ЖАМАНШИН АКЫЛБЕК УРАЛОВИЧ

Непредсказуемые колебания в дифференциальных уравнениях и нейронных сетях

Аннотация диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 – Математика

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов (первый раздел состоит из 4-х подразделов, второй раздел из 3-х подразделов), заключения и списка использованных источников.

Количество иллюстраций, таблиц и литературных источников. В работе использованы 112 источников и 15 иллюстраций.

Ключевые слова. Колебания, непредсказуемая функция, сильно непредсказуемая функция, линейные дифференциальные уравнения, квазилинейные дифференциальные уравнения, нейронные сети, клеточные нейронные сети с шунтирующим торможением, инерционные нейронные сети, асимптотическая устойчивость.

Актуальность темы обусловлена многочисленными применениями дифференциальных уравнений при решении задач естествознания и широким использованием нейронных сетей в современном мире. Диссертация основана на концепции непредсказуемой функции, которая была введена М. Ахметом и М.О. Фен[1-4]. Мы доказали существование непредсказуемых решений

---

1 Akhmet M., Fen M.O. Unpredictable points and chaos // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2016. - № 40. – P. 1-5.
2 Akhmet M., Fen M.O. Existence of unpredictable solutions and chaos // Turkish Journal of Mathematics. – 2017. -vol. 41. - №. 2.- P. 254–256.
3 Akhmet M., Fen M.O. Poincare chaos and unpredictable functions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2017. – № 48. - P. 85-94.
4 Akhmet M., Fen M. Non-autonomous equations with unpredictable solutions // Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2018. – №59. – P. 657-670.

дифференциальных уравнений и рассмотрели задачу существования непредсказуемых колебаний в нейронных сетям.

Основные результаты диссертации опубликованы в международных рецензируемых журналах, что также подтверждает актуальность исследования.

Исследования диссертации. Диссертация посвящена исследованию непредсказуемых решений дифференциальных уравнений и непредсказуемых колебаний нейронных сетей.

Предварительные сведения. Колебания - неотъемлемый атрибут различных процессов, происходящих в природе. Исключительное теоретическое и практическое значение имеют колебательные движения, описываемые дифференциальными уравнениями. В литературе было получено большое количество результатов для периодических, квазипериодических и почти периодических решений дифференциальных уравнений благодаря установленным математическим методам и важным приложениям. С другой стороны, рекуррентные и устойчивые по Пуассону решения также имеют решающее значение для теории дифференциальных уравнений.

Основоположниками теории нелинейных колебаний являются А.Пуанкаре[5-6] и А.М. Ляпунов[7], создавшие математический аппарат, пригодный для исследования нелинейных систем. Теория нелинейной динамики в основном занимается периодическими движениями. Первыми функциями, которые до сих пор можно считать «периодическими» и достаточно определенными для строгого математического анализа, были квазипериодические функции, введенные и исследованные независимо П. Болем и Э. Эсклангоном. Фундаментальные работы Г. Бора содержали теорию почти периодических функций, которые сегодня мы

---

4 Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, - Paris: Gauthier-Villars, 1892. - Vol. 1,2.
5 Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. - Paris, 1899. - vol. III; reprint (Dover, New York, 1957).
6 Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion (In Russian). - Doctoral dissertation, University Kharkov, 1892, English translations: Stability of Motion. - New-York & London: Academic Press, 1966.

называем почти периодическими функциями Бора. Затем разные подходы к почти периодичности были найдены Н.Н. Боголюбовым, А. Безиковичем, С. Бохнером, В.В. Степановым и другими. Почти периодические функции имеют большое значение для развития гармонического анализа на группах, рядов Фурье и интегралов на группах. В статье, опубликованной С. Бохнером, дается расширение теории почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве. Первая статья о существовании почти периодических решений была написана Г. Бором и О. Нойгебауэром, и в настоящее время теория почти периодических уравнений развивается в связи с проблемами дифференциальных уравнений, теории устойчивости и динамических систем. Список приложений теории существенно расширен и включает не только обыкновенные дифференциальные уравнения и классические динамические системы, но и широкие классы дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений в банаховых пространствах. Понятия рекуррентных движений и устойчивых по Пуассону точек являются классическими понятиями, центральными в качественной теории движений динамических систем. Устойчивые по Пуассону точки рассматривались А. Пуанкаре как главный элемент в описании сложности в небесной динамике.

Основы исследования нелинейных колебаний в Казахстане, были заложены В.Х. Харасахалом и О.А. Жаутыковым. Д.У. Умбетжанов и его коллеги интенсивно исследовали почти периодические и многопериодические решения для дифференциальных и эволюционных систем. В настоящее время казахстанские математики продолжают вносить значительный вклад в анализ колебаний.

В последние десятилетия исследователи сосредоточились на изучении колебаний в нейронных сетях. Существует множество моделей нейронных сетей, которые математически описываются рекуррентными и дифференциальными уравнениями. Например, исследуются нейронные сети типа Хопфилда, клеточные нейронные сети с шунтирующим торможением (КНСШТ), нейронные сети Коэна-Гроссберга, инерционные нейронные сети (ИНС).

Колебательные нейронные сети эффективны для распознавания изображений и активации состояний сети, связанных с вызовом памяти. Естественно, что нейронные колебания стали ядром междисциплинарных исследований, объединяющих нейробиологию, психофизику, биофизику, когнитивную психологию и компьютерное моделирование.

Вот почему многие исследователи изучают периодичность, почти периодичность и экспоненциальную устойчивость нейронных сетей с учетом механизмов входа-выхода.

В последнее время большой интерес вызывает изучение хаотических колебаний в нейронных сетях. Решения хаотических систем нерегулярны, и это отражается в данных, связанных с экспериментами и наблюдениями.

Несколько лет назад М. Ахмет и М.О. Фен ввели понятия непредсказуемых точек и непредсказуемых функций, и тем самым значительно расширили границы классической теории динамических систем, основанной А. Пуанкаре и Дж. Биркгофом. Непредсказуемая точка является модернизированной устойчивой по Пуассону точкой. Они доказали, что квазиминимальное множество является хаотическим, если устойчивая по Пуассону точка допускает свойство непредсказуемости. Таким образом, наличие хаоса в динамической системе определяется присутствием только одной точки - непредсказуемой. Непредсказуемые точки использовались А. Миллером[8], Р. Такуром и Р. Дасом[9] в топологических пространствах, где они рассматривали хаос Пуанкаре, хаос Рюэля-Такенса и хаос Ауслендера-Йорка. Непредсказуемые функции были определены как непредсказуемые точки в динамической системе Бебутова с той лишь разницей, что вместо метрического пространства используется топология сходимости на компактных множествах вещественной оси. Использование такой сходимости

8 Miller A. Unpredictable points and stronger versions of Ruelle–Takens and Auslander–Yorke chaos // Topology and its Applications. – 2019. - № 253. – P. 7–16.
9 Thakur R., Das R. Strongly Ruelle–Takens, strongly Auslander–Yorke and Poincaré chaos on semiflows // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2020. - № 81:105018.

позволяет значительно упростить задачу доказательства существования непредсказуемых решений для дифференциальных уравнений. И можно полностью оставаться в области теории дифференциальных уравнений, не упоминая исходные или родственные результаты в теории динамических систем или хаоса.

Научная новизна диссертационной работы заключаются в следующем:

а) исследовано существование и единственность асимптотически устойчивых непредсказуемых и сильно непредсказуемых решений линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений;

б) доказано существование асимптотически устойчивых непредсказуемых и сильно непредсказуемых решений в нейронных сетей, таких как клеточные нейронные сети с шунтирующим торможением и инерционные нейронные сети;

г) приведены численные примеры и графические результаты, подтверждающие выполнимость теоретических результатов.

Результаты выдвигаемые на защиту диссертации:

- теорема о существовании и единственности равномерно асимптотически устойчивых непредсказуемых решений линейных дифференциальных уравнений;

- теорема о существовании и единственности равномерно экспоненциально устойчивых непредсказуемых решений квазилинейных дифференциальных уравнений;

- теорема о существовании равномерно экспоненциально устойчивых непредсказуемых решений КНСШТ;

- теорема о существовании и единственности асимптотически устойчивых сильно непредсказуемых решений КНСШТ;

- теорема о существовании и единственности асимптотически устойчивых непредсказуемых решений ИНС;

- способы построения непредсказуемых функций.

Методы исследования. В диссертации широко используются методы и результаты теории функционального анализа, алгебры и дифференциальных уравнений**.**

Теоретическая и практическая значимость результатов. Научная значимость исследования заключается в том, что полученные результаты станут основой для изучения непредсказуемых колебаний в различных дифференциальных уравнениях, в том числе импульсных дифференциальных уравнениях, уравнениях в частных производных. Контроль непредсказуемых колебаний позволит использовать их в медицине, биологии, криптографии и многих других областях.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 публикаций, из них 5 статей в рейтинговых научных журналах, индексируемых в базе данных Scopus, 2 статьи в изданиях, рекомендованных КОКСОН МОН РК, остальные в материалах международных конференций, в том числе 1 публикация в материалах зарубежной конференции индексируемой в базе данных Scopus.

Краткое содержание работы

Первый раздел посвящен непредсказуемым решениям линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений.

В первом подразделе представлены основные определения непредсказуемых функций.

Определение 1. *Равномерно непрерывная и ограниченная функция* $\vartheta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ *непредсказуема, если существуют положительные числа* ε_0, δ *и последовательности чисел* $t_n, u_n, n \in \mathbb{N}$, *которые стремятся к бесконечности, такие что* $\vartheta(t+t_n) \to \vartheta(t)$ *при* $n \to \infty$ *равномерно на ограниченных вещественных интервалах и* $||\vartheta(t+t_n) - \vartheta(t)|| \geq \varepsilon_0$ *для каждого* $t \in [u_n - \delta, u_n + \delta]$.

Сходимость $\vartheta(t+t_n)$ называется *устойчивостью по Пуассону непредсказуемой функции* или просто *устойчивостью по Пуассону*, а существование чисел ε_0, δ и последовательности u_n называем *свойством непредсказуемости.*

Из определения 1 следует, что некоторые координаты могут не быть непредсказуемыми скалярными функциями. Но для приложений очень важно учитывать движения, которые непредсказуемы во всех измерениях, то есть *сильно непредсказуемые функции*. Поэтому мы ввели следующее определение:

Определение 2. *Равномерно непрерывная и ограниченная функция* $\vartheta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_p)$, *сильно непредсказуемая, если существуют положительные числа* ε_0, δ *и последовательности чисел* $t_n, u_n, n \in \mathbb{N}$, *которые стремятся к бесконечности, такие что* $\vartheta(t+t_n) \to \vartheta(t)$ *при* $n \to \infty$ *равномерно на ограниченных вещественных интервалах и* $|\vartheta_i(t+t_n) - \vartheta_i(t)| \geq \varepsilon_0$ *для каждого* $i = 1, \ldots, p, t \in [u_n - \delta, u_n + \delta]$ *и* $n \in \mathbb{N}.x$

Приведены некоторые свойства непредсказуемых функций. Построен пример непредсказуемой функции.

Во втором подразделе доказано существование равномерно асимптотически устойчивого непредсказуемого решения линейных дифференциальных уравнений:

$$x'(t) = Ax(t) + g(t), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^p$, вещественная матрица $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, такая что действительные части ее собственных значений не равны нулю, $g(t)$ – непредсказуемая функция.

Доказана следующая теорема:

Теорема. *Система (1) имеет единственное непредсказуемое решение, и кроме того, если все действительные части собственных значений матрицы* A *отрицательные, тогда непредсказуемое решение равномерно асимптотически устойчиво.*

Основным объектом *третьего подраздела* является система квазилинейных дифференциальных уравнений**:**

$$x'(t) = Ax(t) + f(x(t)) + g(t), \qquad (2)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^p$, p фиксированное натуральное число, $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ непрерывная функция, вещественная матрица $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, такая что действительные части ее собственных значений не равны нулю, $g(t)$ – непредсказуемая функция.

Можно найти регулярную матрицу B размерности $p \times p$ такую что замена $x = By$ приводит систему (2) к следующей системе:

$$y'(t) = Cy(t) + F(y) + G(t), \qquad (3)$$

где $C = B^{-1}AB, F(y) = B^{-1}f(By)$, и $G(t) = B^{-1}g(t)$. В системе (3), матрица C имеет диагональный вид $(C_{\_}, C_{+})$, где собственные значения матриц $C_{\_} : q \times q$ и $C_{+}: (p-q) \times (p-q)$ имеют отрицательные и положительные действительные части соответственно.

Как известно, существуют числа $K \geq 1$ и $\alpha > 0$ такие что $||e^{C_{\_}t}|| \leq Ke^{-\alpha t}$ при $t \geq 0$ и $||e^{C+t}|| \leq Ke^{\alpha t}$ при $t \leq 0$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

$(C1)$ Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица: $\big||f(x_1) - f(x_2)|\big| \leq$ $\leq L_f||x_1 - x_2||$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p$.

(C2) $\dfrac{2}{\alpha}K(||B||||B^{-1}||L_f + 1) < 1$.

Доказана следующая теорема о непредсказуемом решении системы (2).

Теорема. *Если выполнены условия (*C1*) -(*C2*), то система (2) имеет единственное непредсказуемое решение, и кроме того, если все действительные части* *собственных значений матрицы A отрицательные, тогда непредсказуемое решение равномерно экспоненциально устойчиво.*

В четвертом подразделе мы расширили Определения 1 и 2 на класс функций с несколькими независимыми переменными. Были введены следующие определения:

Определение 3. *Непрерывная и ограниченная функция $f(t,x)\colon \mathbb{R}\times G\to\mathbb{R}^p$, $f=(f_1,f_2,\dots,f_p)$, где $G\subset\mathbb{R}^p$ ограниченная область, называется непредсказуемой по t, если она равномерно непрерывна по t и существуют положительные числа ε_0,δ и последовательности чисел $\{t_n\},\{u_n\}$, которые стремятся к бесконечности, такие что $\sup\limits_G ||f(t+t_n,x)-f(t,x)||\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно на компактах из $\mathbb{R}$ и $||f(t+t_n,x)-f(t,x)||\geq\varepsilon_0$ при $t\in[u_n-\delta,u_n+\delta], x\in G$* и $n\in\mathbb{N}$.

Определение 4. *Непрерывная и ограниченная функция $f(t,x)\colon \mathbb{R}\times G\to\mathbb{R}^p$, $f=(f_1,f_2,\dots,f_p)$,* где $G\subset\mathbb{R}^p$ *ограниченная область, называется сильно непредсказуемой по t, если она равномерно непрерывна по t и существуют положительные числа ε_0,δ и последовательности чисел $\{t_n\},\{u_n\}$, которые стремятся к бесконечности, такие что $\sup\limits_G ||f(t+t_n,x)-f(t,x)||\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно на компактах из $\mathbb{R}$ и $|f_i(t+t_n,x)-f_i(t,x)|\geq\varepsilon_0$ для всех $i=1,\dots,p, t\in[u_n-\delta,u_n+\delta], x\in G$* и $n\in\mathbb{N}$.

Рассмотрена система:

$$x'(t)=Ax(t)+f(t,x), \tag{4}$$

где $t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^p$, действительные части матрицы $A\in\mathbb{R}^{p\times p}$ - отрицательные, $f\colon\mathbb{R}\times G\to\mathbb{R}^p, f=(f_1,f_2,\dots,f_p)$, $G=\{x\in\mathbb{R}^p, ||x||<H\}$, H - положительное число.

Известно, что найдутся числа $K\geq 1$ и $\gamma<0$ такие, что $||e^{At}||\leq Ke^{\gamma t}$ для всех $t\geq 0$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(C1) функция $f(t,x)$ сильно непредсказуемая по t согласно Определению 4 и существует положительное число M, такое что $\sup\limits_{\mathbb{R}\times G}||f(t,x)|| = M < \infty$;

(C2) существует положительное число L такое что

$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \le L||x_1 - x_2||$ для всех $t \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in G$;

(C3) $\gamma < -\frac{KM}{H}$, где $M = \sup\limits_{\mathbb{R}\times G}||f(t,x)|| < \infty$;

(C4) $\gamma < -KL$.

Доказана следующая теорема:

Теорема. *При условиях (C1) -(C4) система (4) имеет единственное равномерно экспоненциально устойчивое сильно непредсказуемое решение.*

Кроме того, доказано, что если функция $f(t,x)$ непредсказуемая по t в смысле определения 3, то система (4) имеет единственное равномерно экспоненциально устойчивое непредсказуемое решение.

Теоретические результаты подтверждены примерами и графическими иллюстрациями.

В втором разделе мы исследуем непредсказуемые колебания в нейронных сетях.

В первом подразделе рассмотрены КНСШТ, которые были введены A. Bouzerdoum и R. Pinter[10] в 1993 году. КНСШТ играют исключительную роль в психофизике, робототехнике, адаптивном распознавании образов, зрении и обработке изображений. Модель КНСШТ — это двумерная сетка ячеек обработки.

Пусть C_{ij} обозначает ячейку решетки в положении (i,j).

Обозначим через $N_r(ij)$ – r окрестность с C_{ij}, такую что

10 A. Bouzerdoum, R Pinter. Shunting inhibitory cellular neural networks: derivation and stability analysis // IEEE Transactions on Circuits and Systems I Fundamental Theory and Applications. – 1993. - № 40. – P. 215–21.

$$N_r(ij) = \{C_{kp}: \max(|k-i|, |p-j|) \le r, 1 \le k \le m, 1 \le p \le n\}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

В КНСШТ соседние клетки оказывают взаимные тормозные воздействия шунтирующего типа. Динамика ячейки C_{ij} описывается следующим нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = -a_{ij}x_{ij} - \sum_{C_{kp} \in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp} f(x_{kp}(t))x_{ij}(t) + v_{ij}(t), \qquad (5)$$

где x_{ij}- активность ячейки C_{ij}, константа a_{ij} – коэффициент пассивного затухания активности ячейки, $C_{ij}^{kp} \ge 0$- коэффициент связи постсинаптической активности ячейки C_{kp}, передаваемой в ячейку C_{ij}, и активация $f(x_{kp})$ является положительной непрерывной функцией, представляющей выход ячейки C_{kp}, $v_{ij}(t)$ является внешним входом в ячейку C_{ij}.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество функций $u(t) = (u_{11}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{m1} \dots, u_{mn})$, $t, u_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n$, где $m, n \in \mathbb{N}$, таких что:

(K1) функции $u(t)$ равномерно непрерывны и существует положительное число H такое, что $||u||_1 < H$ для всех $u(t) \in \mathcal{A}$;

(K2) существует последовательность $t_p, t_p \to \infty$ при $p \to \infty$ такая, что для функции $u(t) \in \mathcal{A}$: $u(t + t_p)$ равномерно стремится к $u(t)$ на любом замкнутом ограниченном интервале действительной оси.

Пусть выполняются следующие условия:

$(C1)$ функция $v(t) = (v_{11}, \dots, v_{1n}, \dots, v_{m1} \dots, v_{mn}), t, v_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, m,$ $j = 1,2, \dots, n,$ в системе (5) принадлежит множеству $\mathcal{A}$ и является сильно непредсказуемой.

$(C2)\ \gamma = \min\limits_{(i,J)} a_{ij} > 0$ и $\bar{\gamma} = \max\limits_{(i,j)} a_{ij}$;

$(C3)$ существуют положительные числа m_{ij} и m_f, такие что $|v_{ij}(t)| \le m_{ij}$, для всех $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, $t \in \mathbb{R}$ и $\sup\limits_{|s|<H} |f(s)| \le m_f$;

$(C4)$ существует число L такое, что $|f(s_1) - f(s_2)| \le L|s_1 - s_2|$ для всех $s_1, s_2, |s_1| < H, |s_2| < H$;

$(C5)\ (LH + m_f) \max\limits_{(i,j)} \sum\limits_{C_{kp} \in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp} < \gamma.$

Основной результат заключается в следующей теореме.

Теорема. *Предположим, что выполнены условия* $(C1) - (C5)$*, тогда система (5) имеет единственное асимптотически устойчивое непредсказуемое решение.*

Во втором подразделе мы рассматриваем следующую КНСШТ

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = -b_{ij}x_{ij} - \sum_{D_{kp} \in N_r(i,j)} D_{ij}^{kp} f(x_{kp}(t)) x_{ij}(t) + g_{ij}(t), \qquad (6)$$

с сильно непредсказуемыми возмущениями.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество функций $u(t) = (u_{11}, \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{m1} \ldots, u_{mn})$, $t, u_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots, m, j = 1,2, \ldots, n$, где $m, n \in \mathbb{N}$, таких что:

(K1) функции $u(t)$ равномерно непрерывны;

(K2) существует положительное число H такое что $||u||_1 < H$ для всех $u(t) \in \mathcal{B}$;

(K3) существует последовательность $t_p, t_p \to \infty$ при $p \to \infty$ такая, что для функции $u(t) \in \mathcal{B}$: $u(t + t_p)$ равномерно стремится к $u(t)$ на любом замкнутом ограниченном интервале действительной оси.

Предположим, что выполняются следующие условия:

$(D1)$ функция $g(t) = (g_{11}, \dots, g_{1n}, \dots, g_{m1} \dots, g_{mn}), t, g_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, m,$ $j = 1,2, \dots, n,$ в системе (6) принадлежит множеству $\mathcal{B}$ и является сильно непредсказуемой;

$(D2)$ $\gamma \leq a_{ij} \leq \bar{\gamma}$, где $\gamma, \bar{\gamma}$ положительные числа;

$(D3)$ $|g_{ij}(t)| \leq m_{ij}$, для всех $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n,$ и $t \in \mathbb{R}$;

$(D4)$ $|f(s)| \leq m_f$, для $|s| < H$ и некоторой константы $m_f > 0$;

$(D5)$ существует постоянная Липшица L, такая что $|f(s_1) - f(s_2)| \leq L|s_1 - s_2|$ для всех $s_1, s_2, |s_1| < H, |s_2| < H$;

$$(D6)\ m_f \sum_{C_{kp} \in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp} < a_{ij}, \text{для всех } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n;$$

$$(D7)\ \frac{m_{ij}}{a_{ij} - m_f \sum_{C_{kp} \in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp}} < H, \qquad \text{для всех } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n;$$

$$(D8)\ (LH + m_f) \max_{(i,j)} \sum_{C_{kp} \in N_r(i,j)} C_{ij}^{kp} < \gamma.$$

Доказана следующая теорема:

Теорема. *Предположим, что выполнены условия (D1) - (D8), тогда система (6) имеет единственное асимптотически устойчивое сильно непредсказуемое решение.*

В третьем подразделе рассматривается следующая ИНС:

$$\frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = -a_i \frac{dx_i(t)}{dt} - b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{p} c_{ij} f_j(x_j(t)) + v_i(t), \tag{7}$$

где $t, x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\dots,p, p$ – количество нейронов в сети; $x_i(t)$, $i = 1,2,\dots,p$, описывает положение i-го нейрона в момент времени t; вторая производная называется инерцией i-го нейрона; $b_i > 0, a_i > 0$ константы; f_i, $i = 1,2,\dots,p$, обозначают меры активации входящих потенциалов i-го нейрона; c_{ij} являются константами, которые обозначают вес синаптической связи нейрона j на нейрон i; $v_i(t)$ - внешние входы i-го нейрона в момент времени t.

Мы полагаем, что c_{ij} вещественные числа, а функция активации $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывны и удовлетворяют условию Липшица:

(I1) $|f_i(x_1) - f_i(x_2)| \le L_i|x_1 - x_2|$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, где $L_i > 0$ и $\max\limits_{1\le i\le p} L_i = L$.

С помощью замены

$$y_i(t) = \xi_i \frac{dx_i(t)}{dt} + \zeta_i x_i(t), i = 1, \dots, p, \tag{8}$$

система (7) сводится к следующему виду:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{\zeta_i}{\xi_i} x_i(t) + \frac{1}{\xi_i} y_i(t), \tag{9}$$

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -\left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) y_i(t) - \left(\xi_i b_i - \zeta_i \left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right)\right) x_i(t) +$$

$$+\xi_i \sum_{j=1}^{p} c_{ij} f_j(x_j(t)) + \xi_i v_i(t), \tag{10}$$

Обозначим через Σ множество вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2p})$, таких что:

(K1) функции $\varphi(t)$ равномерно непрерывны;

(K2) существует положительное число H такое что $||\varphi||_1 < H$ для всех $\varphi(t) \in \Sigma$;

(K3) существует последовательность $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая что $\varphi(t+t_n)$ равномерно стремится к $\varphi(t)$ на любом ограниченном интервале действительной оси.

Пусть выполнены следующие условия:

(I2) функции $v_i(t), i = 1, \ldots, p$, в системе (7) - непредсказуемые;

(I3) существует число $M_f > 0$, такое что $|f_i(s)| \leq M_f,\ i = 1, \ldots, p, |s| < H$.

Кроме того, мы предполагаем, что для положительных вещественных чисел ζ_i и $\xi_i,\ i = 1, \ldots, p$ справедливы следующие неравенства:

(I4) $a_i > \frac{\zeta_i}{\xi_i} + \xi_i, \zeta_i > \xi_i > 1;$

(I5) $(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}) - (|\zeta_i\left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) - \xi_i b_i| + \xi_i) > 0;$

(I6) $\dfrac{\xi_i M_f \sum_{j=1}^{p} c_{ij}}{(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}) - (|\zeta_i\left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) - \xi_i b_i| + \xi_i)} < H;$

(I7) $\dfrac{1}{(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i})}(|\zeta_i\left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) - \xi_i b_i| + L\xi_i \sum_{j=1}^{p} c_{ij}) < 1;$

(I8) $\max_i(\frac{1}{\xi_i}, |\zeta_i\left(a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}\right) - \xi_i b_i| + L\xi_i \sum_{j=1}^{p} c_{ij}) < \min_i(\frac{\zeta_i}{\xi_i}, a_i - \frac{\zeta_i}{\xi_i}).$

Доказана основная теорема:

Теорема. *При условиях (*I1*) -(*I8*) система (7) имеет единственное асимптотически устойчивое непредсказуемое решение.*

Приведены иллюстративные примеры с графиками, подтверждающие полученные теоретические результаты для непредсказуемых колебаний нейронных сетей.

Таким образом, в диссертационной работе, при исследовании непредсказуемых колебаний дифференциальных уравнений и нейронных сетей были получены следующие результаты:

- доказано существование и единственность равномерно асимптотически устойчивого непредсказуемого решения линейных дифференциальных уравнений;
- доказано существование и единственность равномерно экспоненциально устойчивого непредсказуемого решения квазилинейных дифференциальных уравнений;
- доказано существование и единственность асимптотически устойчивого непредсказуемого и сильно непредсказуемого решения КНСШТ;
- доказано существование и единственность асимптотически устойчивого непредсказуемого решения ИНС;
- созданы способы построения непредсказуемых функций.

Диссертационная работа выполнена в рамках грантового исследовательского проекта Министерства образования и науки Республики Казахстан по фундаментальным исследованиям в области естественных наук «Клеточные нейронные сети с непрерывным/дискретным временем и сингулярными возмущениями» (№ АР 05132573, 2018-2020).