ТОКМУРЗИН ЖАНИБЕК СЫРЛЫБАЕВИЧ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 —Математика

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов (первый раздел включает 5 подразделов, второй и третий раздел включают по 3 подраздела), заключения, списка использованных источников.

Ключевые слова. Дифференциальные уравнения в частных производных четвертого порядка, начально-краевые задачи, периодическая задача, двухточечная задача, нелокальная многоточечная задача, задача типа Гурса, система псевдо-гиперболических уравнений, метод функциональной параметризации, алгоритм.

Актуальность темы. В настоящее время большое внимание уделяется задачам математической физики, связанным с частым описанием применения в качестве математической модели в различных физических, химических, биологических процессах. Теория этих задач наряду с большим прикладным значением считается новой теорией, развивающейся в классической математической физике. Одним из важнейших классов таких задач являются начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Диссертационная работа посвящена решению и способам нахождения решений начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с двумя независимыми переменными. Для трех главных классов систем дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка исследованы краевые задачи типа Гурса, периодические, двухточечные и многоточечные. Рассмотрены условия существования единственности классического решения и способы нахождения решения. Условия однозначной разрешимости рассматриваемых задач установлены в терминах коэффициентов уравнения и граничных матриц. Разработаны алгоритмы нахождения решения и получены условия их сходимости.

Цель исследования: создание методов решения начально-краевых, периодических, нелокальных задач для частных производных дифференциальных уравнений четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

Объектом исследования являются начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

Методы исследования. В диссертационной работе методами решения начально-краевых и нелокальных задач для частных производных дифференциальных уравнений четвертого порядка с двумя переменными являются метод введения дополнительных функций, метод последовательных приближений, метод функциональной параметризации и метод параметризации Д. С. Джумабаева.

Научная новизна и практическая ценность работы. В диссертационной работе

a) изучена система дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка;
b) применен единый метод решения начально-краевых задач для системы дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка;
c) определены условия однозначной разрешимости в терминах исходных данных;
d) предложены алгоритмы поиска решений и доказана их сходимость.

Результаты диссертации носят в основном теоретический характер. Научная значимость работы заключается в том, что построен конструктивный метод исследования и решения задач для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Полученные в работе результаты могут быть использованы при решении краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, а также при изучении элективных курсов на математических факультетах университетов.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

- Методы решения начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка;
- Решение краевых задач (типа Гурса, периодические, двухточечные и многоточечные) для трех основных классов систем дифференциальных уравнений частных производных четвертого порядка;
- Условия существования и единственности классического решения рассматриваемых задач;
- Алгоритмы поиска решений и условия их сходимости.

Личный вклад автора. Все результаты диссертационной работы получены автором. Участие соавторов и научных консультантов заключается в постановке целей и обсуждении результатов.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 статей, в том числе 3 публикации в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе данных Scopus, 3 публикации в научном журнале, включенном в список, рекомендованных КОКСОН МОН РК, 7 публикации в материалах международных конференций.

Результаты диссертационной работы выполнены в рамках научного проекта «Методы решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка и их приложения» (№AP05131220, 2018-2020гг) программы грантовых фундаментальных исследований в области естественных наук Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Краткое содержание работы

В первом разделе рассмотрена система дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка в области $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} +$$
$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u + f(t,x), \qquad \text{(I)}$$

где $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ - неизвестная вектор-функция, $A_i(t,x)$– $n \times n$-матрицы, $i = \overline{1,7}$, и $f(t,x)$– n-вектор-функция непрерывные в области Ω.

В первом подразделе задача для системы уравнений (I) с условиями

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T] \qquad (1)$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T] \qquad (2)$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \quad t \in [0,T] \qquad (3)$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \ \ x \in [0,\omega] \qquad (4)$$

(1)-(4) приводится к задаче типа Гурса и интегральным соотношениям для системы гиперболических уравнений второго порядка путем введения новых функций, уменьшения порядка заданной задачи и преобразования начальных краевых условий. С учетом первоначально заданных условий был создан алгоритм нахождения решения задачи Гурса для системы гиперболических уравнений второго порядка с использованием метода последовательных приближений. Используя решение задачи Гурса в интегральных соотношениях определяется решение исходной задачи. Доказаны теоремы о сходимости приближенных решений к точному решению и его единственности.

Во втором подразделе рассмотрены существование и единственность решения периодической задачи с условиями

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T] \tag{5}$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{6}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \quad t \in [0,T] \tag{7}$$
$$u(0,x) = u(T,x), \ \ x \in [0,\omega] \tag{8}$$

для системы уравнений (I), (5)-(8).

Произведена двойная замена. При первой замене исходная задача приведена к эквивалентной периодической задаче для системы гиперболических уравнений второго порядка и интегральным соотношениям. Вторая замена привела к периодической задаче для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и интегральным соотношениям. Показан явный вид решения периодической задачи для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с учетом исходных заданных условий. При помощи условий определено решение периодической задачи для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом последовательных приближений. Через интегральные соотношения с помощью найденных решений найдено решение исходной задачи. Установлены и доказаны теоремы о сходимости приближенных решений к точным решениям и его единственности.

В третьем подразделе исследовано существование и единственность решения начально-периодической задачи с условиями

$$\frac{\partial^3 u(0,\ x)}{\partial x^3} = K(x)\frac{\partial^3 u(T,x)}{\partial x^3} + \varphi(x), \quad x \in [0,\omega] \tag{9}$$
$$u(t,0) = \psi_0(t), \quad t \in [0,T] \tag{10}$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_1(t), \quad t \in [0,T] \tag{11}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{12}$$

для системы уравнений (I), (9)-(12). В ходе исследования в исходной задаче производится замена с неизвестными функциями и переход к эквивалентной начально-краевой задаче для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. С помощью метода последовательных приближений найдены решение и интегральные соотношения данной задачи. Теоремы о сходимости приближенных решений начально-краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и ее единственности доказаны методом параметризации Д.С.Джумабаева. Рассмотрен также частный случай $K(x) = I$ и $\varphi(x) = 0$ и приведена теорема о существовании и единственности решения.

В четвертом подразделе для нахождения решения двухточечной задачи с условиями

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{15}$$

$$P(x)u(0,x) + S(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{16}$$

для системы уравнений (I), (13)-(16) введены неизвестные функции и исходная задача сведена к эквивалентной двухточечной начально-краевой задаче для системы гиперболических уравнений второго порядка и интегральным соотношениям. Произведя замену во второй раз переходят к двухточечной задаче для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и интегральным соотношениям. Решение двухточечной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с учетом первоначально заданных условий показано в явном виде. Решение двухточечной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с использованием заданных условий определяется методом последовательных приближений. С помощью найденных решений определяется также решение первоначально заданной задачи через интегральные соотношения. Установлены и доказаны теоремы о сходимости и единственности решения.

В пятом подразделе рассмотрено существование и единственность решения многоточечной задачи для системы уравнений (I) с условиями

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{3} M_{ij}(x)\frac{\partial^i u\left(t_j,x\right)}{\partial x^i} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{17}$$

$$u(t,0) = \psi_0(t), \qquad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_1(t), \qquad \left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \tag{18}$$

Многоточечная нелокальная задача для системы частных производных дифференциальных уравнений четвертого порядка (I), (17), (18) введением неизвестной функции приведена к эквивалентной многоточечной задаче для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и интегральным соотношениям. Решение данной задачи представлено в явной форме путем использования решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Для нахождения решения многоточечной задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка применен метод последовательных приближений. Установлена теорема о сходимости приближенных решений и его единственности, для доказательства теоремы использовано обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана.

Во второй главе рассмотрена система дифференциальных уравнений частных производных четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} +$$
$$+A_5(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_8(t,x)u + f(t,x) \quad \text{(II)}$$

в области Ω=[0,T]×[0,ω], где $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ - неизвестная вектор-функция, $A_i(t,x)$ – $n \times n$-матрицы, $i = \overline{1,8}$, и $f(t,x)$– n-вектор-функция непрерывны в области Ω.

В первом подразделе исследовано существование и единственность решения задачи Гурса для системы уравнений (II) с условиями

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t\epsilon[0,T], \quad (19)$$
$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad x\epsilon[0,\omega], \quad (20)$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t\epsilon[0,T], \quad (21)$$
$$\left.\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2}\right|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad x\epsilon[0,\omega]. \quad (22)$$

В ходе исследования, путем введения новых неизвестных функций исходная задача приведена к эквивалентной задаче типа Гурса для системы гиперболических уравнений второго порядка и интегральным соотношениям. Определено решение задачи Гурса с учетом первоначально заданных условий и применением метода последовательных приближений. Подставив решение задачи Гурса в интегральные соотношения найдено решение исходной задачи. Доказаны теоремы о сходимости приближенных решений и его единственности.

Во втором подразделе при

$$A_1(t,x) = A_2(t,x) = A_6(t,x) = A_7(t,x) = A_8(t,x) = 0$$

исследуется существование и единственность решения начальной периодической задачи для системы уравнений (II) с условиями

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{23}$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}, \quad x\in[0,\omega], \tag{24}$$
$$u(t,0)=\psi_1(t), \qquad t\in[0,T], \tag{25}$$
$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}=\psi_2(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{26}$$

С этой целью вводятся новые функции и задача (II), (23)-(26) приводится к эквивалентной периодической задаче для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и интегральным соотношениям. Учитывая условие периодичности и введя функциональный параметр, рассматриваемая задача переходит к задаче, состоящей из двух частей. В то время как одна часть представляет собой задачу Гурса для системы гиперболических уравнений, другая часть представляет собой задачу Коши для дифференциальных уравнений. Принимая во внимание исходные условия и применяя метод последовательных приближений, поочередно решая две задачи получены приближенные решения. Доказаны теоремы о сходимости приближенных решений данной задачи и ее единственности.

В третьем подразделе при

$$A_1(t,x)=A_2(t,x)=A_3(t,x)=A_6(t,x)=A_7(t,x)=0$$

исследуется существование и единственность решения начально-краевой задачи для системы уравнений (II) с условиями

$$u(0,x)=\varphi_1(t), \qquad x\in[0,\omega], \tag{27}$$
$$\sum_{i=0}^{m}\left\{P_i(x)\frac{\partial^2 u(t_j,x)}{\partial x^2}+S_i(x)\frac{\partial^2 u(t_j,x)}{\partial t^2}\right\}\Bigg|_{t=t_i}=\varphi_2(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{28}$$
$$u(t,0)=\psi_1(t), \ \ t\in[0,T], \tag{29}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x\partial t}\right|_{x=0}=\psi_2(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{30}$$

Для этого рассматриваемая задача (II), (27)-(30) приводится к эквивалентной задаче для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка путем введения новой неизвестной функции. Введение функционального параметра приводится к двум задачам, представляющим собой задачу типа Гурса для системы гиперболических уравнений и задачу Коши для дифференциальных уравнений. Принимая во внимание исходные условия и используя метод последовательного приближения, последовательно решаются две задачи и находятся приближенные решения. Доказаны теоремы о сходимости приближенных решений данной задачи и ее единственности. Построен пример, где установлено, что выполняются условия теоремы о единственности решения и показано решение в явном виде.

В третьей главе рассмотрена система частных производных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \\ + A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_7(t,x)u + f(t,x), \quad \text{(III)}$$

в области Ω=[0,T]×[0,ω], где $u(t,x) = col(u_1(t,x),\ u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ - неизвестная векторная-функция; $A_s(t,x)$, $(s = \overline{1,7})$, $n \times n$-матрицы и $f(t,x)$– n-вектор-функция непрерывны в области Ω.

В первом подразделе исследовано существование и единственность решения начально-краевой задачи для системы уравнений (III) с условиями

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[P_{i,j}(x)\frac{\partial^i u(t_j,x)}{\partial t^{i-1}\partial x} + S_{i,j}(x)\frac{\partial^i u(t_j,x)}{\partial t^i}\right] + \\ + L_j(x)u(t,x)\right\}\Big|_{t=t_j} = \varphi_1(x), \quad (31)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad u(0,x) = \varphi_3(x), \qquad x \in [0,\omega], \quad (32)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T] \quad (33)$$

Для нахождения решения задачи (III), (31)-(33) вводится новая неизвестная функция и исходная задача приводится к эквивалентной начально-краевой задаче для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и интегральным соотношениям. Введенный функциональный параметр, приводит последнюю задачу к задаче Гурса и интегральным уравнениям. Задача Гурса эквивалентна системе трех интегральных уравнений. Устанавливается сходимость приближенных решений задач и их единственность методом последовательных приближений и использованием исходных данных. Существование и единственность решения исследуемой задачи сформулированы и доказаны в виде теорем.

Во втором подразделе исследовано существование и единственность решения начальной многоточечной задачи для системы уравнений (III) с условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \ \ x \in [0,\omega], \quad (34)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad x \in [0,\omega], \quad (35)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \varphi_3(t), \qquad x \in [0,\omega], \tag{36}$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t) \left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{x=x_j} = \psi(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{37}$$

Для определения решения задачи (III), (34)-(37) вводятся новые неизвестные функции и исходная задача приводится к эквивалентной многоточечной краевой задаче для системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и интегральным соотношениям. Снова сделав подстановку, переходят к многоточечной задаче для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и интегральным соотношениям. Представлено решение многоточечной задачи для дифференциальных уравнений частных производных первого порядка с учетом начальных условий. Определено решение многоточечной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом последовательных приближений и с учетом начальных условий. С помощью найденных решений через интегральные соотношения построено решение исходной задачи. Доказаны теоремы о сходимости приближенных решений и его единственности.

В третьем подразделе исследовано существование и единственность решения полупериодической задачи для системы уравнений (III) с условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \;\; x \in [0,\omega], \tag{38}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{39}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=T}, \qquad x \in [0,\omega], \tag{40}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \;\; t \in [0,T]. \tag{41}$$

В задаче (III), (38)-(41) вводятся новые неизвестные функции и приводятся к начально-краевой задаче для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и интегральным соотношениям. Далее вводится функциональный параметр и последняя задача приводится к задаче Гурса и интегральным уравнениям. Задача Гурса эквивалентна системе трех интегральных уравнений. С помощью периодического условия и метода параметризации Д. С. Джумабаева было показано, что существуют решения задачи Гурса с интегральными условями для системы гиперболических уравнений и задачи Коши для дифференциальных уравнений с параметром. С помощью алгоритма нахождения решений были определены приближенные решения задачи Гурса и задачи Коши. Доказаны теоремы о сходимости приближенных решений и его единственности.

Таким образом, в диссертационной работе получены следующие новые научные результаты: предложен конструктивный метод исследования начально-краевых задач для трех рассмотренных классов систем дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, на основе которого установлены условия однозначной разрешимости задач. Приведены пути нахождения приближенных решений рассматриваемых задач и найдены условия сходимости построенных алгоритмов. Исследуемые задачи приведены к нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений второго порядка и функциональным соотношениям. С помощью условий однозначной разрешимости краевых задач для систем гиперболических уравнений второго порядка задаются условия однозначной разрешимости исходной задачи. Условия сходимости алгоритмов нахождения решения одновременно дают условия однозначной разрешимости рассмотренных задач.

Предлагаемый метод исследования и полученные результаты могут быть применены к начально-краевым задачам для систем дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, краевым задачам для неклассических дифференциальных уравнений. Кроме того, установленные выводы могут быть использованы при изучении различных начально-краевых, нелокальных задач для классов дифференциальных уравнений частных производных четвертого порядка (I), (II), (III).