(\kappa + \ell\Delta^*\right). \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Следовательно, при

$$\gamma\left(\kappa + \ell\Delta^*\right) < \Delta^* \tag{3.2.17}$$

из неравенства (3.2.16) получим $\left|Q^* y^*\right| \le \Delta^*$. Согласно теореме 2.2.3, имеем $Q^* y^*(\tau,\bar t) \in \mathbf{S}_{\Delta^*}^{\theta,\varpi}\left(R \times R^{mn}\right)$ при $y^*(\tau,\bar t) \in \mathbf{S}_{\Delta^*}^{\theta,\varpi}\left(R \times R^{mn}\right)$.

Таким образом, доказано, что оператор Q^* переводит пространство $\mathbf{S}_{\Delta^*}^{\theta,\varpi}\left(R \times R^{mn}\right)$ в себя.

В силу свойства 4^0 из (2.2.48) и (3.2.7) для $\tilde y^* = \tilde y^*(\tau,\bar t)$ и $y^* = y^*(\tau,\bar t)$ из пространства $\mathbf{S}_{\Delta^*}^{\theta,\varpi}\left(R \times R^{mn}\right)$ имеем

$$\left|Q^*\tilde y^* - Q^* y^*\right| \le \left|\int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} \left|G(s,\tau)\right| \ell \left|\tilde y^* - y^*\right| ds\right| \le$$
$$\le \gamma\ell\left|\tilde y^* - y^*\right| \le \gamma\ell\left\|\tilde y^* - y^*\right\| = q^*\left\|\tilde y^* - y^*\right\|. \qquad (3.2.18)$$

Тогда из условия (3.2.17) имеем $q^* = \gamma\ell < 1$. Следовательно, в силу (3.2.18) оператор Q^* является сжимающим в $\mathbf{S}_{\Delta^*}^{\theta,\varpi}\left(R \times R^{mn}\right)$ и имеем единственную неподвижную точку

$$y^*(\tau,\bar t) = Q^* y^*(\tau,\bar t). \qquad (3.2.19)$$

Из тождества (3.2.19) следует существование единственного решения уравнения (3.2.15) в пространстве $\mathbf{S}_{\Delta^*}^{\theta,\varpi}\left(R \times R^{mn}\right)$.

Таким образом, доказана следующая теорема о существовании (θ,ϖ)-периодического решения рассматриваемого уравнения.

Теорема 3.2.2. *При условиях* (2.2.31), (3.2.6) *и* (3.2.17) *квазилинейное уравнение* (3.2.4) *имеет единственное решение* $y^*(\tau,\bar t)$ *в пространстве* $\mathbf{S}_{\Delta^*}^{\theta,\varpi}\left(R \times R^{mn}\right)$.

В заключении отметим, что на основе метода введения дополнительных переменных и метода проекторов разработана методика исследования начальной задачи (3.2.1)-(3.2.2) и задачи (3.2.1), (3.2.3) о многопериодических решениях для квазилинейных векторно-матричных уравнений с операторами дифференцирования $D^* = (D_1,\ldots,D_n)$ с различными компонентами D_j, $j = \overline{1,n}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Краткие выводы по результатам диссертационных исследований. В диссертационной работе по разработке методов упрощения оператора дифференцирования, а также интегрирования и изучения многопериодических решений линейных и квазилинейных систем с различными операторами дифференцирования, получены следующие результаты:

– разработан метод приведения матричного оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к линейному оператору с матричным оператором дифференцирования по m переменным, основанный на переходе вдоль характеристики одной из переменных;

– установлено существование бесконечного множества многопериодических нулей многопериодического оператора с постоянными коэффициентами в узкогиперболическом случае;

– разработана методика интегрирования линейных систем с двумя различными операторами дифференцирования и установлены достаточные условия существования многопериодических решений в некритическом случае;

– на основе разработанного метода получены достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с двумя различными операторами дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы;

– разработан метод введения дополнительных переменных для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

– разработан метод проекторов перехода от одной переменной к другой для системы гиперболической в узком смысле, достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и достаточные условия существования единственного многопериодического решения этих уравнений;

– получены достаточные условия разрешимости краевой задачи для системы уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

– на основе разработанного метода получены достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы.

Оценка полноты решения поставленных задач. Вопросы существования многопериодических решений линейных и квазилинейных систем с различными операторами дифференцирования решены на основе метода характеристик, метода Харасахала-Умбетжанова-Сартабанова, а также разработанных в данной диссертационной работе метода введения дополнительных переменных и метода проекторов.

Разработка рекомендаций и исходных данных по конкретному использованию результатов. Результаты исследования имеют теоретическое значение и могут быть использованы при установлении многочастотных колебаний в дифференциальных системах, описывающих физико-механические и технические колебательные процессы, а также при организации элективных курсов для студентов физико-математических и инженерных специальностей.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области. Результаты выполненной научной работы опубликованы в журналах, рекомендованных КОКСОН МОН РК, в материалах международных научных конференций и в журнале, индексируемом в базе Scopus.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1961. - 400 с.

2 Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. - 830 с.

3 Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. - М.: Мир, 1985. - 384 с.

4 Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. - М.: Наука, 1968. - 592 с.

5 Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - Алма-Ата: Наука, 1970. - 200 с.

6 Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. - Алма-Ата: Наука, 1979. - 210 с.

7 Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. - Алма-Ата: Наука, 1990. -184 с.

8 Умбетжанов Д.У., Сартабанов Ж.А. О необходимом и достаточном условии многопериодичности решения одной системы уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // В книге: Математика и Механика. - Алма-Ата: КазГУ, 1972. - №7, часть 2. - С. 22-27.

9 Сартабанов Ж.А. Периодты функциялар және кейбір қарапайым дифференциалдық теңдеулердің периодты шешімдері. - Алматы: РБК, 2001. - 108 б.

10 Сартабанов Ж.А. Об одной счетной системе квазилинейных уравнений с частными производными. // Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат. - 1973. - №5.- С. 53-58.

11 Сартабанов Ж.А. Об одном способе изучения периодических решений уравнений в частных производных специального вида // Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат. - 1989. - №1. - С. 42-48.

12 Сартабанов Ж.А. К методам изучения многопериодических решений систем D-уравнений // Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И.Н.Векуа, ТГУ. - 1990. - Т.5, №3. - С.175-178.

13 Сартабанов Ж.А. Многопериодические колебания в некоторых дифференциальных и функционально-разностных системах: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат.наук: 01.01.02. - Алматы, Ин-т теорет. и прикл. математики НАН РК, 1996. - 31 с.

14 Сартабанов Ж.А. Условия периодичности решений дифференциальных систем с многомерным временем // Известия НАН МОН РК. Сер. физ.-мат. - 2004. - №3. - С. 44-48.

15 Sartabanov Z.A. The multi-period solution of a linear system of equations with the operator of differentiation along the main diagonal of the space of independent variables and delayed arguments // AIP Conference Proceedings. - 2017. - Vol. 1880. - P. 040020.

16 Бержанов А.Б. Исследование многопериодических по части переменных решений некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат.наук: 01.01.02. - Астана, ЕНУ, 2010. - 34 с.

17 Abdikalikova G., Berzhanov A. On multiperiodicity and almost periodicity of solutions of boundary value problem for system of parabolic type equation // AIP Conference Proceedings. - 2014. - Vol. 1611. - P. 58-62.

18 Berzhanov A.B., Kurmangaliev E.K. Solution of a countable system of quasilinear partial differential equations multiperiodic in a part of variables // Ukrainian Mathematical Journal. - 2009. - Vol. 61, №2. - P. 336-345.

19 Сартабанов Ж.А., Кулик А.И. О решениях краевой задачи для систем *D*-уравнений // Известия НАН РК. Сер.физ-мат. - 1995. - №1. - С. 31-36.

20 Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. - Актобе: Принт А, 2007. - 168 с.

21 Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. - Уральск: Ред. изд. центр ЗКГУ, 2013. - 167 с.

22 Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Z.A. On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal. - 2017. - Vol. 8, №1. - P. 67-75.

23 Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Z.A. Integration of a Linear Equation with Differential Operator, Corresponding to the Main Diagonal in the Space of Independent Variables, and Coefficients, Constant on the Diagonal // Russian Mathematics. - 2019. - Vol. 63, №6. - P. 29-41.

24 Omarova B.Zh., Sartabanov Zh.A. On multiperiodic solutions of perturbed nonlinear autonomous systems with the differentiation operator on a vector field // Eurasian Mathematical Journal. - 2021. – Vol. 12, №1. - P. 68-81.

25 Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. On multi-periodic solutions of quasilinear autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunov's vector field // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. - 2019. - №2(94). - P. 70-83.

26 Bekbauova A., Baibaktina A. et.al. Periodic solution of a single system of differential equations in partial derivatives // International journal of Advanced and Applied Sciences. - 2018. - Vol. 5, №6. - P. 61-63.

27 Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М.: Гостехиздат, 1950. - 472 с.

28 Пуанкаре А. Избранные труды. - М.: Наука, 1974. - Т.I. - 772 с.

29 Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. - Киев: Изд-во ВУАН,1934. - 109 с.

30 Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматлит, 1963. - 407 с.

31 Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. - Киев: Наукова думка, 1969. - 248 с.

32 Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. - М.: Наука, 1987. - 304 с.

33 Колмогоров А.Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. - 1954. – Т. 96, вып. 4. - С. 527-530.

34 Арнольд В.И. Малые знаменатели I: Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1961. - Т. 25, вып. 1. - С. 21-86.

35 Арнольд В.И. Малые знаменатели II. Доказательство теоремы А.Н.Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи математических наук. - 1963. - Т.18, вып. 5(113). - С. 13-40.

36 Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи математических наук. - 1963. - Т. 18, вып. 6. - С. 91-192.

37 Мозер Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости / пер. с анг. Д.В. Трещёва. - Ижевск: НИЦ «Регуляр. и хаотич. динамика», 2001. - 448 с.

38 Бор Г. Почти-периодические функции. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1934. - 128 с.

39 Годунов С.К. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1979. - 392 с.

40 Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. - М.: Издательство иностранной литературы, 1960. - 118 с.

41 Кенжебаев К.К., Сартабанов Ж.А., Бекбауова А.У. Многопериодические решения квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных // Мат. журнал ИМ МОН РК. - 2010. - Т. 10, №1(9). - С. 46-52.

42 Жакашбаев Б.Ж., Бержанов А.Б. О построении почти многопериодического решения одной системы уравнений в частных производных с треугольными матричными коэффициентами // Дифференциальные уравнения, теории функций и их приложения: сборник научных трудов. - 1986. - С. 38-40.

43 Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic system //Riv. math. Univ. Parma. - 1974. - Vol. 3, №2. - P. 107-131.

44 Gustavo L.V. Partial differential equations of first order and their applications to Physics / 2nd edition. - Mexico: University of Guadalajara, 2012. - 200 p.

45 Yuldashev T.K., Shabadikov K.K. Initial-Value Problem for a Higher-Order Quasilinear Partial Differential Equation // Journal of Mathematical Sciences (United States). - 2021. - Vol. 254, №6. - P. 811–822.

46 Assanova A.T., Uteshova R.E. A singular boundary value problem for evolution equations of hyperbolic type // Chaos, Solitons and Fractals. - 2021. – Vol. 143. - 110517.

47 Usmanov K., Nazarova K., Uteshova R. On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution // AIP Conference Proceedingsthis link is disabled. - 2021. - 2325. - 020033.

48 Zhukov M.Yu., Shiryaeva E.V. Solution of a Class of First-Order Quasilinear Partial Differential Equations // In Operator Theory and Differential Equations, Cham, Birkhuser, Springer, 2021.

49 Pucci P. Problemi ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche //Boll.Unione Mat. Ital. B. - 1979. – Vol. 16, №5. - P. 87-99.

50 Bassanini P. Iterative methods for quasilinear hyperbolic systems in the first canonic form // Appl. Anal. - 1981. - Vol. 12, №2. - P. 105-117.

51 Aliev A.B., Kazimov A.A., Guliyeva V.F. Global existence and nonexistence results for a class of semilinear hyperbolic systems // Mathematical Methods in the Applied Sciences. - 2013. - Vol. 36, №9. - P. 1133-1144.

52 Nishitani T. Transversally strictly hyperbolic systems // Kyoto Journal of Mathematics. - 2020. - Vol. 60, №4. - P. 1399-1418.

53 Бекшаев С.Я., Фомин В.М. Основы теории колебании. - Одесса: ОГАСиА, 2013. - 103 с.

54 Иванов А.С. Основы теории колебаний: Колебания динамических систем. Методы решения задач. - Пермь: ПГНИУ, 2017. - 115 с.

55 Kalybay A., Oinarov R., Sultanaev Y. Oscillation and spectral properties of some classes of higher order differential operators and weighted nth order differential inequalities // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2021. – №3. - P. 1-20.

56 Valeev N.F., Sultanaev Y.T., Nazirova É.A. Spectral properties of differential operators with oscillating coefficients // Transactions of the Moscow Mathematical Society. - 2019. - Vol. 80. - P. 153–167.

57 Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. - 622 с.

58 Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 496 с.

59 Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Изд. 3-е, перераб. и дополненное. - Минск: Наука и техника, 1979. - 744 с.

60 Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: ГИ ФМЛ, 1958, - 470 с.

61 Sibuja Y. Some global properties of matrices of functions of one variable // Mathematische Annalen. - 1965. – Vol. 161, №1. - P. 67-77.

62 Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967. - 472 с.

63 Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - М.: Наука, 1972. - 720 с.

64 Urabe M. Existence theorems of quasiperiodic solutions to nonlinear differential systems // Funkcialaj Ekvacioj. - 1972. - Vol. 15. - P. 75-100.

65 Štědrý M., Vejvoda O. Time periodic solutions of a one-dimensional two-phase stefan problem // Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1981. - Vol. 127. - P. 67-78.

66 Otto Vejvoda, Herrmann L., Lovicar V., Sova M., Straskaba I. Partial differential equations: Time-periodic solutions. - Springer Netherlands, 1982. - 358 p.

67 Жестков С.В. О построении многопериодических решений полулинейных гиперболических систем уравнений в частных производных с помощью характеристик // Диф. уравнения. - 1984. - Т. 20, №9. - С. 1630-1632.

68 Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / 2-е изд., прераб. и доп. - М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1985. - 448 с.

69 Asanova A.T. On a bounded almost periodic solution of a semilinear parabolic equation // Ukrainian Mathematical Journal. - 2000. - Vol. 52, №6. - P. 950-952.

70 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // Ukrainian Mathematical Journal. - 2004. - Vol. 56, №4. - P. 682-694.

71 Assanova A.T. Periodic solutions in the plane of systems of second-order hyperbolic equations // Mathematical Notes. - 2017. - Vol. 101, №1. - P. 39-47.

72 Абдикаликова Г.А. О корректной разрешимости одной линейной краевой задачи // Вестник Оренбургского государственного университета. - 2006. - Vol. 59, №9. - С. 261-264.

73 Calogero F., Leyvraz F. How to extend any dynamical system so that it becomes isochronous, asymptotically isochronous or multi-periodic // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. - 2009. - Vol. 16, № 3. - P. 311-338.

74 Su J., Xhao L. Multiple periodic solutions of ordinary equations with double resonance // Nonlinear Analysis: Theory, Methods, and Applications. - 2009. - Vol. 70, №4. - P. 1520-1527.

75 Юлдашев Т.К., Крапивкина А.С. О периодических решениях квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Решетневские чтения. - 2013. - Vol. 17, №2. - С. 125-127.

76 Yuldashev T.K. Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. - 2022. - Vol. 13, №2. - P. 135-141.

77 Orumbaeva N.T. On Solvability of Non-Linear Semi-Periodic Boundary-Value Problem for System of Hyperbolic Equations // Russian Mathematics. - 2016. - Vol. 60, №9. - P. 23-37.

78 Bergamasco A.P., Dattori da Silva P.L., Gonzalez R.B. Existence and regularity of periodic solutions to certain first-order partial differential equations // Journal of Fourier Analysis and Applications. - 2017. - Vol. 23, №1. - P. 65-90.

79 Ohnawa M., Suzuki M. Time-periodic solutions of symmetric hyperbolic systems // Journal of Hyperbolic Differential Equations. - 2020. - Vol. 17, №4. - P. 706-726.

80 Kmit I., Recke L., Tkachenko V. Classical bounded and almost periodic solutions to quasilinear first-order hyperbolic systems in a strip // Journal of Differential Equations. - 2020. - Vol. 269, №3. - P. 2532-2579.

81 Jebelean P., Mawhin J., Serban C. Multiple critical orbits to partial periodic perturbations of the p-relativistic operator // Applied Mathematical Letters. - 2020. - Vol. 104. - 106220.

82 Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T. On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system // Azerbaijan Journal of Mathematics. - 2022. - Vol. 12, №1. - P. 32-48.

83 Жумагазиев А.Х. Приведение к каноническому виду многопериодических матричных операторов дифференцирования // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия Физико-математические науки. - 2022. - Vol. 78, №2. - С. 71-79.

84 Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solution of linear hyperbolic in the narrow sense system with constant coefficients // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. - 2020. - Vol. 98, №2. - P. 125-140.

85 Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. On one method of research of multiperiodic solution of block-matrix type system with various differentiation operators // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan Al-Farabi Kazakh National University. Series physico-mathematical. - 2020. - Vol. 330, №2. - P. 149-158.

86 Абдикаликова Г.А., Сартабанов Ж.А., Жумагазиев А.Х. Существование многопериодического решения одной задачи для системы уравнений с различными операторами дифференцирования // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия Физико-математические науки. - 2019. - Vol. 66, №2. - С. 7-13.

87 Zhumagaziyev A.Kh. Reduction of multiperiodic matrix differentiation operators // IX International Scientific Conference "Problems of Differential Equations, Analisys and Algebra". - Aktobe. - 2022. - P. 54-57.

88 Жумагазиев А.Х., Сартабанов Ж.А. Исследование линейных краевых задач с условиями многопериодичности решений для систем с матричными операторами дифференцирования // VI Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Тезисы докладов. - Нальчик. - 2021. - С. 80.

89 Сартабанов Ж.А., Жумагазиев А.Х. Многопериодические решения узкогиперболических квазилинейных систем уравнений с векторно-матричным оператором дифференцирования // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященной 75-летию академика НАН РК Т.Ш.Кальменова. Тезисы докладов. - Алматы. - 2021. - С. 54-55.

90 Сартабанов Ж.А., Жумагазиев А.Х., Абдикаликова Г.А. Исследование методом редукции многопериодических решений узко гиперболических линейных векторно-матричных уравнений с частными производными первого порядка // Традиционная международная апрельская математическая

конференция в честь Дня работников науки РК. Тезисы докладов. - Алматы. - 2020. - С. 183-184.

91 Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solution of one hyperbolic system and its integral representation // International Conference “Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra” (EMJ-2019) dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. The Abstract Book. - Nur-Sultan. - October 16-19, 2019. - P. 99-101.

92 Сартабанов Ж.А., Жумагазиев А.Х., Абдикаликова Г.А. Об одном методе исследования многопериодического решения системы с различными операторами дифференцирования // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященный 80-летнему юбилею академика НАН РК С.Н.Харина. - Алматы. - 2019. - С. 82-84.

93 Сартабанов Ж.А., Абдикаликова Г.А., Жумагазиев А.Х. Многопериодические решения линейных систем с постоянными коэффициентами и с двумя операторами дифференцирования // Материалы VIII международной научной конференции: Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. - Актобе. - 2018. - С. 89-95.

94 Абдикаликова Г.А., Жумагазиев А.Х., Сартабанов Ж.А. Построение многопериодического решения системы уравнений с различными операторами дифференцирования // Материалы VIII международной научной конференции: Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. - Актобе. - 2018. - С. 8-12.

95 Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 560 с.

96 Сартабанов Ж.А. Метод редукции в исследовании проблемы приводимости линейных многопериодических систем с операторами дифференцирования по направлениям главной диагонали // IX международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». - Актобе. - 2022. - С. 4-7.

97 Халмош П. Конечномерные векторные пространства. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. - 264 с.

98 Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. - 496 с.