# ОТЗЫВ

**отечественного научного консультанта на диссертацию Исеновой Аккенже Алтмышевны на тему «Построение решений систем типа Уиттекера вблизи особых кривых» представленной на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100-Математика**

Диссертационная работа посвящена исследованию отличительных особенностей и свойств решений ряда новых установленных родственных систем с вырожденной гипергеометрической системой Горна ряда новых вырожденных родственных систем и исследованию построения их решений вблизи особых кривых. При установлении новых вырожденных родственных систем особую роль имеет вырожденная система типа Горна

$$x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + (\gamma_j - x_j)\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{k \neq j} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \lambda F = 0, \quad j = \overline{1.n}, \tag{1}$$

где $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – общая неизвестная для всех $n$ уравнений системы (1).

При $n = 2$ из (1) можно выводить 34 системы Я. Горна решениями которых являются известные 34 гипергеометрические функции двух переменных, в том числе четыре функций Аппеля $F_1 - F_4$. Из них 20 функций являются вырожденными функциями двух переменных.

Связь между системой Горна (1) и родственной ей системой Уиттекера

$$x_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} - x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \sum_{r \neq j} x_r \frac{\partial U}{\partial x_r} + \left[\frac{x_j^2}{4} - \frac{x_j}{2}\sum_{r \neq j} x_r + r x_j + \frac{1}{4} - \mu_j^2\right]U = 0, \quad j = \overline{1.n} \tag{2}$$

полученной из (1) с помощью преобразования вида

$$F(x_1, ..., x_n) = \exp Q(x_1, ..., x_n) U(x_1, ..., x_n),$$

где $Q(x_1, ..., x_n)$– многочлен степени $n$ с неопределенными коэффициентами, хорошо изучены в работах Я. Горна, М.П. Гумберта, П. Аппеля. Однако, не до конца раскрыта роль преобразования (3) с неопределенными коэффициентами $\alpha_{p,0,...,0}, \alpha_{0,0,...,p}, ..., \alpha_{1,0,...,0}, \alpha_{0,0,...,1}$ многочлена

$$Q(x_1, ..., x_n) = \frac{\alpha_{p,0,...,0}}{p} x_1^p + \frac{\alpha_{0,p,...,0}}{p} x_2^p + ... + \alpha_{1,0,...,0} x_1 + \alpha_{0,1,...,0} x_2 + ... + \alpha_{0,0,...,0,1} x_n. \tag{4}$$

Степень многочлена (4) определяется понятием ранга, а неопределенные коэффициенты $\alpha_{p,0,...,0}, \alpha_{0,0,...,p}, ..., \alpha_{1,0,...,0}, \alpha_{0,0,...,1}$ этого многочлена и коэффициенты обобщенного ряда $U(x_1, ..., x_n)$ в (3) определяется методом Фробениуса-Латышевой. Вывод изучаемых родственных систем типа Бесселя, Лагерра и

Уиттекера осуществляются методом предельного перехода и с помощью преобразования (3). Наряду с системой Горна системы типа Уиттекера часто появляются при построении других родственных систем. Поэтому, в разделе 1 начиная с самой простой системы Уиттекера

$$\left.\begin{aligned} P_0(x,y)\cdot Z_{xx} + P_1(x,y)\cdot Z_y + P_2(x,y)\cdot Z = 0, \\ Q_0(x,y)\cdot Z_{yy} + Q_1(x,y)\cdot Z_x + Q_2(x,y)\cdot Z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $Z = Z(x,y)$ – общая неизвестная, подробно рассмотрена классификация регулярных и иррегулярных особых кривых. Эти данные обобщены на случай системы, состоящих из $n$ дифференциальных уравнений типа Уиттекера (2). Раскрыты особенности применения метода Фробениуса-Латышевой, с помощью которого разработана теория построения регулярных, нормально-регулярных и нормальных решений вблизи особых кривых. Преобразование (3) позволяет устанавливать новые вырожденные родственные системы, а также вблизи иррегулярных особенностей $(0,0)$ и $(\infty,\infty)$ установить вид соответствующего решения. Это преобразование также способствует установлению общих свойств решений полученных новых вырожденных родственных систем.

Таким образом, расширены круг вырожденных гипергеометрических систем, находящих применение в теории специальных функций многих переменных. Их свойства находят широкое применение при исследовании задач многомерных вырожденных уравнений, математической физики и электродинамики.

Все это показывает актуальность исследуемой темы.

В диссертационной работе получены достаточно весомые результаты совместного изучения вырожденных гипергеометрических систем типа Горна, Уиттекера, Лагерра и Бесселя. Изучены общие свойства и взаимосвязь между решениями. При этом важную роль играет функция Гумберта $\Psi_2^{(n)}$.

В работе большое внимание уделено установлению и изучению вырожденной системы Лагерра. Она выведена из системы Горна (1) при целом конкретном значении $\lambda = -n$. Полином Лагерра также получен при этом значении. Выведены различные свойства основных и простых полиномов Лагерра двух, трех, $n$ переменных и сумма двух уравнений.

– Одним из таких свойств систем типа Лагерра является её связь с допустимыми уравнениями в частных производных второго порядка. Такие уравнения называются допустимыми, если его собственными функциями являются ортогональные многочлены двух переменных. В работах Г. Кролл, И. Шеффер, Г.К. Энгелис, Т. Корвиндер и др. было образовано новое направление по изучению биортогональных систем многочленов, условия допустимости и классификации допустимых уравнений. Диссертантом в своей работе изучено связь основной системы Лагерра с десятой нормальной формой допустимого уравнения. В трудах Г.К. Энгелиса, П.К. Суетина, Т. Корвиндера приводятся более 20-ти нормальных форм допустимых уравнений, связанных с другими ортогональными многочленами многих переменных.

– Рассмотренные в работе системы типа Бесселя выведены различными путями. Решения таких систем можно получить путем предельного перехода из вырожденных гипергеометрических систем, связанных с функциями Аппеля $F_1 - F_4$. В таких системах решениями являются вырожденные гипергеометрические функции сводящейся к функциям Бесселя двух переменных. В работе рассмотрены ряд конкретных примеров, где указаны возможности построения функций Бесселя двух переменных. Доказаны их дифференциальные свойства.

– Раскрыты особенности общего преобразования вида (3), применяемого для установления новых родственных систем. С помощью этого преобразования показаны также возможности построения систем типа Бесселя и Лагерра, полученных путем преобразования из родственных систем типа Уиттекера и Горна.

– Применение метода Фробениуса-Латышевой, диссертанту позволило установить все отличительные особенности изучаемых родственных систем и их нормально-регулярных решений. Так, показано, что нормально-регулярное решение системы типа Лагерра выражаются через многочлены.

– Полученные результаты в разделе 3 обобщены на случай трех и более переменных, где устанавливается необходимые условия существования нормально-регулярных решений родственных систем Горна и Лагерра. Доказаны ряд соотношении между регулярными и нормально-регулярными решениями этих систем. Изучена конкретная задача связанная с решением параболического уравнения с двумя линиями вырождения.

– Впервые изучены нормально-регулярные решения вырожденной гипергеометрической системы

$$\begin{aligned}&(1-z_i)\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + \left[\gamma - (\alpha+\beta_i+1)z_i\right]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha\beta_i w = 0,\ i=\overline{1,k},\\ &\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + \left[\gamma - z_i\right]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha w = 0,\ i=\overline{k+1,n}\end{aligned} \tag{6}$$

полученной из системы Лауричелла $(F_D)$

$$(1-z_i)\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + \left[\gamma - (\alpha+\beta_i+1)z_i\right]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha \frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_j w = 0. \tag{7}$$

Решением вырожденной гипергеометрической системы (6) является В.И. Художниковым введенная новая функция

$$\Phi_D\left(\begin{matrix}\alpha, (\beta_k)\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_{k+1})\right) = \sum_{i_1,\dots,i_{k+1}} \frac{(\alpha)_{\sum i_{k+1}} \prod (\beta_k) i_k}{(\gamma)_{\sum i_{k+1}}} \cdot \prod \frac{(z_{k+1})^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!}. \tag{8}$$

(8) является обобщением функции Гумберта $\Phi_t^{(n)}\ \left(t = \overline{1,3}\right)$, $\sum_l^{(n)}\left(l = 1,2\right)$.

Поэтому, перед диссертантом была поставлена задача: исследовать возможности построения нормально-регулярных решений вырожденных гипергеометрических систем, полученных из систем Лауричелла $\left(F_D\right)$, найти необходимые условия существования нормально-регулярных решений, выявить свойства связанные с функциями Гумберта со списка Горна двух и более переменных, установить связь рассматриваемых рядов с введенными функциями В.И. Художникова $\Phi_D\left(\begin{matrix}\alpha, (\beta_k) \\ \gamma\end{matrix}\middle|\left(z_{k+1}\right)\right)$. Все поставленные задачи диссертантом успешно решена.

На основании вышеприведенного считаю, что представленная диссертационная работа отвечает требованиям правил «Правила присуждения степени PhD», а её автор А.А. Исенова заслуживает присвоения ей степени доктора философии PhD по специальности 6D060100-Математика.

Отечественный научный консультант,
доктор физико-математических наук,
профессор Западно-Казахстанского
университета имени М. Утемисова Ж.Н.Тасмамбетов

«МАХАМБЕТ ӨТЕМІСОВ АТЫНДАҒЫ
БАТЫС ҚАЗАҚСТАН УНИВЕРСИТЕТІ»
КОММЕРЦИЯЛЫҚ ЕМЕС
АКЦИОНЕРЛІК ҚОҒАМЫ
Ж.Н.Тасмамбетовтың
ҚОЛЫ ҚОЙЫЛҒАНДЫҒЫН
СЕНДІРЕМІН
«04» 12 2023 ж.
ӘКІМШІЛІК БӨЛІМІНІҢ
ИНСПЕКТОРЫ