ОМАРОВА БИБИГУЛ ЖАРБОЛОВНА

МЕТОД ЛЯПУНОВА В МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 — Математика

Актуальность темы исследования. Острую необходимость проведения такого исследования можно обосновать его двумя приложениями, которые условно можно назвать механическим и теоретическим. Как известно, во многих случаях уравнения в частных производных можно трактовать как математические модели потока невзаимодействующих частиц в поле направлений. Тогда процесс как движение сплошной среды описывается уравнением в частных производных, а как движение частиц – системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следовательно, рассматриваемое исследование имеет *механическое приложение*, с одной стороны, а с другой стороны, его связь с обыкновенными уравнениями можно использовать для решения задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений и отсюда имеем *теоретическое приложение* данного исследования.

Работа, как по этим приложениям, так и по содержанию относится к исследованиям задач теории колебаний, по которым ведущее положение занимают научные школы Н.Н. Боголюбова – Ю.А. Митропольского – А.М.Самойленко и А.Н. Колмогорова – В.И. Арнольда по КАМ-теории. Но следует отметить, что здесь задачи изучены в терминах уравнений в частных производных на основе исследований В.Х. Харасахала - Д.У. Умбетжанова.

В данном исследовании время многомерное. Это связано с рациональной несоизмеримостью его компонентов. Очевидно, что скорость движений определяется оператором дифференцирования по направлениям заданного векторного поля временных и пространственных переменных. Таким образом, рассмотренные в диссертации уравнения в частных производных имеют вид матрично-векторных уравнений с оператором дифференцирования. Многие естественные процессы, такие как распространение звука, света, тепла и электромагнитных волн в среде являются широко известными примерами, описываемыми такими уравнениями. Например, уравнения Эйлера из гидромеханики, уравнение Хопфа из динамики ударных волн, уравнение эйконала из оптики можно описать в виде уравнений с операторами дифференцирования по направлениям соответствующих векторных полей. Эти процессы имеют волновую природу. В теории волновых процессов заметное место занимает исследование задач многопериодических (осциллирующих) решений их математических моделей. Актуальность тематики данного направления с различных точек зрения отмечена также в фундаментальных трудах М.А. Ляпунова, А. Пуанкаре, А.А. Андронова, В.В. Немыцского, В.В.Степанова, У. Гамильтона, К. Якоби, Н.Н. Боголюбова, А.Н. Колмогорова, Ю.А. Митропольского, В.И. Арнольда, Ю. Мозера, К.Л. Зигеля, В.И. Зубова, Р.Куранта, Б.Л. Рождественского, Н.Н. Яненко, Дж. Уизем, С. Фарлоу, Н.В.Карлова, Н.А. Кириченка, П. Боля, Г. Бора, Б.М. Левитана, И.Г.Петровского, Л.С. Понтрягина, М.А. Красносельского, М.Г. Крейна, В.Вазова, А.М.Самойленко, М.Урабе, И. Сибуя, И.Г. Малкина, Н.П. Еругина, Б.П.Демидовича, В.А. Якубовича, В.М.Старжинского, В.Х. Харасахала, Д.У.Умбетжанова.

Таким образом, актуальность диссертационного исследования обосновывается его *возможным прикладным аспектом в механике, физике* и *в научно-техническом процессе*.

Чтобы обосновать теоретические приложения диссертационного исследования возникает необходимость переходить от проблем обыкновенных уравнений к эквивалентным задачам для уравнений в частных производных. Это – непростой вопрос, он зависит от искусства исследователя. Например, исследуя вопрос об интегрировании канонических систем Гамильтона, К.Якоби выдвинул метод исследования с переходом к уравнению в частных производных первого порядка. Таким образом, появились методы Якоби по изучению уравнений Гамильтона-Якоби.

Другим важным примером является переход от проблем о квазипериодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений к задачам о многопериодических решениях для систем уравнений в частных производных первого порядка с оператором дифференцирования, который назван методом В.Х. Харасахала, развитым Д.У. Умбетжановым, Ж.А.Сартабановым, А.Б. Бержановым и их последователями. Системы и исследуемые задачи в диссертации относятся к более общим системам и задачам для них. Следовательно, диссертационное исследование имеет очень важное теоретическое приложение в теории квазипериодических решений систем обыкновенных уравнений. Следует отметить, что все проведенные здесь исследования имеют такую наклонность. Таким образом, можно заключить, что диссертационное исследование относится к актуальным задачам.

Цель диссертационного исследования. Исследование многопериодических колебаний на основе обобщения метода Ляпунова в системах с оператором дифференцирования по направлениям векторного поля, введенного В.Х. Харасахалом по временным переменным и определенного различными видами системы Ляпунова по пространственным переменным.

Задачи диссертационного исследования:

а) установление достаточных условий существования многопериодических решений квазилинейных систем уравнений в частных производных, представленных с оператором дифференцирования по направлениям векторных полей, введенных В.Х. Харасахалом по временным переменным и определенных системой Ляпунова по пространственным переменным;

б) построение интегральных представлений многопериодических решений линейных систем, как в некрическом, так и в критическом случаях;

в) исследование многопериодических колебаний автономных линейных и квазилинейных систем с вышеуказанными операторами дифференцирования, рассмотрение многопериодично возмущенных случаев;

г) исследование многопериодических колебаний в квазилинейных системах с экспоненциально гиперболично изменяющимся малым параметром.

Объектом исследования являются многопериодические решения линейных и квазилинейных систем с оператором дифференцирования по направлениям векторного поля введенного В.Х. Харасахалом по временным переменным и определенного различными видами системы Ляпунова по пространственным переменным, устанавливаемые обобщениями метода Ляпунова.

Методы исследования. В диссертационной работе широко применены методы и результаты теорий обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных первого порядка, операторных уравнений; обобщенный метод Ляпунова по изучению периодических движений; элементы метода КАМ-теории; метод последовательных приближений; метод функции Грина; методы исследования многопериодических решений систем дифференциальных уравнений в некритических случаях. На основе этих методов развиты методы исследований многопериодических решений в критических и автономных случаях; метод малого параметра, изменяющегося по экспоненциально гиперболическому закону.

Научная новизна исследования.

а) Установлены достаточные условия существования многопериодических решений линейных систем с различными операторами дифференцирования, которые отличаются видами системы Ляпунова.

б) Получены условия существования многопериодических решений линейных систем в критическом случае. Задача такого вида изучена впервые.

в) Определены интегральные представления многопериодических решений линейных неоднородных систем, пригодные для общего случая: как в критическом, так и в некритическом случаях.

г) Установлены достаточные условия существования многопериодических решений квазилинейных систем для некритического случая.

д) Исследованы автономные линейные и квазилинейные системы и получены аналогичные результаты для таких систем.

е) Указаны достаточные условия существования многопериодического решения одной квазилинейной системы с экспоненциально гиперболично изменяющимся малым параметром и обосновано его построение методом последовательных приближений.

ж) Обобщены известные методы Ляпунова по периодическим решениям обыкновенных уравнений для многопериодического случая. Методы исследования задачи по установлению многопериодических решений развиты и проведены строго по схеме: для нулей оператора дифференцирования; затем для однородной линейной системы; далее, для неоднородной линейной системы; а потом, для квазилинейной системы и установлены их взаимосвязи по начальным данным или по малому параметру.

На защиту выносятся следующие результаты:

- условия, необходимые и достаточные для существования многопериодических решений линейных систем с оператором дифференцирования по направлениям векторного поля;

- условия существования и методы исследования вещественно аналитического многопериодического решения линейных неоднородных систем в критическом случае;

- условия существования и методы исследования многопериодических решений автономных линейных систем;

- интегральное представление, которое пригодное как в критическом, так и в некритическом случаях для многопериодических решений линейных неоднородных систем;

- многопериодический структурный анализ решений линейных систем с оператором дифференцирования по направлениям векторного поля;

- условия существования многопериодических решений рассматриваемых квазилинейных систем в некритическом случае;

- условия существования и методы исследования многопериодического решения одной квазилинейной системы в критическом случае с экспоненциально гиперболично изменяющимся параметром, у которой нелинейная часть является однородной формой относительно искомой функции.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты диссертации носят теоретический характер. Существенным дополнением по развитию теории многопериодических решений систем уравнений первого порядка являются: полученные условия существования многопериодических решений и предложенные, их интегральные представления; исследования многопериодических решений в критическом случае, изучение этого вопроса в автономном случае систем; применимость метода последовательных приближений, когда нелинейный член системы является однородной формой относительно неизвестной функции при экспоненциально-гиперболичном изменении малого параметра.

Эти полученные новшества вполне могут быть толчками для дальнейшего развития теории и могут служить основой для разработки элективных курсов для студентов, магистрантов и докторантов физико-математических и инженерных специальностей.

Личный вклад докторанта заключается в том, что все результаты, приведенные в диссертации, получены автором. Участие соавторов и научных консультантов заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих мероприятиях:

- международная научно-практическая конференция «Таймановские чтения – 2017» (Уральск, Казахстан, 25 октября 2017г.);
- международная научная конференция «Проблемы прикладной математики и информатики», (Актобе, Казахстан, 10-11 ноября 2017г.);
- научная конференция математиков Казахстана «Актуальные проблемы математики» (Туркестан, Казахстан, 28-30 апреля 2018г.);
- fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018) (Lefkosa (Nicosia), Turkey, September 6-9, 2018);
- традиционная международная апрельская математическая конференция. Институт математики и математического моделирования МОН РК (Алматы, Казахстан, 5-8 апреля 2021г.);
- научный семинар «Исследование задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами», Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызская Республика (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор А.Керимбеков);
- научный семинар «Качественная теория дифференциальных уравнений», Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика (руководители семинара – д.ф.-м.н., профессоры А.Саадабаев, Б.К. Темиров);
- научный семинар «Качественные и приближенные методы исследования дифференциальных уравнений», Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор А.Т. Асанова);
- научный семинар «Проблемы прикладной математики и информатики», кафедра математики АРУ им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Ж. Сартабанов).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 11 работах. Из них 1 статья в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе Scopus, 4 статьи в журналах, рекомендованных КОКСОН МОН РК, 1 статья в научном журнале РК, остальные в материалах международных конференций, в том числе 1 публикация в материалах зарубежной конференции индексируемой в базе данных Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов (первый раздел включает 6 подразделов, второй включает 3 подраздела), заключения, списка использованной литературы, включающего 110 наименований и приложений А и Б.

В первом разделе работы освещены полученные результаты по линейным системам с оператором дифференцирования по направлениям векторного поля. Векторное поле состоит из суммы полей по временным (τ, t) и пространственным $\zeta = (\xi, \eta)$ переменным. Поле по временным переменным известно по исследованиям В.Х. Харасахала, на котором дифференцирование ведется по направлениям главной диагонали этих переменных, а поле по пространственным переменным определено системой Ляпунова. Очевидно, что элементы оператора, матрица коэффициентов и свободный член системы зависят как от временных, так и от пространственных переменных, причем по временным переменным (τ, t) они изменяются многопериодично с периодом (θ, ω).

В диссертационной работе исследуются проблемы многопериодических по временным переменным решений рассматриваемых систем. В процессе исследования входные данные системы видоизменяются в зависимости от видов изучаемых задач.

Для удобства приводим общий вид исследуемой системы

$$Dx = P(\tau, t, \zeta)x + f(\tau, t, \zeta, x)$$

с оператором дифференцирования

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial \tau} \right\rangle + \left\langle M\zeta + \psi(\tau, t, \zeta), \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\rangle$$

относительно искомой вектор-функции x, где вектор $e = (1,...,1)$ и выражение $M\zeta + \psi$ определяют поле дифференцирования, M – постоянная матрица, P – матрица, ψ и f – вектор-функции, $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \eta_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \xi_l}, \frac{\partial}{\partial \eta_l} \right)$ – векторы, $\langle \ , \ \rangle$ – знак скалярного произведения.

В дальнейшем, рассмотрим частные случаи D_j, $j = \overline{1,5}$ оператора D.

В подразделах 1.1 и 1.2 рассмотрен частный случай, когда система состоит из двух уравнений, и они отличаются друг от друга коэффициентами при неизвестных: постоянными матричными коэффициентами в 1.1 и переменными матричными коэффициентами в 1.2, а поле оператора дифференцирования D_1 по пространственным переменным определяется линейной системой Ляпунова от двух переменных.

В подразделе 1.1 определены нули оператора D_1 и изучены их свойства многопериодичности по временным переменным. Построено решение начальной задачи для уравнения $D_1 x = Ax$ с постоянной матрицей A, установлено условие его многопериодичности; доказано, что в некритическом случае уравнение имеет только тривиальное многопериодическое решение. В критическом случае получены достаточные условия отсутствия нетривиальных решений и установлены достаточные условия существования единственного многопериодического решения неоднородного уравнения $D_1 x = Ax + f(\tau, t, \zeta)$. Проведено аналогичное исследование, когда матрица коэффициентов системы является постоянной на диагонали.

В подразделе 1.2 установлены достаточные условия существования, ω-периодических по t решений однородного уравнения $D_1x = P(\tau,t)x$ с (θ,ω)-периодической матрицей коэффициентов системы, приведено следствие теоремы об условиях отсутствия нетривиальных многопериодических решений. Установлены условия существования единственного многопериодического решения неоднородного уравнения $D_1x = P(\tau,t)x + f(\tau,t,\zeta)$ в случае отсутствия нетривиального многопериодического решения, соответствующего однородного уравнения. Здесь исследование проведено в терминах функции Грина и найдена оценка этого решения. Аналогичные результаты получены для уравнения с матричным коэффициентом $P(\tau,t,\zeta)$. Введено понятие особого решения для автономного неоднородного уравнения $D_1x = P(\zeta)x + f(\zeta)$ и получены условия периодичности решений. Доказано существование единственного периодического решения автономного уравнения.

В подразделе 1.3 исследуются системы с оператором D_2, где матрица M линейной части системы Ляпунова имеет вид $M = 2\pi\nu^0 I_2$ с постоянной ν^0 и симплектической единицей I_2 второго порядка. При исследовании установлены условия существования аналитических по ζ, ω-периодических по t и квазипериодических по τ с определенным частотным базисом нулей оператора D_2. Получены достаточные условия существования и отсутствия нетривиальных многопериодических решений однородного уравнения $D_2x = Ax$ с некоторой матрицей $A = [a_{ij}]$, $a_{11} = a_{22} = \alpha$, $a_{12} = -a_{21} = \beta$. Установлены достаточные условия существования аналитических по ζ, ω-периодических по t и квазипериодических по τ решений неоднородного автономного уравнения $D_2x = Ax + f(\zeta)$. Определены условия, при выполнении которых данное неоднородное уравнение может допускать аналитическое относительно ζ и зависящее только от ζ решение, которое также относится к числу многопериодических по (τ,t) решений. Также исследована основная задача для неоднородного уравнения на случай $f = f(\tau,t,\zeta)$ в терминах функции Грина.

Подраздел 1.4 посвящен исследованию многопериодических решений систем с оператором дифференцирования D_3, когда $M = J$, $\psi = \psi(\zeta)$, где J – $(2l+2)$-мерная блочно-диагональная матрица. На основе свойств решений системы Ляпунова с известными первыми интегралами $H(\xi,\eta)$: 1) определены размерность $m = l$ переменного t и вектор-период $(\theta,\omega_1,...,\omega_l)$, 2) установлены достаточные условия существования многопериодических нулей оператора дифференцирования D_3.

Далее, в некритическом случае установлены достаточные условия существования единственного многопериодического решения автономной неоднородной системы $D_3x = Ax + f(\zeta)$ в терминах функции Грина. Результаты исследования данной системы обобщены на общий автономный случай системы $D_3 x = P(\zeta)x + f(\zeta)$ в предположении некритичности соответствующей однородной системы. Также, исследована система с общим свободным членом $f(\tau, t, \zeta)$ и получены достаточные условия существования единственного (θ, ω)-периодического решения.

Важно рассмотрение уравнений с оператором дифференцирования, который определяется полями, заданными системами, близкими к системам Ляпунова, отличными от них колебательными возмущениями по временным переменным. В связи с этим, в подразделе 1.5 исследуются задачи для систем с оператором дифференцирования вида D_4, где $e = a(\tau, t)$, $M = J$, $\psi = g(\tau)$.

Изучены свойства решений уравнения, определяющего нули оператора D_4. Доказаны леммы, раскрывающие различные свойства матрицанта в зависимости от вида собственных значений постоянной матрицы коэффициентов однородного уравнения $D_4 x = Ax$ и теорема о структуре матрицанта; определена многопериодическая структура общего решения; получены условия существования многопериодических решений и условия отсутствия таких решений, кроме тривиального; выделен класс (θ, ω)-периодических решений, отвечающих таким же нулям оператора D_4; установлены достаточные условия существования и единственности многопериодического решения для неоднородной системы $D_4 x = Ax + f(\tau, t, \zeta)$, где свободный член можно считать возмущенным (θ, ω)-периодическим по (τ, t) силой. Определена многопериодическая структура решений начально-многопериодических задач для линейной системы с оператором D_4.

В подразделе 1.6 рассматривается система с оператором дифференцирования по временным переменным D_5, введенным В.Х.Харасахалом, где $M = \psi = 0$. Получены условия отсутствия многопериодических решений однородной систем, когда матрица коэффициентов системы имеет пару чисто мнимых собственных значений, а остальные собственные значения имеют отличные от нуля действительные части. Приведена функция Грина задачи о (θ, ω)-периодическом решении неоднородной системы $D_5 x = Ax + \varepsilon^0 f(\tau, t)$, когда частоты свободных и вынужденных колебаний удовлетворяют условию сильной несоизмеримости. В результате установлены условия существования единственного (θ, ω)-периодического решения, дано его интегральное представление и получена оценка.

Во втором разделе диссертационной работы исследуются проблемы многопериодических решений квазилинейных систем с операторами дифференцирования из подразделов 1.4, 1.5 и 1.6. Операторы подразделов 1.1, 1.2 и 1.3 являются частными случаями операторов D_3 и D_4.

В подразделе 2.1 в некритическом случае приведены достаточные условия существования единственного решения квазилинейной системы $D_3 x = Ax + f(\zeta, x)$ на основе метода сжатых отображений. Далее, обобщены полученные результаты на случай системы $D_3 x = P(\zeta)x + f(\zeta, x)$, когда соответствующая однородная система обладает свойством экспоненциальной дихотомичности.

В подразделе 2.2. рассматривается квазилинейная система $D_4 x = Ax + f(\tau, t, \zeta, x)$. Здесь результаты подраздела 1.5 распространены на рассматриваемую квазилинейную систему. В пространстве непрерывно дифференцируемых функций, с помощью принципа неподвижных точек получены условия, гарантирующие существование многопериодического решения.

В подразделе 2.3 приводится представление одного метода исследования многопериодических решений одной системы вида $D_5 x = Ax + \varepsilon^0 f(\tau, t) + \varepsilon\varphi(x)$, где нелинейная функция $\varphi(x)$ является однородной формой степени l; ε^0 и ε – положительные параметры.

Основная задача подраздела 2.3 заключается в исследовании вопроса существования многопериодического решения данной системы методом сочетающим элементы метода КАМ-теории и метода последовательных приближений. Предлагается новый подход, при котором применим классический метод приближений. Этот метод основан на идее о том, что малый параметр при возмущении считают изменяющимся по экспоненциально гиперболическому закону. На основе предложенного метода, получены достаточные условия существования многопериодического решения рассматриваемой квазилинейной системы с экспоненциально гиперболично изменяющимся малым параметром и его построение реализовано методом последовательных приближений.