ЖҰМАҒАЗИЕВ ӘМІРЕ ХАЛИҰЛЫ

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 — Математика

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав (первая глава состоит из 4-х разделов и 3-х подразделов, вторая глава состоит из 2-х разделов и 6-и подразделов, третья глава состоит из 2-х разделов), заключения и списка использованной литературы.

Количество иллюстраций, таблиц и литературных источников. В работе использованы 3 иллюстрации, 1 таблица и 98 источников.

Ключевые слова. Оператор дифференцирования, гиперболичность в узком смысле, приведение к каноническому виду, многопериодичность, матрицант, блочный метод, метод проекторов, метод характеристик.

Актуальность диссертации обусловлена необходимостью разработки новых эффективных методов исследования начальных задач и многопериодических решений систем уравнений с различными операторами дифференцирования, описывающих колебательные процессы из гидромеханики, электромагнитных явлений и др.

Диссертационное исследование посвящено изучению многопериодических решений систем уравнений в частных производных первого порядка, главные части которых определяются линейными соотношениями

$$D_j x_j = \frac{\partial x_j}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^k \frac{\partial x_j}{\partial t_k}, \ j=\overline{1,n}, \tag{0.1}$$

где $x_j = x_j(\tau, t)$ – неизвестные функции переменных $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$ и $t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$; $a_{ji}^k = a_{ji}^k(\tau, t)$ – заданные функции. Заметим, что для таких систем в общем случае нет разработанного метода решения начальной задачи.

Положив $x = (x_1, ..., x_n)$, оператор (0.1) можно представить в виде матричного оператора дифференцирования

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k(\tau, t)\frac{\partial x}{\partial t_k} \tag{0.2}$$

по направлениям векторных полей, определяемых уравнениями характеристик, где $A_k(\tau, t) = \left[a_{ji}^k(\tau, t)\right]$ – квадратная $n \times n$-матрица при дискретном $k = \overline{1,m}$.

Тогда общий вид исследуемой системы можно записывать в форме квазилинейного векторного уравнения

$$Dx = B(\tau,t)x + f(\tau,t,x) \tag{0.3}$$

с заданным оператором D, матрицей $B(\tau,t)$ и вектор-функцией $f(\tau,t,x)$ аргументов $(\tau,t) \in R \times R^m$, $x \in R^n_\Delta = \{x \in R^n : |x| \le \Delta,\ \ \Delta - const > 0\}$.

В данной работе исследуются вопросы упрощения оператора (0.2), в смысле приведения его к каноническому виду, разрабатываются методы интегрирования и изучения многопериодических решений, в частности, когда матрицы A_k и B являются постоянными.

Если обратимся к истории вопроса интеграции уравнений (0.3) с оператором (0.2), то он в аналитическом случае исследован С.В. Ковалевской (1874-1885) методом мажорации. Таким образом, получила широкую известность теорема Коши-Ковалевской о решении начальной задачи для уравнений (0.3) с оператором (2).

После появления классических трудов Л. Эйлера (1768-1770) и Ж.Лагранжа (1774) по созданию вариационного исчисления, в частности, по интегрированию уравнений в частных производных, С.В. Ковалевская в 1888 году получила фундаментальные результаты по решению задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, которые были удостоены премии Парижской Академии наук. В связи с этим, следует обратить внимание на важность исследования колебательных решений уравнений со многими частотами, которые сводятся к вопросу многопериодических решений уравнений вида (0.3) с оператором (2).

Основы общей теории систем уравнений в частных производных первого порядка в гладком случае, заложены в работах И.Г. Петровского. Главным способом решения таких систем является метод характеристик Коши, суть которого заключается в сведении задачи к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Сведение такого характера Лагранж в свое время назвал *искусством*.

Одним из приемов реализации метода характеристик является приведение оператора (0.2) с двумя переменными к каноническому виду, приведенному в работах И.Г. Петровского. В его работах уравнение (0.3) названо *эллиптическим*, если матрица коэффициентов $A_1 = A(\tau,t)$ не имеет действительных корней. В случае неэллиптичности уравнения (0.3), но приводимости к каноническому виду, уравнение названо *гиперболическим*.

Если каждая из матриц $A_k(\tau,t)$ имеет n действительных и различных собственных значений, то уравнение (0.3) называется *гиперболическим в узком смысле*. Метод исследования данной работы тесно связан с методами теории уравнений в частных производных (0.3), когда матрицы $A_k(\tau,t)$ оператора (0.2) в скалярном случае (0.1) обладают свойствами

$$a^k_{ji}(\tau,t) = \begin{cases} b^k_j(\tau,t) \ne 0, i = j, \\ 0, i \ne j, \end{cases} \quad b^k_j(\tau,t) = \lambda_{kj}(\tau,t) \ne 0, \quad i, j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m}. \tag{0.4}$$

Этот случай представляет собой гиперболичность уравнения (0.3) в узком смысле.

При выполнении условия (0.4) канонический вид D^* оператора D имеет форму

$$D^* = \mathrm{diag}\left[D_\pi^*,...,D_\pi^*\right], \quad D_\pi^* = \frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t_k}, \qquad (0.5)$$

то есть, все уравнения системы (0.3) после приведения имеют один и тот же оператор дифференцирования D_π^*. Тогда систему (0.3) можно назвать *параболическим*.

В частности, при $\lambda_k = 1$, $k = \overline{1,m}$ из (0.5) имеем оператор

$$D_e^* = \frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t_k} \equiv \frac{\partial}{\partial\tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle, \qquad (0.6)$$

где $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1},...,\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$ – векторный оператор; $e = (1,...,1)$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – знак скалярного произведения.

Многопериодические решения уравнений с оператором (0.6) исследованы в работах В.Х. Харасахала. Задача такого характера для систем в специальном виде оператора D, приводимый к линейному оператору с оператором (0.5), в многопериодическом случае достаточно полно исследован в работах Д.У.Умбетжанова, Ж.А. Сартабанова, А.Б. Бержанова и др.

В случае (0.4) оператора D для систем вида (0.3) вопросы общей теории и многопериодических решений в такой постановке не рассмотрены. Этим объясняется актуальность исследования. В данной диссертационной работе исследования развиты для уравнений вида (0.3) с оператором (0.2) в узкогиперболическом случае на основе новых разработанных методов.

Говоря об актуальности темы диссертационного исследования, нельзя не упомянуть фундаментальные труды по теории колебаний.

Известно, что теория периодических, то есть одночастотных колебательных решений обыкновенных дифференциальных уравнений разработана в трудах А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре.

Развитие этой теории по исследованию многочастотных периодических колебаний, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, связанных с методами усреднения и интегральных многообразий, освещено в фундаментальных трудах Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского, А.М. Самойленко и их последователей.

Бурное развитие методов многочастотных колебаний получило в связи с созданием КАМ-теории А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда и Ю. Мозера.

Наряду с этими методами, начиная со второй половины двадцатого столетия развиваются методы исследования многочастотных колебаний, основанные на переходе от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям в частных производных первого порядка и от исследования квазипериодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений к исследованию многопериодических решений уравнений в частных производных. Такой переход реализуем благодаря теореме Бора о глубокой связи непрерывных квазипериодических функций одной переменной с непрерывными периодическими функциями от многих переменных. Этот своеобразный метод берет свое начало с работ В.Х. Харасахала и развит Д.У.Умбетжановым и их последователями Ж.А. Сартабановым, А.Б. Бержановым и др. Основные результаты по многопериодическим решениям уравнений в частных производных относятся к системам уравнений с одинаковым оператором дифференцирования, когда матричный оператор дифференцирования является параболическим. Вопрос развития методов исследования многопериодических решений систем уравнений в частных производных гиперболического типа поднят Д.У. Умбетжановым, но он остался на начальном этапе развития. Им исследован вопрос существования и единственности многопериодического решения системы, когда ее соответствующая линейная система образует самостоятельные подсистемы с параболическими оператороми дифференцирования.

Исследование данной диссертационной работы по части многопериодических решений посвящено разработке методов интегрирования и изучения вопросов существования многопериодических решений узкогиперболических квазилинейных уравнений с матричными операторами дифференцирования по переменным произвольного количества.

Актуальность исследования также связана с приложениями уравнений вида (0.3) с квазилинейными матричными операторами дифференцирования (0.2). Например *нелинейная система уравнений Эйлера относительно движения жидкости*, *уравнение конвективной диффузии*, *телеграфное уравнение* и др. В диссертации показано, что их можно представить в виде системы (0.3) с оператором (0.2).

Известно также, что уравнения гиперболического типа называют волновыми уравнениями. Во многих случаях прикладного характера их решения связаны с периодично бегущими волнами (например, формула Даламбера). Следовательно, определенный интерес представляют вопросы, связанные с многопериодичностью решений по всем переменным или по их частям.

Таким образом, считаем, что актуальность диссертационного исследования обоснована как в теоретическом, так и в прикладном аспекте.

Целью диссертационного исследования разработка метода упрощения оператора дифференцирования, методики интегрирования и исследования многопериодических решений линейных и квазилинейных систем с различными операторами дифференцирования, а также краевой задачи для линейной гиперболической в узком смысле системы.

Задачи исследования:

1) разработать метод приведения матричного оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к линейному оператору с матричным оператором дифференцирования по m переменным;

2) установить существование многопериодических нулей оператора дифференцирования с постоянными коэффициентами в узкогиперболическом случае;

3) разработать методику интегрирования линейных систем с двумя различными операторами дифференцирования и установить достаточные условия существования многопериодических решений в некритическом случае;

4) на основе разработанного метода получить достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с двумя различными операторами дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы;

5) получить достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и установить достаточные условия существования единственного многопериодического решения этих уравнений;

6) получить достаточные условия разрешимости краевой задачи для системы уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

7) на основе разработанной методики получить достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы.

Методы исследования. В диссертационной работе широко применяются известные методы и результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории колебаний и теории операторов. Основным методом исследования и решения задач, рассматриваемых в диссертации, являются методы Харасахала-Умбетжанова и методы работ Ж.А. Сартабанова по их развитию, известные из монографий и публикаций авторов. В процессе исследований задач данной диссертации разработаны новые методы: метод редуктивного приведения оператора к каноническому виду; метод блочных систем; метод введения дополнительных переменных; метод проекторов.

Объектами исследования решения линейных и квазилинейных систем от многих независимых переменных с различными операторами дифференцирования и их многопериодичность.

Научная новизна исследования:

а) разработан метод приведения матричного оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к линейному оператору с матричным оператором дифференцирования по m переменным, основанный на переходе вдоль характеристики одной из переменных;

б) установлено существование бесконечного множества многопериодических нулей многопериодического оператора с постоянными коэффициентами в узкогиперболическом случае;

в) разработан метод блочных систем для интегрирования линейных систем с двумя различными операторами дифференцирования и установлены достаточные условия существования многопериодических решений в некритическом случае;

г) на основе разработанного метода получены достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с двумя различными операторами дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы;

д) разработан метод введения дополнительных переменных для линейных уравнений с гиперболическим оператором дифференцирования в узком смысле;

е) разработан метод проекторов перехода от одной переменной к другой для системы гиперболической в узком смысле, получены достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и установлены достаточные условия существования единственного многопериодического решения этих уравнений;

ж) получены достаточные условия разрешимости краевой задачи для системы уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

з) на основе разработанного метода получены достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы.

Положения, выносимые на защиту:

– метод приведения матричного оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к линейному оператору с матричным оператором дифференцирования по m переменным, основанный на переходе вдоль характеристики одной из переменных;

– существование бесконечного множества многопериодических нулей многопериодического оператора с постоянными коэффициентами в узкогиперболическом случае;

– методика интегрирования линейных систем с двумя различными операторами дифференцирования и достаточные условия существования многопериодических решений в некритическом случае;

– достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с двумя различными операторами дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы;

– метод введения дополнительных переменных для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

– метод проекторов перехода от одной переменной к другой для системы гиперболической в узком смысле, достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для линейных уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и достаточные условия существования единственного многопериодического решения этих уравнений;

– достаточные условия разрешимости краевой задачи для системы уравнений с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования;

– достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы с гиперболическим в узком смысле оператором дифференцирования и существования единственного многопериодического решения этой системы.

Личный вклад автора. Все результаты диссертационной работы получены автором. Участие соавторов и научных консультантов заключается в постановке целей и обсуждении результатов, идей работ.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- VIII Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актобе, 1 ноября, 2018;

- Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts» посвященный 80-летнему юбилею академика НАН РК С.Н. Харина. Алматы, 3-5 апреля, 2019;

– Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», приуроченная к 70-летию д.ф.-м.н., профессора М.И.Рамазанова. Караганда, 12-13 июня, 2019;

- Международная конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019), посвященная 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal». Нур-Султан, 16-19 октября, 2019;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки РК. Алматы, 5-8 апреля, 2020;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш.Кальменова. Алматы, 5-8 апреля, 2021;

– VI Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 5-9 декабря, 2021;

– IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актобе, 24-28 мая, 2022;

– Научный семинар кафедры математики АРУ им.К. Жубанова «Проблемы прикладной математики и информатики» (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Сартабанов Ж.А.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ, в том числе 1 публикация в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе Scopus, 4 публикации в научных изданиях, входящих в перечень, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 8 публикаций в материалах международных научных конференций.