

МУҚАШ МЕЙРАМБЕК ӘМІРЖАНҰЛЫ

**КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА И АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С
ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ**

АННОТАЦИЯ

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 8D05401 – Математика**

Общее описание диссертационной работы. Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости и качественных свойств краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные и нефиксированные моменты времени.

Актуальность исследования обусловлена многочисленными применениями дифференциальных уравнений с импульсным воздействием при решении естественнонаучных задач, а также необходимостью разработки новых конструктивных методов, позволяющих эффективно определять разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и находить их решения.

Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями служат математическими моделями многих объектов, которые в процессе своей эволюции подвергаются действию кратковременных сил, например, в нелинейной механике, в автоматическом регулировании, в теории осцилляций и динамических систем и др. Наличие импульсного воздействия может существенно усложнить поведение траекторий таких систем даже для случая достаточно простых дифференциальных уравнений. Импульсные системы различного типа рассматривались в классических работах Н.Н. Боголюбова, Н.М. Крылова, Е.А. Барбашина, А. Халаяна, Д. Векслера, А.Д. Мышкиса, А.М. Самойленко, Н.А. Перестюка, D.D. Vainov и др. В последующем исследовании многих авторов были посвящены изучению вопросов устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, развитию теории периодических и почти периодических решений импульсных систем, изучению инвариантных множеств, построению асимптотических разложений по методу малого параметра Крылова – Боголюбова – Митропольского, методу усреднения, проблемам теории оптимального управления, изучению импульсных систем со случайными возмущениями.

Хорошо известно, что исследования реальных процессов, основанных на идеализированных математических моделях, приводят зачастую к дифференциальным уравнениям с малыми параметрами. Для их исследования широко используются различные асимптотические методы. Выбор конкретного асимптотического метода зависит от структуры дифференциального уравнения, описывающего динамику объекта. В связи с

многочисленными приложениями методы усреднения получили широкое развитие в нелинейной механике и теории колебаний. Математическое обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений берет начало в фундаментальной работе Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Большую роль в разработке метода усреднения для различных классов дифференциальных уравнений сыграли работы Е.А. Гребеникова, Ю.А. Митропольского, Н.Н. Моисеева, Н.А. Перестюка, В.А. Плотникова, А.М. Самойленко, А.Н. Филатова и др.

Обобщение метода усреднения для асимптотического интегрирования импульсных дифференциальных уравнений имеет большое теоретическое и практическое значение по следующим причинам: из-за сложной структуры импульсных систем качественное исследование связано с большими трудностями, в то время как усредненная система становится безимпульсной; решение усредненной системы приближает решение исходной системы с любой наперед заданной точностью на асимптотически большом временном интервале.

В данной работе метод усреднения развивается на начальные и краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями в нефиксированные моменты и зависящих от малого параметра. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями исследованы в нефиксированные моменты при малом параметре в нелинейной правой части уравнения и в условиях импульса, где краевые условия также заданы нелинейно.

Существенным моментом исследования является нелинейность рассматриваемых краевых задач для дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями в нефиксированные моменты и зависимость от малого параметра правой части уравнения и условий импульса.

Основными методами решения указанных классов задач являются метод усреднения и метод параметризации Джумабаева.

Д.С. Джумабаев предложил новый подход, основанный на методе параметризации, для исследования и решения краевых задач для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Цель исследования. Применение методов усреднения и параметризации при решении краевых задач для импульсных дифференциальных уравнений и создание эффективных алгоритмов решения задач.

Задачи исследования:

- а) определение непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений импульсных воздействий от начальных условий;
- б) решение уравнения вариации импульсной системы методом усреднения;
- в) установить условий разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием в фиксированный момент времени методом усреднения;

- г) получение условий решения нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием и создание эффективного алгоритма поиска ее решения;
- д) определение условий разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсом в нефиксированный момент времени методом параметризации;
- е) установление условий существования двусторонних ограниченных вдоль оси решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием в нефиксированный момент времени.

Методы исследования: В диссертационной работе применены метод усреднения решения краевой задачи, метод параметризации решения краевой задачи.

Объектами исследования — краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с импульсным воздействием в фиксированный момент времени, краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с импульсным воздействием в нефиксированный момент времени.

Научная новизна исследования.

- а) установлены условия существования решения краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием в фиксированный момент времени в случае существования решения усредненной краевой задачи для импульсного дифференциального уравнения;
- б) методом усреднения определены условия существования двусторонних ограниченных вдоль оси решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием в нефиксированный момент времени;
- в) метод параметризации Д.С. Джумабаева использован для решения краевых задач для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с импульсным воздействием в фиксированный момент времени;
- г) метод параметризации Д.С. Джумабаева был использован для решения краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием в нефиксированный момент времени.
- д) разработаны алгоритмы решения нелинейной краевой задачи и их численная реализация для дифференциального уравнения с импульсным воздействием в нефиксированный момент времени.

Положения, выносимые на защиту:

- а) нахождение решения уравнений вариации импульсной системы методом усреднения;
- б) применение метода усреднения для исследования существования решений краевой задачи для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные и нефиксированные моменты времени;
- в) определение двусторонних ограниченных вдоль оси решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием в незафиксированный момент времени методом усреднения;
- г) условия решения нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием в фиксированный момент времени;

- д) определение условий разрешимости краевой задачи для импульсного дифференциального уравнения в фиксированный момент времени методом параметризации;
- е) решение нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием методом параметризации;
- ж) алгоритмы решения нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием в нефиксированный момент времени и их численная реализация;
- з) алгоритм поиска решения системы нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием.

Надежность и достоверность. В диссертации широко используются методы и результаты теории импульсных дифференциальных уравнений. Основными методами исследования и решения задач, рассматриваемых в диссертации, являются методы усреднения и параметризации.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Результаты диссертационной работы носят в основном теоретический характер. Научная значимость работы заключается в создании конструктивного метода исследования и решения краевых задач для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени.

Связь диссертационной работы с другими исследовательскими работами. Диссертационная работа выполнена в рамках грантового финансирования по приоритету «Фундаментальные исследования в области естественных наук» в рамках проекта «Методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени» (№АР 15473190, 2022-2024 гг.).

Личный вклад автора. Все результаты, представленные в диссертации, принадлежат самому автору. Соавторы и научные консультанты способствовали постановке задачи и обсуждению результатов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на следующих научных мероприятиях:

- традиционная апрельская международная научная конференция, Институт математики и математического моделирования Министерства образования Республики Казахстан (Алматы, Казахстан, 5-10 апреля 2020 г.);
- IX Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, анализ и проблемы алгебры», Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова (Актобе, Казахстан, 24-28 мая 2022 г.);
- традиционная апрельская международная научная конференция, Институт математики и математического моделирования Министерства образования Республики Казахстан (Алматы, Казахстан, 15-20 апреля 2024 г.);
- Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications – MADEA 9, Бишкек, Кыргызстан (21-25 июня, 2021г.);
- International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations QUALITDE – 2020, Тбилиси, Грузия (19-21 декабря, 2020 г.);

Публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в 8 статьях. Из них 2 статьи опубликованы в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе данных Scopus, 2 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 4 статьи опубликованы в материалах международных научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 2 частей (первая часть состоит из 6-и разделов, вторая часть - из 3-х разделов), заключения и списка использованной литературы.

Краткое содержание диссертации. Введение включает оценку современного состояния рассматриваемых вопросов, обоснование необходимости проведения научных исследований. Во введении показаны актуальность и новизна темы, основные цели и задачи исследования, а также положения, выносимые на защиту.

В первой части рассматривается метод усреднения решения краевых задач для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени.

В подразделе 1.1 представлена постановка краевой задачи для дифференциальных уравнений импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени, а также основные и дополнительные условия и определения для нее.

В подразделе 1.2 приведена непрерывная зависимость решения системы уравнений импульса от начальных условий.

Сначала исследуется непрерывная зависимость решения системы уравнений с импульсным воздействием от начальных условий, а затем исследуется непрерывная дифференцируемость решения по начальным данным для импульсной системы в фиксированный момент времени.

В подразделе 1.3 рассматривается решение уравнения вариации импульсной системы в фиксированный момент времени методом усреднения.

В фиксированный момент времени рассматривалась система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, изучалось соответствующее уравнение в вариациях и в результате была сформулирована теорема об усреднении уравнения в вариациях.

В подразделе 1.4 рассматривается решение краевой задачи для дифференциального уравнения с импульсным воздействием в фиксированный момент времени.

Исследована разрешимость краевой задачи для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированный момент времени, в результате сформулирована теорема.

В подразделе 1.5 рассматривается решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени методом усреднения.

Методом усреднения исследована проблема разрешимости краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с импульсным

воздействием в нефиксированный момент времени с малым параметром, а основной результат сформулирован в виде теоремы.

В подразделе 1.6 рассматриваются двусторонние ограниченные вдоль оси решения дифференциального уравнения с импульсным воздействием в нефиксированный момент времени.

Двусторонние ограниченные на оси решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированный момент времени с малым параметром, исследовались сначала на полуинтервале, затем на всей числовой оси, а результаты сформулированы в виде теорем.

В подразделе 2.1 рассматривается решение краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с импульсным воздействием методом параметризации.

Сначала рассматриваемый интервал разбивается на подинтервалы через точек импульсов. Затем вводится параметр как значение неизвестной функции в серединах подинтервалов, замена функции производится в каждом подинтервале, тогда заданная краевая задача приводится к эквивалентной многоточечной задаче с параметрами. Построен алгоритм решения многоточечной краевой задачи с параметрами, сформулирована и доказана теорема, являющаяся достаточным условием сходимости этого алгоритма, а также существования изолированного решения многоточечной краевой задачи.

В подразделе 2.2 приводится одна модификация алгоритма решения двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.

В подразделе 2.3 рассмотрено решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с импульсным воздействием в нефиксированный момент времени методом параметризации.

Сначала вводится параметры как значение неизвестной функции на двух концах интервала и делается замена функции в каждом подинтервале, тогда заданная краевая задача приводится к эквивалентной многоточечной задаче с параметрами. Построен алгоритм решения многоточечной краевой задачи с параметрами, сформулирована и доказана теорема, являющаяся достаточным условием сходимости этого алгоритма, а также существования единственного решения многоточечной краевой задачи.