ЖҰМАҒАЗИЕВ ӘМІРЕ ХАЛИҰЛЫ

ӘРТҮРЛІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЛЫ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ КӨППЕРИОДТЫ ШЕШІМДЕРІ

6D060100 – Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның

АННОТАЦИЯСЫ

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертация кіріспеден, үш тараудан (бірінші тарауда 4 бөлім және 3 бөлімше, екінші тарауда 2 бөлім және 6 бөлімше, үшінші тарау 2 бөлім), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Суреттер, кестелер мен әдебиеттер саны. Жұмыста 98 әдебиет, 1 кесте және 3 сурет пайдаланылды.

Кілттік сөздер. Дифференциалдау операторы, тар мағынада гиперболалық, канондық түрге келтіру, көппериодтылық, матрицант, блоктық әдіс, проекторлар әдісі, характеристикалар әдісі.

Диссертацияның өзектілігі гидромеханика, электромагниттік және т.б. құбылыстардағы тербеліс процестерін сипаттайтын әртүрлі дифференциалдау операторлы теңдеулер жүйелері үшін бастапқы есепті және олардың көппериодты шешімдерін зерттеудің жаңа тиімді әдістерін жасақтау қажеттілігімен байланысты.

Диссертациялық зерттеу бірінші ретті дербес туындылы теңдеулер жүйелерінің көппериодты шешімдерін зерттеуге арналған, олардың басты бөлігі келесі сызықтық қатынастармен анықталады

$$D_j x_j = \frac{\partial x_j}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^k \frac{\partial x_j}{\partial t_k}, \ j = \overline{1,n}, \tag{0.1}$$

мұндағы $x_j = x_j(\tau, t)$ – $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$ және $t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$ айнымалыларынан тәуелді белгісіз функциялар; $a_{ji}^k = a_{ji}^k(\tau, t)$ – берілген функциялар. Жалпы жағдайдағы осындай жүйелер үшін бастапқы есепті шешудің әдістері жасақталмағанына назар аударамыз.

$x = (x_1, ..., x_n)$ деп ұйғарып, характеристикалар теңдеуінен анықталатын векторлық өрістер бағыттары бойынша (0.1) операторын келесі матрицалық диференциалдау операторы түрінде жазуға болады

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k(\tau, t)\frac{\partial x}{\partial t_k}, \tag{0.2}$$

мұндағы $A_k(\tau, t) = \left[a_{ji}^k(\tau, t)\right]$ – квадрат $n \times n$-матрица, $k = \overline{1,m}$.

Сонда зерттеліп жатырған жүйенің жалпы түрін келесі квазисызықты векторлық теңдеу түрінде жазуға болады

$$Dx = B(\tau, t)x + f(\tau, t, x), \tag{0.3}$$

мұндағы D – берілген оператор, $B(\tau,t)$ – матрица және $f(\tau,t,x)$ – вектор-функция, $(\tau,t)\in R\times R^m$, $x\in R^n_\Delta=\{x\in R^n:|x|\le\Delta,\ \ \Delta-const>0\}$.

Бұл жұмыста (0.2) операторын ықшамдау, яғни канондық түрге келтіру мәселелері зерттеледі, A_k және B матрицалары тұрақты болған жағдайда көппериодты шешімдерді зерделеу мен интегралдау әдісі жасақталады.

Егер (0.2) операторлы (0.3) теңдеулерді интегралдау мәселесінің тарихына үңілсек, оны С.В. Ковалевская (1874-1885) аналитикалық жағдайда мажорация әдісімен зерттегенін көреміз. Осылайша, (0.2) операторлы (0.3) теңдеулер үшін бастапқы есепті шешу туралы Коши-Ковалевская теоремасы кеңінен танымал болды.

Л. Эйлердің (1768-1770) және Ж. Лагранждың (1774) вариациялық есептеулерді құру бойынша, атап айтқанда, дербес туындылы теңдеулерді интегралдау бойынша классикалық еңбектері пайда болғаннан кейін, С.В.Ковалевская 1888 жылы қатты дененің қозғалмайтын нүкте төңірегінде айналу мәселесін шешу бойынша іргелі нәтижелер алып, Париж ғылым академиясының сыйлығына ие болған. Осыған байланысты, (0.2) операторлы (0.3) түрдегі теңдеулердің көпприодты шешімдірінің сұрақтарына келтірілетін көпжиілікті теңдеулердің тербелмелі шешімдерін зерттеудің маңыздылығына назар аудару керек.

Бірінші ретті дербес туындылы теңдеулер жүйелерінің жалпы теориясының негіздері тегістік жағдайында И.Г. Петровскийдің еңбектерінде келтірілген. Мұндай жүйелерді шешудің негізгі әдісі – Кошидің характеристикалар әдісі, оның мәні есепті қарапайым дифференциалдық теңдеулерді интегралдауға келтіруде болып табылады. Осындай сипатты келтіруді Лагранж *өнер* деп атады.

Характеристикалар әдісін жүзеге асыру әдістерінің бірі – екі айнымалы (0.2) операторды канондық түрге келтіру. Ондай әдіс И.Г. Петровскийдің еңбектерінде келтірілген. Оның еңбектерінде (0.3) теңдеу *эллипстік* деп аталады, егер $A_1=A(\tau,t)$ коэффициенттер матрицасының нақты түбірлері болмаса. (0.3) теңдеудің эллипстік емес жағдайында, бірақ канондық түрге келтірілсе, теңдеу *гиперболалық* деп аталады.

Егер $A_k(\tau,t)$ матрицаларының әрқайсысының n нақты және әртүрлі меншікті мәндері болса, онда (0.3) теңдеу *тар мағынада гиперболалық* деп аталады. Бұл жұмыстың зерттеу әдісі (0.2) оператордың $A_k(\tau,t)$ матрицалары (0.1) скалярлық жағдайда

$$a^k_{ji}(\tau,t)=\begin{cases}b^k_j(\tau,t)\ne 0, i=j,\\ 0, i\ne j,\end{cases}\quad b^k_j(\tau,t)=\lambda_{kj}(\tau,t)\ne 0,\quad i,j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m}\qquad(0.4)$$

қасиетіне ие болғанда (0.3) дербес туындылы теңдеулер теориясының әдістерімен тығыз байланысты. Бұл жағдай (0.3) теңдеудің тар мағынадағы гиперболалығын көрсетеді.

(0.4) шарт орындалған кезде D операторының D^* канондық түрі келесі формаға ие

$$D^* = \operatorname{diag}\left[D_\pi^*, ..., D_\pi^*\right], \quad D_\pi^* = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t_k}, \qquad (0.5)$$

яғни (0.3) жүйенің барлық теңдеулері келтіруден кейін бірдей D^* дифференциалдау операторына ие. Онда (0.3) жүйені параболалық деп атауға болады.

Дербес жағдайда, $\lambda_k = 1, \ k = \overline{1, m}$ болғанда (0.5) операторынан келесі оператор аламыз

$$D_e^* = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_k} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \qquad (0.6)$$

мұндағы $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$ – векторлық оператор; $e = (1, ..., 1)$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скаляр көбейтінді белгісі.

(0.6) операторлы теңдеулердің көппериодты шешімдері В.Х.Харасахалдың жұмыстарында зерттелген. (0.5) операторлы сызықты операторға келтірілетін арнайы түрдегі D операторлы жүйелер үшін осындай сипатты есептер көппериодты жағдайда Д.У. Умбетжанов, Ж.А. Сартабанов, А.Б. Бержанов және т. б. жұмыстарында жеткілікті толық зерттелген.

(0.4) жағдайындағы D операторлы (0.3) түрдегі жүйелердің жалпы теориясы және көппериодты шешімдері мәселелері қарастырылмаған. Бұл зерттеудің өзектілігі көрсетеді. Диссертациялық жұмыста тар гиперболалық жағдайдағы (0.2) операторлы (0.3) түрдегі теңдеулер үшін зерттеулер жаңа жасақталған әдістер негізінде дамытылған.

Диссертациялық зерттеу тақырыбының өзектілігі туралы айта отырып, тербелістер теориясы бойынша іргелі еңбектерді атап өтпеуге болмайды.

Қарапайым дифференциалдық теңдеулердің периодты, яғни біржиілікті тербелмелі шешімдерінің теориясы А.М. Ляпунов пен А. Пуанкаренің еңбектерінде құрылғаны белгілі.

Осы теорияның орталандыру және интегралдық көпбейнелер әдістерімен байланысты қарапайым дифференциалдық теңдеулермен де, дербес туындылы теңдеулермен де сипатталған көпжиілікті периодты тербелістерді зерттеу теориясының дамуы Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М.Самойленко және олардың ізбасарларының іргелі еңбектерінде қамтылған.

Көпжиілікті тербелістер әдістері А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд және Ю.Мозердің КАМ-теориясының құрылуына байланысты қарқынды дамыды.

Аталған әдістермен қатар, XX ғасырдың екінші жартысынан бастап қарапайым дифференциалдық теңдеулерден бірінші ретті дербес туындылы теңдеулерге көшуге және қарапайым дифференциалдық теңдеулердің квазипериодты шешімдерін зерттеуден дербес туындылы теңдеулердің көппериодты шешімдерін зерттеуге негізделген көпжиілікті тербелістерді зерттеу әдістері дамуда. Мұндай көшу үзіліссіз квазипериодты бір айнымалы функциялар мен үзіліссіз периодты көп айнымалы функциялардың терең байланысы туралы Бор теоремасының арқасында жүзеге асырылады. Бұл ерекше әдіс В.Х. Харасахалдың еңбектерінен басталады және Д.У. Умбетжанов пен олардың ізбасарлары Ж.А. Сартабанов, А.Б. Бержанов және т.б. жұмыстарында дамыған. Дербес туындылы теңдеулердің көппериодты шешімдері бойынша негізгі нәтижелер матрицалық дифференциалдау операторы параболалық болған кезде бірдей дифференциалдау операторы бар теңдеулер жүйесіне жатады. Д.У. Үмбетжанов гиперболалық типтегі дербес туындылы теңдеулер жүйесінің көппериодты шешімдерін зерттеу әдістерін дамыту мәселесін көтерді, бірақ ол дамудың бастапқы кезеңінде қалды. Ол жүйенің көппериодты шешімінің бар болуы мен жалғыздығы мәселесін зерттеді, оның сәйкес сызықтық жүйесі параболалық дифференциалдау операторлары бар тәуелсіз ішкі жүйелерден тұрады.

Бұл диссертациялық жұмыстың көппериодты шешімдер тұрғысынан зерттеуі саны кез келген айнымалылар бойынша матрицалық дифференциалдау операторлы тар мағынада гиперболалық квазисызықты теңдеулердің интегралдау және олардың көппериодты шешімдерінің бар болуын зерттеу әдістерін жасақтауға арналған.

Зерттеудің өзектілігі (0.2) квазисызықты матрицалық дифференциалдау операторлы (0.3) түрдегі теңдеулердің қолданыстарымен де байланысты. Мысалы, *сұйықтық қозғалысына қатысты Эйлер теңдеулерінің сызықты емес жүйесі, конвективті диффузия теңдеуі, телеграф теңдеуі* және т.б. Диссертацияда оларды (0.2) операторлы (0.3) жүйелер түріне келтіруге болатыны көрсетілген.

Гиперболалық теңдеулер толқындық теңдеулер деп аталатыны белгілі. Қолданбалы сипаттағы көптеген жағдайларда олардың шешімдері периодты қума толқындармен байланысты (мысалы, Даламбер формуласы). Демек, барлық айнымалылар немесе олардың бөліктері бойынша шешімдердің көппериодтылығына байланысты сұрақтар белгілі бір қызығушылық тудырады.

Осылайша, диссертациялық зерттеудің өзектілігі теориялық жағынан да, қолданбалы жағынан да негізделген.

Зерттеудің мақсаты. Дифференциалдау операторын ықшамдау әдісін, әртүрлі дифференциалдау операторлы сызықты және квазисызықты жүйелерді интегралдау және олардың көппериодты шешімдерін зерттеу әдістемесін, сондай-ақ тар мағынада гиперболалық сызықтық жүйе үшін шеттік есепті зерттеу әдісін жасақтау.

Зерттеудің міндеттері:

1) $m+1$ айнымалылар бойынша матрицалық дифференциалдау операторын m айнымалылар бойынша матрицалық дифференциалдау операторлы сызықтық операторға келтіру әдісін жасақтау;

2) тар гиперболалық жағдайда тұрақты коэффициентті дифференциалдау оператордың көппериодты нөлдерінің бар болуын анықтау;

3) екі әртүрлі дифференциалдау операторлы сызықтық жүйелерді интегралдау әдістемесін жасақтау және сындық емес жағдайда көппериодты шешімдердің болуының жеткілікті шарттарын тағайындау;

4) жасақталған әдіс негізінде екі әртүрлі дифференциалдау операторлы квазисызықтық жүйе үшін бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттарын және осы жүйенің жалғыз көппериодты шешімінің бар

болуының жеткілікті шарттарын алу;

5) тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы сызықтық теңдеулер үшін бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттарын алу және осы теңдеулердің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті жағдайларын анықтау;

6) тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептің шешілімділігінің жеткілікті шарттарын алу;

7) әзірленген әдістеме негізінде тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы жүйесі бар квазисызықты жүйе үшін бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттарын және осы жүйенің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттарын алу.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста дифференциалдық теңдеулер теориясының, тербелістер теориясының және операторлар теориясының белгілі әдістері мен нәтижелері кеңінен қолданылады. Диссертацияда қарастырылған мәселелерді зерттеу мен шешудің негізгі әдісі Харасахал-Үмбетжанов әдістері және Ж.А. Сартабановтың оларды дамыту бойынша жұмыстарының әдістері болып табылады. Диссертацияның міндеттерін зерттеу барысында келесі жаңа әдістер жасақталды: операторды канондық түрге редукциялық келтіру әдісі; блоктық жүйелер әдісі; қосымша айнымалыларды енгізу әдісі; проекторлар әдісі.

Зерттеу нысаны: әртүрлі дифференциалдау операторлы сызықтық және квазисызықтық көп айнымалы жүйелердің шешімдері және олардың көппериодтылығы.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы:

а) айнымалылардың бірінің характеристикасы бойымен ауысуға негізделген $m+1$ айнымалылар бойынша матрицалық дифференциалдау операторын m айнымалылар бойынша матрицалық дифференциалдау операторлы сызықтық операторға келтіру әдісі жасақталды;

б) тар гиперболалық жағдайда тұрақты коэффициентті көппериодты оператордың көппериодты нөлдерінің бар болуы орнатылды;

в) екі әртүрлі дифференциалдау операторлы сызықтық жүйелерді интегралдау әдістемесі жасақталып, сындық емес жағдайда көппериодты шешімдердің болуының жеткілікті шарттары тағайындалды;

г) жасақталған әдіс негізінде екі әртүрлі дифференциалдау операторлы квазисызықтық жүйе үшін бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары және осы жүйенің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынды;

д) тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы сызықтық теңдеулер үшін қосымша айнымалыларды енгізу әдісі жасақталды;

е) тар мағынада гиперболалық жүйе үшін бір айнымалыдан екіншісіне ауысу проекторлар әдісі жасақталып, тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы сызықтық теңдеулер үшін бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары орнатылып, осы теңдеулердің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары анықталды;

ж) тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептің шешілімділігінің жеткілікті шарттары алынды;

з) әзірленген әдістеме негізінде тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы жүйесі бар квазисызықты жүйе үшін бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары және осы жүйенің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынды.

Қорғауға ұсынылатын негізгі нәтижелер:

– айнымалылардың бірінің характеристикасы бойына ауысуға негізделген $m+1$ айнымалылар бойынша матрицалық дифференциалдау операторын m айнымалылар бойынша матрицалық дифференциалдау операторлы сызықтық операторға келтіру әдісі;

– тар гиперболалық жағдайда тұрақты коэффициентті көппериодты оператордың көппериодты нөлдерінің бар болуы;

– екі әртүрлі дифференциалдау операторлы сызықтық жүйелерді интегралдау әдістемесі жасақталды және сындық емес жағдайда көппериодты шешімдердің болуының жеткілікті шарттары;

– жасақталған әдіс негізінде екі әртүрлі дифференциалдау операторлы квазисызықтық жүйе үшін бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары және осы жүйенің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары;

– тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы сызықтық теңдеулер үшін қосымша айнымалыларды енгізу әдісі;

– тар мағынада гиперболалық жүйе үшін бір айнымалыдан екіншісіне ауысу проекторлар әдісі, тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы сызықтық теңдеулер үшін бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары және осы теңдеулердің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары;

– тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептің шешілімділігінің жеткілікті шарттары;

– әзірленген әдістеме негізінде тар мағынада гиперболалық дифференциалдау операторлы жүйесі бар квазисызықты жүйе үшін бастапқы есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары және осы жүйенің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары.

Докторанттың қосқан жеке үлесі. Диссертацияда келтірілген барлық нәтижелер автордың жеке өзі немесе оның тікелей қатысуымен алынды. Қосалқы авторлар мен ғылыми кеңесшілер мәселенің қойылымына және алынған нәтижелерді, жұмыстың идеяларын талқылауға үлестерін қосты.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі семинарлар мен ғылыми конференцияларда баяндалды және талқыланды:

– VIII Халықаралық ғылыми конференция "Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері". Ақтөбе, 1 қараша, 2018;

– ҚР ҰҒА академигі С. Н.Хариннің 80 жылдық мерейтойына арналған Қазақстан Республикасының Ғылым қызметкерлері күніне және Workshop

"Problems of modelling processes in electrical contacts" дәстүрлі халықаралық математикалық конференциясы. Алматы, April 3-5, 2019;

– ф.-м.ғ.д., профессор М.И. Рамазановтың 70 жылдығына арналған "Математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы мәселелері" атты Халықаралық ғылыми конференция. Қарағанды, 12-13 маусым, 2019;

– "Eurasian Mathematical Journal" журналының шығарылғанына 10 жыл толуына арналған "Анализдің, дифференциалдық теңдеулер мен алгебраның өзекті мәселелері" (EMJ-2019) халықаралық конференциясы. Нұр-сұлтан, 16-19 қазан, 2019;

– ҚР Ғылым қызметкерлері күніне орай дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы. Алматы, 5-8 сәуір, 2020;

– -ҚР ҰҒА академигі Т.Ш. Кальменовтың 75 жылдығына арналған Қазақстан Республикасының Ғылым қызметкерлері күніне арналған дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы. Алматы, 5-8 сәуір, 2021;

– VI Халықаралық ғылыми конференция "Локальды емес шеттік есептер және математикалық биология, информатика және физиканың ұқсас мәселелері". Нальчик, 5-9 желтоқсан, 2021;

– IX Халықаралық ғылыми конференция "Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері". Ақтөбе, 24-28 мамыр, 2022;

– «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті математика кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Ж.Сартабанов).

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша негізгі ғылыми тұжырымдар 13 ғылыми жұмыста жарияланды, оның 1-і Scopus мәліметтер қорында индекстелген журналда, 4 жұмыс ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған рецензияланатын отандық басылымда, 8 жұмыс Халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында.