

АЙТЕНОВА ГУЛСЕЗИМ МУРАТОВНА

**ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИХ
РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО
НАПРАВЛЕНИЯМ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ**

АННОТАЦИЯ

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 - Математика**

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав (первая глава состоит из 4-х разделов и 6-и подразделов, вторая глава состоит из 3-х разделов), заключения и списка использованной литературы.

Количество иллюстраций, таблиц и литературных источников. В работе использованы 136 источников.

Ключевые слова. Интегро-дифференциальное, конечно-эредитарное, оператор дифференцирования, многопериодичность, матрицант, конвективно-диффузионный, параболический тип, начальнo-краевая задача.

Актуальность диссертации. Явления, математические модели которых описываются интегро-дифференциальными уравнениями, распространены в биологии, особенно в условиях, связанных с наследственностью. В технике подобные явления наблюдаются в теории упругости. Скажем, если упругая колонна ранее изогнута или образована, то ее последующий изгиб или скручивание очень тесно связано с предыдущим положением. Тем самым, следует что наследственные состояния существуют и в механике. Аналогично описывается последующее состояние в электромагнитных полях в зависимости от их прежних и нынешних условий.

Таким образом, известно, что в мире существуют наследственные, то есть эредитарные явления, характеризующиеся прошлым и настоящим, наряду с детерминантными явлениями, будущее которых характеризуется не только настоящим, но и прошлым. Изучение таких явлений связано с именем В. Вольтерра. Очень важно свойство таких явлений, которые создают колебание во времени. В биологии это называется флуктуационным развитием. Например, если кролики и волки, мальки и щуки или гуси и фазаны живут в изолированных от других животных местах, то при уменьшении питательных жертв (кролики, мальки, гуси) начинают появляться и хищники (волки, щуки, фазаны). Сокращение добычи создает условие для роста жертв и обеспечивает рост уменьшенных хищников. Рост хищников приводит к уменьшению жертв. Изучение таких временных колебаний в развитии является очень ценной, актуальной проблемой. Связь между современным человеческим развитием и производством питательных кормов на Земле также происходит из группы

флуктуационных колебаний. Простейшими такими колебаниями являются периодические флуктуации. Периодические изменения дозируются частотами. А если изменения происходят под действием нескольких периодических сил, то возникают сложные колебания, и величина изменений определяется размерностью частот. В связи с этим возникают многокомпонентные колебательные многопериодические явления. Тот факт, что один из периодов нескольких сопутствующих периодических явлений не измеряется другими, обусловил классификацию времени, т. е. понятие многомерного времени. Таким образом, периодические явления по многомерному времени называются многопериодическими. Далее, определение скорости по многомерному времени привело к понятию оператора дифференцирования по направлениям векторного поля. Итак, тема исследования посвящена изучению актуальной проблемы.

Диссертационной работе исследуется $(\omega, \theta) = (\omega_1, \dots, \omega_m, \theta)$ периодическое решение по $(t, \tau) = (t_1, \dots, t_m, \tau)$ многомерным временным переменным явления, описываемое векторно-матричным уравнением

$$D_c u(t, \tau) = A(t, \tau)u(t, \tau) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(t, \tau, \sigma, s)u(\sigma, s)ds + f\left(t, \tau, u(t, \tau), \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(t, \tau, \sigma, s)u(\sigma, s)ds\right) \quad (0.1)$$

с оператором дифференцирования $D_c = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle c, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial}{\partial t_j}$.

Здесь $c = (c_1, \dots, c_m)$ – постоянный вектор, определяющий поле направлений оператора D_c ; $A(t, \tau)$ – матричный оператор, описывающий связь неизвестных переменных $u = (u_1, \dots, u_m)$; $K(t, \tau, \sigma, s)$ – ядро интегрального члена, характеризующее эредитарность явления; $\varepsilon > 0$ – число определяющее эредитарный период, $f(t, \tau, u, v)$ – внешняя возбуждающая сила, $\sigma = t - c\tau + cs$ – характеристика оператора D_c . В исследовании в качестве параметра интегрирования уравнения и начального условия взята переменная τ . Предложен метод исследования двухточечной краевой задачи по этой переменной для рассматриваемой системы. Эта задача является обобщением проблемы многопериодичности решений.

В дальнейшем с целью изучения состояния диффузионного характера явления определены условия (ω, θ) -периодичности по (t, τ) решений краевых задач для интегро-дифференциального уравнения

$$D_c u(x, t, \tau) - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t, \tau)}{\partial x^2} + \chi \frac{\partial u(x, t, \tau)}{\partial x} = A(x, t, \tau)u(x, t, \tau) +$$

$$+ \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(x, t, \tau, \sigma, s) u(x, \sigma, s) ds + f(x, t, \tau, u(x, t, \tau)) \quad (0.2)$$

параболического типа с положительным компонентом $c = (c_1, \dots, c_m)$ и предложен метод исследования. Здесь $a > 0$ и $\chi \geq 0 - \text{const}$; A, K и f – заданные матричные и векторные функции. Если рассматривать предельный случай $\chi \rightarrow 0$, то система (0.2) переходит в диффузионное уравнение.

В диссертации многомерное время выражено вектором $(\tau = t_0, t_1, \dots, t_m) = (t, \tau)$, а связь между его размерностями $t = (t_1, \dots, t_m)$ и τ определяется $c = (c_1, \dots, c_m)$ – постоянным векторным полем. Следовательно, скорость явления определяется оператором дифференцирования

$D_c = \partial/\partial\tau + \sum_{j=1}^m c_j \partial/\partial t_j$, приведенным выше в этом временном поле. В частном

случае, если $c_1 = \dots = c_m = 1$, то имеем оператор, рассмотренный В.Х. Харасахалом. Выбор такого оператора связан с небольшим обобщением известного оператора, причем такой оператор часто используется в КАМ-теории. Скорость явления описывающее вектором $u = (u_1, \dots, u_m)$ во временном поле (t, τ) определяется выражением $D_c u$. Это явление эредитарное. Тем самым, его математическая модель вместе с вектор-функцией $u = u(t, \tau)$ зависит

от величины заданной интегральным выражением $\int_{s_0}^{\tau} F(t, \tau, \sigma, s, u(\sigma, s)) ds$,

характеризующей наследственность. Здесь $F(t, \tau, \sigma, s, u)$ – известная вектор-функция, $\sigma = t - c\tau + cs$ – характеристика векторного поля, s_0 – параметр, который в основном измеряет время до этого момента. Чаще всего $s_0 = \tau_0$ – определяет начальный момент наследственности, $s_0 = -\infty$ –

неограничивающий начало явления наследственности до настоящего момента τ и момент $s_0 = \tau - \varepsilon$, выражающий время $\varepsilon > 0$ влияния наследственности от момента $\tau - \varepsilon$ до настоящего времени τ . В случае флуктуационных эредитарных явлений параметр может иметь значения $s_0 = \infty$ или $s_0 = \tau - \varepsilon$. В диссертационной работе ограничились рассмотрением последнего случая. В рассмотренных системах линейно определяли эредитарный член интегралом

$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(t, \tau, \sigma, s) u(\sigma, s) ds$ или $\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} K(t, \tau, \sigma, s) u(\sigma, s) ds$. В исследовании определены

условия многопериодичности таких явлений и показаны пути решения краевых задач.

Актуальность задач исследования связана и с приложениями эредитарных колебаний в механике, электромагнетизме и в биологических явлениях. Во многих случаях, особенно в химических реакциях и гидродинамике, эредитарные явления сопровождаются диффузионными явлениями. Так, если с

целью очистки грязи в речную воду распыляется химическая смесь, то с этого периода начинается эрeditарно-диффузионное явление. Начало изучения таких явлений связано с Г. Эвансом, учеником В. Вольтерра. Диффузионное явление является полу детерминантным, его будущее характеризуется только начальной стадией и оно необратимое. В этом случае диффузионность рассматриваемой в диссертационной работе задачи определяется оператором $D_c u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, вектор c является положительным компонентом. В исследовании изучается многопериодичность таких явлений. Также для этих явлений применены модифицированные методы решения краевых задач параболического типа.

Таким образом, диссертационное исследование посвящено решению фундаментальных теоретических и приоритетных актуальных проблем, связанных с приложениями естественно-технических процессов.

Обзор научной литературы, уточняющий актуальность диссертационного исследования, начинается с работ В. Вольтерра и его последователей в области интегро-дифференциальных уравнений, появившихся в начале XX века. А исследования постсоветского периода проводились в духе работ А.И. Некрасова, С.Л. Соболева, Н.Н. Назарова, В.В. Васильева, В.С. Владимирова, Я.В. Быкова, М.И. Иманалиева и др. Известно, что такие исследования проводятся сначала для линейных уравнений и систем с одной независимой переменной и посвящены начально-граничным задачам работы: Л.Е. Кривошеин, Ю.А. Ведь, Г.А. Шишкина и периодическим решениям: А.Б. Ткач, Л.А. Талиповой и др. Дальнейшие разработки и другие направления теории систем интегро-дифференциальных уравнений можно найти в работах А.И. Боташева, М.Т. Адонца, Е.А. Барбашина, А.Н. Филатова, Ю.Н. Работнова, А.А. Ильюшина, Б.Е. Победря, А.М. Самойленко. Нельзя не упомянуть фундаментальные отраслевые научно-монографические и учебно-методические издания Ю.А. Митропольского, Н.Н. Боголюбова, В.И. Арнольда которые использовались в ходе настоящего исследования. С теоретической и методической точки зрения основой исследования являются работы В.Х. Харасахала, Д.У. Умбетжанова, Ж.А. Сартабанова, А.Б. Бержанова, Г.А. Абдикаликовой. Отметим, также работы К.-S. Chiu, Т.К. Юлдашева, С.А. Айсагалиева, которые увеличивали научный интерес, стимулировали проведение диссертационного исследования. Здесь приведены исследования 1) связанные с интегро-дифференциальными уравнениями, 2) в которых изучены периодические или почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений с одной независимой переменной, 3) где рассмотрены краевые задачи для некоторых интегро-дифференциальных уравнений параболического типа с двумя независимыми переменными.

В диссертационной работе представлены результаты, полученные исследованием многочастотных колебательных решений рассматриваемых систем способом, предложенным В.Х. Харасахалом, который в ходе своих исследований Д.У. Умбетжанов фактически превратил в настоящий метод, далее развитый Ж.А. Сартабановым и в диссертационном исследовании

распространен на интегро-дифференциальные системы, учитывающие конечную эредитарность и диффузионность описываемых явлений.

Обратим внимание на то, что предложенные методы исследования являются перспективными и могут быть применены к аналогичным проблемам родственных процессов.

Целью настоящей работы является исследование начальных задач для ограниченно эредитарных квазилинейных интегро-дифференциальных систем уравнений с оператором дифференцирования по направлению векторного поля, задач многопериодических решений, исследование краевых задач и развитие их для интегро-дифференциальных уравнений параболического типа.

Задачи исследования:

- а) определение достаточных условий существования решений начальных задач для ограниченно эредитарных линейных и квазилинейных интегро-дифференциальных систем уравнений с оператором дифференцирования по заданному постоянному векторному полю дифференцирования;
- б) исследование существования и единственности многопериодических решений систем эредитарных линейных и квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по векторному полю и их построение;
- в) исследование решения двухточечной краевой задачи по одной из временных переменных для линейных и квазилинейных систем с конечной эредитарностью и оператором дифференцирования по векторному полю интегро-дифференциальных уравнений;
- г) исследование многопериодических по временным переменным решений краевых задач для эредитарных линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по векторному полю параболического типа.

Методы исследования. В диссертационной работе широко применяются известные методы и результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории колебаний и теории операторов. Основным методом исследования и решения задач, рассматриваемых в диссертации, являются методы Харасахала-Умбетжанова и методы работ Ж.А. Сартабанова по их развитию и обобщению. В диссертационной работе впервые предложен и апробирован новый метод исследования двухточечной краевой задачи для систем конечно-эредитарных интегро-дифференциальных уравнений.

Объектами исследования являются решения начальных, многопериодических по временным переменным и краевых задач для линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с ограниченной эредитарностью и оператором дифференцирования по векторному полю.

Научная новизна исследования:

- 1) установлены условия многопериодичности нулей оператора дифференцирования D_c ; определены условия однозначной разрешимости начальной задачи линейного однородного интегро-дифференциального

уравнения с конечной эредитарностью, равной периоду; построен разрешающий оператор и найдено представление решения начальной задачи; указаны условия отсутствия многопериодических решений рассматриваемого уравнения, кроме нулевого; получены достаточные условия существования и единственности многопериодического решения линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения с конечной эредитарностью; установлены условия существования матричной функции типа Грина;

2) в случае произвольного периода эредитарности установлены более общие условия многопериодичности нулей оператора дифференцирования; необходимые и достаточные условия периодичности решения однородного линейного интегро-дифференциального уравнения с произвольной конечной эредитарностью; выведено представление решения начальной задачи линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения с произвольной конечной эредитарностью; найдены условия существования матричной функции типа Грина задачи многопериодического решения этого уравнения и приведено его интегральное представление с оценкой;

3) указаны достаточные условия существования и единственности многопериодического решения квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с произвольной конечной эредитарностью, когда нелинейности систем а) не содержат и б) содержат интегральный эредитарный член с конечным периодом;

4) получены достаточные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования в случае произвольной конечной эредитарности;

5) найдены достаточные условия однозначной разрешимости начальной и двухточечной краевой задачи для линейной системы интегро-дифференциальных уравнений параболического типа с оператором дифференцирования с конечной эредитарностью; приведены условия многопериодичности по временным переменным этого решения системы;

6) установлены условия однозначной разрешимости задачи многопериодичности по временным переменным и ограниченности по пространственной переменной вдоль полуоси решений для линейных систем конечно-эредитарных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа с оператором дифференцирования;

7) представлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи о многопериодическом по временным переменным и ограниченном по пространственной переменной решении для линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений конечно-эредитарного и конвективно-диффузионного типа.

Положения, выносимые на защиту:

- достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений заданной конечной эредитарности с оператором дифференцирования по направлению

векторного поля на основе построения разрешающего оператора и достаточные условия существования и единственности многопериодических решений таких систем с интегральным представлением их в терминах матричной функции типа Грина;

- необходимые и достаточные условия существования и единственности многопериодических решений линейных систем интегро-дифференциальных уравнений произвольной конечной эрмитности с оператором дифференцирования и их интегральные представления;

- распространение методов линейного случая на квазилинейные системы интегро-дифференциальных уравнений произвольной конечной эрмитности с оператором дифференцирования и достаточные условия существования многопериодических решений, рассматриваемых систем когда нелинейности систем а) не содержат и б) содержат эрмитный член;

- обобщение метода многопериодических решений и достаточные условия разрешимости двухточечных краевых задач для линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений конечной эрмитности с оператором дифференцирования по векторному полю;

- метод исследования и установления достаточных условий однозначной разрешимости начальной и двухточечной краевой задачи для линейной системы параболического типа конечно-эрмитных интегро-дифференциальных уравнений;

- условие модификации одного метода однозначной разрешимости задачи о многопериодичности по временным переменным и ограниченности по пространственной переменной вдоль полуоси решения для линейной системы конечно-эрмитных параболических интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по векторному полю;

- представление условий однозначной разрешимости задачи о многопериодичности по временным переменным и ограниченности по пространственной переменной решения для линейных и квазилинейных систем конечно-эрмитных и конвективно-диффузионных интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по векторному полю.

Личный вклад автора. Все результаты, приведенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Участие научных консультантов заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

– VIII Международная научная конференция "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры". Актюбе, 1 ноября, 2018;

– International conference on "Mathematical analysis, Differential Equation and Applications (MADEA 2018)". Bishkek: КТУМ, 17-23 June, 2018;

– Международная научная конференция "Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики", приуроченная к 70-летию д.ф.-м.н., профессора М.И.Рамазанова. Караганда, 12-13 июня, 2019;

– Международная конференция "Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры" (EMJ-2019), посвященная 10-летию выпуска журнала "Eurasian Mathematical Journal". Нур-Султан, 16-19 октября, 2019;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. Алматы, 5-8 апреля, 2020;

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш. Кальменова. Алматы, 5-8 апреля, 2021;

– IX Международная научная конференция "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры". Актобе, 24-28 мая, 2022;

– Научный семинар "Исследование задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами", Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор А. Керимбеков);

– Научный семинар "Качественная теория дифференциальных уравнений", Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан (руководители семинара – д.ф.-м.н., профессор А. Саадабаев, д.ф.-м.н., профессор Б.К. Темиров);

– Научный семинар "Качественные и приближенные методы исследования дифференциальных уравнений", Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор А.Т. Асанова);

– Научный семинар кафедры математики, Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова "Проблемы прикладной математики и информатики" (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Ж.А. Сартабанов).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 работ, в том числе 1 публикация в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе Scopus, 4 публикации в научных изданиях, входящих в перечень, рекомендованных КОКСНВО МНВО РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 10 публикаций в материалах международных научных конференций.