ТУТКУШЕВА ЖАЙЛАН САЛАВАТОВНА

ПРОБЛЕМА ВЫСОКОТОЧНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ МИНИМУМОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 – Математика

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав (первая глава состоит из 7-ми разделов, вторая глава - из 3-х разделов, третья глава – из 4-х разделов), заключения и списка использованной литературы.

Количество иллюстраций, таблиц и литературных источников. В работе использованы 7 таблиц, 12 иллюстраций и 142 источников.

Ключевые слова. Вспомогательная функция, глобальный экстремум, глобальный минимум, детерминированные методы, методы глобальной оптимизации, многоэкстремальная оптимизация, свойства вспомогательной функции, многомерная оптимизация.

Актуальность диссертации обусловлена возросшей в последнее время потребностью в решении задач глобальной оптимизации в различных областях науки и техники, экономики, отсутствием универсальных методов глобальной оптимизации, а также быстрым развитием компьютерных технологий. Проблема глобальной оптимизации является сегодня одной из важнейших задач прикладной и вычислительной математики. На сегодняшний день о методах и проблемах глобальной оптимизации известно и опубликовано очень много. Однако, проблемы глобальной оптимизации постоянно возникают в различных областях науки в связи с решением и исследованием различных практических задач. Поскольку универсальных алгоритмов не существует, существует постоянная необходимость создания новых методов.

В настоящее время все известные методы глобальной оптимизации можно разделить на две категории: детерминированные методы и стохастические методы. Методы детерминированной оптимизации — это группа методов, которые теоретически гарантируют, что полученное глобальное минимальное значение действительно является лучшим результатом. В диссертационной работе рассматривается детерминированный метод.

Существует много трудностей при вычислении глобального минимума функции. Основные трудности возникают из-за того, что целевая функция многоэкстремальная, многомерная, невыпуклая и то, что существующие методы не дают точных гарантий о приближении к глобальному минимуму. Многие ученые работают над этими трудностями.

В диссертационной работе рассмотрен эффективный и экономичный метод поиска глобального минимума многомерной функции $F(x)$. Для решения этой задачи была построена новая специальная функция и названа «вспомогательной функцией». Построен алгоритм, основанный на идее «вспомогательной функции».

Основным объектом исследования является не сама целевая функция $F(x)$, а вспомогательная функция с одной переменной, созданная путем преобразования исходной целевой функции с помощью кратного интеграла:

$$g_m(F,\alpha) = \int_E [|F(x)-\alpha| - F(x) + \alpha]^m dx,\ m \in N, m > 1, \qquad (0.1)$$

где: $F(x)$ – целевая функция, $E \subset R^n$ – допустимое множество целевой функции. Функция (0.1) содержит кратный интеграл, который зависит от количества переменных вспомогательной функции. Для вычисления кратного интеграла численными методами использовались кубические формулы С.Л. Соболева[1] с ограниченным пограничным слоем. М. Д. Рамазанов[2] оценил точность кубических формул Соболева для непрерывных функций и создал алгоритм интегрирования по области произвольной формы с использованием соболевских решеточных кубических формул.

Для вычисления приближенного значения интеграла

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x)dx$$

функции $\varphi(x)$, заданная в множестве Ω, зависящий от n вещественных переменных использованы кубатурные формулы С.Л. Соболева «с постоянным пограничным слоем». При этом приближенное значение интеграла $I(\varphi)$ определяется, как линейная комбинация значений функции $\varphi(x)$ в точках $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$:

1. Соболев С.Л. Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Математический университет Соболева, 1996. – 484 с.

2. Рамазанов М. Д. Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. – Уфа: ДизайнПолиграфСервис, 2009. – 178 с.

$$K_N\big(\varphi(x)\big) = h^n \sum_{s=1}^{N} C_s \varphi\big(x^{(s)}\big),$$

где N — число интервалов, делящий область интегрирования по каждой компоненте вектора x. Здесь: $x^{(s)}$ — узлы кубатурной формулы Соболева. C_s – коэффициенты пограничного слоя.

Основная проблема состоит в том, чтобы найти коэффициенты $\{C_s\}$ так, чтобы интеграл $I(\varphi)$ быстро приближался к значению $K_N(\varphi(x))$ при стремлении N к бесконечности.

Используя найденные коэффициенты, кубатурную формулу можно переписать так:

$$\int_\Omega \varphi(x)dx \approx h^n \sum_{s=1}^{N} C_s \varphi(x^{(s)}),\ N = 1,2, \dots . \qquad (0.2)$$

Здесь h^n — коэффициент масштабирования, определяющий размер элементарной ячейки.

Формула (0.2) является основным инструментом вычисления значений интегральной вспомогательной функции $g_m(F,\alpha)$ с высокой точностью. Если в этой кубатурной формуле вместо $\varphi(x)$ взять подинтегральное выражение функции $g_m(F,\alpha)$, то получим:

$$g_m(F,\alpha) = \int_{\mathrm{Q}} [|F(x) - \alpha| - (F(x) - \alpha)]^m dx \approx$$

$$\approx h^n \sum_{s=1}^{N} C_s \, [|F(h \cdot s) - \alpha| - (F(h \cdot s) - \alpha)]^m.$$

Новый метод, рассмотренный в диссертационной работе, реализован с помощью теории кубических формул, разработанных С.Л. Соболевым, М.Д. Рамазановым и другими учеными.

В ходе исследования были определены и доказаны соответствующие свойства вспомогательной функции (0.1): равномерно непрерывность, дифференцируемость, строгая выпуклость, монотоннонность, неотрицательность.

Теорема 0.1. *Вспомогательная функция* $g_m\Big(F,\alpha\Big)$, $m \in N$, $m > 1$, *равномерно непрерывна на любом ограниченном промежутке* $[\alpha_0\,, \alpha_0 + h)$, $\alpha_0 \geq \hat{\alpha}$, $h > 0$.

Для доказательства теоремы значения α_1 и α_2 были взяты из интервала $(\alpha_0\,, \alpha_0 + h)$ и исследован модуль разности вспомогательных функций в этих значениях.

Теорема 0.2. *Вспомогательная функция* $g_m(F,\alpha)$ *дифференцируема в каждой точке* α, $\alpha > \hat{\alpha}$, *где* $\hat{\alpha} = min_E F(x)$.

Для доказательства теоремы рассматривалось приращение вспомогательной функции. Порядок дифференцирования вспомогательной функции зависит от показателя вспомогательной функции m. m – влияет на гладкость вспомогательной функции.

Следствие 0.1. *Для любого* $m \in N$, $m > 1$ *производная вспомогательной функции* m*-го порядка*

$$\frac{d^m g_m}{d\alpha^m} = (2)^m m!\,\mu(E(F,\alpha)).$$

Выпуклость - важное свойство функции в теории оптимизации. Теория выпуклой оптимизации хорошо изучена. Следовательно, приведение многоэкстремальной функции к выпуклой функции означает, что решение задачи можно найти.

Теорема 0.3. *Функция* $g_m\left(F,\alpha\right)$, $m \in N$, $m > 1$, *является строго выпуклой в промежутке* $\alpha \geq \alpha_0$, *где* $\alpha_0 > \hat{\alpha}$.

Чтобы доказать теорему:

$$g_m\left(F,\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(g_m(F,\alpha_1) + g_m(F,\alpha_2\,)\right)$$

необходимо доказать правильность неравенства. Левая часть неравенства была раскрыта определением вспомогательной функции и доказана с помощью неравенства Коши.

Следующие две теоремы о порядке изменения вспомогательной функции также дают важную информацию:

Теорема 0.4. *Функция* $g_m(F,\alpha)$ *возрастает на промежутке* $(\hat{\alpha},+\infty)$, *где* $m \in N, m > 1$.

Теорема 0.5. *Пусть* $r > s$, $r,s \in N, r > 1$, $s > 1$. *Тогда*

1) если $\alpha - \hat{\alpha} \leq 0$, то $g_r(F,\alpha) = 0$ и $g_s(F,\alpha) = 0$;
2) если $0 < \alpha - \hat{\alpha} \leq \hat{\alpha} + \frac{1}{2}$, то $g_r(F,\alpha) \leq g_s(F,\alpha)$.

Независимо от количества локальных минимумов целевой функции, количества переменных, полученная вспомогательная функция зависит только от одного параметра α и она равномерно непрерывная, имеет производные, выпуклая, неотрицательная и монотонно возрастает.

Выведены и доказаны необходимые и достаточно оптимальные условия глобального минимума многомерной многоэкстремальной функции. Полученные условия привели к переходу от поиска глобального минимума целевой функции к задаче поиска «наибольшего нуля» вспомогательной функции.

Теорема 0.6. *Если* $glob\ min_E F = \hat{\alpha}$, *то*

$$g_m(F, \hat{\alpha}) = 0. \qquad (0.3)$$

Следствие 0.2. *Глобальный минимум целевой функции* F *является нулем вспомогательной функции* $g_m(F, \alpha)$.

Теорема 0.7. *Если* $max_\alpha\{\alpha \in \mathbb{R}: g_m(F, \alpha) = 0\} = \hat{\alpha}$, *то достаточно, что* $glob\ min_E F = \hat{\alpha}$.

Следствие 0.3. *Необходимый нуль* $\hat{\alpha}$ *вспомогательной функции* $g_m(F, \alpha)$ *является точным значением глобального минимума целевой функции* F.

Основной результат диссертационной работы состоит в том, что искомое глобальное минимальное значение заданной непрерывной многомерной функции равно «наибольшему нулю» вспомогательной функции, доказанной в теоремах 0.6, 0.7.

Теперь задача состоит в том, чтобы определить «наибольший ноль» вспомогательной функции. В диссертации «наибольший ноль» функции $g_m(F, \alpha)$ рассматривался путем адаптации различных численных методов: дихотомии, золотого сечения, градиентного спуска, метода касательных, метода модифицированных хорд. В исследования были рассмотрены скорости численных мтодов и проведены вычислительные эксперименты. На данном этапе исследования симметричные методы являются более экономными.

Основным преимуществом метода является сведение задачи поиска глобального минимума многомерной и многоэкстремальной целевой функции к определению наибольшего нуля одномерной равномерно непрерывной, выпуклой функции. Его смысл состоит в том, что максимальное значение аргумента, при котором вспомогательная функция и ее производные равны нулю, равно глобальному минимуму целевой функции.

В диссертации определены и доказаны основные свойства вспомогательной функции $g_m\left(F, \alpha\right)$, создан алгоритм вычисления глобального минимума, рассчитаны глобальные минимумы мультимодальных функций с несколькими переменными в среде программирования C++.

Практическая и теоретическая значимость полученных результатов. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический и практический характер: создание нового метода с использованием вспомогательной функции для поиска глобального минимума многомерной непрерывной целевой функции; доказательство сходимости предлагаемого метода; изучение важных свойств вспомогательной функции (неотрицательность, строгая выпуклость, монотонность, равномерная непрерывность, дифференцируемость и др.); получение необходимого и достаточного условия глобального минимума многомерной многоэкстремальной целевой функции. Кроме того, он используется как инструмент при решении обратных задач, решении систем дифференциальных уравнений и др.

Вполне возможно, что предложенные метод и алгоритм внесут положительный вклад в расширение области применения как важного приложения к теории оптимизации и численным методам. Результаты диссертационной работы могут поспособствовать дальнейшему развитию этой теории и могут быть использованы для разработки элективных курсов для студентов, магистрантов и докторантов по физике и математике, инженерному делу, вычислительной технике и программному обеспечению и т.д.

Цель исследования. Разработать новый эффективный метод нахождения глобального минимума непрерывной многоэкстремальной и многомерной функции с высокой точностью.

Задачи исследования:

а) создание метода глобальной оптимизации с использованием новой «вспомогательной функции» для нахождения глобального минимума непрерывной целевой функции многих переменных и доказательство его сходимости;

б) изучить важные свойства «вспомогательной функции» (неотрицательность, строгая выпуклость, монотонность, равномерная непрерывность, дифференцируемость и т. д.);

в) получение необходимое условие глобального минимума целевой функции многих переменных;

г) получение достаточное условие глобального минимума целевой функции многих переменных;

д) вычисление глобальных минимумов многомерных многоэкстремальных целевых функций в среде программирования C++ с использованием предложенного нового метода;

е) применение известных численные методы для поиска наибольшего нуля вспомогательной функции и выполнить сравнительный анилиз к ним с точки зрения оптимальности.

Методы исследования: В диссертационной работе применены основные положения теории многомерного математического анализа, кубатурные формулы Соболева «с постоянным пограничным слоем»; использованы численные методы определения корней трансцендентных уравнений и нахождения минимума выпуклой функции.

Объектами исследования — непрерывная целевая функция; вспомогательная функция одной переменной, выраженная в виде кратного интеграла, полученная путем преобразования целевой функции, метод построенный на основе вспомогательной функции.

Научная новизна исследования.

а) создан метод глобальной оптимизации с использованием новой «вспомогательной функции» для нахождения глобального экстремума непрерывной целевой функции многих переменных и доказана его сходимость;

б) создан специальный алгоритм поиска координат глобального экстремума;

в) определено количество итераций, необходимое для нахождения глобального экстремума по построенному методу, с заранее заданной точностью;

г) для вычисления значения вспомогательной функции использованы кубатурные формулы Соболева с постоянным пограничным слоем и вычислением их пограничных коэффициентов;

д) изучены и доказаны важные свойства «вспомогательной функции» (неотрицательность, строгая выпуклость, равномерная непрерывность, дифференцируемость и др.);

е) получено необходимое условие глобального экстремума целевой функции многих переменных;

ж) получено достаточное условие глобального экстремума целевой функции многих переменных;

з) исследованы и модифицированы существующие численные методы для поиска наибольшего нуля вспомогательной функции и сделан сравнительный анилиз к ним с точки зрения оптимальности.

Положения, выносимые на защиту:

а) новый метод глобальной оптимизации для поиска глобального экстремума непрерывной функции многих переменных;

б) алгоритм определения координат глобального экстремума многомерной целевой функции;

в) вычисление значений вспомогательной функции по кубатурным формулам Соболева с «постоянным пограничным слоем»;

г) основные свойства «вспомогательной функции» (неотрицательность, строгая выпуклость, монотонность, равномерная непрерывность, дифференцируемость);

д) необходимое условие глобального экстремума многопеременной функции;

е) достаточное условие глобального экстремума многопеременной функции;

з) программы поиска глобальных минимумов многомерных тестовых функций новым методом в среде C++.

Личный вклад автора. Все результаты, представленные в диссертации, принадлежат самому автору. Соавторы и научные консультанты способствовали постановке задачи и обсуждению результатов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на следующих научных мероприятиях:

- традиционная апрельская международная научная конференция, Институт математики и математического моделирования Министерства образования Республики Казахстан (Алматы, Казахстан, 5-8 апреля 2021 г.);

- IX Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, анализ и проблемы алгебры», Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова (Актобе, Казахстан, 24-28 мая 2022 г.);

- традиционная апрельская международная научная конференция, Институт математики и математического моделирования Министерства образования Республики Казахстан (Алматы, Казахстан, 4-8 апреля 2022 г.);

- научный семинар «Качественные и приближенные методы исследования дифференциальных уравнений», Институт математики и математического моделирования Министерства образования, культуры и спорта РК, г. Алматы, Казахстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Асанова А.Т.);

- научный семинар «Современные проблемы математики», Кафедра математики и информатики филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в Казахстане, г. Астана, Казахстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Нурсултанов Е.Д.);

- городской научный семинар «Математические проблемы естествознания. Обратные и неправильные вычисления», Государственный Университет Аль-Фараби, Алматы, Казахстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Бектемесов М.А.);

- научный семинар «Проблемы прикладной математики и информатики», кафедра математики Актюбинского регионального университета имени К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Сартабанов Ж.);

- научный семинар «Семинар по вычислительной математике и смежным вопросам», Уфа, РФ, 2024г. (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Я. Ш. Ильясов);

- Международная Евразийская научная конференция «Обратные и некорректные задачи в естествознании и искусственный интеллект» (Алматы, Казахстан, 17-20 апрель 2024г.).

Публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в 10 статьях. Из них 2 статьи опубликованы в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе данных Scopus, 4 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки МНВО РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 4 статьи опубликованы в материалах международных научных конференций.