ИСЕНОВА АККЕНЖЕ АЛТМЫШЕВНА

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ТИПА УИТТЕКЕРА ВБЛИЗИ ОСОБЫХ КРИВЫХ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 – Математика

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов (первый раздел состоит из 3-х подразделов и 5-и пунктов, второй раздел состоит из 5-и подразделов и 4-х пунктов, третий раздел состоит из 2-х подразделов и 10-и пунктов), заключения и списка использованной литературы.

Количество иллюстраций, таблиц и литературных источников. В работе использованы 93 источников.

Ключевые слова. Ранг, антиранг, нормально-регулярное решение, особые кривые, метод Фробениуса-Латышевой, система типа Уиттекера, система типа Горна, система типа Бесселя, вырожденная гипергеометрическая функция, многочлены Лагерра, функции Аппеля, ряды Лауричелла, функции Художникова, функция Гумберта, система определяющих уравнений.

Актуальность диссертации. Аналитическая теория дифференциальных уравнений берет свое начало с исследований О. Коши, Л. Фукса, Г. Фробениуса, К. Гаусса, Я. Горна и др. Фундаментальные исследования по аналитической теории дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами разработаны Л. Фуксом.

А. Пуанкаре развивая идеи работ Л. Фукса и Л. Томе исследовал проблему асимптотического разложения функций. Значительный интерес представляет развитие метода Фробениуса-Латышевой на аналитические системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, а также исследование поведения решения рассматриваемых уравнений в окрестности особых кривых.

В случае функции одной переменной Люси Дж. Слейтер отмечает, что «вырожденными гипергеометрическими функциями называются четыре функции: функции Куммера ${}_1F_1(\alpha;\beta;x)$, связанные с ним второе решение $U(\alpha,\beta;x)$ и две функции Уиттекера $M_{k,m}(x)$ и $W_{k,m}(x)$».

Большинство используемых в математической физике функций, включая функции Вебера и Бесселя представляют собой частные случаи этих функций. Все они являются регулярными частными решениями некоторых дифференциальных уравнений второго порядка. Эти уравнения имеют особенности: регулярную в точке $x=0$ и иррегулярную в точке $x=\infty$. Уравнение Куммера и уравнение Уиттекера обладают такими особенностями.

Классификация особенностей на регулярные и иррегулярные позволяет исследовать поведение решений вблизи этих особых точек. В данной работе мы пользуемся классификацией данной К.Я. Латышевой с помощью понятия ранга введенного А. Пуанкаре и антиранга введенного Л. Томе.

Наиболее изучена связь между уравнениями Куммера и Уиттекера, а также родственными уравнениями, полученными из них с помощью различных преобразований. Обладая общими свойствами с вышеназванными уравнениями, родственные уравнения находят широкое применение в различных задачах науки и техники. Поэтому, в литературах посвященной теории обыкновенных дифференциальных уравнений приводятся перечень родственных уравнений с известными приложениями уравнений Куммера, Бесселя, Уиттекера, Лагерра, Якоби и др.

В случае гипергеометрических функций двух переменных, круг рассматриваемых свойств расширяется. Исследование усложняется тем, что если в обыкновенном случае имеет место только одно вырожденное гипергеометрическое уравнение, то в случае двух переменных появляются 20 вырожденных гипергеометрических функций. Все они получаются в основном из четырех гипергеометрических функций Аппеля $F_1 - F_4$ с помощью предельных переходов. Я. Горн установил, что они являются частными решениями 20 систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Из них, как и в обыкновенном случае, системы связанные между собой некоторыми общими свойствами назовем родственными. Например, к общему свойству относится преобразование, где $Q(x_1,\ldots,x_n)$ многочлен от n переменных с помощью, которого можно выводить одну систему из другой, а также установление связи между их решениями в виде вырожденных гипергеометрических функций двух переменных. Четыре гипергеометрические функции $F_1 - F_4$ П. Аппеля двух переменных М. Лауричелла обобщил и ввел на рассмотрение F_A, F_B, F_C, F_D четыре гипергеометрические функции n переменных. Далее, были изучены различные их свойства и вырожденные гипергеометрические функции n переменных, полученные путем предельного перехода.

Различные интегральные представления гипергеометрических функций были введены и исследованы в связи с их важными приложениями в различных областях. Некоторые свойства гипергеометрических функций широко используются при изучении вырожденных уравнений.

Отметим, что значительный интерес представляет разработка метода Фробениуса-Латышевой для систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые приводят к различным прикладным задачам электродинамики, радиоэлектроники, математической физики, статистики, проективной дифференциальной геометрии, в различных областях теоретической физики.

В теории тепло-и массопереноса в электрических контактах для моделирования теплообмена в телах с переменным поперечным сечением, когда функции входных данных являются аналитическими, то решение рассматриваемой задачи можно представить в виде рядов по специальным функциям, многочленов Лагерра и вырожденной гипергеометрической функции.

Актуальность исследования обусловлена, с одной стороны, необходимостью углубленного изучения вырожденных гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, находящих широкое применение в теории специальных функций многих переменных, а также в прикладных задачах математической физики и многомерных вырожденных уравнений. С другой стороны – необходимостью установления различных родственных систем типа Бесселя, Лагерра, Уиттекера и изучением поведения их решений вблизи особых кривых.

Виды основных вырожденных систем мало изучены, такие как системы типа Бесселя и родственные с ней системы. Не установлены также существование систем, решениями которых являются ортогональные многочлены двух переменных и какими из 20-ти вырожденных систем они связаны. Отсутствует общий метод исследования. Для исследования таких систем, системы состоящей из двух уравнений применяется обобщенный Ж.Н. Тасмамбетовым метод Фробениуса-Латышевой. Требуется обобщить этот метод на случай системы, состоящей из n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, и разработать теорию построения нормальных, нормально-регулярных и конечных решений вблизи особых кривых.

Диссертационное исследование посвящено изучению построения решений родственных вырожденных гипергеометрических систем вблизи особых кривых и установлению ряда новых систем типа Бесселя, Уиттекера, Лагерра, а также взаимосвязи их решений между собой.

При исследовании вырожденных гипергеометрических систем, важную роль играет система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned} P^{(0)}(x,y)\cdot Z_{xx} + P^{(1)}(x,y)\cdot Z_{y} + P^{(2)}(x,y)\cdot Z = 0 \\ Q^{(0)}(x,y)\cdot Z_{yy} + Q^{(1)}(x,y)\cdot Z_{x} + Q^{(2)}(x,y)\cdot Z = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{0.1}$$

где коэффициенты $P^{(i)}(x,y)$ и $Q^{(i)}(x,y)$ $i=\overline{0,2}$ аналитические функции или многочлены двух переменных.

(0.1) связана с вырожденной системой типа Горна

$$x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + (\gamma_j - x_j)\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{k\neq j} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \lambda F = 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{0.2}$$

а также с вырожденной системой

$$x_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} - x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \sum_{r \neq j} x_r \frac{\partial U}{\partial x_r} + \left[\frac{x_j^2}{4} - \frac{x_j}{2} \sum_{r \neq j} x_r + r x_j + \frac{1}{4} - \mu_j^2 \right] U = 0, \ j = \overline{1,n} \tag{0.3}$$

полученной из (0.2) с помощью преобразования вида

$$F(x_1,...,x_n) = \exp Q(x_1,...,x_n) U(x_1,...,x_n), \tag{0.4}$$

$$Q(x_1,...,x_n) = \frac{\alpha_{p0...0}}{p} x_1^p + ... + \frac{\alpha_{0...0p}}{p} x_n^p + ... + \alpha_{10...0} x_1 + ... + \alpha_{0...01} x_n , \tag{0.5}$$

где $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – общая неизвестная для всех n уравнений системы (0.2).

Неопределенные коэффициенты $\alpha_{p,0,...,0}, \alpha_{0,0,...,p}, ..., \alpha_{1,0,...,0}, \alpha_{0,0,...,1}$ многочлена (0.5) и коэффициенты обобщенного степенного ряда $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ определяются методом Фробениуса-Латышевой. Изучаемые родственные системы Бесселя, Лагерра и Уиттекера получаются из систем (0.1)-(0.3) с помощью предельного перехода и преобразования (0.4).

Целью диссертационного исследования является углубленное изучение вырожденных гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, установление ряда новых систем типа Бесселя, Лагерра, Уиттекера и родственные с системами Горна, разработка эффективных алгоритмов построения их решений вблизи регулярных и иррегулярных особых кривых. Исследование возможности существования нормально-регулярных решений вырожденных гипергеометрических систем, полученных из систем Лауричелла с помощью предельных переходов.

Задачи исследования:

а) установление общей исходной родственной системы, на основе анализа характерных особенностей всех 20-ти известных вырожденных систем из списка Горна, состоящих из двух уравнений второго порядка;

б) установление систем типа Бесселя родственные с системами Горна, а также Уиттекера и обобщение их общих свойств на вырожденные гипергеометрические системы, состоящие из n уравнений второго порядка;

в) разработать эффективные алгоритмы построения нормальных, нормально-регулярных и конечных решений родственных систем;

г) установить системы типа Лагерра родственные с системами Горна и исследование связи между регулярными и нормально-регулярными решениями;

д) исследовать существование необходимых условий нормально-регулярных решений вырожденных гипергеометрических систем полученных из системы Лауричелла (F_D);

е) получить новые функции в виде нормально-регулярных решений многих переменных как решение вырожденных гипергеометрических систем, устанавливая связь с функциями Горна, Гумберта, Бесселя, Лагерра и Художникова.

Методы исследования. В диссертационной работе широко применяются известные методы и результаты аналитических теории специальных функций, дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Основным методом исследования и решения задач, рассматриваемых в диссертации, является метод Фробениуса-Латышевой и методы работ Ж.Н. Тасмамбетова по их развитию и обобщению.

Объектами исследования являются задачи установления вырожденных гипергеометрических родственных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Научная новизна исследования. Научная новизна заключается в распространении обобщенного метода Фробениуса-Латышевой для исследования вырожденных гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

С целью обоснования и развития, а также использования предлагаемого обобщенного метода к решению конкретных задач, связанных с построением родственных систем, получены результаты, определяющие научную новизну:

а) установлены новые свойства системы типа Уиттекера, найдена ее связь с другими родственными системами;

б) обосновано выполнение теорем Куммера для системы типа Горна и их приложений к построению решений других родственных систем и связь с функциями Гумберта;

в) предложен алгоритм построения нормально-регулярных решений родственных систем типа Уиттекера и Горна;

г) построены регулярные и нормально-регулярные решения установленного ряда систем типа Бесселя, родственных с системами Горна и Уиттекера;

д) распространен обобщенный метод Фробениуса-Латышевой и получены новые свойства многомерных конечных решений установленных систем типа Лагерра;

е) установлены необходимые условия существования нормально-регулярных и конечных решений вырожденных гипергеометрических систем, полученных из системы Лауричелла (F_D);

ж) получены новые функции для систем вырожденных гипергеометрических родственных систем в виде нормально-регулярных решений многих переменных и установлено их связь с функциями Горна, Гумберта, Бесселя, Лагерра и Художникова $\Phi_{D,n}^{k,l}(0 \le k, l \le n, n-1 \le k \le n)$.

Положения, выносимые на защиту:

– обобщение теоремы Куммера на системы типа Горна и ее приложения к построению решения других родственных систем;

– особенности применения обобщенного метода Фробениуса-Латышевой к построению решения родственных систем вблизи различных особых кривых;

– алгоритмы построения нормально-регулярных решений систем типа Бесселя с учетом регулярных и иррегулярных особенностей;

– необходимые условия существования нормальных и нормально-регулярных решений родственных систем;

– алгоритм построения конечных решений родственных систем Лагерра и построения новых решений;

– построение решений систем типа Бесселя, полученных путем преобразования из родственных систем типа Уиттекера и Горна; особенности установления новых родственных систем;

– установление связи между функциями $\Phi_{D,n}^{k,l}(0 \le k, l \le n, n-1 \le k \le n)$ Художникова и нормально-регулярными решениями многих переменных вырожденной системы типа Лауричелла (F_D) путем предельного перехода и особенности применения обобщенного метода Фробениуса-Латышевой.

Личный вклад автора. Все результаты, приведенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Участие научных консультантов заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

Все результаты диссертационной работы получены автором. Участие соавторов и научных консультантов заключается в постановке целей и обсуждении результатов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

– VIII международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актобе, 1 ноября, 2018;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященная 80-летнему юбилею академика НАН РК С.Н. Харина. Алматы, 3-5 апреля, 2019;

– Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», приуроченная к 70-летию д.ф.-м.н., профессора М.И. Рамазанова. Караганда, 12-13 июня, 2019;

– Международная конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019), посвященная 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal». Нур-Султан, 16-19 октября, 2019;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки РК, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. Алматы, 5-8 апреля, 2020;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш. Кальменова. Алматы, 5-8 апреля, 2021;

– IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актобе, 24-28 мая, 2022;

– Международная конференция «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (CITech-2022), посвященная 90-

летию со дня рождения академика Н.К. Надирова и 80-летнему юбилею академика М. О. Отелбаева. Алматы, 12-15 октября, 2022;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки РК. Алматы, 4-8 апреля, 2023;

– Научный семинар кафедры математики АРУ им.К. Жубанова «Проблемы прикладной математики и информатики» (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Сартабанов Ж.А.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 работ, в том числе 2 публикации в рейтинговых научных журналах индексируемых в базе Scopus, 3 публикации в научных изданиях, входящих в перечень, рекомендованных КОКСНВО МНВО РК для публикации основных результатов научной деятельности, 11 публикаций в материалах международных научных конференций.