ЖАМАНШИН АКЫЛБЕК УРАЛОВИЧ

Дифференциалдық теңдеулер мен нейрондық желілердегі болжанбайтын тербелістер

6D060100 – Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесіне ізденушінің диссертациясының аннотациясы

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен (бірінші бөлімде 4 бөлімше, екінші бөлімде 3 бөлімше), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Суреттер, кестелер мен әдебиеттер саны. Жұмыста 112 әдебиет және 15 сурет пайдаланылды.

Кілттік сөздер. Тербелістер, болжанбайтын функция, күшті болжанбайтын функция, сызықтық дифференциалдық теңдеулер, квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер, нейрондық желілер, шунттаушы тежегіші бар жасушалық нейрондық желілер, инерциялық нейрондық желілер, асимптотикалық орнықтылық.

Тақырыптың өзектілігі жаратылыстану мәселелерін шешуде дифференциалдық теңдеулердің көптеп қолданылуы және қазіргі әлемде нейрондық желілердің кеңінен қолданылуымен байланысты. Диссертация М.Ахмет пен М. О. Фен[1-4] енгізген болжанбайтын функция тұжырымдамасына негізделген. Біз дифференциалдық теңдеулердің болжанбайтын шешімдерінің бар болатындығын дәлелдедік және нейрондық желілерде болжанбайтын тербелістердің бар болу мәселесін қарастырдық.

---

1 Akhmet M., Fen M.O. Unpredictable points and chaos // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2016. - № 40. – P. 1-5.
2 Akhmet M., Fen M.O. Existence of unpredictable solutions and chaos // Turkish Journal of Mathematics. – 2017. - vol. 41. - №. 2.- P. 254–256.
3 Akhmet M., Fen M.O. Poincare chaos and unpredictable functions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2017. – № 48. - P. 85-94.
4 Akhmet M., Fen M. Non-autonomous equations with unpredictable solutions // Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2018. – №59. – P. 657-670.

Диссертацияның негізгі нәтижелерінің халықаралық рецензияланған журналдарда жарияланғандығы зерттеудің өзектілігін растайды.

Дисертацияның зерттеулері. Диссертация дифференциалдық теңдеулердің болжанбайтын шешімдері мен нейрондық желілердің болжанбайтын тербелістерін зерттеуге арналған.

Алдын-ала мәліметтер. Тербелістер – табиғатта болатын әртүрлі процестердің ажырамас бөлігі болып табылады. Диффернциалдық теңдеулер арқылы сипатталған тербелмелі қозғалыстар ерекше теориялық және практикалық мәнге ие. Белгіленген математикалық әдістер мен олардың маңызды қолданыстарының арқасында, әдебиетте дифференциалдық теңдеулердің периодты, квазипериодты және периодты дерлік шешімдері үшін көптеген нәтижелер алынды. Екінші жағынан, Пуассон бойынша орнықты және рекуррентті шешімдердің дифференциалдық теңдеулер теориясы үшін де маңызы зор.

Сызықтық емес жүйелерді зерттеуге жарамды математикалық аппарат жасаған А. Пуанкаре[5-6] мен А.М. Ляпунов[7] сызықтық емес тербелістер теориясының негізін қалаушылар болып табылады. Сызықтық емес динамиканың теориясы негізінен периодты қозғалыстармен айналысады. Қатаң математикалық талдау үшін жеткілікті анықталған және «периодты» деп санауға болатын бастапқы функциялар, П. Боль мен Э. Эсклангон енгізген және бір-бірінен тәуелсіз зерттеген квазипериодты функциялары болды. Г. Бордың іргелі еңбектері, бүгінде біз Бордың периодты дерлік функциялары деп айтып жүрген, периодты дерлік функциялар теориясын қамтыды. Содан кейін Н.Н. Боголюбов, А. Безикович, С. Бохнер, В.В. Степанов және басқалар периодты дерлік функцияларды зерттеудің әртүрлі тәсілдерін тапты. Периодты дерлік функциялар топтарда гармоникалық талдауды, Фурье қатарларын және топтардағы интегралдарды дамытуда маңызды роль атқарады. С. Бохнердің

5 Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, - Paris: Gauthier-Villars, 1892. - Vol. 1,2.
6 Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. - Paris, 1899. - vol. III; reprint (Dover, New York, 1957).
7 Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion (In Russian). - Doctoral dissertation, University Kharkov, 1892, English translations: Stability of Motion. - New-York & London: Academic Press, 1966.

мақаласында банах кеңістігінде мәндері бар периодты дерлік функциялар теориясы кеңейтілген. Периодты дерлік шешімдердің бар болуы туралы алғашқы мақаланы Г. Бор және О. Нойгебауэр жазған және қазіргі уақытта периодты дерлік теңдеулер теориясы дифференциалдық теңдеулер, орнықтылық теориясы мен динамикалық жүйелер проблемаларына байланысты дамуда. Теорияның қолданыстар тізімі едәуір кеңейтілді және қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен классикалық динамикалық жүйелерді ғана емес, сонымен қатар, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер мен банах кеңістігіндегі теңдеулердің кең кластарын қамтиды. Рекуррентті қозғалыстар мен Пуассон бойынша орнықты нүктелер ұғымдары динамикалық жүйелер қозғалыстарының сапалық теориясында кездесетін классикалық ұғымдардың негізгілері болып табылады. Пуассон бойынша орнықты нүктелерді А. Пуанкаре аспан динамикасындағы күрделілікті сипаттаудағы негізгі элемент ретінде қарастырды.

Қазақстанда сызықты емес тербелістерді зерттеудің негізін В.Х. Харасахал мен О.А. Жәутіков қалаған. Д.У. Үмбетжанов пен оның әріптестері дифференциалдық және эволюциялық жүйелер үшін периодты және көппериодты шешімдерді қарқынды зерттеді. Қазіргі таңда қазақстандық математиктер тербелістерді талдауға айтарлықтай үлес қосып, зерттеулерді жалғастырып келеді.

Соңғы онжылдықта зерттеушілер нейрондық желілердегі тербелістерді зерттеуге назар аударды. Математикалық түрде рекуррентті және дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталатын нейрондық желілердің көптеген модельдері бар. Мысалы, Хопфилд типті нейрондық желілер, шунттаушы тежегіші бар жасушалық нейрондық желілер (ШТЖНЖ), Коэн-Гроссбергтің нейрондық желілері, инерциялық нейрондық желілер (ИНЖ) зерттелуде.

Тербелмелі нейрондық желілер кескінді тану және жадыны еске түсірумен байланысты желілік күйлерді белсендіру үшін тиімді. Әрине, нейрондық тербелістер нейробиология, психофизика, биофизика, когнитивті психология және компьютерлік модельдеуді біріктіретін пәнаралық зерттеулердің өзегіне айналды.

Сондықтан да, көптеген зерттеушілер енгізу-шығару механизмдерін ескере отырып, нейрондық желілердің периодтылығы, периодты дерлігі мен экспоненциалды орнықтылығын зерттеумен айналысады.

Соңғы жылдарда нейрондық желілердегі хаостық тербелістерді зерттеу үлкен қызығушылық тудырды. Хаостық жүйелердің шешімдері тұрақты емес, оны тәжірибелер және бақылаулармен байланысты мәліметтерден көруге болады.

Осыдан бірер жыл бұрын М. Ахмет пен М.О. Фен болжанбайтын нүктелер мен болжанбайтын функциялар ұғымдарын енгізді, осылайша олар, А. Пуанкаре мен Дж. Биркгоф негізін қалаған динамикалық жүйелердің классикалық теориясының шекараларын едәуір кеңейтті. Болжанбайтын нүкте Пуассон бойынша жаңартылған орнықты нүкте болып табылады. Олар, егер Пуассон бойынша орнықты нүкте болжанбайтындық қасиетке ие болса, квазиминимальды жиынтықтық хаостық қасиетке ие болатындығын дәлелдеді. Осылайша, динамикалық жүйеде хаостың бар болуы тек бір нүктенің, яғни болжанбайтын нүктенің болуымен анықталады. Болжанбайтын нүктелерді А. Миллер[7], Р. Такур және Р. Дас[8], топологиялық кеңістіктерде Пуанкаре хаосы, Руэль-Такенстің хаосы және Аусландер-Йорк хаосын қарастыру барысында қолданды. Болжанбайтын функциялар Бебутовтың динамикалық жүйесіндегі болжанбайтын нүктелер ретінде анықталды, айырмашылығы тек метрикалық кеңістіктің орнына нақты осьтің компактылы жиындарындағы жинақтылық топологиясы қолданылады. Мұндай жинақтылықты қолдану дифференциалдық теңдеулер үшін болжанбайтын шешімдердің бар болуын дәлелдеуді едәуір жеңілдетеді және зерттеу барысында динамикалық жүйелер немесе хаос теориясындағы бастапқы нәтижелерді қолданбай-ақ, толықтай

7 Miller A. Unpredictable points and stronger versions of Ruelle–Takens and Auslander–Yorke chaos // Topology and its Applications. – 2019. - № 253. – P. 7–16.

8 Thakur R., Das R. Strongly Ruelle–Takens, strongly Auslander–Yorke and Poincaré chaos on semiflows // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2020. - № 81:105018.

дифференциалдық теңдеулер теориясы саласымен шектелуге мүмкіндік береді.

Ғылыми жаңалығы. Диссертациялық жұмыстың ғылыми жаңалығы:

а) сызықтық және квазисызықтық дифференциалдық теңдеулердің асимптотикалық орнықты болжанбайтын және күшті болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы зерттелді;

б) шунттаушы тежегіші бар ұяшықтық нейрондық желілер және инерциялық нейрондық желілер сияқты нейрондық желілердегі асимптотикалық орнықты, болжанбайтын және күшті болжанбайтын тербелістердің бар болуы дәлелденді;

г) теориялық нәтижелердің орындалатындығын растайтын сандық мысалдар мен графикалық нәтижелер келтірілді.

Диссертацияны қорғауға ұсынылған нәтижелер:

- сызықтық дифференциалдық теңдеулердің бірқалыпты асимптотикалық орнықты болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема;

- квазисызықтық дифференциалдық теңдеулердің бірқалыпты экспоненциалды орнықты болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема;

- ШТЖНЖ-дің бірқалыпты экспоненциалды орнықты болжанбайтын шешімдерінің бар болуы туралы теорема;

- ШТЖНЖ-дің бірқалыпты асимптотикалық орнықты күшті болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема;

- ИНЖ-дің бірқалыпты асимптотикалық орнықты болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема;

- болжанбайтын функцияларды құру тәсілдері.

Зерттеу әдістері. Диссертацияда функционалдық анализ, алгебра және дифференциалдық теңдеулер теориясының әдістері мен нәтижелері кеңінен қолданылады.

Зерттеудің теориялық және тәжірибелік маңыздылығы. Зерттеудің ғылыми маңыздылығы алынған нәтижелер әртүрлі дифференциалдық теңдеулердегі, атап айтқанда, импульсті дифференциалдық теңдеулердегі, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердегі болжанбайтын тербелістерді зерттеуге негіз болады. Болжанбайтын тербелістерді бақылау оларды медицина, биология, криптография және басқа да көптеген салаларда қолдануға мүмкіндік береді.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 11 жарияланым, оның ішінде 5 мақала Scopus халықаралық деректер базасында индекстелетін ғылыми журналдарда, 2 мақала ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған басылымдарда, қалғандары халықаралық конференция материалдарында, оның ішінде 1 мақала Scopus деректер базасында индекстелетін шетелдік конференция материалдарында жарияланды.

Жұмыстың қысқаша мазмұны

Бірінші бөлім сызықтық және квазисызықтық дифференциалдық теңдеулердің болжанбайтын шешімдеріне арналған.

Бірінші бөлімшеде болжанбайтын функциялардың негізгі анықтамалары берілген.

Анықтама 1. *Бірқалыпты үзіліссіз және шектелген* $\vartheta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ *функциясы, шектелген нақты интервалдарда бірқалыпты* $\vartheta(t + t_n) \to \vartheta(t)$, $n \to \infty$ *болса және әрбір* $t \in [u_n - \delta, u_n + \delta]$ *үшін* $||\vartheta(t + t_n) - \vartheta(t)|| \geq \varepsilon_0$ *теңсіздігі орындалатындай оң* ε_0, δ *сандары мен шексіздікке ұмтылатын* $t_n, u_n, n \in \mathbb{N}$, *сандық тізбектері бар болса, онда ол болжанбайтын функция деп аталады.*

$\vartheta(t + t_n)$ функциясының жинақтылығы *болжанбайтын функцияның Пуассон бойынша орнықтылығы* немесе жай ғана *Пуассон бойынша орнықтылық* деп аталады, ал ε_0, δ сандары мен u_n тізбегінің бар болуы *болжанбайтындық қасиетті* анықтайды.

1-ші анықтама көрініп тұрғандай, функцияның кейбір координаталары болжанбайтын скаляр функция болмауы мүмкін. Қолданбалы есептер үшін әрбір координатасы болжанбайтын функция болатын қозғалысты ескеру маңызды, яғни *күшті болжанбайтын функция* болуы қажет. Сондықтан келесі анықтаманы енгіздік.

Анықтама 2. *Бірқалыпты үзіліссіз және шектелген* $\vartheta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p)$ *функциясы, шектелген нақты интервалдарда бірқалыпты* $\vartheta(t + t_n) \to \vartheta(t)$, $n \to \infty$ *болса және әрбір* $i = 1, \dots, p$, $t \in [u_n - \delta, u_n + \delta]$ *мен* $n \in \mathbb{N}$ *үшін* $|\vartheta_i(t + t_n) - \vartheta_i(t)| \geq \varepsilon_0$ *теңсіздігі орындалатындай оң* ε_0, δ *сандары мен шексіздікке ұмтылатын* $t_n, u_n, n \in \mathbb{N}$, *сандық тізбектері бар болса, онда ол күшті болжанбайтын функция деп аталады.*

Болжанбайтын функциялардың кейбір қасиеттері келтірілген. Болжанбайтын функцияның мысалы жасалды.

Екінші бөлімшеде келесі сызықтық дифференциалдық теңдеудің бірқалыпты асимптотикалық орнықты болжанбайтын шешімдерінің бар болуы дәлелденді:

$$x'(t) = Ax(t) + g(t), \tag{1}$$

мұндағы $x \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ меншікті мәндерінің нақты бөлігі нөлге тең болмайтын нақты сандардан құралған матрица, $g(t)$ – болжанбайтын функция.

Келесі теорема дәлелденді.

Теорема. *(1) жүйенің болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады және сонымен қатар, егер A матрицасының меншікті мәндерінің барлық нақты бөліктері теріс болса, онда болжанбайтын шешім бірқалыпты асимптотикалық орнықты болады.*

Үшінші бөлімшенің негізгі объектісі келесі квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі болып табылады:

$$x'(t) = Ax(t) + f(x(t)) + g(t), \tag{2}$$

мұндағы $x(t) \in \mathbb{R}^p$, p – бекітілген натурал сан, $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ үзіліссіз функция, $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ меншікті мәндерінің нақты бөлігі нөлге тең болмайтын нақты сандардан құралған матрица, $g(t)$ – болжанбайтын функция.

$x = By$ ауыстыруының көмегімен (2) жүйені келесі жүйеге келтіретін $p \times p$ өлшемді тұрақты B матрицасын табуға болады:

$$y'(t) = Cy(t) + F(y) + G(t), \tag{3}$$

мұндағы $C = B^{-1}AB, F(y) = B^{-1}f(By)$, және $G(t) = B^{-1}g(t)$. (3) жүйеде, C матрицасы $C_{-} : q \times q$ және $C_{+}: (p-q) \times (p-q)$ матрицаларының нақты бөліктері сәйкесінше теріс және оң болатындай (C_{-}, C_{+}) диагоналды түрге ие.

$t \geq 0$ мәнінде $||e^{C_{-}t}|| \leq Ke^{-\alpha t}$ және $t \leq 0$ мәнінде $||e^{C_{+}t}|| \leq Ke^{\alpha t}$ орындалатындай $K \geq 1$ және $\alpha > 0$ сандары бар болады.

Келесі шарттар орындалсын делік:

$(C1)$ $f(x)$ функциясы барлық $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p$ үшін, Липшиц шартын: $||f(x_1) -$
$-f(x_2)|| \leq L_f||x_1 - x_2||$ қанағаттандырады.

(C2) $\dfrac{2}{\alpha}K(||B||||B^{-1}||L_f + 1) < 1.$

(2) жүйенің болжанбайтын шешімі жөнінде келесі теорема дәлелденді.

Теорема. *Егер (C1)-(C2) шарттары орындалса, онда (2) жүйенің болжанбайтын жалғыз шешімі болады, сонымен қатар, егер A матрицасының меншікті мәндерінің барлық нақты бөліктері теріс болса, онда болжанбайтын шешім бірқалыпты экспоненциалды орнықты болады.*

Төртінші бөлімде біз 1-ші және 2-ші анықтамаларды бірнеше тәуелсіз айнымалылары бар функциялар класына кеңейттік. Келесі анықтамалар енгізілді:

Анықтама 3. *Шектелген және үзіліссіз* $f(t,x): \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$, *мұндағы* $G \subset \mathbb{R}^p$ *шектелген облыс, функциясы t бойынша бірқалыпты үзіліссіз болса және* $\mathbb{R}$*-ден алынған компактіде бірқалыпты*

$\sup_{G}\left|\left|f(t+t_n,x)-f(t,x)\right|\right| \to 0, n\to\infty$ *және* $t\in[u_n-\delta,u_n+\delta], x\in G$ және $n\in\mathbb{N}$ *болғанда* $||f(t+t_n,x)-f(t,x)||\geq\varepsilon_0$ *теңсіздігі орындалатындай оң* ε_0,δ *сандары мен шексіздікке ұмтылатын* $\{t_n\},\{u_n\}$ *сандық тізбектері бар болса, онда бұл функция t бойынша болжанбайтын функция деп аталады.*

Анықтама 4. *Шектелген және үзіліссіз* $f(t,x)\colon\mathbb{R}\times G\to\mathbb{R}^p$, $f=(f_1,f_2,\ldots,f_p)$, *мұндағы* $G\subset\mathbb{R}^p$ *шектелген облыс, функциясы t бойынша бірқалыпты үзіліссіз болса және* $\mathbb{R}$*-ден алынған компактіде бірқалыпты* $\sup_{G}||f(t+t_n,x)-f(t,x)||\to 0, n\to\infty$ *және* $t\in[u_n-\delta,u_n+\delta], x\in G$ және $n\in\mathbb{N}$ *болғанда барлық* $i=1,\ldots,p,$ *үшін* $|f_i(t+t_n,x)-f_i(t,x)|\geq\varepsilon_0$ *теңсіздігі орындалатындай оң* ε_0, δ *сандары мен шексіздікке ұмтылатын* $\{t_n\},\{u_n\}$ *сандық тізбектері бар болса, онда бұл функция t бойынша күшті болжанбайтын функция деп аталады.*

Келесі жүйе қарастырылды:

$$x'(t)=Ax(t)+f(t,x), \tag{4}$$

мұндағы $t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^p$, $A\in\mathbb{R}^{p\times p}$ – матрицасының нақты бөліктері теріс сандар, $f\colon\mathbb{R}\times G\to\mathbb{R}^p, f=(f_1,f_2,\ldots,f_p), G=\{x\in\mathbb{R}^p, ||x||<H\}, H$ – оң сан.

Барлық $t\geq 0$ үшін $||e^{At}||\leq Ke^{\gamma t}$ орындалатындай $K\geq 1$ және $\gamma<0$ сандары табылатындығы белгілі.

Келесі шарттар орындалсын делік:

(С1) 4-ші анықтамаға сәйкес $f(t,x)$ - t бойынша күшті болжанбайтын функция болады және $\sup_{\mathbb{R}\times G}||f(t,x)||=M<\infty$ орындалатындай M оң саны бар болады;

(С2) барлық $t\in\mathbb{R}, x_1,x_2\in G$ үшін $||f(t,x_1)-f(t,x_2)||\leq L||x_1-x_2||$ орындалатындай L бар болады;

(С3) $\gamma<-\frac{KM}{H}$, где $M=\sup_{\mathbb{R}\times G}||f(t,x)||<\infty$;

(С4) $\gamma<-KL$.

Келесі теорема дәлелденді:

Теорема. *(C1)-(C4) шарттары орындалғанда (4) жүйенің бірқалыпты экспоненциалды орнықты күшті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Сонымен қатар, егер $f(t,x)$ функциясы 3-ші анықтама мағынасында t бойынша болжанбайтын болса, онда (4) жүйенің бірқалыпты экспоненциалды орнықты болжанбайтын жалғыз шешімі бар екендігі дәлелденді.

Теориялық нәтижелер мысалдар мен графикалық иллюстрациялар арқылы расталды.

Екінші бөлімде нейрондық желілердегі болжанбайтын тербелістерді зерттейміз.

Бірінші бөлімшеде 1993 жылы A. Bouzerdoum және R. Pinter[10] енгізген ШТЖНЖ қарастырылған. ШТЖНЖ психофизика, робототехника, адаптивті үлгіні тану, көру және кескінді өңдеуде ерекше роль атқарады.

ШТЖНЖ моделі - бұл өңдеу ұяшықтарының екі өлшемді торы болып табылады.

C_{ij} арқылы тордың (i,j) –ші орындағы ұяшығын белгілейік.

$N_r(ij)$ арқылы C_{ij} -дің r маңайын белігілейік, ол келесі түрде анықталады:

$$N_r(ij) = \{C_{kp}: \max(|k-i|,|p-j|) \le r, 1 \le k \le m, 1 \le p \le n\}, \quad m,n \in \mathbb{N},$$

ШТЖНЖ-де көрші ұяшықтар өзара шунттаушы типті тежегіштік әсер береді. C_{ij} ұяшығының динамикасы келесі сызықтық емес қарапайым дифференциалдық теңдеумен сипатталады:

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = -a_{ij}x_{ij} - \sum_{C_{kp}\in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp} f(x_{kp}(t))x_{ij}(t) + v_{ij}(t), \qquad (5)$$

мұндағы x_{ij} - C_{ij} ұяшығының белсенділігі, a_{ij} тұрақтысы – ұяшықтың

10 A. Bouzerdoum, R Pinter. Shunting inhibitory cellular neural networks: derivation and stability analysis // IEEE Transactions on Circuits and Systems I Fundamental Theory and Applications. – 1993. - № 40. – P. 215–21.

белсенділігінің пассивті бәсеңдеу коэффициенті, $C_{ij}^{kp} \geq 0$ – C_{ij}-ші ұяшыққа C_{kp}-ші ұяшықтан берілетін постсинаптикалық белсенділігінің байланыс коэффициенті және $f(x_{kp})$ активациясы C_{kp}-ші ұяшықтың шығуын сипаттайтын оң үзіліссіз функция, $v_{ij}(t)$ - C_{ij} ұяшығына сырттан кіретін функция.

Келесі шарттар орындалатындай $u(t) = (u_{11}, \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{m1} \ldots, u_{mn})$, $t, u_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots, m, j = 1,2, \ldots, n,$ мұндағы $m, n \in \mathbb{N}$ функцияларының жиынын $\mathcal{A}$ арқылы белгілейік:

(К1) $u(t)$ функциялары бірқалыпты үзіліссіз және барлық $u(t) \in \mathcal{A}$ үшін $||u||_1 < H$ болатын H оң саны бар болады;

(К2) $u(t)$ функциясы үшін нақты сан осінің кез келген тұйық шектелген интервалында $u(t + t_p)$ функциясы $u(t)$ -ға бірқалыпты ұмтылатындай, $p \to \infty$ болғанда $t_p \to \infty$ орындалатын t_p тізбегі бар болады.

Келесі шарттар орындалсын делік:

$(C1)$ (5)- жүйедегі $v(t) = (v_{11}, \ldots, v_{1n}, \ldots, v_{m1} \ldots, v_{mn}), t, v_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots, m,$ $j = 1,2, \ldots, n,$ функциясы $\mathcal{A}$ жиынына тиісті және күшті болжанбайтын болып табылады;

$(C2)$ $\gamma = \min\limits_{(i,j)} a_{ij} > 0$ и $\bar{\gamma} = \max\limits_{(i,j)} a_{ij}$;

$(C3)$ барлық $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n,$ $t \in \mathbb{R}$ үшін $|v_{ij}(t)| \leq m_{ij}$ және $\sup\limits_{|s|<H} |f(s)| \leq m_f$ орындалатындай m_{ij} мен m_f оң сандары бар болады;

$(C4)$ барлық $s_1, s_2, |s_1| < H, |s_2| < H$ үшін $|f(s_1) - f(s_2)| \leq L|s_1 - s_2|$ теңсіздігі орындалатындай L саны бар болады;

$(C5)$ $(LH + m_f) \max\limits_{(i,j)} \sum\limits_{C_{kp} \in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp} < \gamma.$

Негізгі нәтиже келесі теоремада тұжырымдалды.

Теорема. *(С1)-(С5) шарттары орындалсын, онда (5) жүйенің асимптотикалық орнықты болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Екінші бөлімшеде күшті болжанбайтын түрткілері бар келесі ШТЖНЖ қарастыратын боламыз

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = -b_{ij}x_{ij} - \sum_{D_{kp}\in N_r(i,j)} D_{ij}^{kp} f\left(x_{kp}(t)\right) x_{ij}(t) + g_{ij}(t). \qquad (6)$$

Келесі шарттар орындалатындай $u(t) = (u_{11}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{m1} \dots, u_{mn})$, $t, u_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n,$ мұндағы $m, n \in \mathbb{N}$, функцияларының жиынын $\mathcal{B}$ арқылы белгілейік:

(K1) $u(t)$ функциялары бірқалыпты үзіліссіз;

(K2) барлық $u(t) \in \mathcal{B}$ үшін $||u||_1 < H$ болатын H оң саны бар болады;

(K3) $u(t) \in \mathcal{B}$ функциясы үшін нақты сан осінің кез келген тұйық шектелген интервалында $u(t + t_p)$ функциясы $u(t)$ -ға бірқалыпты ұмтылатындай, $p \to \infty$ болғанда $t_p \to \infty$ орындалатын t_p тізбегі бар болады.

Келесі шарттар орындалсын делік :

$(D1)$ (6)- жүйедегі $g(t) = (g_{11}, \dots, g_{1n}, \dots, g_{m1} \dots, g_{mn}), t, g_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, m,$ $j = 1,2, \dots, n,$ функциясы $\mathcal{B}$ жиынына тиісті және күшті болжанбайтын болып табылады;

$(D2)$ $\gamma \leq a_{ij} \leq \bar{\gamma}$, мұндағы $\gamma, \bar{\gamma}$ оң сандар;

$(D3)$ барлық $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n,$ мен $t \in \mathbb{R}$ үшін $|g_{ij}(t)| \leq m_{ij}$;

$(D4)$ $|s| < H$ және қандайда бір тұрақты $m_f > 0$ үшін $|f(s)| \leq m_f$;

$(D5)$ барлық $s_1, s_2, |s_1| < H, |s_2| < H$ үшін $|f(s_1) - f(s_2)| \leq L|s_1 - s_2|$ теңсіздігі орындалатындай L Липшиц тұрақтысы бар болады;

$(D6)$ $m_f \sum_{C_{kp}\in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp} < a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n;$

$(D7)$ $\dfrac{m_{ij}}{a_{ij} - m_f \sum_{C_{kp}\in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp}} < H, \qquad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n;$

$$(D8)\ (LH+m_f)\max_{(i,j)}\sum_{C_{kp}\in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp}<\gamma.$$

Келесі теорема дәлелденді.

Теорема. *(D1)-(D8) шарттары орындалсын, онда (6) жүйенің асимптотикалық орнықты болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Үшінші бөлімшеде келесі ИНЖ қарастырылды:

$$\frac{d^2x_i(t)}{dt^2}=-a_i\frac{dx_i(t)}{dt}-b_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{p}c_{ij}f_j(x_j(t))+v_i(t), \tag{7}$$

мұндағы $t, x_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\dots,p,\ \ p$ – желідегі нейрондар саны; $x_i(t),\ i=1,\dots,p,$ t уақыт мезетіндегі i-ші нейронның орнын сипаттайды; екінші ретті туынды i-ші нейронның инерциясы деп аталады; $b_i>0, a_i>0$ тұрақтылар; $f_i,\ i=1,\dots,p,$ i-ші нейронның кіріс потенциалдарының белсендіру өлшемдерін білдіреді; c_{ij}- j-ші нейронының i-ші нейронымен синаптикалық байланысының салмағын білдіретін тұрақтылар; $v_i(t)$ - t уақыт мезетіндегі i-ші нейронның сыртқы кірістері.

c_{ij} нақты сандар болсын, ал $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - үзіліссіз және Липшиц шартын қанағаттандырсын деп алайық:

(I1) $|f_i(x_1)-f_i(x_2)|\le L_i|x_1-x_2|$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, мұндағы $L_i>0$ және $\max\limits_{1\le i\le p} L_i=L.$

Келесі ауыстырудың көмегімен

$$y_i(t)=\xi_i\frac{dx_i(t)}{dt}+\zeta_ix_i(t), i=1,\dots,p, \tag{8}$$

(7) жүйе мына түрге келеді :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{\zeta_i}{\xi_i} x_i(t) + \frac{1}{\xi_i} y_i(t), \tag{9}$$

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -\left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) y_i(t) - \left(\xi_i b_i - \zeta_i \left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right)\right) x_i(t) +$$

$$+\xi_i \sum_{j=1}^{p} c_{ij} f_j(x_j(t)) + \xi_i v_i(t), \tag{10}$$

$\varphi(t) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2p})$ функцияларының жиынын Σ арқылы белгілейік және бұл жиын үшін келесі шарттар орындалсын:

(K1) $\varphi(t)$ функцялары бірқалыпты үзіліссіз;

(K2) барлық $\varphi(t) \in \Sigma$ үшін $||\varphi||_1 < H$ болатын H оң саны бар болады;

(K3) нақты сан осінің кез келген тұйық шектелген интервалында $\varphi(t + t_n)$ функциясы $\varphi(t)$-ға бірқалыпты ұмтылатындай, $n \to \infty$ болғанда $t_n \to \infty$ орындалатын t_n тізбегі бар болады.

Келесі шарттар орындалсын делік:

(I2) (7)-жүйедегі $v_i(t), i = 1, \dots, p,$ - болжанбайтын функциялар;

(I3) $|f_i(s)| \le M_f,\ i = 1, \dots, p, |s| < H$ орындалатындай $M_f > 0,$ саны бар болады;

Сонымен қатар, ζ_i және $\xi_i,\ i = 1, \dots, p$ оң нақты сандары үшін келесі теңдіктер орындалсын делік:

(I4) $a_i > \frac{\zeta_i}{\xi_i} + \xi_i, \zeta_i > \xi_i > 1;$

(I5) $(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}) - (|\zeta_i \left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) - \xi_i b_i| + \xi_i) > 0;$

(I6) $$\frac{\xi_i M_f \sum_{j=1}^{p} c_{ij}}{(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}) - (|\zeta_i \left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) - \xi_i b_i| + \xi_i)} < H;$$

(I7) $\frac{1}{(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i})}(|\zeta_i\left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) - \xi_i b_i| + L\xi_i \sum_{j=1}^{p} c_{ij}) < 1;$

(I8) $\max_i(\frac{1}{\xi_i}, |\zeta_i\left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) - \xi_i b_i| + L\xi_i \sum_{j=1}^{p} c_{ij}) < \min_i(\frac{\zeta_i}{\xi_i}, a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}).$

Мына негізгі теорема дәлелденді.

Теорема. *(*I1*)-(*I8*) шарттары орындалсын, онда (7) жүйенің асимптотикалық орнықты болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Нейрондық желілердің болжанбайтын тербелістері үшін алынған теориялық нәтижелерді растайтын графиктері бар иллюстрациялық мысалдар келтірілген.

Сонымен, диссертациялық жұмыста дифференциалдық теңдеулер мен нейрондық желілердің болжанбайтын тербелістерін зерттеу кезінде келесі нәтижелер алынды:

- болжанбайтын фунцияларды құру жолдары жасалды;
- сызықтық дифференциалдық теңдеулердің бірқалыпты асимптотикалық орнықты болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;
- квазисызықтық дифференциалдық теңдеулердің бірқалыпты экспоненциалды орнықты болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;
- ШТЖНЖ-дің бірқалыпты асимптотикалық орнықты болжанбайтын және күшті болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;
- ИНЖ-дің бірқалыпты асимптотикалық орнықты болжанбайтын шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді.

Диссертациялық жұмыс Қазақстан Республикасы Білім және ғылым Министрлігінің жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулер бойынша "Үзіліссіз/дискретті уақытты және сингулярлы ауытқымалы клеткалы нейронды желілер" атты гранттық зерттеу жобасы аясында орындалды (№ AP 05132573, 2018-2020).