Убаева Жанар Картбаевнаның 6D060100-Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған «Клаузен текті біртекті емес жүйе шешімдерінің бар болуын зерттеу» атты диссертациялық жұмысына

ПІКІР

Диссертациялық жұмыс біріккен біртекті емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^{h}\right)x^{j}y^{k}p_{j,k}=f_1(x,y)\\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^{h}\right)x^{j}y^{k}p_{j,k}=f_2(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

шешімдерінің бар болуы мәселелерін Фробениус-Латышева әдісі негізінде зерттеуге арналады, мұндағы $p_{0,0}(x,y)=Z(x,y)$ $(j=0,k=0)$ – (1) жүйесінің екі теңдеулері үшін ортақ белгісіз, $p_{j,k}$ – арқылы $Z(x,y)$ белгісізінің әртүрлі реттегі $p_{j,k}=\dfrac{\partial^{j+k}Z(x,y)}{\partial x^{j}\partial y^{k}}$ – дербес туындылары белгіленген, $f_i(x,y)\,(i=1,2)$ – аналитикалық функциялар немесе көпмүшеліктер.

Екі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерден тұратын сәйкес біртекті жүйе $f_i(x,y)=0\ (i=1,2)$ болғанда алынады:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^{h}\right)x^{j}y^{k}p_{j,k}=0\\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}\left(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^{h}\right)x^{j}y^{k}p_{j,k}=0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

және оның реті ω мәнімен анықталады.

Шешімдері 34 екі айнымалылының екінші ретті арнайы функциялары болатын біртекті екінші ретті жүйелер $\omega=1$ мәніне сәйкес табылады. Мұндай екінші ретті 34 жүйені алғаш анықтаған Я.Горн болды. Олар диссертант қарастырған біртекті жүйенің $h=1$ мәндерінде алынады және шешімдер құрамына Аппельдің F_1-F_4 функциялары, Горн, Гумберт және Борнгессер анықтаған 20 туындалған функциялар жатады. $h=2$ болғанда аталған жүйенің шешімдері қатарына Ш.Эрмит және П. Аппель анықтаған биортогональ көпмүшеліктер жатады. Бұл екі бағыттағы зерттеулер белгілі ғалымдар П.Аппель, Ш.Эрмит, Я. Горн, Э.Айнс, Ф.Эрдейи, Ж. Кампе де Ферье, М. Лауричелла, Д.Джексон және т.б. еңбектерінде дамыды. Алайда әртүрлі бағыттардағы зерттеулердің сәтті жүргізілгеніне қарамастан, біртекті және біртекті емес жүйелердің қалыпты, қалыпты-регуляр және ақырлы шешімдерін тауып, оларды жан-жақты зерттеуге жарамды ортақ әдіс табылған жоқ. Н.И. Терещенко, Ж.Н. Тасмамбетов және М.Ж. Талипованың жұмыстарында ондай әдіс ретінде Фробениус-Латышева әдісі ұсынылды.

Докторантқа аталған әдісті $\omega = 2$ болғанда алынатын (1) біртекті емес екі дербес туындылы үшінші ретті теңдеулерден тұратын жүйені зерттеу есебі қойылды. Мұндай жүйенің $h = 0$, $h = 1$, $h \geq 2$ мәндерінде алынатын дербес жағдайлары әртүрлі қолданбаларына байланысты маңызды. Сондықтан да, диссертациялық жұмыста накты Клаузен текті жүйелер анықталып, олардың шешімдерінің бар болуы мәселесі жан-жақты зерттелген, біртекті емес Клаузен текті теңдеулер мен жүйелердің шешімдерін құрудың тиімді алгоритмдері табылған. Табылған алгоритмдерді шешімдері көп айнымалылы жалпыланған гипергеометриялық функциялар болатын туындалған теңдеулер жүйелеріне де қолдану ерекшеліктері көрсетілген.

Зерттеу жұмысының өзектілігі жоғарыда келтірілген нәтижелер мен жалпыланған гипергеометриялық функциялардың қасиеттерінің математикалық физиканың, арнайы функциялар теориясының, көп өлшемді туындалған теңдеулерді зерттеуге қатысты көптеген маңызды есептерді шығаруда қолданыс табатындығы.

Аталған мәселелерді шешуде докторант айтарлықтай нәтижелерге қол жеткізді:

- Клаузен теңдеуі және одан шекке көшу арқылы алынған туындалған біртекті емес Клаузен теңдеуінің шешімін құрудың тиімді алгоритмдерін анықталмаған коэффициенттер және Фробениус-Латышева әдістері бойынша жасақтады;
- (1) жүйеден $\omega = 1, h = 2$ мәндерінде алынатын, шешімдері ортогональ көпмүшеліктер болатын екінші ретті біртекті емес жүйелердің шешімдерін құру анықталмаған коэффициенттер әдісін пайдаланып көрсетілген;
- (1) жүйеден $\omega = 2$ мәнінде алынатын үшінші ретті екі теңдеуден тұратын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің барлық ерекшеліктері келесі жүйе мысалында көрсетілген:

$$\begin{aligned}
&x^2\left(r_{2,0} - \alpha_{2,0}x^h\right)p_{2,0} - xy\left(r_{1,1} - \alpha_{1,1}x^h\right)p_{1,1} + x\left(r_{1,0} - \alpha_{1,0}x^h\right)p_{1,0} + y\left(r_{0,1} - \alpha_{0,1}x^h\right)p_{0,1} + \\
&+\left(r_{0,0} - \alpha_{0,0}x^h\right)p_{0,0} = f_1(x), \\
&y^2\left(t_{0,2} - \beta_{0,2}y^h\right)p_{0,2} - xy\left(t_{1,1} - \beta_{1,1}y^h\right)p_{1,1} + x\left(t_{1,0} - \beta_{1,0}y^h\right)p_{1,0} + y\left(t_{0,1} - \beta_{0,1}y^h\right)p_{0,1} + \\
&+\left(t_{0,0} - \beta_{0,0}y^h\right)p_{0,0} = f_2(x)
\end{aligned} \tag{3}$$

мұндағы $p_{0,0}(x, y) = Z(x, y)$ – жалпы белгісіз, $r_{j,k}, \alpha_{j,k}, t_{j,k}, \beta_{j,k}, \left(j, k = \overline{0,3}\right)$ – белгісіз тұрақтылар, (3) теңдеулер жүйесі (1) жүйенің дербес жағдайы.

а) $f_i(x, y) = 0$ болғанда, (3) жүйенің сол жағы (2) жүйенің дербес жағдайы болады;

б) $f_i(x, y) = 0, h = 1$ болғанда Кампе де Ферье текті жүйе алынады;

в) $f_i(x,y)=0,\ h=1,\ r_{0,0}=0,\ r_{0,1}=0,\ t_{0,0}=0, t_{1,0}=0$ мәндерінде Кампе де Ферьенің гипергеометриялық текті жүйесі алынады. Диссертацияның зерттеу пәні болып табылатын Клаузен текті біртекті емес

$$\begin{aligned}
&x^2\left(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x^h\right)p_{2,0}-xy\left(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x^h\right)p_{1,1}+x\left(r_{1,0}-\alpha_{1,0}x^h\right)p_{1,0}+y\left(r_{0,1}-\alpha_{0,1}x^h\right)p_{0,1}+\\
&+\left(r_{0,0}-\alpha_{0,0}x^h\right)p_{0,0}=f_1(x,y),\\
&y^2\left(t_{0,2}-\beta_{0,2}y^h\right)p_{0,2}-xy\left(t_{1,1}-\beta_{1,1}y^h\right)p_{1,1}+x\left(t_{1,0}-\beta_{1,0}y^h\right)p_{1,0}+y\left(t_{0,1}-\beta_{0,1}y^h\right)p_{0,1}+\\
&+\left(t_{0,0}-\beta_{0,0}y^h\right)p_{0,0}=f_2(x,y)
\end{aligned}\tag{4}$$

жүйесі Кампе де Ферьенің гипергеометриялық текті жүйесінің дербес жағдайы.

Диссертациялық жұмыста барлық келтірілген жағдайлар толық зерттеліп, үйлесімділік және интегралдану шарттары, қалыпты және қалыпты-регуляр шешімдердің бар болу шарттары, ерекше нүктелердің классификациясы орнатылған. Тоғыз сызықты тәуелсіз шешімдердің бар болу шарттары айқындауыш теңдеулер жүйелеріне сәйкес анықталып, регуляр, қалыпты-регуляр және қалыпты шешімдерді құрудың тиімді алгоритмдері ұсынылған.

- Докторант жай Клаузен текті жүйені қарастыруға енгізді. Біртекті емес жай Клаузен теңдеуінің шешімдерін құру мүмкіндігін және оның қасиеттері жан-жақты зерттелді. Мұндай жүйелердің бар болуы мүмкін екендігін және оның шешімдері де екінші ретті екі айнымалының функциялары болатындығын Я.Горн да атап өткен болатын.
- Клаузен текті біртекті емес жүйелердің қалыпты-регуляр шешімдері алғаш рет зерттелді. Сонымен қатар Лауричелланың (F_B) жүйесінен шекке көшу арқылы алынған В.И. Художниковтың туындалған жүйелерінің де қалыпты-регуляр шешімдері алғаш рет зертелген.
- В.И. Художников енгізген $\Phi_{B,n}^{k.l}$ жаңа функциясына сәйкес енгізілген көп айнымалылының қалыпты-регуляр шешімдері араларында байланыс орнатылып, жаңа қасиеттер дәлелденді.
- Диссертациялық жұмыста кейінгі кезде көпөлшемді туындалған теңдеулерді зерттеуде кең қолданыс тапқан біртекті емес Клаузен теңдеуі

$$\begin{aligned}
&x^2(1-x)\frac{d^3y}{dx^3}+\left[1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x\right]x\frac{d^2y}{dx^2}+\\
&\left[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)x\right]\frac{dy}{dx}-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 y=f(x)
\end{aligned}$$

мен одан шекке көшу арқылы алынған туындалған біртекті емес

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(1+\beta_1+\beta_2)x\frac{d^2y}{dx^2}+\beta_1\beta_2\frac{dy}{dx}-y=0$$

Клаузен теңдеулерінің $x = 0$ және $x = \infty$ нүктелері маңайындағы регуляр шешімдерін құрудың тиімді алгоритмдері келтірілген. Сол сияқты үш туындалу сызығымен берілген үшінші ретті көп өлшемді туындалған теңдеулердің шешімдерін табуда қасиеттері қолданылатын туындалған Клаузен

$$
\begin{aligned}
&x^2 p_{3,0} + x\,y\,p_{2,1} + (\gamma + \delta + 1)x\,p_{2,0} + \delta\,y\,p_{1,1} + \gamma\,\delta\,p_{1,0} - p_{0,0} = f_1(x, y),\\
&y^2 p_{0,3} + x\,y\,p_{1,2} + (\gamma + \delta' + 1)y\,p_{0,2} + \delta' x p_{1,1} + \gamma\,\delta' p_{0,1} - p_{0,0} = f_2(x, y)
\end{aligned}
$$

жүйесінің шешімдерін табу алгоритмдері жан-жақты зерттелген.

Жоғарыда аталған мәселелерді зерттеу барысында докторант біртекті емес (1) түрдегі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелерін жан-жақты зерттеп, олардың шешімдерін құрудың тиімді алгоритмдерін орнату мақсатында біршама жаңа нәтижелерге қол жеткізді. Бұл бағытта анықталмаған коэффициенттер, Фробениус-Латышева, Ж. Кампе де Ферье әдістерін қолданудың жеткілікті деңгейде дағдыларын қалыптастырды. Қалыптасқан сол дағдыларды Лауричелла жүйелерінен шекке көшу арқылы алынған жаңа туындалған жүйелерге, Клаузен текті біртекті емес n теңдеулерге $\omega > 2$ болғанда алынатын жаңа жүйелерге пайдаланып, болашақта жаңа ғылыми жаңалықтар ашу мүмкіндіктері бар.

Убаева Жанар Картбаевнаның «Клаузен текті біртекті емес жүйе шешімдерінің бар болуын зерттеу» тақырыбындағы диссертациялық жұмысы философия докторы (PhD) дәрежесін алуға қойылған барлық талаптарды қанағаттандырады және диссертация авторы «6D060100-Математика» мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін иеленуге лайық.

Ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы,
М.Өтемісов атындағы Батыс-Қазақстан университеті профессоры **Ж.Н. Тасмамбетов**

«МАХАМБЕТ ӨТЕМІСОВ АТЫНДАҒЫ БАТЫС ҚАЗАҚСТАН УНИВЕРСИТЕТІ» КОММЕРЦИЯЛЫҚ ЕМЕС АКЦИОНЕРЛІК ҚОҒАМЫ
Ж.Н. Тасмамбетовтың
ҚОЛЫ ҚОЙЫЛҒАНДЫҒЫН СЕНДІРЕМІН
«16» 11 2023 ж.
ӘКІМШІЛІК БӨЛІМІНІҢ ИНСПЕКТОРЫ