

**НУГАЕВА ЗАХИРА ТУРЕБАЕВНА**

**НЕПРЕДСКАЗУЕМЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ И ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С ПРИМЕНЕНИЯМИ В  
НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ**

**АННОТАЦИЯ**

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)  
по специальности 6D060100 — Математика**

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав (первая глава состоит из 3-х разделов и 4-х подразделов, третья глава из 3-х разделов), заключения и списка использованной литературы.

**Количество иллюстраций, таблиц и литературных источников.** В работе использованы 19 иллюстраций, 2 таблицы и 146 источников.

**Ключевые слова.** Колебания, непредсказуемая функция, разрывная непредсказуемая функция, импульсная система, гибридная система,  $B$ -топология, дифференциальные уравнения с обобщенным кусочно-постоянным аргументом, нейронные сети Хопфилда, асимптотическая устойчивость.

**Актуальность диссертации** обусловлена многочисленными применениями дифференциальных уравнений и гибридных систем при решении задач естествознания и широким использованием нейронных сетей в современном мире. В основе диссертации лежит концепция непредсказуемых функций, введенные М. Ахметом и М.О. Феном<sup>1-3</sup>. В диссертации доказывается существование непрерывных и разрывных непредсказуемых решений импульсных систем и дифференциальных уравнений с обобщенным кусочно-постоянным аргументом, а результаты применяются к нейронным сетям Хопфилда. Основные результаты диссертации опубликованы в международных рецензируемых журналах, что подтверждает актуальность исследования.

Теоретические основы настоящего исследования полностью лежат в теории динамических систем, основанной А. Пуанкаре<sup>4</sup> и Дж. Биркгофом<sup>5</sup>. А. Пуанкаре определил, что за хаотичной динамикой скрывается устойчивое по Пуассону движение. Устойчивые по Пуассону движения, а также периодические, квазипериодические и почти периодические движения имеют решающее значение для теории дифференциальных уравнений.

Рекуррентные движения и устойчивые по Пуассону точки находятся в

1 Akhmet M., Fen M.O. Unpredictable points and chaos // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2016. – Vol. 40. – P. 1-5.

2 Akhmet M., Fen M.O. Poincare chaos and unpredictable functions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2017. – Vol. 48. – P. 85-94.

3 Akhmet M., Fen M.O. Non-autonomous equations with unpredictable solutions // Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 59. – P. 657-670.

4 Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, - Paris: Gauthier-Villars, 1892. - Vol. 1,2.

5 Birkhoff, G.D. Dynamical Systems. – USA: American Mathematical Society, 1927. – 305 p.

центре качественной теории движений динамических систем. Устойчивые по Пуассону точки рассматривались А. Пуанкаре как главный элемент в описании проблем небесной механики. Более века спустя, используя устойчивую по Пуассону точку, М. Ахмет и М.О. Фен ввели понятие непредсказуемой точки. Они довели рекуррентность функциональных пространств до ее окончательной формы, когда помимо устойчивости по Пуассону добавляется свойство *разделения*.

Непредсказуемая траектория обязательно положительно устойчива по Пуассону, и одной из ее отличительных черт является возникновение хаоса в соответствующем квазиминимальном множестве. Хаос, основанный на наличии непредсказуемой траектории, называется *хаосом Пуанкаре*. То есть доказательство непредсказуемости подтверждает наличие хаоса Пуанкаре динамики Бебутова в функциональном пространстве с топологией сходимости на компактах вещественной оси. Это открывает новые перспективы для контроля и синхронизации хаоса в дифференциальных уравнениях.

Непредсказуемые точки и непредсказуемые функции становятся все более применимыми в изучении теории хаоса. Например, некоторые топологические свойства хаоса Пуанкаре были рассмотрены Миллером<sup>6</sup>, Такуром и Дасом<sup>7,8</sup>. Причем они используют не только определения непредсказуемой точки и хаоса Пуанкаре, но и методику, основанную на последовательностях Пуассона и разделения. Было доказано, что непредсказуемые движения присутствуют и в случайных процессах.

Гибридные системы — это концепция в теории динамических систем, имеющая важные приложения. Модель называется *гибридной*, если она сочетает в себе непрерывную и дискретную динамику. Импульсные системы и дифференциальные уравнения с обобщенным кусочно-постоянным аргументом являются, по сути, гибридными уравнениями, то есть комбинацией непрерывных и дискретных уравнений.

Импульсные системы описывают динамику явлений реального мира, в которых присутствуют резкие прерывания непрерывных процессов, и играют решающую роль в различных областях, таких как механика, медицина, нейронные сети, системы связи. Существование периодических и почти периодических решений линейных неоднородных систем, возмущенных дельта-функциями Дирака, исследовали А. Халанай и Д. Векслер<sup>9</sup>. Но в случае нелинейных систем такой метод исследования приводит к значительным затруднениям. Один из подходов к решению этой проблемы заключался в использовании в системе *оператора скачка*. Такой подход используется в исследовании.

---

6 Miller A. Unpredictable points and stronger versions of Ruelle–Takens and Auslander–Yorke chaos // *Topology and its Applications*. – 2019. - № 253. – P. 7–16.

7 Thakur R., Das R. Strongly Ruelle–Takens, strongly Auslander–Yorke and Poincaré chaos on semiflows // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2020. - № 81:105018.

8 Thakur R., Das R. Sensitivity and chaos on product and on hyperspatial semiflows // *Journal of Difference Equations and Applications*. – 2021. – Vol. 27(1). – P. 1-15.

9 Halanay A., Wexler D. *Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri*. – Bucharest: Editura Academiei, 1968. –312 p.

Теория дифференциальных уравнений с обобщенными кусочно-постоянными функциями в качестве аргументов была широко развита М. Ахметом<sup>10-12</sup>. Его нововведения стали наиболее общими не только в моделировании, но и очень мощными в методологическом смысле, поскольку были предложены эквивалентные интегральные уравнения, открывающие путь исследования методов теории операторов и функционального анализа.

Новизну наших результатов следует учитывать и в отношении колебаний и моделирования нейронных сетей. Нейронные сети имеют особое значение для адаптивного распознавания образов, зрения, обработки изображений, ассоциативной памяти, улучшения рентгеновских изображений и изображений компьютерной томографии. Рассматриваемые в диссертации модели подвержены непредсказуемым возмущениям, что позволяет изучать хаотические сигналы в нейронных сетях.

**Целью диссертационного исследования** является исследование линейных, квазилинейных импульсных систем и квазилинейных дифференциальных уравнений с обобщенным кусочно-постоянным аргументом, которые имеют непредсказуемые возмущения, используя метод и теоретические основы, заложенные в работах М. Ахмета и М.О. Фен. А также исследование наличия непредсказуемых колебаний в нейронных сетях Хопфилда.

**Задачи исследования:**

а) получить достаточные условия существования и единственности асимптотически устойчивого разрывного непредсказуемого решения линейных и квазилинейных импульсных систем;

б) доказать существование и единственность экспоненциально устойчивого непредсказуемого решения квазилинейных дифференциальных уравнений с обобщенным кусочно-постоянным аргументом;

в) установить достаточные условия существования асимптотически устойчивых сильно непредсказуемых непрерывных колебаний в модели нейронных сетей Хопфилда;

г) исследовать асимптотическую устойчивость разрывных непредсказуемых колебаний в импульсной нейронной сети со структурой Хопфилда;

д) определить достаточные условия существования и единственности экспоненциально устойчивых непредсказуемых колебаний в нейронных сетях Хопфилда с обобщенным кусочно-постоянным аргументом;

е) показать численные примеры с графиками и блок-схемами, подтверждающие достоверность теоретических результатов.

---

10 Akhmet M.U. On the integral manifolds of the differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations at the Florida Institute of Technology. – 2005. – P. 11-20.

11 Akhmet M.U. On the reduction principle for differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – Vol.336, №1. – P. 646-663.

12 Akhmet M.U. Stability of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2008. – Vol.68, № 4. – P. 794-803.

**Методы исследования.** В диссертации широко используются методы и результаты теории функционального анализа, алгебры и дифференциальных уравнений.

**Объектами исследования** являются непрерывные и разрывные непредсказуемые колебания импульсных систем, дифференциальных уравнений с обобщенным кусочно-постоянным аргументом и нейронных сетей Хопфилда.

**Научная новизна исследования.** Впервые введены и исследованы импульсные системы и дифференциальные уравнения с обобщенным кусочно-постоянным аргументом, которые имеют непредсказуемые возмущения. А также исследованы нейронные сети Хопфилда, описываемые дифференциальными уравнениями и гибридными системами.

Новизна диссертации:

а) получены достаточные условия существования и единственности асимптотически устойчивых разрывных непредсказуемых решений для линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием;

б) доказаны существование и единственность экспоненциально устойчивых непредсказуемых решений квазилинейных дифференциальных уравнений с обобщенным кусочно-постоянным аргументом;

в) установлены достаточные условия существования асимптотически устойчивых сильно непредсказуемых непрерывных колебаний в модели нейронных сетей Хопфилда;

г) исследовано существование асимптотически устойчивых разрывных непредсказуемых колебаний импульсной модели нейронных сетей со структурой Хопфилда;

д) определены достаточные условия существования и единственности экспоненциально устойчивых непредсказуемых колебаний нейронных сетей Хопфилда с обобщенным кусочно-постоянным аргументом;

е) приведены численные примеры с графиками и блок-схемами, подтверждающие осуществимость теоретических результатов.

**Положения, выносимые на защиту:**

- понятие разрывной непредсказуемой функции, а также способы построения разрывных непредсказуемых функций;

- достаточные условия существования и единственности асимптотически устойчивых разрывных непредсказуемых решений линейных импульсных систем;

- условия существования и единственности асимптотически устойчивых разрывных непредсказуемых решений квазилинейных импульсных систем;

- условия существования и единственности экспоненциально устойчивых непредсказуемых решений квазилинейных дифференциальных уравнений с обобщенным кусочно-постоянным аргументом;

- достаточные условия существования асимптотически устойчивых сильно непредсказуемых колебаний нейронных сетей Хопфилда;

- достаточные условия существования асимптотически устойчивых разрывных непредсказуемых колебаний в импульсных нейронных сетях со структурой Хопфилда;

- достаточные условия существования и единственности экспоненциально устойчивых непредсказуемых решений нейронных сетей Хопфилда с обобщенным кусочно-постоянным аргументом.

**Личный вклад автора.** Все результаты диссертационной работы получены автором. Участие соавторов и научных консультантов заключается в постановке целей и обсуждении результатов.

**Апробация полученных результатов.** Основные результаты диссертации были доложены и обсуждены на следующих мероприятиях:

- V Международная научно-практическая конференция ИИКТ МОН РК «Информатика и прикладная математика» (Алматы, Казахстан, 29 сентября - 1 октября 2020 г.);

- Международная конференция по искусственному интеллекту и прикладной математике в инженерии (ICAIAME 2020) (Анталия, Турция, 9-11 октября 2020 г.);

- Традиционная международная апрельская научная конференция, посвященная Дню работников науки Республики Казахстан (Алматы, Казахстан, 5-8 апреля 2021 г.);

- Научный семинар «Проблемы прикладной математики и информатики», Кафедра математики, Актюбинский областной университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан (руководитель семинара доктор физико-математических наук, профессор Ж. Сартабанов).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 7 статей, в том числе 3 публикации в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе данных Scopus, 1 публикация в научном журнале, включенном в список рекомендованных КОКСОН МОН РК, 3 публикации в материалах международных конференций, в том числе 1 публикация в материалах зарубежной конференции, индексируемых в базе данных Scopus.

Все результаты опубликованы в рамках грантовых исследовательских проектов Министерства образования и науки Республики Казахстан по фундаментальным исследованиям в области естественных наук (№ AP08955400, № AP08856170 и № AP09258737).