Отзыв

научного консультанта Рамазанова Марат Давидовича
на диссертационную работу Туткушевой Жайлан Салаватовны
«Проблема высокоточного определения глобальных минимумов гладких функций нескольких переменных», представленной к защите на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по специальности «6D060100-Математика»

Общеизвестно, что задачи нахождения глобальных экстремумов функций многих переменных в ограниченных областях, имеющие важное значение во многих отраслях науки и практики, являются сложными как с аналитической точки зрения, так и с точки зрения численных методов. При исследовании этих задач очень важно не только установление необходимых и достаточных условий существования глобальных экстремумов, но и выбор оптимального алгоритма вычисления глобальных экстремумов с заданной точностью.

Ясно, что необходимость поиска глобальных экстремумов функций возникает всегда при с исследовании различных прикладных задач. Поэтому тема диссертационной работы Туткушевой Жайлан Салаватовны, безусловно, является актуальной.

В диссертационной работе представлен новый конструктивный метод вычисления глобального минимума целевой функции $F(x)$ нескольких переменных в ограниченной области пространства, основанный на введении «вспомогательной функции»

$$g_m(F,\alpha) = \int_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m dx, \;\; m \in N, m > 1, \qquad (1)$$

одной переменной, где: $E \subset R^n$ – допустимое множество функции $F(x)$.

Функция (1) содержит кратный интеграл, который зависит от количества переменных вспомогательной функции. Для вычисления кратного интеграла численными методами использовались кубические формулы С.Л. Соболева с ограниченным пограничным слоем.

Согласно этим формулам, приближенное значение интеграла

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x)dx$$

функции $\varphi(x)$, заданной в множестве Ω и зависящей от n вещественных переменных, определяется как линейная комбинация значений функции $\varphi(x)$ в точках $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$:

$$K_N\big(\varphi(x)\big) = h^n \sum_{s=1}^{N} C_s \varphi\big(x^{(s)}\big), \qquad (2)$$

где N — число интервалов, делящих область интегрирования по каждой компоненте вектора x, $x^{(s)}$ — узлы кубатурной формулы, C_s – коэффициенты пограничного слоя.

Основная проблема состоит в том, чтобы найти коэффициенты $\{C_s\}$ так, чтобы интеграл $I(\varphi)$ быстро приближался к значению $K_N(\varphi(x))$ при стремлении N к бесконечности. Докторант вычислила точные значения пограничных коэффициентов.

Формула (2) является основным инструментом вычисления значений интегральной вспомогательной функции $g_m(F,\alpha)$ с высокой точностью. Если в этой кубатурной формуле вместо $\varphi(x)$ взять подинтегральное выражение функции $g_m(F,\alpha)$, то получим:

$$g_m(F,\alpha)=\int\limits_Q [|F(x)-\alpha|-(F(x)-\alpha)]^m dx \approx$$

$$\approx h^n \sum_{s=1}^{N} C_s \left[\left|F\left(x^{(s)}\right)-\alpha\right|-\left(F\left(x^{(s)}\right)-\alpha\right)\right]^m.$$

В ходе исследования были определены и доказаны основные свойства вспомогательной функции (1): равномерная непрерывность, дифференцируемость, строгая выпуклость, монотоннонность, неотрицательность. Независимо от многоэкстремальности, многомерности и других сложностей целевой функции, построенная вспомогательная функция будет равномерно выпуклой, монотонно возростающей.

Докторантом получены необходимое и достаточное условия глобального минимума целевой функции. Основной результат работы состоит в том, что искомое глобальное минимальное значение заданной непрерывной многомерной функции равно «наибольшему нулю» вспомогательной функции.

Дальше, в работе исследуются пути определения «наибольшего нуля» функции $g_m(F,\alpha)$ докторант рассматривает путем адаптации различных численных методов: дихотомии, золотого сечения, градиентного спуска, метода касательных, метода модифицированных хорд. Рассмотрены скорости численных методов и проведены вычислительные эксперименты, на данном этапе исследования большое внимание уделено на симметричные методы, так как они являются более экономными.

Численная реализация на основа использования соболевских кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем выполнена на языке программирования С++.

Диссертационная работа является законченным научно-исследовательским трудом, написанным автором на достаточно высоком уровне. В ней изложены результаты, решающие важную научную задачу высокоточного вычисления глобальных экстремумов гладких функций нескольких переменных. Для достижения представленных результатов Туткушева Ж.С. освоила целый ряд методов численного нахождения глобальных минимумов, изучила современное программное обеспечение для анализа и тестирования полученных результатов.

При этом:

- изучены свойства вспомогательной функции, играющий существенную роль;
- доказано существование глобального минимума;
- установлены необходимое и достаточное условия глобальных минимумов непрерывных функций;
- построен алгоритм поиска глобального минимума и его координат;
- проведены вычислительные эксперименты над тестовыми функциями.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в рейтинговых журналах, включенных в БД SCOPUS и рекомендованных ККСОН МОН РК, апробированы в международных математических конференциях, научных семинарах известных специалистов.

Туткушева Ж.С. проявила себя как сложившийся научный работник, способный самостоятельно ставить и решать научные проблемы. В целом, написанная ею диссертация на тему «Проблема высокоточного определения глобальных минимумов гладких функций нескольких переменных» представляет собой законченную научноквалификационную работу, в которой содержится решение проблемы, имеющей теоретическое и практическое значение в области методов оптимизации.

Диссертационная работа посвящена актуальной теме, обладает научной новизной и практической значимостью. Считаю, что работа выполнена на высоком научном уровне, и удовлетворяет всем требованиям «Правил присвоения ученой степени доктора философии». Поэтому вполне заслуживает допуска к защите на диссертационном совете Актюбинского регионального университета им. К.Жубанова, а ее автор достоин ученой степени Доктора философии по специальности «6D060100-Математика».

Научный руководитель,
Доктор физико-математических
наук, профессор Рамазанов Рамазанов М.Д.

Подпись М.Д. Рамазанова заверяю.

Директор ИМВЦ УФИЦ РАН

Мусин / Мусин И.Х.