МЫНБАЕВА САНДУГАШ ТАБЫЛДИЕВНА

Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептердің сапалық қасиеттері мен сандық шешімі

6D060100 — Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алуға ұсынылған диссертацияның аннотациясы

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш тараудан (бірінші тарау 3 ішкі тараудан, екінші және үшінші тараулар 4 ішкі тараудан тұрады), қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен және қосымшадан тұрады.

Иллюстрациялар, кестелер, пайдаланылған ғылыми көздер саны. Пайдаланылған ғылыми көздер саны 116 атаудан тұрады.

Түйін сөздер. Сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі, Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеуі, интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық емес шеттік есеп, параметрлеу әдісі, арнайы Коши есебі, регулярлық бөліктеу, итерациялық процесс, оқшауланған шешім, алгоритм, сандық шешім.

Тақырыптың өзектілігі бір жағынан, интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің жаратылыстану есептерін шешу кезіндегі көптеген қолданыстарымен, ал екінші жағынан, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес есептердің шешілімділігін тиімді анықтауға және олардың шешімін табуға мүмкіндік беретін жаңа конструктивті әдістерді дамыту қажеттілігімен байланысты.

Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері, осы теңдеулерге есептер қою және оларды шешу әдістерін жасау кезінде ескерілуі тиіс бірқатар ерекшеліктерге ие.

Атап айтқанда, сызықтық біртекті емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі, оның шешіміне қосымша шарттар қоймаса, мүлде шешілімді болмауы мүмкін[1],[2]. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін сызықтық шеттік есептердің шешілімділігі мен бірмәнді шешілімділігінің критерийлері салыстырмалы түрде жақында алынған болатын[3]. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді зерттеудің негізгі әдістері болып саналатын А.И. Некрасовтың әдісі мен Грин

[1]Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Berlin, De Gruyter, 2016.
[2]Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – Vol. 294.
[3] Dzhumabaev D.S. A Method for Solving the Linear Boundary Value Problem for an Integro Differential Equation // Comput. Math. Math. Phys. – 2010 – Vol. 50, № 7.

функциясы әдісі кейбір аралық есептер бірмәнді шешілімді болған жағдайда қолданылады. Бұл әдістер шешімнің бар болуының әртүрлі жеткілікті шарттарын орната отырып, осы теңдеулер үшін шеттік есептердің шешілімділік белгілерін алуға мүмкіндік бермейді. Сондықтан Д.С.Жұмабаев Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді зерттеудің және шешудің параметрлеу әдісіне[4] негізделген жаңа тәсілін ұсынды. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі қарастырылатын интервалды бөліктеу осы теңдеуге арнайы Коши есебін сәйкес қояды. Егер бұл есеп бірмәнді шешілімді болса, онда оның шешімін енгізілген параметрлер және интегралдық-дифференциалдық теңдеудің белгілі шамалары арқылы кейіптеуге болады. Бұл кейіптемелерді шеттік шарттарға және бөліктеудің ішкі нүктелеріндегі шешімнің үзіліссіздігі шарттарына қоя отырып, енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Шеттік есептің шешілімділігі осы жүйенің шешілімділігіне пара-пар екені дәлелденеді. Бұл тәсілде де аралық есептің, яғни арнайы Коши есебінің бірмәнді шешілімділігі талап етіледі. Алайда, бұл әдістің жоғарыда аталған әдістерден айырмашылығы, дифференциалдық бөлігінің матрицасы мен интегралдық мүшесі үзіліссіз сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін, арнайы Коши есебі бірмәнді шешілімді болатын интервалдың бөліктеуі бар болады. Параметрлеу әдісінің аралық есебінің бұл қасиеті Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық шеттік есептердің шешілімділік және бірмәнді шешілімділік белгілерін тағайындауға мүмкіндік берді. Арнайы Коши есебі бірмәнді шешілімді болатын $[0, T]$ интервалының Δ_N бөліктеуі сәйкесінше қарастырылып отырған Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін регулярлы бөліктеу деп аталады. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің шешімі әрдайым бар деуге болмайды. Шешілімді емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері бар болуына байланысты классикалық жалпы шешім кез келген Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін бола бермейді. Сондықтан Д.С.Жұмабаев сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің жаңа жалпы шешімін енгізді[5]. Жаңа жалпы шешім кез келген сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін бар болады. Бұл шешімді қолдану сызықтық біртекті емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің және осы теңдеуге қойылған шеттік есептердің шешілімділік белгілерін орнатуға мүмкіндік берді.

Сызықтық емес есептер, негізінен итераициялық әдістер арқылы шешіледі. Көптеген тиімді, Ньютон әдісі сияқты, итерациялық әдістер "жақсы" бастапқы жуықтауды таңдауды талап етеді. Шектелмеген операторлары бар сызықтық

---

[4] Dzhumabaev D.S. Conditions for Unique Solvability of a Linear Boundary Value Problem for an Ordinary Differential Equation // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1989. – № 29.

[5] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 327.

емес теңдеулер үшін [6]жұмысында итерациялық процестер тұрғызылған болатын және олардың жинақтылық шарттары орнатылды. Нәтижелер жәй дифференциалдық теңдеулер және дербес туындылы теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептерге қолданылған болатын[7].

Сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепке параметрлеу әдісін қолданған кезде параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі аралық есеп болып табылады. Бұл жағдайда итерациялық процестер арнайы Коши есебін шешу кезінде де, параметрлерге қатысты сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйелерін шешу кезінде де пайдаланылады.

Кіші сандық параметрі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін есептерді шешудің тиімді әдістерінің бірі ретінде орталау әдісі[8] саналады, ол интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің шешілімділігін дифференциалдық орталанған жүйе үшін осы сияқты есептің шешілімділігіне келтіруге мүмкіндік береді.

Зерттеу мақсаты Фредгольм және Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін бастапқы және шеттік есептерді шешудің конструктивті әдістерін құру болып табылады.

Зерттеу объектісі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы және шеттік есептер болып саналады.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста дифференциалдық, интегралдық-дифференциалдық және операторлық теңдеулер теорияларының әдістері мен нәтижелері кең түрде қолданылады. Диссертацияда қарастырылатын есептерді зерттеудің және шешудің негізгі әдісі - параметрлеу әдісі болып табылады.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы және практикалық құндылығы. Диссертациялық жұмыста

a) Параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін арнайы Коши есебі шешілді;

b) Дифференциалдық бөлігі сызықтық емес болатын Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің жаңа жалпы шешімі құрылды;

c) Параметрлеу әдісі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептерге таратылды;

d) Интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық емес шеттік есептің шешімін табу алгоритмі жасалды және сандық түрде жүзеге асырылды;

---

[6] Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations // Mat. Zametki. – 1987. – Vol. 41, № 5.

[7] Джумабаев Д.С. Скорость сходимости итерационных процессов для неограниченных операторных уравнений // Известия академия наук Каз ССР. – 1988. – № 5. – С. 24-28.

[8] Митропольский Ю.А., Байнов Д.Д., Милушева С.Д. Применение метода усреднения для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений // Мат.физика. – 1979. – Вып.25. – С. 3-22.

e) Интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешімінің бар болуы шарттары дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін орталанған шеттік есептің шешілімді болуы жағдайында орнатылды.

Диссертацияның нәтижелері негізінен теориялық сипатқа ие. Жұмыстың ғылыми маңыздылығы сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін есептерді зерттеудің және шешудің конструктивті әдісінің тұрғызылғандығы деуге болады. Жұмыста алынған нәтижелер Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді шешу кезінде, сондай-ақ университеттердің математикалық факультеттерінде элективті курстарды оқу кезінде қолданылуы мүмкін.

Қорғауға ұсынылатын нәтижелер. Қорғауға ұсынылады:

- параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін арнайы Коши есебінің шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары;
- параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін арнайы Коши есебін шешудің итерациялық әдістері және олардың сандық түрде жүзеге асырылулары;
- дифференциалдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің Δ_N жалпы шешімі және оның қасиеттері;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есепті шешудің параметрлеу әдісі;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін сызықтық емес шеттік есептерді шешудің алгоритмдері және олардың сандық түрде жүзеге асырылуы;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары;
- дифференциалдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепке параметрлерге қатысты сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін құру және оның шешімін табу алгоритмі;
- сызықтық емес арнайы Коши есебінің және құрылған алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің алғашқы жуықтауларын табу алгоритмдері;
- сызықты емес Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін бастапқы және шеттік есептердің шешімдерінің бар болуын зерттеуге орталанған әдісті негіздеу.

Жарияланымдар. Диссертацияның негізгі нәтижелері 14 жұмыста жарияланды, оның ішінде 2 мақала ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған басылымдарда, 1 мақала Scopus деректер қорына енетін журналда, 1 мақала Web of Science деректер қорына енетін журналда, 1 мақала ZbMath деректер қорына енетін журналда, қалғандары халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында жарияланды.

Жұмыстың қысқаша мазмұны

Бірінші тарауда

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

дифференциалдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі қарастырылады.

Д.Жұмабаевтың параметрлеу әдісімен (1) теңдеу келесі параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінен

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[u_j(\tau) + \lambda_j\right]d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad (2)$$

және

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}, \qquad (3)$$

бастапқы шарттарынан тұратын есепке келтіріледі.

(2), (3) есебі параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі деп аталады.

Берілген $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ векторы және $\rho > 0$ саны бойынша $G^0(\rho) = \{(t,x): t \in [0,T], \|x - x_0(t)\| < \rho\}$ жиынын құрамыз, мұндағы $x_0(t) = \lambda_r^{(0)}, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}$ және $x_0(T) = \lambda_N^{(0)}$.

1 Шарт. *Келесі теңсіздіктер орындалсын:*

(1) $\|f(t,x)\| \leq M_0$, $(t,x) \in G^0(\rho)$, $M_0 - const$;

(2) $M_1\bar{h} = \left[M_0 + K_0\left(\rho + \|\lambda^{(0)}\|\right)\right]\bar{h} < \rho$,

мұндағы

$$K_0 = \sum_{k=1}^{m} \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(\tau)\|d\tau.$$

Келесі жиындарды енгіземіз:

$G_p^0(\rho) = \left\{(t,x): t \in \left[t_{p-1}, t_p\right), \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1\left(t_p - t\right)\right\}, \quad p = \overline{1, N-1}$,

$G_N^0(\rho) = \{(t,x): t \in [t_{N-1}, t_N], \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1(t_N - t)\}$, және

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

(1) теңдеуге қойылған шеттік есепті шешу барысында (2), (3) есебінің шешімінің $\lim_{t\to t_r-0} u_r(t,\lambda)$, $r=\overline{1,N}$, шектік мәндерін қолданамыз. Осыған байланысты тұйық ішкі интервалдарда келесі арнайы Коши есебін қарастырамыз:

$$\frac{dv_r}{dt}=f(t,v_r+\lambda_r)+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[v_j(\tau)+\lambda_j\right]d\tau,\quad t\in[t_{r-1},t_r], \quad (4)$$

$$v_r(t_{r-1})=0,\quad r=\overline{1,N}. \quad (5)$$

Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін Коши есебі сияқты арнайы Коши есебі де барлық уақытта шешілімді емес. Сондықтан (4), (5) арнайы Коши есебінің шешілімділік мәселелері зерттеледі.

$\rho_\lambda=\rho-M_1\bar{h}.$, $\rho_v=M_1\bar{h}$ сандарын алып

$$S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)=\left\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)\in\mathbb{R}^{nN}: \left\|\lambda_r-\lambda_r^{(0)}\right\|<\rho_\lambda,\quad r=\overline{1,N}\right\},$$

$$S(0,\rho_v)=\left\{v[t]\in\tilde{\mathbb{C}}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN}): \|v[\cdot]\|_3<\rho_v\right\}.$$

жиындарын құрамыз. Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$G(\Delta_N)=\left(G_{p,k}(\Delta_N)\right)-$ $nm\times nm$ матрицасы келесі $n\times n$-өлшемді матрицалардан тұрады:

$$G_{p,k}(\Delta_N)=\sum_{r=1}^{N}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_p(\tau)\int_{t_{r-1}}^{\tau}\varphi_k(s)ds d\tau,\quad p,k=\overline{1,m},$$

$[I-G(\Delta_N)]^{-1}=\left(R_{k,p}(\Delta_N)\right)$, $k,p=\overline{1,m}$, мұндағы $I-nm$ -өлшемді бірлік матрица, $R_{k,p}(\Delta_N)-n$ -өлшемді квадраттық матрица.

Келесі тұжырымда (4), (5) параметрлері бар сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің жалғыз шешімінің бар болу шарттары орнатылады.

Теорема 1. *1 Шарт орындалсын, $I-G(\Delta_N)$ матрицасының кері матрицасы бар болсын және келесі теңсіздіктер орындалсын:*

(i) $\|f(t,x')-f(t,x'')\|\le L_0\|x'-x''\|$, $L_0-const$, $(t,x'),(t,x'')\in G^0(\rho)$;

(ii) $(L_0+K_0)\bar{h}<1$;

(iii) $\chi\left(M_0+K_0\left(\rho_\lambda+\left\|\lambda^{(0)}\right\|\right)\right)\bar{h}<\rho_v$, *мұндағы*

$$\chi = 1 + \bar{h}\sum_{k=1}^{m} \max_{t\in[0,T]}\|\varphi_k(t)\| \sum_{p=1}^{m} \left\|R_{k,p}(\Delta_N)\right\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\|\psi_p(s)\right\| ds.$$

Онда кез келген $\hat{\lambda} \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *үшін (4), (5) арнайы Коши есебінің* $\lambda = \hat{\lambda}$ *болғанда* $S(0, \rho_v)$ *шарында* $v\left[t, \hat{\lambda}\right] = \left(v_1\left(t, \hat{\lambda}\right), v_2\left(t, \hat{\lambda}\right), \dots, v_N\left(t, \hat{\lambda}\right)\right)$ *жалғыз шешімі бар болады.*

(4), (5) арнайы Коши есебін $\lambda \in \mathbb{R}^{nN}$ параметрлерінің бекітілген мәндерінде шешу барысында демпфирлеуші көбейткіштері бар итерациялық процестерді қолданамыз.

Берілген $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ векторы, $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t)\right) \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$ функциялар жүйесі және $\rho > 0$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$ сандары бойынша келесі жиындарды құрамыз:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN} \colon \max_{r=\overline{1,N}} \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda\right\},$$

$$S\left(u^{(0)}[t], \rho_u\right) = \left\{u[t] \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}) \colon \left\|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\right\|_2 < \rho_u\right\},$$

$$S(x_0(t), \rho) = \{x(t) \in \mathbb{PC}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^n) \colon \|x - x_0\|_5 < \rho\},$$

$$G^0(\rho) = \{(t,x) \colon t \in [0,T], \|x - x_0(t)\| < \rho\},$$

$$G_r^0(\rho) = \{(t,x) \colon t \in [t_{r-1}, t_r), ||x - x_0(t)|| < \rho\}, \quad r = \overline{1,N}\},$$

мұндағы $x_0(t)$ функциясы

$$x_0(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N},$$
$$x_0(T) = \lambda_N^{(0)} + \lim_{t\to T-0} u_N^{(0)}(t),$$

теңдіктерімен анықталады және $x_0(t) \in \mathbb{PC}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^n)$.

2 Шарт. *$f(t,x)$ функциясының $G^0(\rho)$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз $f_x'(t,x)$ дербес туындысы бар болсын.*

$\mathbb{X} = \{v[t] = \left(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\right) \in \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}) \colon \ v_r(t_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1,N}\}$, $\mathbb{Y} = \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$ аламыз және $H \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ сызықтық операторын келесі түрде енгіземіз:

$$Hv[t] = w^{(1)}[t],$$

мұндағы

$$w^{(1)}[t] = \left(w_1^{(1)}(t), w_2^{(1)}(t), \dots, w_N^{(1)}(t)\right),$$

$$w_r^{(1)}(t) = \dot{v}_r(t) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) v_j(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1,N}$$

$D(H) = \{v[t] = \big(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\big) \in \mathbb{X}$, мұндағы $v_r(t)$ функциясы $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, N}$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданады$\}$ жиыны - H операторының анықталу облысы.

Кез келген $\lambda = \hat{\lambda} \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ үшін (4), (5) арнайы Коши есебін

$$Hv[t] + F\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = 0 \tag{6}$$

сызықтық емес операторлық теңдеу түрінде жазамыз, мұндағы

$$F\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = \Big(w_1^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big), w_2^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big), \dots, w_N^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big)\Big),$$

$$w_r^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big) = -f\big(t, v_r(t) + \hat{\lambda}_r\big) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) d\tau \hat{\lambda}_j,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N}.$$

2 Шарты $S\big(v^{(0)}[t], \rho_u\big)$ шарында $F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big)$ Фреше туындысының бар болуын және бірқалыпты үзіліссіздігін қамтамасыз етеді және ол келесі түрде болады:

$$F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = diag\left\{-\frac{\partial f\big(t, v_1(t) + \hat{\lambda}_1\big)}{\partial x}, \dots, -\frac{\partial f\big(t, v_N(t) + \hat{\lambda}_N\big)}{\partial x}\right\}.$$

$\mathbb{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ индуцирленген нормалы сызықтық шектелген $\Lambda: \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ опреторларының кеңістігі болсын.

$\hat{\lambda} \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$, $\hat{v}^{(0)}[t] \in S\big(v^{(0)}[t], \rho_u\big) \cap D(H)$, және $\hat{\rho}_u > 0$ бекітеміз.

Теорема 2. *Келесі шарттар орындалсын:*

(i) $F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big)$ *операторы* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$ *шарында бірқалыпты үзіліссіз;*

(ii) $H + F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big): \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *операторының кері операторы шектелген және барлық* $v[t] \in S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$ *үшін* $\big\|[H + F'_v(v[t], \hat{\lambda})]^{-1}\big\|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y},\mathbb{X})} \leq \hat{\chi}$, $\hat{\chi}$ *–* *const;*

(iii) $\hat{\chi}\big\|H\hat{v}^{(0)}[\cdot] + F\big(\hat{v}^{(0)}[\cdot], \hat{\lambda}\big)\big\|_3 < \hat{\rho}_u$.

Онда

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = \hat{v}^{(k)}[t] - \frac{1}{\alpha_k}\big[H + F'_v\big(\hat{v}^{(k)}[t], \hat{\lambda}\big)\big]^{-1} \times$$

$$\times \big[H\hat{v}^{(k)}[t] + F\big(\hat{v}^{(k)}[t], \hat{\lambda}\big)\big], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

итерациялық процесімен анықталған $\big\{\hat{v}^{(k)}[t]\big\}$ *тізбегі* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$ *шарында болатындай, (6) теңдеудің* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$ *шарындағы* $v\big[t, \hat{\lambda}\big]$ *оқшауланған шешіміне жинақталатындай* $\alpha_k \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, *сандары табылады және келесі бағалау орындалады*

$$\left\|v\left[\cdot,\hat{\lambda}\right]-\hat{v}^{(0)}[\cdot]\right\|_3 \le \chi\left\|H\hat{v}^{(0)}[\cdot]+F\left(\hat{v}^{(0)}[\cdot],\hat{\lambda}\right)\right\|_3.$$

Параметрлері бар сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебін қарастыралық:

$$\frac{d\vartheta_r}{dt}=f_x'\left(t,v_r(t)+\hat{\lambda}_r\right)\vartheta_r+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\vartheta_j(\tau)d\tau+g_r(t),\quad t\in[t_{r-1},t_r], \tag{7}$$

$$\vartheta_r(t_{r-1})=0,\quad r=\overline{1,N}. \tag{8}$$

Теорема 2 және (4), (5) арнайы Коши есебі мен (6) операторлық теңдеуінің арасындағы өзара байланыс келесі тұжырымды береді.

Теорема 3. *2 Шарты орындалсын, (7), (8) арнайы Коши есебі барлық* $v[t]\in S\left(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u\right)$ *үшін* $\hat{\chi}$ *тұрақтысымен қисынды шешілімді болсын және келесі теңсіздік орындалсын:*

$$\hat{\chi}\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\dot{\hat{v}}_r^{(0)}(t)-f\left(t,\hat{v}_r^{(0)}(t)+\hat{\lambda}_r\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[\hat{v}_j^{(0)}(\tau)+\hat{\lambda}_j\right]d\tau\right\|<\hat{\rho}_u.$$

Онда

$$\hat{v}^{(k+1)}[t]=\hat{v}^{(k)}[t]+\Delta v^{(k)}\left[t,\hat{\lambda}\right],\quad k=0,1,2,\ldots,$$

итерациялық процесімен анықталған $\left\{\hat{v}^{(k)}[t]\right\}$ *тізбегі* $S\left(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u\right)$ *шарында болатындай, (4), (5) арнайы Коши есебінің* $S\left(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u\right)$ *шарындағы* $v\left[t,\hat{\lambda}\right]$ *оқшауланған шешіміне жинақталатындай* $\alpha_k\ge 1,\quad k=0,1,2,\ldots,$ *сандары табылады және келесі бағалау орындалады*

$$\left\|v\left[\cdot,\hat{\lambda}\right]-\hat{v}^{(0)}[\cdot]\right\|_3\le\hat{\chi}\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\hat{v}_r^{(0)}(t)-f\left(t,\hat{v}_r^{(0)}(t)+\hat{\lambda}_r\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[\hat{v}_j^{(0)}(\tau)+\hat{\lambda}_j\right]d\tau\right\|,$$

мұндағы $\Delta v^{(k)}\left[t,\hat{\lambda}\right]$

$$\frac{d\Delta v_r}{dt}=f_x'\left(t,v_r^{(k)}\left(t,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_N\right)+\hat{\lambda}_r\right)\Delta v_r+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\Delta v_j(\tau)d\tau-\frac{1}{\alpha_k}\left\{\dot{v}_r^{(k)}\left(t,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_N\right)-\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[v_j^{(k)}(\tau,\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_N)+\hat{\lambda}_j\right]d\tau-$$

$$-f\left(t,v_r^{(k)}(t,\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_N)+\hat{\lambda}_r\right)\Big\},\quad t\in[t_{r-1},t_r],$$

$$\Delta v_r(t_{r-1},\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_N)=0,\quad r=\overline{1,N},$$

сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешімі.

Екінші тарауда (4), (5) арнайы Коши есебінің шешімі көмегімен (1) теңдеудің Δ_N жалпы шешімі құрылды және оның қасиеттері анықталды. (2), (3) және (4), (5) арнайы Коши есептерінің арасындағы өзара байланысты ескеріп келесі анықтаманы береміз.

Анықтама 1. $v[t,\lambda]=\left(v_1(t,\lambda),v_2(t,\lambda),\dots,v_N(t,\lambda)\right)\in S(0,\rho_v)$ *функциялар жүйесі (4), (5) арнайы Коши есебінің* $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$ *болғандағы шешімі болсын. Онда*

$$x(\Delta_N,t,\lambda)=\lambda_r+v_r(t,\lambda),\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,N},\ \textit{және}$$

$$x(\Delta_N,T,\lambda)=\lambda_N+v_N(T,\lambda),$$

теңдіктерімен анықталған $x(\Delta_N,t,\lambda)$ *функциясы (1) теңдеудің* $G^0(\Delta_N,\rho)$ *жиынындағы* Δ_N *жалпы шешімі деп аталады.*

Теорема 4. $[0,T]$ *кесіндісінде үзіліс нүктелері* $t=t_p,\ p=\overline{1,N-1}$ *болуы мүмкін* $\tilde{x}(t)$ *функциясы берілсін және* $\left(t,\tilde{x}(t)\right)\in G^0(\Delta_N,\rho)$. $\tilde{x}(t)$ *функциясы барлық* $t\in(0,T)\backslash\left\{t_p,p=\overline{1,N-1}\right\}$ *үшін үзіліссіз туындысы бар және (1) теңдеуді қанағаттандыратын болсын. Онда* $x\left(\Delta_N,t,\tilde{\lambda}\right)=\tilde{x}(t)$ *теңдігі барлық* $t\in[0,T]$ *орындалатындай жалғыз* $\tilde{\lambda}=\left(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\dots,\tilde{\lambda}_N\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$ *векторы табылады.*

Салдар 1. $x^*(t)$ *функциясы (1) теңдеудің шешімі болсын және* $\left(t,x^*(t)\right)\in G^0(\Delta_N,\rho)$. *Онда* $x(\Delta_N,t,\lambda^*)=x^*(t)$ *теңдігі барлық* $t\in[0,T]$ *үшін орындалатындай жалғыз* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\dots,\lambda_N^*)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$ *векторы табылады.*

(1) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шекаралық шарты сызықтық емес келесі

$$g[x(0),x(T)]=0 \tag{10}$$

шеттік есеп қарастырылады.

(1) теңдеудің Δ_N жалпы шешімі (1), (10) шеттік есебінің шешілімділігін

$$Q_*(\Delta_N;\lambda)=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}^{nN} \tag{11}$$

параметрлерге қатысты сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесінің шешілімділігіне келтіруге мүмкіндік береді.

Теорема 5. $x^*(t)$ функциясы *(1), (10) шеттік есебінің шешімі болсын және* $(t, x^*(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. *Онда элементтері* $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$ *болатын* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *векторы (11) жүйесінің шешімі болады. Және керісінше, егер* $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *векторы (11) жүйесінің шешімі болса, онда* $\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \lambda)$ *функциясы (1), (10) есебінің шешімі болады және* $(t, \tilde{x}(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.

(11) сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін шешу үшін келесі тұжырымды қолданамыз.

Теорема 6. *Келесі шарттар орындалсын:*

(i) $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda}$ *Якоби матрицасы* $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *шарында бірқалыпты үзіліссіз;*

(ii) $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda}$ *матрицасының кері матрицасы бар және барлық* $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *үшін* $\left\| \left[\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \le \gamma^*$, $\gamma^* - const;$

(iii) $\gamma^* \| Q_*(\Delta_N; \lambda^{(0)}) \| < \rho_\lambda$.

Онда кез келген $\alpha \ge \alpha_0$ *үшін*

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)})}{\partial \lambda} \right]^{-1} Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

итерациялық процесімен анықталған $\{\lambda^{(k)}\}$ *тізбегі* $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *шарында болатындай, (11) теңдеудің* $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *шарындағы* λ^* *оқшауланған шешіміне жинақталатындай жалғыз* $\alpha_0 \ge 1$ *табылады және*

$$\| \lambda^* - \lambda^{(0)} \| \le \gamma^* \| Q_*(\Delta_N; \lambda^{(0)}) \|.$$

бағалауы орындалады.

Осы тарауда сондай-ақ

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) x(\tau) d\tau + f_0(t) + \varepsilon f(t, x), \tag{12}$$

квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі қарастырылады

Параметрлеу әдісін (12) теңдеуге қолдана отырып Δ_N бөліктеуі үшін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) [u_j(\tau) + \lambda_j] d\tau + f_0(t) +$$

$$+\varepsilon f(t, u_r + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{13}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N} \tag{14}$$

параметрлі арнайы Коши есебін аламыз.

$y(\Delta_N, t, \lambda)$ функциясы келесі сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеудің

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)y(\tau)d\tau + f_0(t), \quad t \in [0,T], \quad y \in \mathbb{R}^n \qquad (15)$$

Δ_N жалпы шешімі болсын.

(15) теңдеу

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)(v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big[v_j(\tau) + \lambda_j\big]d\tau +$$

$$+f_0(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad (16)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \qquad 17)$$

арнайы Коши есебіне келтіріледі.

$\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ векторы және $\rho_\lambda > 0$, $\rho > \rho_\lambda$, $\rho_v = \rho - \rho_\lambda$ сандары үшін $[0,T]$ кесіндісінде үзікті-үзіліссіз $y^{(0)}(t) = y\big(\Delta_N, t, \lambda^{(0)}\big)$ функциясын және элементтері $v_r^{(0)}(t) = y^{(0)}(t) - \lambda_r^{(0)}$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$ болатын $v^{(0)}[t] = \left(v_1^{(0)}(t), v_2^{(0)}(t), \dots, v_N^{(0)}(t)\right)$ функциялар жүйесін таңдап аламыз және келесі жиындарды құрамыз:

$$G^0(\rho) = \{(t,x): t \in [0,T], \|x - y^{(0)}(t)\| < \rho\},$$

$$S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}: \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda, \quad r = \overline{1,N}\right\},$$

$$S\big(v^{(0)}[t], \rho_v\big) = \left\{u[t] \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}): \left\|u[\cdot] - v^{(0)}[\cdot]\right\|_2 < \rho_v\right\},$$

$$G_p^0(\rho) = \{(t,x): t \in [t_{p-1}, t_p), \|x - y^{(0)}(t)\| < \rho\}, \quad p = \overline{1, N-1},$$

$G_N^0(\rho) = \{(t,x): t \in [t_{N-1}, t_N], \|x - y^{(0)}(t)\| < \rho\}$, и

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

(13), (14) есебін операторлық теңдеу түрінде жазамыз және оның шешімін табу үшін итерациялық процесс қолданамыз. Сызықтық $H: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ операторын келесі түрде енгіземіз:

$$Hu[t] = \left(w_1^{(1)}(t), w_2^{(1)}(t), \dots, w_N^{(1)}(t)\right),$$

мұндағы

$$w_r^{(1)}(t) = \dot{u}_r(t) - A(t)u_r - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)u_j(\tau)d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad r = \overline{1, N}.$$

Енді (13), (14) есебін сызықтық емес операторлық теңдеу түрінде жаза аламыз

$$Hu[t] = \varepsilon F(u[t], \lambda) + F_0[t, \lambda],$$

мұндағы

$$F(u[t], \lambda) = \left(w_1^{(2)}(t), w_2^{(2)}(t), \dots, w_N^{(2)}(t)\right),$$

$$w_r^{(2)}(t) = f(t, u_r(t) + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}.$$

Теорема 7. *(16), (17) арнайы Коши есебі χ тұрақтысымен қисынды шешілімді болсын және келесі теңсіздіктер орындалсын:*

(i) $\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq L \parallel x' - x'' \parallel$, $L - const.$, $(t, x'), (t, x'') \in G^0(\rho)$;

(ii) $q_\varepsilon = \varepsilon \chi L < 1$;

(iii) *барлық* $\lambda \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *үшін*

$$\frac{1}{1-q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\| < \rho_v.$$

Онда әрбір $\lambda \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *үшін (13), (14) арнайы Коши есебінің* $S\left(v^{(0)}[t], \rho_v\right)$ *шарында жалғыз* $u[t, \lambda, \varepsilon] = \left(u_1(t, \lambda, \varepsilon), u_2(t, \lambda, \varepsilon), \dots, u_N(t, \lambda, \varepsilon)\right)$ *шешімі бар болады және келесі теңсіздік орындалады:*

$$\|u[\cdot, \lambda, \varepsilon] - v[\cdot, \lambda]\|_2 \leq \frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\|.$$

Анықтама 2. $u[t, \lambda, \varepsilon] = \left(u_1(t, \lambda, \varepsilon), u_2(t, \lambda, \varepsilon), \dots, u_N(t, \lambda, \varepsilon)\right) \in S(v[t, \lambda], \rho_v)$ функциялар жүйесі *(13), (14) арнайы Коши есебінің* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *болғандағы шешімі болсын. Онда*

$x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = \lambda_r + u_r(t, \lambda, \varepsilon)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, *және*

$$x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) = \lambda_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon)$$

теңдіктерімен анықталған $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ *функциясы (12) теңдеудің* $G^0(\Delta_N, \rho)$ *жиынындағы* Δ_N *жалпы шешімі деп аталады.*

Анықтама 2 және теорема 7 келесі тұжырымды береді.

Теорема 8. *Теорема 7 шарттарында (12) теңдеудің* $G^0(\Delta_N,\rho)$ *жиынында жалғыз* $x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)$ Δ_N *жалпы шешімі бар болады және бұл шешімді келесі түрде жазуға болады*

$$x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)=y(\Delta_N,t,\lambda)+\Delta x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon),$$

мұндағы $\Delta x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)$ *мына теңдіктермен анықталады*

$$\Delta x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)=u_r(t,\lambda,\varepsilon)-v_r(t,\lambda),\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,N} \text{ және}$$

$$\Delta x(\Delta_N,T,\lambda,\varepsilon)=\lim_{t\to T-0}u_N(t,\lambda,\varepsilon)-\lim_{t\to T-0}v_N(t,\lambda).$$

Сонымен қоса

$$\sup_{t\in[0,T)}\|\Delta x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)\|\le\frac{1}{1-q_\varepsilon}\varepsilon\chi\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|f(t,v_r(t,\lambda)+\lambda_r)\|$$

бағалауы орындалады.

2.4 бөлімде

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\int_0^T\psi_k(\tau)x(\tau)d\tau+f_0(t)+\varepsilon f(t,x),\quad t\in[0,T],\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$Bx(0)+Cx(T)=d,\quad d\in\mathbb{R}^n.$$

Фредгольм интегралдық-диффференциалдық теңдеуі үшін квазисызықтық шеттік есеп зерттелді.

Үшінші тарау интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық емес шеттік есептің шешімін табу алгоритмін жасауға арналған.

3.1 бөлімде келесі сызықтық емес интегралдық-диффференциалдық теңдеулер жүйесіне

$$\frac{dx}{dt}=f_0(t,x)+\int_0^T f_1\big(t,s,x(s)\big)ds,\quad t\in[0,T],\quad x\in\mathbb{R}^n$$

параметрлеу әдісін қолдану барысында туындайтын

$$\frac{du_r}{dt}=f_0(t,u_r+\lambda_r)+\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh}f_1\big(t,s,u_j(s)+\lambda_j\big)ds,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad (18)$$

$$u_r[(r-1)h]=0,\quad r=\overline{1,N},\quad (19)$$

сызықтық емес интегралдық-диффференциалдық теңдеулер жүйелері үшін арнайы Коши есебі қарастырылды. (18), (19) есебінің сандық шешімін табу алгоритмі жасалды.

Сондай-ақ осы бөлімде

$$\frac{dv_r}{dt} = f(t, v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)[v_j(\tau) + \lambda_j]d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}.$$

дифференциалдық бөлігі сызықтық емес интегралдық-диффференциалдық теңдеулер жүйелері үшін арнайы Коши есебінің сандық шешімін табу алгоритмі ұсынылды.

Ұсынылған алгоритмнің жинақтылығын теорема 2 қамтамасыз етеді.

3.2 бөлімде (1), (10) Фредгольм интегралдық-диффференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептің шешімін табу алгоритмі жасалды.

3.3 бөлімде (4), (5) арнайы Коши есебінің және (11) сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің бастапқы жуықтауларын таңдау мәселесін шешудің параметр бойынша жалғастыру әдісіне негізделген тәсілі ұсынылды.

Келесі түрдегі теңдік

$$\int_0^t \varphi\big(t, s, x(s)\big)ds = \int_0^T \tilde{\varphi}\big(t, s, x(s)\big)ds,$$

орынды болғандықтан, мұндағы

$$\tilde{\varphi}\big(t, s, x(s)\big) = \begin{cases} \varphi\big(t, s, x(s)\big), & a \le s \le t, \\ 0, & t < s \le b, \end{cases}$$

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^t \varphi\big(t, s, x(s)\big)ds\right)$$

Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеуі

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^T \tilde{\varphi}\big(t, s, x(s)\big)ds\right)$$

Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің дербес жағдайы болып табылады.

Осыған байланысты 3.4 бөлімде орталанған әдіс Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептің шешімінің бар болуын зерттеуге қолданылды. Егер орталанған шеттік есептің шешімі бар болса, онда берілген шеттік есептің де шешімі бар болатындығы көрсетілді. Бұл жағдайда интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін орталаған жүйе одан қарапайым болатын жәй дифференциалдық теңдеулердің жүйесі болып табылады.

Сонымен, диссертациялық жұмыста интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептердің шешілімділігі зерттелді және келесі жаңа ғылыми нәтижелер алынды:

- параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін арнайы Коши есебінің шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынды;
- параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін арнайы Коши есебін шешудің итерациялық әдістері және оларды сандық түрде жүзеге асырылуы ұсынылды;
- дифференциалдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің Δ_N жалпы шешімі құрылды және оның қасиеттері анықталды;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есепті шешудің параметрлеу әдісі ұсынылды;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептерді шешудің алгоритмдері және оларды сандық түрде жүзеге асырулары жасалды;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынды;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепке параметрлерге қатысты сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесі құрылды және оны шешу алгоритмі ұсынылды;
- сызықтық емес арнайы Коши есебінің және құрылған сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің бастапқы жуықтауларын табу алгоритмдері жасалды;
- сызықтық емес Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін бастапқы және шеттік есептердің шешімдерінің бар болуын зерттеу үшін орталанған әдіс қолданылады.