МЫНБАЕВА САНДУГАШ ТАБЫЛДИЕВНА

Качественные свойства и численное решение нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

Аннотация диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 — Математика

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов (первый раздел включает 3 подраздела, второй и третий раздел включают по 4 подраздела), заключения, списка использованных источников и приложения.

Количество иллюстраций, таблиц, использованных литературных источников. Список использованных источников состоит из 116 наименований.

Ключевые слова. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, нелинейная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения, метод параметризации, специальная задача Коши, регулярное разбиение, итерационный процесс, изолированное решение, алгоритм, численное решение.

Актуальность темы обусловлена с одной стороны, многочисленными применениями интегро-дифференциальных уравнений при решении задач естествознания и, с другой стороны, необходимостью развития новых конструктивных методов, позволяющих эффективно определить разрешимость нелинейных задач для интегро-дифференциальных уравнений и найти их решения.

Интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма имеют ряд особенностей, которые должны быть учтены при постановке задач для этих уравнений и разработке методов их решения.

В частности, линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма может быть неразрешимым без дополнительных условий к решению[1],[2]. Отметим, что критерии разрешимости и однозначной разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма были получены сравнительно недавно[3]. Основные методы исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, как метод А. И. Некрасова и метод функции Грина применимы при однозначной разрешимости некоторых промежуточных задач. Эти методы,

---

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Berlin, De Gruyter, 2016.
[2] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – Vol. 294.
[3] Dzhumabaev D.S. A Method for Solving the Linear Boundary Value Problem for an Integro Differential Equation // Comput. Math. Math. Phys. – 2010 – Vol. 50, № 7.

устанавливая различные достаточные условия существования решения, не позволяют получить критерии разрешимости краевых задач для этих уравнений. Поэтому Д. С. Джумабаевым был предложен новый подход к исследованию и решению краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, основанный на методе параметризации[4]. Разбиение интервала, где рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, ставит в соответствие этому уравнению специальную задачу Коши. Если эта задача однозначно разрешима, то ее решение можно представить через введенные параметры и известные величины интегро-дифференциального уравнения. Подставляя эти выражения в краевые условия и условия непрерывности решения во внутренних точках разбиения составляется система линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Доказывается, что разрешимость краевой задачи эквивалентна разрешимости этой системы. Как мы видим, и в этом подходе требуется однозначная разрешимость промежуточной задачи – специальной задачи Коши. Однако, в отличие от вышеотмеченных методов, для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с непрерывными матрицами дифференциальной части и интегрального члена существует разбиение интервала, при котором специальная задача Коши однозначно разрешима. Это свойство промежуточной задачи метода параметризации позволило получить критерии разрешимости и однозначной разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Разбиение Δ_N интервала $[0, T]$, при котором соответствующая специальная задача Коши однозначно разрешима называется регулярным для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма может не всегда иметь решение. Из-за существования неразрешимых интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма классическое общее решение существует не для всех интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Поэтому Джумабаевым было введено новое общее решение[5] линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Новое общее решение существует для любого линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Применение этого решения позволило установить критерии разрешимости линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и краевых задач для этого уравнения.

Нелинейные задачи, в основном, решаются итерационными методами. Многие эффективные итерационные методы, такие как метод Ньютона, требуют выбора "хорошего" начального приближения. В работе[6] были построены

---

[4] Dzhumabaev D.S. Conditions for Unique Solvability of a Linear Boundary Value Problem for an Ordinary Differential Equation // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1989. – № 29.

[5] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 327.

[6] Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations // Mat. Zametki. – 1987. – Vol. 41, № 5.

итерационные процессы для нелинейных уравнений с неограниченными операторами и установлены условия их сходимости. Результаты были применены к нелинейным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных[7].

При применении метода параметризации к краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма промежуточной задачей является специальная задача Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами. В этом случае итерационные методы используются как при решении специальной задачи Коши, так и при решении систем нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров.

Одним из эффективных методов решения задач для интегро-дифференциальных уравнений с малым числовым параметром является метод усреднения[8], позволяющий сводить разрешимость краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений к разрешимости аналогичной задачи для дифференциальной усредненной системы.

Цель исследования является построение конструктивных методов исследования и решения начальных и краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма.

Объект исследования являются начальные и краевые задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

Методы исследования. В диссертационной работе широко применяются методы и результаты теории дифференциальных, интегро-дифференциальных и операторных уравнений. Основным методом исследования и решения задач, рассматриваемых в диссертации является метод параметризации.

Научная новизна и практическая ценность работы. В диссертационной работе

- Решена специальная задача Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами;
- Построено новое общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью;
- Метод параметризации распространен на нелинейные краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;
- Разработан и численно реализован алгоритм нахождения решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения;

---

[7] Джумабаев Д.С. Скорость сходимости итерационных процессов для неограниченных операторных уравнений // Известия академия наук Каз ССР. – 1988. – № 5. – С. 24-28.

[8] Митропольский Ю.А., Байнов Д.Д., Милушева С.Д. Применение метода усреднения для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений // Мат.физика. – 1979. – Вып.25. – С. 3-22.

- Установлены условия существования решения краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения при условии разрешимости усредненной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений.

Результаты диссертации носят, в основном, теоретический характер. Научная значимость работы заключается в создании конструктивного метода исследования и решения задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Полученные в работе результаты могут быть использованы при решении краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, а также при чтении элективных курсов на математических факультетах университетов.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

- достаточные условия существования решений специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами;
- итерационные методы решения специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами и их численные реализации;
- Δ_N общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью и его свойства;
- метод параметризации решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;
- алгоритмы решения нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и их численные реализации;
- достаточные условия существования изолированного решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;
- построение системы нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров для краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью и алгоритм нахождения ее решения;
- алгоритмы нахождения начальных приближений к решениямдля нелинейной специальной задачи Коши и построенной системы нелинейных алгебраических уравнений;
- обоснование метода усреднения к исследованию существования решений начальных и краевых задач для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах, из них 2 статьи в изданиях, рекомендуемых КОКСОН МОН РК, 1 статья в журнале из списка Scopus, 1 статья в журнале из списка Web of Science, 1 статья в журнале из списка ZbMath, остальные в материалах международных научных конференций.

Краткое содержание работы

В первом разделе рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Методом параметризации Джумабаева уравнение (1) сводится к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[u_j(\tau) + \lambda_j\right]d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad (2)$$

с начальными условиями

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \quad (3)$$

Задача (2), (3) называется специальной задачей Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами.

По заданному вектору $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ и числу $\rho > 0$ построим множество $G^0(\rho) = \{(t,x): t \in [0,T], \|x - x_0(t)\| < \rho\}$, где $x_0(t) = \lambda_r^{(0)}, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}$ и $x_0(T) = \lambda_N^{(0)}$.

Условие 1. *Пусть выполняются следующие неравенства:*

(1) $\|f(t,x)\| \le M_0, (t,x) \in G^0(\rho), M_0 - const;$

(2) $M_1\bar{h} = \left[M_0 + K_0\left(\rho + \left\|\lambda^{(0)}\right\|\right)\right]\bar{h} < \rho,$

где

$$K_0 = \sum_{k=1}^{m} \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(\tau)\|d\tau.$$

Введем следующие множества:

$$G_p^0(\rho) = \left\{(t,x): t \in \left[t_{p-1}, t_p\right), \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1\left(t_p - t\right)\right\}, \quad p = \overline{1, N-1},$$

$G_N^0(\rho) = \{(t,x): t \in [t_{N-1}, t_N], \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1(t_N - t)\}$, и

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

При решении краевой задачи для уравнения (1), мы используем предельные значения $\lim\limits_{t\to t_r - 0} u_r(t,\lambda)$, $r = \overline{1,N}$, решения задачи (2), (3). В связи с этим рассмотрим следующую специальную задачу Коши на замкнутых подинтервалах:

$$\frac{dv_r}{dt} = f(t, v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[v_j(\tau) + \lambda_j\right] d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad (4)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Специальная задача Коши как и задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма не всегда разрешима. Поэтому исследуются вопросы разрешимости специальной задачи Коши (4), (5).

Возьмем числа $\rho_\lambda = \rho - M_1\overline{h}.$, $\rho_v = M_1\overline{h}$ и построим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN} : \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda, \quad r = \overline{1, N}\right\},$$

$S(0, \rho_v) = \left\{v[t] \in \tilde{\mathbb{C}}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}) : \|v[\cdot]\|_3 < \rho_v\right\}$. Введем следующие обозначения:

$G(\Delta_N) = \left(G_{p,k}(\Delta_N)\right) - nm \times nm$ матрица, состоящая из $n \times n$ матриц

$$G_{p,k}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau} \varphi_k(s) ds d\tau, \quad p, k = \overline{1, m},$$

$[I - G(\Delta_N)]^{-1} = \left(R_{k,p}(\Delta_N)\right), \quad k, p = \overline{1, m},$ где $I -$ единичная матрица размерности nm, $R_{k,p}(\Delta_N) -$ квадратные матрицы размерности n.

В следующем утверждении устанавливается достаточные условия существования единственного решения специальной задачи Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметрами (4), (5).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1, матрица $I - G(\Delta_N)$ обратима и справедливы следующие неравенства:*

(i) $\|f(t, x') - f(t, x'')\| \le L_0\|x' - x''\|$, $L_0 - const$, $(t, x'), (t, x'') \in G^0(\rho)$;

(ii) $(L_0 + K_0)\overline{h} < 1$;

(iii) $\chi\left(M_0 + K_0\left(\rho_\lambda + \left\|\lambda^{(0)}\right\|\right)\right)\overline{h} < \rho_v$, *где*

$$\chi = 1 + \overline{h} \sum_{k=1}^{m} \max_{t \in [0,T]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{p=1}^{m} \left\|R_{k,p}(\Delta_N)\right\| \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \left\|\psi_p(s)\right\| ds.$$

Тогда для любого $\hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *существует система функций* $v[t, \hat{\lambda}] = \left(v_1(t, \hat{\lambda}), v_2(t, \hat{\lambda}), \dots, v_N(t, \hat{\lambda})\right) -$ *единственное решение специальной задачи Коши (4), (5) при* $\lambda = \hat{\lambda}$ *в* $S(0, \rho_v)$.

При решении специальной задачи Коши (4), (5) при фиксированных значениях параметров $\lambda \in \mathbb{R}^{nN}$ воспользуемся итерационными процессами с демпфирующими множителями.

По заданному вектору $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$, системе функций $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t)\right) \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$, и числам $\rho > 0$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$ построим следующие множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN} \colon \max_{r=\overline{1,N}} \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda\right\},$$

$$S\left(u^{(0)}[t], \rho_u\right) = \left\{u[t] \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}) \colon \left\|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\right\|_2 < \rho_u\right\},$$

$$S(x_0(t), \rho) = \{x(t) \in \mathbb{PC}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^n) \colon \|x - x_0\|_5 < \rho\},$$

$$G^0(\rho) = \{(t, x) \colon t \in [0, T], \|x - x_0(t)\| < \rho\},$$

$$G_r^0(\rho) = \{(t, x) \colon t \in [t_{r-1}, t_r), ||x - x_0(t)|| < \rho\}, \quad r = \overline{1, N}\},$$

где функция $x_0(t)$, определяемая равенствами

$$x_0(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N},$$

$$x_0(T) = \lambda_N^{(0)} + \lim_{t \to T-0} u_N^{(0)}(t),$$

принадлежит пространству $\mathbb{PC}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^n)$.

Условие 2. *Функция* $f(t, x)$ *в* $G^0(\rho)$ *имеет равномерно непрерывную частную производную* $f_x'(t, x)$.

Полагаем, что $\mathbb{X} = \{v[t] = \left(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\right) \in \tilde{\mathbb{C}}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}) \colon v_r(t_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1, N}\}$, $\mathbb{Y} = \tilde{\mathbb{C}}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$, и введем линейный оператор $H \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ следующим образом:

$$Hv[t] = w^{(1)}[t],$$

где

$$w^{(1)}[t] = \left(w_1^{(1)}(t), w_2^{(1)}(t), \dots, w_N^{(1)}(t)\right),$$

$$w_r^{(1)}(t) = \dot{v}_r(t) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) v_j(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N}.$$

$D(H) = \{v[t] = \left(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\right) \in \mathbb{X}$, где функция $v_r(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, N}\} -$ область определения оператора H.

Теперь для любого $\lambda = \hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ специальную задачу Коши (4), (5) запишем в виде нелинейного операторного уравнения и для нахождения его решения применяем итерационный процесс.

$$Hv[t] + F(v[t], \hat{\lambda}) = 0 \qquad (6)$$

где

$$F(v[t], \hat{\lambda}) = \left(w_1^{(2)}(t, \hat{\lambda}), w_2^{(2)}(t, \hat{\lambda}), \dots, w_N^{(2)}(t, \hat{\lambda})\right),$$

$$w_r^{(2)}(t, \hat{\lambda}) = -f(t, v_r(t) + \hat{\lambda}_r) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) d\tau \hat{\lambda}_j,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N}.$$

Условие 2 обеспечивает существование и равномерную непрерывность $F'_v(v[t], \hat{\lambda})$ – производной Фреше в $S(v^{(0)}[t], \rho_u)$, которую можно записать в виде:

$$F'_v(v[t], \hat{\lambda}) = diag\left\{-\frac{\partial f(t, v_1(t) + \hat{\lambda}_1)}{\partial x}, \dots, -\frac{\partial f(t, v_N(t) + \hat{\lambda}_N)}{\partial x}\right\}.$$

Пусть $\mathbb{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ – пространство линейных ограниченных операторов $\Lambda: \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ с индуцированной нормой.

Фиксируем $\hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, $\hat{v}^{(0)}[t] \in S(v^{(0)}[t], \rho_u) \cap D(H)$, и $\hat{\rho}_u > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) $F'_v(v[t], \hat{\lambda})$ *равномерно непрерывна в* $S(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u)$;

(ii) *оператор* $H + F'_v(v[t], \hat{\lambda}): \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *ограниченно обратим и* $\|[H + F'_v(v[t], \hat{\lambda})]^{-1}\|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y},\mathbb{X})} \leq \hat{\chi}$ *для всех* $v[t] \in S(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u)$, $\hat{\chi}$ – *const;*

(iii) $\hat{\chi}\|H\hat{v}^{(0)}[\cdot] + F(\hat{v}^{(0)}[\cdot], \hat{\lambda})\|_3 < \hat{\rho}_u$.

Тогда существуют числа $\alpha_k \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, *такие, что последовательность* $\{\hat{v}^{(k)}[t]\}$, *определяемая итерационным процессом:*

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = \hat{v}^{(k)}[t] - \frac{1}{\alpha_k}\left[H + F'_v(\hat{v}^{(k)}[t], \hat{\lambda})\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[H\hat{v}^{(k)}[t] + F(\hat{v}^{(k)}[t], \hat{\lambda})\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

содержится в $S(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u)$, *сходится к* $v[t, \hat{\lambda}]$ – *изолированному решению уравнения (6) в* $S(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u)$ *и справедлива оценка*

$$\|v[\cdot, \hat{\lambda}] - \hat{v}^{(0)}[\cdot]\|_3 \leq \chi\|H\hat{v}^{(0)}[\cdot] + F(\hat{v}^{(0)}[\cdot], \hat{\lambda})\|_3.$$

Рассмотрим специальную задачу Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметрами

$$\frac{d\vartheta_r}{dt} = f'_x\big(t, v_r(t) + \hat{\lambda}_r\big)\vartheta_r +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\vartheta_j(\tau)d\tau + g_r(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \tag{7}$$

$$\vartheta_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \tag{8}$$

Теорема 2 и взаимосвязь между специальной задачей Коши (4), (5) и операторным уравнением (6) дают следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 2, специальная задача Коши (7), (8) корректно разрешима с константой* $\hat{\chi}$ *для всех* $v[t] \in S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$ *и справедливо следующее неравенство:*

$$\hat{\chi} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \left\| \dot{\hat{v}}_r^{(0)}(t) - f\left(t, \hat{v}_r^{(0)}(t) + \hat{\lambda}_r\right) - \right.$$

$$\left. -\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) \left[\hat{v}_j^{(0)}(\tau) + \hat{\lambda}_j\right] d\tau \right\| < \hat{\rho}_u.$$

Тогда существуют числа $\alpha_k \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *такие, что последовательность* $\left\{\hat{v}^{(k)}[t]\right\}$, *определяемая итерационным процессом*

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = \hat{v}^{(k)}[t] + \Delta v^{(k)}\big[t, \hat{\lambda}\big], \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\Delta v^{(k)}\big[t, \hat{\lambda}\big]$ *–решение специальной задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений:*

$$\frac{d\Delta v_r}{dt} = f'_x\left(t, v_r^{(k)}\big(t, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N\big) + \hat{\lambda}_r\right)\Delta v_r +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\Delta v_j(\tau)d\tau - \frac{1}{\alpha_k}\Big\{\dot{v}_r^{(k)}\big(t, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N\big) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) \left[v_j^{(k)}\big(\tau, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N\big) + \hat{\lambda}_j\right] d\tau -$$

$$-f\left(t, v_r^{(k)}\big(t, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N\big) + \hat{\lambda}_r\right)\Big\}, \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

$$\Delta v_r\big(t_{r-1}, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N\big) = 0, \quad r = \overline{1, N},$$

содержится в $S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$ *сходится к* $v\big[t, \hat{\lambda}\big]$ *– изолированному решению задачи (4), (5), принадлежащее* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$ *и*

$$\left\|v[\cdot,\hat{\lambda}]-\hat{v}^{(0)}[\cdot]\right\|_3 \le \hat{\chi}\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\Bigg\|\hat{v}_r^{(0)}(t)-f\left(t,\hat{v}_r^{(0)}(t)+\hat{\lambda}_r\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[\hat{v}_j^{(0)}(\tau)+\hat{\lambda}_j\right]d\tau\Bigg\|.$$

Во втором разделе с помощью решения специальной задачи Коши (4), (5) построено Δ_N общее решение уравнения (1) и устанавливаются его свойства. Учитывая взаимосвязь между специальными задачами Коши (2), (3) и (4), (5) даем следующее определение.

Определение 1. *Пусть система функций* $v[t,\lambda]=\left(v_1(t,\lambda),v_2(t,\lambda),\dots,v_N(t,\lambda)\right)\in S(0,\rho_v)$ *является решением специальной задачи Коши (4), (5) с параметром* $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$. *Тогда функция* $x(\Delta_N,t,\lambda)$, *определяемая равенствами*

$$x(\Delta_N,t,\lambda)=\lambda_r+v_r(t,\lambda) \text{ для } t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,N}, \text{ и}$$

$$x(\Delta_N,T,\lambda)=\lambda_N+v_N(T,\lambda),$$

называется Δ_N *общим решением уравнения (1) в* $G^0(\Delta_N,\rho)$.

Теорема 4. *Пусть задана кусочно-непрерывная на* $[0,T]$, *с возможными точками разрыва* $t=t_p$, $p=\overline{1,N-1}$ *функция* $\tilde{x}(t)$ *и* $\left(t,\tilde{x}(t)\right)\in G^0(\Delta_N,\rho)$. *Предположим, что функция* $\tilde{x}(t)$ *имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению (1) при всех* $t\in(0,T)\backslash\left\{t_p,p=\overline{1,N-1}\right\}$. *Тогда существует единственный* $\tilde{\lambda}=\left(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\dots,\tilde{\lambda}_N\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$ *такой, что равенство* $x\left(\Delta_N,t,\tilde{\lambda}\right)=\tilde{x}(t)$ *выполняется для всех* $t\in[0,T]$.

Следствие 1. *Пусть* $x^*(t)-$ *решение уравнения (1) и пара* $\left(t,x^*(t)\right)\in G^0(\Delta_N,\rho)$. *Тогда существует единственный вектор* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\dots,\lambda_N^*)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$ *такой, что равенство* $x(\Delta_N,t,\lambda^*)=x^*(t)$ *выполняется для всех* $t\in[0,T]$.

Рассматривается нелинейная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (1) с краевым условием

$$g[x(0),x(T)]=0, \tag{10}$$

Δ_N общее решение уравнения (1) позволяет свести разрешимость краевой задачи (1), (10) к разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров

$$Q_*(\Delta_N;\lambda)=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}^{nN}. \tag{11}$$

Теорема 5. *Пусть функция* $x^*(t)$ *является решением задачи (1), (10) и* $\left(t,x^*(t)\right)\in G^0(\Delta_N,\rho)$. *Тогда вектор* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\dots,\lambda_N^*)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$ *с элементами* $\lambda_r^*=x^*(t_{r-1})$, $r=\overline{1,N}$, *является решением системы (11). И,* *обратно, если* $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) -$ *решение системы (11), то функция* $\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \lambda)$ *является решением задачи (1), (10) и* $(t, \tilde{x}(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.

Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (11) используем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) *матрица Якоби* $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda}$ *равномерно непрерывна в* $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$;

(ii) $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda}$ *обратима и* $\left\| \left[\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \le \gamma^*$ *для всех* $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, $\gamma^* -$ *const;*

(iii) $\gamma^* \| Q_*(\Delta_N; \lambda^{(0)}) \| < \rho_\lambda$.

Тогда существует единственное $\alpha_0 \ge 1$ *такое, что для любого* $\alpha \ge \alpha_0$ *последовательность* $\{\lambda^{(k+1)}\}$, *определяемая итерационным процессом*

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)})}{\partial \lambda} \right]^{-1} Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

содержится в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, *сходится к* $\lambda^* -$ *изолированному решению уравнения (11) в* $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *и справедлива оценка*

$$\| \lambda^* - \lambda^{(0)} \| \le \gamma^* \| Q_*(\Delta_N; \lambda^{(0)}) \|.$$

В этом разделе также рассматривается квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) x(\tau) d\tau + f_0(t) + \varepsilon f(t, x), \qquad (12)$$

Применяя метод параметризации к уравнению (12) для Δ_N разбиения получим специальную задачу Коши с параметрами вида

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) [u_j(\tau) + \lambda_j] d\tau + f_0(t) +$$

$$+ \varepsilon f(t, u_r + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad (13)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \qquad (14)$$

Пусть $y(\Delta_N, t, \lambda) -$ Δ_N общее решение линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)y(\tau)d\tau + f_0(t), \quad t \in [0,T], \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (15)$$

Уравнение (15) сведется к специальной задаче Коши

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)(v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[v_j(\tau) + \lambda_j\right]d\tau +$$

$$+f_0(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad (16)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \quad 17)$$

Для вектора $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ и чисел $\rho_\lambda > 0$, $\rho > \rho_\lambda$, $\rho_v = \rho - \rho_\lambda$, выберем кусочно-непрерывную на $[0,T]$ функцию $y^{(0)}(t) = y\left(\Delta_N, t, \lambda^{(0)}\right)$, систему функций $v^{(0)}[t] = \left(v_1^{(0)}(t), v_2^{(0)}(t), \dots, v_N^{(0)}(t)\right)$ с элементами $v_r^{(0)}(t) = y^{(0)}(t) - \lambda_r^{(0)}$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, и составим следующие множества:

$$G^0(\rho) = \left\{(t,x): t \in [0,T], \left\|x - y^{(0)}(t)\right\| < \rho\right\},$$

$$S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}: \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda, \quad r = \overline{1,N}\right\},$$

$$S\left(v^{(0)}[t], \rho_v\right) = \left\{u[t] \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}): \left\|u[\cdot] - v^{(0)}[\cdot]\right\|_2 < \rho_v\right\},$$

$$G_p^0(\rho) = \left\{(t,x): t \in \left[t_{p-1}, t_p\right), \left\|x - y^{(0)}(t)\right\| < \rho\right\}, \quad p = \overline{1,N-1},$$

$$G_N^0(\rho) = \left\{(t,x): t \in [t_{N-1}, t_N], \left\|x - y^{(0)}(t)\right\| < \rho\right\}, \text{ и}$$

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

Задачу (13), (14) представим как операторное уравнение и для нахождения его решения применяем итерационный процесс. Введем линейный оператор $H: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ следующим образом:

$$Hu[t] = \left(w_1^{(1)}(t), w_2^{(1)}(t), \dots, w_N^{(1)}(t)\right),$$

где

$$w_r^{(1)}(t) = \dot{u}_r(t) - A(t)u_r - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)u_j(\tau)d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad r = \overline{1,N}.$$

Теперь мы можем записать специальную задачу Коши (13), (14) в виде нелинейного операторного уравнения

$$Hu[t] = \varepsilon F(u[t], \lambda) + F_0[t, \lambda],$$

где

$$F(u[t], \lambda) = \left(w_1^{(2)}(t), w_2^{(2)}(t), \dots, w_N^{(2)}(t)\right),$$

$$w_r^{(2)}(t) = f(t, u_r(t) + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}.$$

Теорема 7. *Пусть специальная задача Коши (16), (17) корректно разрешима с константой* χ, *и справедливы следующие неравенства:*

(i) $\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq L \parallel x' - x'' \parallel$, $L - const.$, $(t, x'), (t, x'') \in G^0(\rho)$;

(ii) $q_\varepsilon = \varepsilon \chi L < 1$;

(iii) $\frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\| < \rho_v$ *для всех* $\lambda \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$.

Тогда для каждого $\lambda \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *существует единственная система функций* $u[t, \lambda, \varepsilon] = \left(u_1(t, \lambda, \varepsilon), u_2(t, \lambda, \varepsilon), \dots, u_N(t, \lambda, \varepsilon)\right)$ – *решение специальной задачи Коши (13), (14) принадлежащий* $S\left(v^{(0)}[t], \rho_v\right)$ *и справедливо следующее неравенство*

$$\|u[\cdot, \lambda, \varepsilon] - v[\cdot, \lambda]\|_2 \leq \frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\|.$$

Определение 2. *Пусть система функций* $u[t, \lambda, \varepsilon] = \left(u_1(t, \lambda, \varepsilon), u_2(t, \lambda, \varepsilon), \dots, u_N(t, \lambda, \varepsilon)\right) \in S(v[t, \lambda], \rho_v)$ *является решением специальной задачи Коши (13), (14) при* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$. *Тогда функция* $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ *определяемая равенствами:*

$$x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = \lambda_r + u_r(t, \lambda, \varepsilon) \text{ для } t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1, N}, \text{ и}$$

$$x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) = \lambda_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon)$$

называется Δ_N *общим решением уравнения (12) в* $G^0(\Delta_N, \rho)$.

Из определения 2 и теоремы 7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 8. *В условиях теоремы 7 существует функция* $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ – *единственное* Δ_N *общее решение уравнения (12) в* $G^0(\Delta_N, \rho)$ *и эта функция может представлена в виде*

$$x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = y(\Delta_N, t, \lambda) + \Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon),$$

где функция $\Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ *составлена из равенств*

$$\Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = u_r(t, \lambda, \varepsilon) - v_r(t, \lambda), \text{ для } t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1, N},$$

$$\Delta x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) = \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon) - \lim_{t \to T-0} v_N(t, \lambda).$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, T)} \|\Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)\| \leq \frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\|.$$

В подразделе 2.4 исследована разрешимость квазилинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f_0(t) + \varepsilon f(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n.$$

Раздел 3 посвящен разработке алгоритма нахождения решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения.

В подразделе 3.1 рассматривается специальная задача Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{du_r}{dt} = f_0(t, u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1\big(t, s, u_j(s) + \lambda_j\big)ds, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad (18)$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1,N}, \quad (19)$$

возникающая при применении метода параметризации к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t,x) + \int_0^T f_1\big(t,s,x(s)\big)ds, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Разработан алгоритм нахождения численного решения задачи (18), (19).

В этом подразделе также предлагается алгоритм нахождения численного решения специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений с нелинейной дифференциальной частью

$$\frac{dv_r}{dt} = f(t, v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)[v_j(\tau) + \lambda_j]d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}.$$

Теорема 2 обеспечивает сходимость предложенного алгоритма.

В подразделе 3.2 разработан алгоритм нахождения решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (1), (10).

В подразделе 3.3 на основе метода продолжения по параметру предложен один подход к решению проблемы выбора начального приближения решения специальной задачи Коши (4), (5) и систем нелинейных алгебраических уравнений (11).

Поскольку

$$\int_0^t \varphi\big(t,s,x(s)\big)ds = \int_0^T \tilde{\varphi}\big(t,s,x(s)\big)ds,$$

где

$$\tilde{\varphi}\big(t,s,x(s)\big) = \begin{cases} \varphi\big(t,s,x(s)\big), & a \le s \le t, \\ 0, & t < s \le b, \end{cases}$$

то интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int\limits_0^t \varphi\big(t,s,x(s)\big)ds\right)$$

является частным случаем интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int\limits_0^T \tilde{\varphi}\big(t,s,x(s)\big)ds\right).$$

В связи с этим в подразделе 3.4 метод усреднения применен к исследованию существования решений краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. Показано, что если усредненная краевая задача имеет решение, то и исходная задача также имеет решение. Важно, что при этом усредненной для системы интегро-дифференциальных уравнений является более простая система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, в диссертационной работе исследована разрешимость нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений и получены следующие новые научные результаты:

- получены достаточные условия существования решений специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами;

- предложены итерационные методы решения специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами и их численные реализации;

- построено Δ_N общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и установлены его свойства;

- предложен метод параметризации решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;

- разработаны алгоритмы решения нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и их численные реализации;

- установлены достаточные условия существования изолированного решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;

- построена система нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров для краевой задачи интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью и предложен алгоритм нахождения ее решения;

- разработаны алгоритмы нахождения начальных приближений для нелинейной специальной задачи Коши и построенной системы нелинейных алгебраических уравнений;;
- применен метод усреднение к исследованию существования решений начальных и краевых задач для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра.