Министерство образования и науки Республики Казахстан
Актюбинский региональный государственный университет
имени К. Жубанова

УДК 517.968.21 На правах рукописи

**МЫНБАЕВА САНДУГАШ ТАБЫЛДИЕВНА**

# Качественные свойства и численное решение нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

6D060100 - Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант
д.ф.-м.н., профессор
Джумабаев Д.С.

Зарубежный научный консультант
д.ф.-м.н., профессор
Станжицкий А.Н.

Республика Казахстан
Актобе, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

## НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертационной работе использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСТ 7.32-2001 (изменения от 2006 г.). Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

ГОСТ 7.1-2003 Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных функций $x\colon[0,T]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$, $\|x\|=\max\limits_{i=\overline{1,N}}|x_i|$;

$\mathbb{C}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN})$ – пространство систем функций $u[t]=\big(u_1(t),u_2(t),\dots,$ $u_N(t)\big)$, где функций $u_r:[t_{r-1},t_r)\to\mathbb{R}^n$ непрерывны и имеют конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t\to t_r-0}u_r(t)$ для всех $r=\overline{1,N}$, с нормой $\|u[\cdot]\|_2=$ $\max\limits_{r=\overline{1,N}}\sup\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|u_r(t)\|$;

$\tilde{\mathbb{C}}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN})$ – пространство систем функций $v[t]=\big(v_1(t),v_2(t),\dots,$ $v_N(t)\big)$, где функций $v_r:[t_{r-1},t_r]\to\mathbb{R}^n$ непрерывны для всех $r=\overline{1,N}$, с нормой $\|v[\cdot]\|_3=\max\limits_{r=\overline{1,N}}\max\limits_{t\in[t_{r-1},t_r]}\|v_r(t)\|$;

$\mathbb{C}([t_{r-1},t_r],\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных функций $v:[t_{r-1},t_r]\to\mathbb{R}^n$, с нормой $\|v\|_4=\max\limits_{t\in[t_{r-1},t_r]}\|v(t)\|$, $r=\overline{1,N}$;

$\mathbb{PC}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^n)$ – пространство кусочно-непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ с возможными точками разрывов $t_s, s=\overline{1,N-1}$, с нормой $\|x\|_5=\sup\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$;

$\mathbb{C}([0,T],h,\mathbb{R}^{nN})$ – пространство систем функций $u[t]=\big(u_1(t),u_2(t),\dots,$ $u_N(t)\big)$, где $u_r:[(r-1)h,rh)\to\mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет конечный предел $\lim\limits_{t\to rh-0}u_r(t)$, $r=\overline{1,N}$, с нормой $\|u[\cdot]\|_6=\max\limits_{r=\overline{1,N}}\sup\limits_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r(t)\|$.

## ВВЕДЕНИЕ

**Общая характеристика работы.** Диссертационная работа посвящена исследованию качественных свойств начальных и краевых задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и решению рассматриваемых задач.

**Актуальность исследования** обусловлена с одной стороны, многочисленными применениями интегро-дифференциальных уравнений при решении задач естествознания и, с другой стороны, необходимостью развития новых конструктивных методов, позволяющих эффективно определить разрешимость нелинейных задач для интегро-дифференциальных уравнений и найти их решения.

В начале прошлого столетия В. Вольтерра [1, 2] показал, что к интегро-дифференциальным уравнениям приводится задача о равновесии упругого твердого тела с учетом явления последействия. Применение интегро-дифференциальных уравнений при исследовании различных задач физики, химии, биологии, экономики и др. приведены в[3-11].

**Современное состояние темы.** Краткий и содержательный обзор результатов по задачам для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма, опубликованных до 60-годов XX столетия, приводится в монографии Я.В. Быкова [12]. Особое место в теории интегро-дифференциальных уравнений занимает статья [13]. В ней А.И. Некрасовым был предложен эффективный метод исследования и решения интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Идея метода заключается в том, что интегральный член уравнения рассматривается как правая часть дифференциального уравнения и используя фундаментальную систему решений дифференциального уравнения, исходное уравнение сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. При предположении его однозначной разрешимости находится общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Метод А.И. Некрасова широко применяется при исследовании и решений различных задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма [14-17]. В частности, этот метод является основой исследования качественных свойств различных задач для сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений в работах М.И. Иманалиева, К.А. Касымова и их учеников [15-17]. Влияние интегрального члена на асимптотическое поведение и существование начальных скачков решении интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма исследованы М.К. Дауылбаевым [18-20].

Исследованию начальных и краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений посвящены работы многих авторов [21-75]. В этих работах развивались качественные методы исследования, приближенные и численные методы нахождения решений задач для интегро-дифференциальных уравнений. Обзор часто применяемых современных методов решения задач содержится в монографии A.M. Wazwaz [60]. Эффективность вариационно-итерационного метода, метода декомпозиции Адомяна, метода рядов и др. методов в нем иллюстрируются решениями различных задач для интегро-дифференциальных уравнений.

Различные аспекты теории интегро-дифференциальных уравнений изучаются в монографиях А.М. Самойленко, Б.П. Ткач [61], D.D. Bainov, P.S. Simeonov, [62], J. Prüss [63], V. Lakshmikantham, M.R.M. Rao [64], T. Jangveladze, Z. Kiguradze, B. Neta [65], A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko [66].

Интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма имеют ряд особенностей, которые должны быть учтены при постановке задач для этих уравнений и разработке методов их решения.

В частности, как показано в [66, 67], линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма может быть неразрешимым без дополнительных условий к решению. Отметим, что критерии разрешимости и однозначной разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма были получены сравнительно недавно [68]. Основные методы исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, как метод А.И. Некрасова и метод функции Грина применимы при однозначной разрешимости некоторых промежуточных задач. В [68] построен пример однозначно разрешимой линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма, для которого эти промежуточные задачи не являются однозначно разрешимыми. Таким образом, эти методы устанавливая различные достаточные условия существования решения, не позволяют получить критерии разрешимости краевых задач для этих уравнений.

Д.С. Джумабаевым [68] был предложен новый подход к исследованию и решению краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, основанный на методе параметризации [69]. После разбиения интервала, где рассматривается краевая задача, дополнительные параметры вводятся как значения решения в начальных точках подинтервалов и исходная краевая задача сводится к эквивалентной задаче с параметрами для функций, определенных на подинтервалах. Введение дополнительных параметров дает начальные значения в начальных точках подинтервалов для новых неизвестных функции. При фиксированных значениях параметров эта задача называется специальной задачей Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений на подинтервалах. Таким образом, разбиение интервала, где рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, ставит в соответствие этому уравнению специальную задачу Коши. Если эта задача однозначно разрешима, то ее решение можно представить через введенные параметры и известные величины интегро-дифференциального уравнения. Подставляя эти выражения в краевые условия и условия непрерывности решения во внутренних точках разбиения, составляется система линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Доказывается, что разрешимость краевой задачи эквивалентна разрешимости этой системы. Как мы видим, и в этом подходе требуется однозначная разрешимость промежуточной задачи –

специальной задачи Коши. Однако, в отличие от вышеотмеченных методов, как показано в [68], для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с непрерывными матрицами дифференциальной части и интегрального члена существует разбиение интервала, при котором специальная задача Коши однозначно разрешима. Это свойство промежуточной задачи метода параметризации позволило получить критерии разрешимости и однозначной разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма [68, 70-72]. Разбиение $\Delta_N$ интервала $[0, T]$, при котором соответствующая специальная задача Коши однозначно разрешима называется регулярным для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения Фредгольма [73]. Общее решение имеет важное значение при исследовании и решении различных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. В частности, с помощью общих решений разрешимость краевых задач для обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений сводится к разрешимости алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Если линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение и интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра всегда разрешимы и имеют семейства решений, линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма может не всегда иметь решение. Из-за существования неразрешимых интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма классическое общее решение существует не для всех интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма (см. [66, 67]). В работе Д.С. Джумабаева [74] было введено новое общее решение линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Это общее решение тесно связано с регулярным разбиением интервала и строится с помощью решения специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений с параметрами. Новое общее решение существует для любого линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Применение этого решения позволило установить критерии разрешимости линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и краевых задач для этого уравнения.

При отыскании приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений возникают нагруженные дифференциальные уравнения, получаемые при замене интегрального члена интегро-дифференциальных уравнений квадратурной формулой. Значительный вклад в развитие теории нагруженных уравнений внесли работы А.М. Нахушева [22, 75], где даны определения нагруженных дифференциальных, нагруженных интегро-дифференциальных, нагруженных функциональных уравнений. Работы А.М. Нахушева и его учеников способствовали интенсивному и систематическому изучению краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Вопросы разрешимости неоднородных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в соболевских пространствах исследованы М.Т. Дженалиевым [76] и его учениками. В работе В.М. Абдуллаева, К.Р. Айда-заде [77] предложен численный метод решения системы обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с начальными и неразделенными многоточечными условиями. В работе [103] был предложен метод решения нелинейных краевых задач с параметрами для нагруженных дифференциальных уравнений. Метод основан на решении соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров.

Новое общее решение было введено также и для линейных нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и их семейства в статье [78]. В [79] новое общее решение было введено для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения и использовано для исследования и решения нелинейных краевых задач.

Нелинейность дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений приводит к принципиальным трудностям как при исследовании качественных свойств нелинейных краевых задач для этих уравнений, так и при нахождении их решений.

Нелинейные задачи, в основном, решаются итерационными методами. Многие эффективные итерационные методы, такие как метод Ньютона, требуют выбора "хорошего" начального приближения. Вопросы сходимости итерационных процессов, проблемы выбора начального приближения и др. всесторонне обсуждаются в монографиях [80-83].

В работах [84-86] Д.С. Джумабаевым были построены итерационные процессы для нелинейных уравнений с неограниченными операторами и установлены условия их сходимости. Результаты были применены к нелинейным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных [84-89].

При применении метода параметризации к краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма промежуточной задачей является специальная задача Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами. В этом случае итерационные методы используются как при решении специальной задачи Коши, так и при решении систем нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров.

Одним из эффективных методов решения задач для интегро-дифференциальных уравнений с малым числовым параметром является метод усреднения [90-92], позволяющий сводить разрешимость краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений к разрешимости аналогичной задачи для дифференциальной усредненной системы.

**Целью настоящей работы является:** построение конструктивных методов исследования и решения начальных и краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и Вольтерра.

**Задачи исследования:**

а) установить условия существования и единственности решения специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и разработать эффективные алгоритмы нахождения ее решений;

b) построить новое общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью и определить его свойства;

c) получить условия разрешимости нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и разработать эффективные алгоритмы нахождения ее решения;

d) установить условия существования решения начальных и краевых задач для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра с помощью метода усреднения.

**Объектом исследования являются** начальные и краевые задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

**Предметом исследования являются** вопросы разрешимости нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, построения эффективных алгоритмов нахождения их решений и обоснования метода усреднения начальных и краевых задач для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра с малым числовым параметром.

**Научная новизна.**

a) Для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами решена специальная задача Коши.

b) Построено новое общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью.

c) Метод параметризации распространен на нелинейные краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.

d) Разработан и численно реализован алгоритм нахождения решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения.

e) Установлены условия существования решения краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения при условии разрешимости усредненной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений.

**Положения, выносимые на защиту:**

- достаточные условия существования решений специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами;

- итерационные методы решения специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами и их численные реализации;

- $\Delta_N$ общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и его свойства;

- метод параметризации решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;

- алгоритмы решения нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и их численные реализации;

- достаточные условия существования изолированного решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;

- построение системы нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров для краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения

Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью и алгоритм нахождения ее решения;

- алгоритмы нахождения начальных приближений для нелинейной специальной задачи Коши и построенной системы нелинейных алгебраических уравнений;
- обоснование метода усреднения к исследованию существования решений начальных и краевых задач для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра.

**Достоверность и обоснованность.** В диссертационной работе широко применяются методы и результаты теории дифференциальных, интегро-дифференциальных и операторных уравнений. Основным методом исследования и решения задач, рассматриваемых в диссертации является метод параметризации.

**Теоретическая и практическая значимость результатов.** Результаты диссертации носят, в основном, теоретический характер. Научная значимость работы заключается в создании конструктивного метода исследования и решения задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

**Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами.** Диссертационная работа выполнена в рамках проекта грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук «Методы исследования и решения нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма» (№AP 05132486, 2018-2020 гг.).

**Личный вклад автора** заключается в том, что все результаты, приведенные в диссертации, получены автором. Участие соавторов и научных консультантов заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих мероприятиях:

- Традиционная международная научная апрельская конференция. Институт математики и математического моделирования. Алматы, 10 апреля 2018 г.
- Конференция математиков Казахстана «Актуальные проблемы математики». Туркестан, 28-30 апреля 2018 г.
- Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications - MADEA 8. Bishkek Cholpon-Ata, Kyrgyzstan, June 17-23, 2018.
- Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях. Чернівці, Україна, 17-19 вересня 2018 р.
- VIII International Scientific Conference: Problems of Differential Equations, Analysis and Algebra. Aktobe, November 1, 2018.
- Annual International April Mathematical Conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan. Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. Almaty, April 3-5, 2019.
- International Conference of Young Mathematicians. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Ukraine, Kyiv, June 6-8, 2019.

- Международная научная конференция "Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики". Караганда, 12-13 июня 2019 г.
- 19th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. Spain, Cadiz, July 1-5, 2019.
- International Conference «Actual problems of analysis, differential equations and algebra» (EMJ-2019) dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. Nur-Sultan, October 16-19, 2019.
- Семинар по стохастическим дифференциальным уравнениям Киевского НУ им.Т.Шевченко (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор А.Н. Станжицкий).
- Научно-исследовательский семинар Отдела дифференциальных уравнений Института математики и математического моделирования КН МОН РК "Современные проблемы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений" (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Д.С. Джумабаев).
- Научный семинар кафедры математики АРГУ им.К. Жубанова «Прикладная математика и информатика» (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Ж.А. Сартабанов).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 16 работ [103-118], в том числе одна публикация в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе Scopus [115], две публикации в рейтинговых научных журналах, индексируемых в базе Web of Science [103, 117], одна публикация в журнале, индексируемом в базе ZbMath [116], 2 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных научных результатов научной деятельности [104, 110], 10 публикаций в материалах международных конференций [105-109, 111-114, 118], в том числе 3 публикации в материалах зарубежных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников из 118 работ и одного приложения. Нумерация формул, теорем, следствий и определений трехзначная: первое число означает номер раздела, второе – номер подраздела, третье – собственный номер формулы, теоремы, следствия, определения внутри подраздела. Работа изложена на 122 страницах.

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность своим научным консультантам докторам физико-математических наук, профессорам Джумабаеву Дулату Сыздыкбековичу и Станжицкому Александру Николаевичу за постановку задач, полезные замечания, советы при обсуждении полученных результатов и всестороннюю поддержку.

Автор благодарит Правительство Казахстана и Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова за поддержку и за возможность работать с зарубежным научным консультантом.

**Краткое содержание работы.** Введение содержит оценку современного состояния рассматриваемых задач, обоснование необходимости проведения научно-исследовательской работы. Во введении отражены актуальность и новизна темы, приведены основные цели и задачи исследования, положения, выносимые на защиту.

В первом разделе рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (0.1)$$

где $f: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, $n \times n$ матрицы $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1,m}$ непрерывны на $[0,T]$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}}|x_i|$.

Решением уравнения (0.1) является непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор-функция $x(t) \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая уравнению (0.1) (при этом в точках $t = 0$, $t = T$ уравнению (0.1) удовлетворяют односторонние производные $\dot{x}_{\text{прав.}}(0)$, $\dot{x}_{\text{лев.}}(T)$).

Уравнение (0.1) исследуем методом параметризации. Пусть $\Delta_N$ − разбиение интервала $[0,T)$ на $N$ частей: $[0,T) = \bigcup_{r=1}^N [t_{r-1},t_r)$, $\bar{h} = \max\limits_{r=\overline{1,N}}(t_r - t_{r-1})$. Сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[t_{r-1},t_r)$ обозначим через $x_r(t)$, равенством $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ введем новый неизвестный параметр, и произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [t_{r-1},t_r)$, $r = \overline{1,N}$. Получим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t,u_r + \lambda_r) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big[u_j(\tau) + \lambda_j\big]d\tau, \quad t \in [t_{r-1},t_r), \qquad (0.2)$$

с начальными условиями

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \qquad (0.3)$$

Задача (0.2), (0.3) называется специальной задачей Коши [68] для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами.

Решением специальной задачи Коши (0.2), (0.3) при фиксированном значений параметра $\lambda = \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in \mathbb{R}^{nN}$ является система функций $u[t,\lambda^*] = \big(u_1(t,\lambda^*), u_2(t,\lambda^*), \dots, u_N(t,\lambda^*)\big) \in \mathbb{C}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN})$, где компоненты $u_r(t,\lambda^*)$, $r = \overline{1,N}$ непрерывно дифференцируемы по $t$ на своих интервалах определения и удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений (0.2) при $\lambda = \lambda^*$ и начальным условиям (0.3).

По заданному вектору $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ и числу $\rho > 0$ построим множество $G^0(\rho) = \{(t,x): t \in [0,T], \|x - x_0(t)\| < \rho\}$, где кусочно-постоянная на $[0,T]$ вектор-функция $x_0(t)$ определяется равенствами $x_0(t) = \lambda_r^{(0)}$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$ и $x_0(T) = \lambda_N^{(0)}$.

**Условие 0.1.** *Пусть выполняются следующие неравенства:*

*(1)* $\|f(t,x)\| \le M_0$, $(t,x) \in G^0(\rho)$, $M_0 - const$;

*(2)* $M_1\bar{h} = \left[M_0 + K_0\left(\rho + \|\lambda^{(0)}\|\right)\right]\bar{h} < \rho$,

*где*

$$K_0 = \sum_{k=1}^{m} \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(\tau)\| d\tau.$$

Построим следующие множества:

$$G_p^0(\rho) = \left\{(t,x): t \in \left[t_{p-1}, t_p\right), \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1\left(t_p - t\right)\right\}, \quad p = \overline{1, N-1},$$

$G_N^0(\rho) = \{(t,x): t \in [t_{N-1}, t_N], \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1(t_N - t)\}$, и

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

Далее при решении краевой задачи для уравнения (0.1), мы используем предельные значения $\lim\limits_{t\to t_r - 0} u_r(t,\lambda)$, $r = \overline{1,N}$, решения задачи (0.2), (0.3). Поэтому рассмотрим следующую специальную задачу Коши на замкнутых подинтервалах:

$$\frac{dv_r}{dt} = f(t, v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[v_j(\tau) + \lambda_j\right] d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad (0.4)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \quad (0.5)$$

Если системы функций $u[t,\lambda] = \left(u_1(t,\lambda), u_2(t,\lambda), \dots, u_N(t,\lambda)\right)$ и $v[t,\lambda] = \left(v_1(t,\lambda), v_2(t,\lambda), \dots, v_N(t,\lambda)\right)$ являются решениями задач (0.2), (0.3) и (0.4), (0.5) соответственно, то справедливы соотношения

$$u_r(t,\lambda) = v_r(t,\lambda), \quad t \in [t_{r-1}, t_r),$$

$$\lim_{t\to t_r - 0} u_r(t,\lambda) = v_r(t_r,\lambda), \quad r = \overline{1,N}.$$

Возьмем числа $\rho_\lambda = \rho - M_1\bar{h}.$, $\rho_v = M_1\bar{h}$ и построим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}: \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda, \quad r = \overline{1, N}\right\}.$$

$$S(0, \rho_v) = \{v[t] \in \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}): \|v[\cdot]\|_3 < \rho_v\}.$$

Введем следующие обозначения:
$G(\Delta_N) = \left(G_{p,k}(\Delta_N)\right) - nm \times nm$ матрица, состоящая из $n \times n$ матриц

$$G_{p,k}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} \varphi_k(s) ds d\tau, \quad p, k = \overline{1, m}.$$

Если матрица $I - G(\Delta_N)$ обратима, то обратную матрицу можно представить в виде $[I - G(\Delta_N)]^{-1} = \left(R_{k,p}(\Delta_N)\right)$, $k, p = \overline{1, m}$, где $I -$ единичная матрица размерности $nm$, $R_{k,p}(\Delta_N) -$ квадратные матрицы размерности $n$.

В следующем утверждении устанавливается достаточные условия существования единственного решения специальной задачи Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметрами (0.4), (0.5).

**Теорема 0.1.** *Пусть выполнено условие 0.1, матрица $I - G(\Delta_N)$ обратима и справедливы следующие неравенства:*

(i) $\|f(t, x') - f(t, x'')\| \le L_0\|x' - x''\|$, $L_0 - const$, $(t, x'), (t, x'') \in G^0(\rho)$;

(ii) $(L_0 + K_0)\bar{h} < 1$;

(iii) $\chi\left(M_0 + K_0\left(\rho_\lambda + \|\lambda^{(0)}\|\right)\right)\bar{h} < \rho_v$, *где*

$$\chi = 1 + \bar{h}\sum_{k=1}^{m} \max_{t\in[0,T]}\|\varphi_k(t)\| \sum_{p=1}^{m} \left\|R_{k,p}(\Delta_N)\right\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\|\psi_p(s)\right\| ds.$$

*Тогда для любого $\hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ существует система функций $v[t, \hat{\lambda}] = \left(v_1(t, \hat{\lambda}), v_2(t, \hat{\lambda}), \dots, v_N(t, \hat{\lambda})\right) -$ единственное решение специальной задачи Коши (0.4), (0.5) при $\lambda = \hat{\lambda}$ в $S(0, \rho_v)$.*

По заданному вектору $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$, системе функций $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t)\right) \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$, и числам $\rho > 0$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$ построим следующие множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}: \max_{r=\overline{1,N}} \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda\right\},$$

$$S\big(u^{(0)}[t], \rho_u\big) = \Big\{u[t] \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}):\ \big\|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\big\|_2 < \rho_u\Big\},$$

$$S(x_0(t), \rho) = \{x(t) \in \mathbb{PC}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^n): \|x - x_0\|_5 < \rho\},$$

$$G^0(\rho) = \{(t,x): t \in [0,T], \|x - x_0(t)\| < \rho\},$$

$$G_r^0(\rho) = \{(t,x): t \in [t_{r-1}, t_r), ||x - x_0(t)|| < \rho\}, \quad r = \overline{1,N}\},$$

где функция $x_0(t)$, определяемая равенствами

$$x_0(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N},$$

$$x_0(T) = \lambda_N^{(0)} + \lim_{t \to T-0} u_N^{(0)}(t),$$

принадлежит пространству $\mathbb{PC}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^n)$.

**Условие 0.2.** *Функция $f(t,x)$ в $G^0(\rho)$ имеет равномерно непрерывную частную производную $f_x'(t,x)$.*

Полагаем, что $\mathbb{X} = \{v[t] = \big(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\big) \in \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}):$ $v_r(t_{r-1}) = 0,\ r = \overline{1,N}\}$, $\mathbb{Y} = \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$, и введем линейный оператор $H: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ следующим образом:

$$Hv[t] = w^{(1)}[t],$$

где

$$w^{(1)}[t] = \Big(w_1^{(1)}(t), w_2^{(1)}(t), \dots, w_N^{(1)}(t)\Big),$$

$$w_r^{(1)}(t) = \dot{v}_r(t) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) v_j(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1,N}$$

$D(H) = \{v[t] = \big(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\big) \in \mathbb{X}$, где функция $v_r(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,N}\}$ – область определения оператора $H$.

Теперь для любого $\lambda = \hat{\lambda} \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ специальную задачу Коши (0.4), (0.5) запишем в виде нелинейного операторного уравнения

$$Hv[t] + F\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = 0 \tag{0.6}$$

где

$$F(v[t],\hat{\lambda}) = \left(w_1^{(2)}(t,\hat{\lambda}), w_2^{(2)}(t,\hat{\lambda}), \dots, w_N^{(2)}(t,\hat{\lambda})\right),$$

$$w_r^{(2)}(t,\hat{\lambda}) = -f(t, v_r(t) + \hat{\lambda}_r) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) d\tau \hat{\lambda}_j,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1,N}.$$

Условие 0.2 обеспечивает существование и равномерную непрерывность $F'_v(v[t],\hat{\lambda})$ – производной Фреше в $S(v^{(0)}[t],\rho_u)$, которую можно записать в виде:

$$F'_v(v[t],\hat{\lambda}) = diag\left\{-\frac{\partial f(t, v_1(t) + \hat{\lambda}_1)}{\partial x}, \dots, -\frac{\partial f(t, v_N(t) + \hat{\lambda}_N)}{\partial x}\right\}.$$

Пусть $\mathbb{L}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$ – пространство линейных ограниченных операторов $\Lambda: \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ с индуцированной нормой.

Фиксируем $\hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)$, $\hat{v}^{(0)}[t] \in S(v^{(0)}[t],\rho_u) \cap D(H)$, и $\hat{\rho}_u > 0$.

**Теорема 0.2.** *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) $F'_v(v[t],\hat{\lambda})$ *равномерно непрерывна в* $S(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u)$;

(ii) *оператор* $H + F'_v(v[t],\hat{\lambda}): \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *ограниченно обратим и* $\left\|[H + F'_v(v[t],\hat{\lambda})]^{-1}\right\|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y},\mathbb{X})} \le \hat{\chi}$ *для всех* $v[t] \in S(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u)$, $\hat{\chi}$ – *const;*

(iii) $\hat{\chi}\left\|H\hat{v}^{(0)}[\cdot] + F(\hat{v}^{(0)}[\cdot],\hat{\lambda})\right\|_3 < \hat{\rho}_u$.

*Тогда существуют числа* $\alpha_k \ge 1$, $k = 0,1,2,\dots$, *такие, что последовательность* $\{\hat{v}^{(k)}[t]\}$, *определяемая итерационным процессом:*

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = \hat{v}^{(k)}[t] - \frac{1}{\alpha_k}\left[H + F'_v(\hat{v}^{(k)}[t],\hat{\lambda})\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[H\hat{v}^{(k)}[t] + F(\hat{v}^{(k)}[t],\hat{\lambda})\right], \quad k = 0,1,2,\dots,$$

*содержится в* $S(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u)$, *сходится к* $v[t,\hat{\lambda}]$ – *изолированному решению уравнения (0.6) в* $S(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u)$ *и справедлива оценка*

$$\left\|v[\cdot,\hat{\lambda}] - \hat{v}^{(0)}[\cdot]\right\|_3 \le \chi\left\|H\hat{v}^{(0)}[\cdot] + F(\hat{v}^{(0)}[\cdot],\hat{\lambda})\right\|_3.$$

Рассмотрим специальную задачу Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметрами

$$\frac{d\vartheta_r}{dt} = f'_x(t, v_r(t) + \hat{\lambda}_r)\vartheta_r +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\vartheta_j(\tau)d\tau+g_r(t),\quad t\in[t_{r-1},t_r], \tag{0.8}$$

$$\vartheta_r(t_{r-1})=0,\quad r=\overline{1,N}. \tag{0.9}$$

Теорема 0.2 и взаимосвязь между специальной задачей Коши (0.4), (0.5) и операторным уравнением (0.6) дают следующее утверждение

**Теорема 0.3.** *Пусть выполнено условие 0.2 специальная задача Коши (0.8), (0.9) корректно разрешима с константой* $\hat{\chi}$ *для всех* $v[t]\in S\left(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u\right)$ *и справедливо следующее неравенство:*

$$\hat{\chi}\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\Bigg\|\dot{\hat{v}}_r^{(0)}(t)-f\left(t,\hat{v}_r^{(0)}(t)+\hat{\lambda}_r\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[\hat{v}_j^{(0)}(\tau)+\hat{\lambda}_j\right]d\tau\Bigg\|<\hat{\rho}_u.$$

*Тогда существуют числа* $\alpha_k\geq 1$, $k=0,1,2,\ldots$, *такие, что последовательность* $\left\{\hat{v}^{(k)}[t]\right\}$, *определяемая итерационным процессом*

$$\hat{v}^{(k+1)}[t]=\hat{v}^{(k)}[t]+\Delta v^{(k)}\left[t,\hat{\lambda}\right],\quad k=0,1,2,\ldots,$$

*где* $\Delta v^{(k)}\left[t,\hat{\lambda}\right]$ *–решение специальной задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений:*

$$\frac{d\Delta v_r}{dt}=f_x'\left(t,v_r^{(k)}\left(t,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_N\right)+\hat{\lambda}_r\right)\Delta v_r+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\Delta v_j(\tau)d\tau-\frac{1}{\alpha_k}\left\{\dot{v}_r^{(k)}\left(t,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_N\right)-\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[v_j^{(k)}\left(\tau,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_N\right)+\hat{\lambda}_j\right]d\tau-$$

$$\left.-f\left(t,v_r^{(k)}\left(t,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_N\right)+\hat{\lambda}_r\right)\right\},\quad t\in[t_{r-1},t_r],$$

$$\Delta v_r\big(t_{r-1}, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N\big) = 0, \quad r = \overline{1, N},$$

*содержится в* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$ *сходится к* $v\big[t, \hat{\lambda}\big] -$ *изолированному решению задачи (0.4), (0.5), принадлежащее* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$ *и*

$$\big\|v\big[\cdot, \hat{\lambda}\big] - \hat{v}^{(0)}[\cdot]\big\|_3 \le \hat{\chi} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \bigg\|\hat{v}_r^{(0)}(t) - f\left(t, \hat{v}_r^{(0)}(t) + \hat{\lambda}_r\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) \left[\hat{v}_j^{(0)}(\tau) + \hat{\lambda}_j\right] d\tau \Bigg\|.$$

Во втором разделе с помощью решения специальной задачи Коши (0.4), (0.5) построено $\Delta_N$ общее решение уравнения (0.1) и устанавливаются его свойства. Учитывая взаимосвязь между специальными задачами Коши (0.2), (0.3) и (0.4), (0.5) даем следующее определение.

**Определение 0.1.** *Пусть система функций* $v[t, \lambda] = \big(v_1(t, \lambda), v_2(t, \lambda), \dots, v_N(t, \lambda)\big) \in S(0, \rho_v)$ *является решением специальной задачи Коши (0.4), (0.5) с параметром* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$. *Тогда функция* $x(\varDelta_N, t, \lambda)$, *определяемая равенствами*

$x(\varDelta_N, t, \lambda) = \lambda_r + v_r(t, \lambda)$ *для* $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, *и*

$x(\varDelta_N, T, \lambda) = \lambda_N + v_N(T, \lambda)$,

*называется* $\varDelta_N$ *общим решением уравнения (0.1) в* $G^0(\varDelta_N, \rho)$.

Предположим, что условия теоремы 0.1 выполнены и $x(\Delta_N, t, \lambda) - \Delta_N$ общее решение (0.1) в $G^0(\Delta_N, \rho)$.

**Теорема 0.4.** *Пусть задана кусочно-непрерывная на* $[0, T]$, *с возможными точками разрыва* $t = t_p$, $p = \overline{1, N-1}$ *функция* $\tilde{x}(t)$ *и* $\big(t, \tilde{x}(t)\big) \in G^0(\varDelta_N, \rho)$. *Предположим, что функция* $\tilde{x}(t)$ *имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению (0.1) при всех* $t \in (0, T)\backslash\big\{t_p, p = \overline{1, N-1}\big\}$. *Тогда существует единственный* $\tilde{\lambda} = \big(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ *такой, что равенство* $x\big(\varDelta_N, t, \tilde{\lambda}\big) = \tilde{x}(t)$ *выполняется для всех* $t \in [0, T]$.

**Следствие 0.1.** *Пусть* $x^*(t) -$ *решение уравнения (0.1) и пара* $\big(t, x^*(t)\big) \in G^0(\varDelta_N, \rho)$. *Тогда существует единственный вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ *такой, что равенство* $x(\varDelta_N, t, \lambda^*) = x^*(t)$ *выполняется для всех* $t \in [0, T]$.

Рассматривается нелинейная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (0.1) с краевым условием

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{0.10}$$

где $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны; $n \times n$ матрицы $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1, m}$, непрерывны на $[0, T]$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

$\Delta_N$ общее решение уравнения (0.1) позволяет свести разрешимость краевой задачи (0.1), (0.10) к разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров

$$Q_*(\Delta_N; \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{0.11}$$

**Теорема 0.5.** *Пусть функция $x^*(t)$ является решением задачи (0.1), (0.10) и $\big(t, x^*(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. Тогда вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ с элементами $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$, является решением системы (0.11). И, обратно, если $\tilde{\lambda} = \big(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ – решение системы (0.11), то функция $\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \lambda)$ является решением задачи (0.1), (0.10) и $\big(t, \tilde{x}(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.*

Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (0.11) используем следующее утверждение.

**Теорема 0.6.** *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) *матрица Якоби $\frac{\partial Q_*(\Delta_N; \lambda)}{\partial \lambda}$ равномерно непрерывна в $S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$;*

(ii) $\frac{\partial Q_*(\Delta_N; \lambda)}{\partial \lambda}$ *обратима и $\left\| \left[ \frac{\partial Q_*(\Delta_N; \lambda)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \leq \gamma^*$ для всех $\lambda \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$, $\gamma^*$ – const;*

(iii) $\gamma^* \big\| Q_*\big(\Delta_N; \lambda^{(0)}\big) \big\| < \rho_\lambda$.

*Тогда существует единственное $\alpha_0 \geq 1$ такое, что для любого $\alpha \geq \alpha_0$ последовательность $\big\{\lambda^{(k+1)}\big\}$, определяемая итерационным процессом*

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial Q_*\big(\Delta_N; \lambda^{(k)}\big)}{\partial \lambda} \right]^{-1} Q_*\big(\Delta_N; \lambda^{(k)}\big), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

*содержится в $S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$, сходится к $\lambda^*$ – изолированному решению уравнения (0.11) в $S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ и справедлива оценка*

$$\big\| \lambda^* - \lambda^{(0)} \big\| \leq \gamma^* \big\| Q_*\big(\Delta_N; \lambda^{(0)}\big) \big\|.$$

В этом разделе также рассматривается квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int\limits_0^T \psi_k(\tau) x(\tau) d\tau + f_0(t) + \varepsilon f(t, x), \tag{0.12}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $n \times n$ матрицы $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1,m}$ и $n$ вектор $f_0(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $f: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Применяя метод параметризации (см. [69, с.345]) к уравнению (0.12) для $\Delta_N$ разбиения получим специальную задачу Коши с параметрами вида

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[u_j(\tau) + \lambda_j\right] d\tau + f_0(t) +$$

$$+\varepsilon f(t, u_r + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{0.13}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \tag{0.14}$$

Пусть $y(\Delta_N, t, \lambda) -$ $\Delta_N$ общее решение линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) y(\tau) d\tau + f_0(t), \quad t \in [0,T], \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad 0.15)$$

Уравнение (0.15) сведется к специальной задаче Коши

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)(v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[v_j(\tau) + \lambda_j\right] d\tau +$$

$$+f_0(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{0.16}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \tag{0.17}$$

Для вектора $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ и чисел $\rho_\lambda > 0$, $\rho > \rho_\lambda$, $\rho_v = \rho - \rho_\lambda$, выберем кусочно-непрерывную на $[0,T]$ функцию $y^{(0)}(t) = y\left(\Delta_N, t, \lambda^{(0)}\right)$, систему функций $v^{(0)}[t] = \left(v_1^{(0)}(t), v_2^{(0)}(t), \dots, v_N^{(0)}(t)\right)$ с элементами $v_r^{(0)}(t) = y^{(0)}(t) - \lambda_r^{(0)}$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, и составим следующие множества:

$$G^0(\rho) = \left\{(t,x): t \in [0,T], \left\|x - y^{(0)}(t)\right\| < \rho\right\},$$

$$S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}: \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda, \quad r = \overline{1,N}\right\},$$

$$S\big(v^{(0)}[t],\rho_v\big)=\Big\{u[t]\in\mathbb{C}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN}):\big\|u[\cdot]-v^{(0)}[\cdot]\big\|_2<\rho_v\Big\},$$

$$G_p^0(\rho)=\big\{(t,x):t\in\big[t_{p-1},t_p\big),\big\|x-y^{(0)}(t)\big\|<\rho\big\},\quad p=\overline{1,N-1},$$

$G_N^0(\rho)=\big\{(t,x):t\in[t_{N-1},t_N],\big\|x-y^{(0)}(t)\big\|<\rho\big\}$, и

$$G^0(\Delta_N,\rho)=\bigcup_{r=1}^{N}G_r^0(\rho).$$

Задачу (0.13), (0.14) представим как операторное уравнение и для нахождения его решения применяем итерационный процесс. Введем линейный оператор $H:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ следующим образом:

$$Hu[t]=\Big(w_1^{(1)}(t),w_2^{(1)}(t),\dots,w_N^{(1)}(t)\Big),$$

где

$$w_r^{(1)}(t)=\dot{u}_r(t)-A(t)u_r-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)u_j(\tau)d\tau,$$

$$t\in[t_{r-1},t_r),\qquad r=\overline{1,N}.$$

Теперь мы можем записать специальную задачу Коши (0.13), (0.14) в виде нелинейного операторного уравнения

$$Hu[t]=\varepsilon F(u[t],\lambda)+F_0[t,\lambda],$$

где

$$F(u[t],\lambda)=\Big(w_1^{(2)}(t),w_2^{(2)}(t),\dots,w_N^{(2)}(t)\Big),$$

$$w_r^{(2)}(t)=f(t,u_r(t)+\lambda_r),\quad t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,N}.$$

**Теорема 0.7.** *Пусть специальная задача Коши (0.16), (0.17) корректно разрешима с константой $\chi$, и справедливы следующие неравенства:*

(i) $\|f(t,x')-f(t,x'')\|\le L\parallel x'-x''\parallel$, $L-const.$, $(t,x'),(t,x'')\in G^0(\rho)$;

(ii) $q_\varepsilon=\varepsilon\chi L<1$;

(iii) $\frac{1}{1-q_\varepsilon}\varepsilon\chi\max\limits_{r=\overline{1,N}}\sup\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|f(t,v_r(t,\lambda)+\lambda_r)\|<\rho_v$ *для всех* $\lambda\in S\big(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\big)$.

*Тогда для каждого* $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *существует единственная система функций* $u[t,\lambda,\varepsilon] = (u_1(t,\lambda,\varepsilon), u_2(t,\lambda,\varepsilon), \dots, u_N(t,\lambda,\varepsilon))$ – *решение специальной задачи Коши (0.13), (0.14) принадлежащий* $S(v^{(0)}[t], \rho_v)$ *и справедливо следующее неравенство*

$$\|u[\cdot,\lambda,\varepsilon] - v[\cdot,\lambda]\|_2 \leq \frac{1}{1-q_\varepsilon}\varepsilon\chi \underline{max}_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\|.$$

**Определение 0.2.** *Пусть система функций* $u[t,\lambda,\varepsilon] = (u_1(t,\lambda,\varepsilon), u_2(t,\lambda,\varepsilon), \dots, u_N(t,\lambda,\varepsilon)) \in S(v[t,\lambda], \rho_v)$ *является решением специальной задачи Коши (0.13), (0.14) при* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$. *Тогда функция* $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ *определяемая равенствами:*

$x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = \lambda_r + u_r(t,\lambda,\varepsilon)$ *для* $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, *и*

$$x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) = \lambda_N + \lim_{t\to T-0} u_N(t,\lambda,\varepsilon)$$

*называется* $\Delta_N$ *общим решением уравнения (0.12) в* $G^0(\Delta_N, \rho)$.

Из определения 0.2 и теоремы 0.7 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 0.8.** *В условиях теоремы 0.7 существует функция* $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ – *единственное* $\Delta_N$ *общее решение уравнения (0.12) в* $G^0(\Delta_N, \rho)$ *и эта функция может представлена в виде*

$$x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = y(\Delta_N, t, \lambda) + \Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon),$$

*где функция* $\Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ *составлена из равенств*

$\Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = u_r(t,\lambda,\varepsilon) - v_r(t,\lambda)$, *для* $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$,

$\Delta x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) = \lim_{t\to T-0} u_N(t,\lambda,\varepsilon) - \lim_{t\to T-0} v_N(t,\lambda)$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)\| \leq \frac{1}{1-q_\varepsilon}\varepsilon\chi \underline{\max}_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\|.$$

В подразделе 2.4 исследована разрешимость квазилинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f_0(t) + \varepsilon f(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n.$$

Раздел 3 посвящен разработке алгоритма нахождения решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения.

В подразделе 3.1 рассматривается специальная задача Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{du_r}{dt} = f_0(t, u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1\big(t, s, u_j(s) + \lambda_j\big)ds, \quad t \in [(r-1)h, rh), \tag{0.18}$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1, N}, \tag{0.19}$$

возникающая при применении метода параметризации к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t, x) + \int_0^T f_1\big(t, s, x(s)\big)ds, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $f_0: [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_1: [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны.

Разработан алгоритм нахождения численного решения задачи (0.18), (0.19).

В этом подразделе также предлагается алгоритм нахождения численного решения специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений с нелинейной дифференциальной частью

$$\frac{dv_r}{dt} = f(t, v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)[v_j(\tau) + \lambda_j]d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}.$$

Теорема 0.2 обеспечивает сходимость предложенного алгоритма.

В подразделе 3.2 разработан алгоритм нахождения решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (0.1), (0.10).

В подразделе 3.3 на основе метода продолжения по параметру предложен один подход к решению проблемы выбора начального приближения решения специальной задачи Коши (0.4), (0.5) и систем нелинейных алгебраических уравнений (0.11).

Поскольку

$$\int_0^t \varphi\big(t, s, x(s)\big)ds = \int_0^T \tilde{\varphi}\big(t, s, x(s)\big)ds,$$

где

$$\tilde{\varphi}\big(t,s,x(s)\big)=\begin{cases}\varphi\big(t,s,x(s)\big), & 0\le s\le t,\\ 0, & t<s\le T,\end{cases}$$

то интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра

$$\dot{x}=\varepsilon X\left(t,x,\int\limits_0^t \varphi\big(t,s,x(s)\big)ds\right)$$

является частным случаем интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\dot{x}=\varepsilon X\left(t,x,\int\limits_0^T \tilde{\varphi}\big(t,s,x(s)\big)ds\right).$$

Связи с этим подразделе 3.4 метод усреднения применен к исследованию существования решений краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. Показано, что если усредненная краевая задача имеет решение, то и исходная задача также имеет решение. Важно, что при этом усредненной для системы интегро-дифференциальных уравнений является более простая система обыкновенных дифференциальных уравнений.

# 1 МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЧАСТЬЮ

## 1.1 Общая схема метода параметризации для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau\,, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1.1.1)$$

где $f: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, $n \times n$ матрицы $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1,m}$ непрерывны на $[0,T]$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Решением уравнения (1.1.1) является непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор-функция $x(t) \in \mathbb{C}([0,T],\ \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая уравнению (1.1.1) (при этом в точках $t = 0, t = T$ уравнению (1.1.1) удовлетворяют односторонние производные $\dot{x}_{\text{прав.}}(0)$, $\dot{x}_{\text{лев.}}(T)$).

Пусть $\Delta_N$ $-$ разбиение интервала $[0,T)$ на $N$ частей:

$$[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [t_{r-1}, t_r)\,, \qquad \bar{h} = \max_{r=\overline{1,N}} (t_r - t_{r-1}).$$

По заданному вектору $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ и числу $\rho > 0$ построим множество:

$$G^0(\rho) = \{(t,x):\ \ t \in [0,T], \|x - x_0(t)\| < \rho\},$$

где кусочно-постоянная на $[0,T]$ вектор-функция $x_0(t)$ определяется равенствами $x_0(t) = \lambda_r^{(0)}$, $t \in [t_{r-1},\ t_r)$, $r = \overline{1,N}$ и $x_0(T) = \lambda_N^{(0)}$.

**Условие А.** *Пусть выполняются следующие неравенства:*

*(1)* $\|f(t,x)\| \le M_0$, $(t,x) \in G^0(\rho)$, $M_0 - const$;

*(2)* $M_1\overline{h} = \left[M_0 + K_0\left(\rho + \left\|\lambda^{(0)}\right\|\right)\right]\overline{h} < \rho$,

*где*

$$K_0 = \sum_{k=1}^{m} \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{j=1}^{N} \|\psi_k(\tau)\|\, d\tau.$$

Введем следующие множества:

$$G_p^0(\rho) = \{(t,x): t \in [t_{p-1}, t_p),\ \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1(t_p - t)\},\ p = \overline{1, N-1},$$

$$G_N^0(\rho) = \{(t,x): t \in [t_{N-1}, t_N], \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1(t_N - t)\},$$

и

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

Если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1.1) и $(t, x(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$, тогда функции $x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, являющиеся сужениями функции $x(t)$ на $[t_{r-1}, t_r)$, удовлетворяют нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) x_j(\tau) d\tau, \quad t \epsilon [t_{r-1}, t_r), \tag{1.1.2}$$

и $(t, x_r(t)) \in G_r^0(\rho)$, $r = \overline{1, N}$.

Если $x(t)$ решение уравнения (1.1.1), а $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ – система функций, составленная из его сужений на подинтервалах $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, то справедливы следующие равенства

$$\lim_{t \to t_p - 0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p), \quad p = \overline{1, N-1}. \tag{1.1.3}$$

Равенства (1.1.3) являются условиями непрерывности решения уравнения (1.1.1) во внутренних точках разбиения $\Delta_N$.

**Теорема 1.1.1.** *Пусть система функций* $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ *принадлежит пространству* $\mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$, *а пара* $(t, x_r(t))$ *– множеству* $G_r^0(\rho)$ *для всех* $r = \overline{1, N}$. *Предположим, что функции* $x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$ *удовлетворяют уравнениям (1.1.2) и условиям непрерывности (1.1.3). Тогда функция* $x^*(t)$, *определяемая равенствами* $x^*(t) = x_r(t)$, $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, *и* $x^*(T) = \lim_{t \to T-0} x_N(t)$, *непрерывна на* $[0, T]$, *непрерывно дифференцируема на* $(0, T)$, *удовлетворяет уравнению (1.1.1) и* $(t, x^*(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.

Доказательство. По предположению $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$. Следовательно, равенство $x^*(T) = \lim_{t \to T-0} x_N(t)$ и уравнение (1.1.2) обеспечивают непрерывность функции $x^*(t)$ на $[0, T]$. С учетом $(t, x_r(t)) \in G_r^0(\rho)$, пара $(t, x^*(t))$ принадлежит $G^0(\Delta_N, \rho)$. Поскольку функций $x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$удовлетворяют уравнениям (1.1.2), функция $x^*(t)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению (1.1.1) для всех $t \in (0,T) \setminus \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$. Существование и непрерывность $\dot{x}^*(t)$ в точках $t_p, p = \overline{1, N-1}$, следует из следующих равенств

$$\lim_{t \to t_p - 0} \dot{x}^*(t) = \lim_{t \to t_p - 0} \left[ f\big(t, x^*(t)\big) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) x^*(\tau) d\tau \right] =$$

$$= f\left(t, x^*(t_p)\right) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t_p) \int_0^T \psi_k(\tau) x^*(\tau) d\tau = \lim_{t \to t_p + 0} \dot{x}^*(t), \quad p = \overline{1, N-1}.$$

Эти соотношения показывают, что функция $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1.1) и во внутренних точках разбиения $\Delta_N$. Теорема 1.1.1 доказана.

Вводя дополнительные параметры $\lambda_r \mathrel{\widehat{=}} x_r(t_{r-1})$ и выполняя замену функции $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, получаем систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big[u_j(\tau) + \lambda_j\big] d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{1.1.4}$$

с начальными условиями

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \tag{1.1.5}$$

Задача (1.1.4), (1.1.5) называется специальной задачей Коши [68] для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами.

Решением специальной задачи Коши (1.1.4), (1.1.5) при фиксированном значении параметра $\lambda = \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in \mathbb{R}^{nN}$ является система функций $u[t, \lambda^*] = \big(u_1(t, \lambda^*), u_2(t, \lambda^*), \dots, u_N(t, \lambda^*)\big) \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$, где компоненты $u_r(t, \lambda^*)$, $r = \overline{1, N}$ непрерывно дифференцируемы по $t$ на своих интервалах определения и удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений (1.1.4) при $\lambda = \lambda^*$ и начальным условиям (1.1.5).

Система интегро-дифференциальных уравнений (1.1.2) эквивалентна специальной задаче Коши с параметрами (1.1.4), (1.1.5) в следующем смысле. Если система функций $\tilde{x}[t] = \big(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_N(t)\big)$ является решением уравнений (1.1.2), то система функций $u\big[t, \tilde{\lambda}\big] = \Big(u_1\big(t, \tilde{\lambda}\big), u_2\big(t, \tilde{\lambda}\big), \dots, u_N\big(t, \tilde{\lambda}\big)\Big)$, где $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}_r(t_{r-1})$, $u_r\big(t, \tilde{\lambda}\big) = \tilde{x}_r(t) - \tilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, N}$, будет решением специальной задачи Коши с параметрами (1.1.4), (1.1.5) при $\lambda = \tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in \mathbb{R}^{nN}$. И наоборот, если система функций $u[t,\lambda^*] = (u_1(t,\lambda^*), u_2(t,\lambda^*), \dots, u_N(t,\lambda^*))$ является решением специальной задачи Коши с параметрами (1.1.4), (1.1.5) при $\lambda = \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)$, то система функций $x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_N^*(t))$ с элементами $x_r^*(t) = \lambda_r^* + u_r(t,\lambda^*)$, $r = \overline{1,N}$, является решением уравнений (1.1.2).

## 1.2 Специальная задача Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметрами

При решении краевой задачи для уравнения (1.1.1), мы используем предельные значения $\lim\limits_{t \to t_r - 0} u_r(t,\lambda)$, $r = \overline{1,N}$, решения задачи (1.1.4), (1.1.5). Поэтому целесообразно рассмотреть следующую специальную задачу Коши:

$$\frac{dv_r}{dt} = f(t, v_r + \lambda_r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)[v_j(\tau) + \lambda_j] d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \tag{1.2.1}$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \tag{1.2.2}$$

Специальная задача Коши как и задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма не всегда разрешима. Поэтому в этом подразделе исследуются вопросы разрешимости специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2).

Очевидно, что если системы функций $u[t,\lambda] = (u_1(t,\lambda), u_2(t,\lambda) \dots, u_N(t,\lambda))$ и $v[t,\lambda] = (v_1(t,\lambda), v_2(t,\lambda) \dots, v_N(t,\lambda))$ являются решениями задач (1.1.4), (1.1.5) и(1.2.1), (1.2.2) соответственно, то

$$u_r(t,\lambda) = v_r(t,\lambda), \quad t \in [t_{r-1}, t_r),$$

$$\lim_{t \to t_r - 0} u_r(t,\lambda) = v_r(t_r,\lambda), \quad r = \overline{1,N}.$$

Возьмем числа $\rho_\lambda = \rho - M_1 \bar{h}$, $\rho_v = M_1 \bar{h}$ и построим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN} : \left\| \lambda_r - \lambda_r^{(0)} \right\| < \rho_\lambda, \qquad r = \overline{1,N} \right\},$$

$$S(0, \rho_v) = \left\{ v[t] \in \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}) : \|v[\cdot]\|_3 < \rho_v \right\}.$$

Для фиксированного параметра $\hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ получаем

$$\frac{dv_r}{dt} = f\big(t, v_r + \hat{\lambda}_r\big) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big[v_j(\tau) + \hat{\lambda}_j\big]d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad (1.2.3)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \qquad (1.2.4)$$

Вводим следующие обозначения: $G(\Delta_N) = \big(G_{p,k}(\Delta_N)\big) - nm \times nm$ матрица, состоящая из $n \times n$ матриц

$$G_{p,k}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} \varphi_k(s) ds d\tau, \quad p, k = \overline{1, m}.$$

Если матрица $I - G(\Delta_N)$ обратима, то обратную матрицу можно представить в виде $[I - G(\Delta_N)]^{-1} = \big(R_{k,p}(\Delta_N)\big)$, $k, p = \overline{1, m}$, где $I -$ единичная матрица размерности $nm$, $R_{k,p}(\Delta_N) -$ квадратные матрицы размерности $n$.

Следующее утверждение устанавливает достаточные условия существования единственного решения специальной задачи Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметрами (1.2.3), (1.2.4).

**Теорема 1.2.1.** *Пусть выполнено условие A, матрица $I - G(\Delta_N)$ обратима и справедливы следующие неравенства:*

(i) $\|f(t, x') - f(t, x'')\| \le L_0 \|x' - x''\|$, $L_0 - const$, $(t, x')$, $(t, x'') \in G^0(\rho)$;

(ii) $(L_0 + K_0)\overline{h} < 1$;

(iii) $\chi\Big(M_0 + K_0\big(\rho_\lambda + \|\lambda^{(0)}\|\big)\Big)\overline{h} < \rho_v$, *где*

$$\chi = 1 + \overline{h} \sum_{k=1}^{m} \max_{t \in [0,T]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{p=1}^{m} \big\|R_{k,p}(\Delta_N)\big\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\psi_p(s)\big\| ds.$$

*Тогда для любого $\hat{\lambda} \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ существует система функций $v\big[t, \hat{\lambda}\big] = \Big(v_1\big(t, \hat{\lambda}\big), v_2\big(t, \hat{\lambda}\big), \dots, v_N\big(t, \hat{\lambda}\big)\Big) -$ единственное решение специальной задачи Коши (1.2.3), (1.2.4) в $S(0, \rho_v)$.*

Доказательство. Поскольку матрица $I - G(\Delta_N)$ обратима, то в соответствии с результатами из [67, с.345-346], нелинейная специальная задача Коши (1.2.3), (1.2.4) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$v_r(t,\hat{\lambda}) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f\big(\tau, v_r(\tau) + \hat{\lambda}_r\big)d\tau + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau_1)d\tau_1 \hat{\lambda}_j d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \sum_{k=1}^{m} \psi_k(\tau)d\tau \sum_{p=1}^{m} R_{k,p}(\Delta_N) \sum_{r=1}^{N} \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau_2) \left\{ \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_2} f\big(\tau, v_r(\tau) + \hat{\lambda}_r\big)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_2} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau_1)\hat{\lambda}_j d\tau_1 d\tau \right\} d\tau_2, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1,N}. \quad (1.2.5)$$

Очевидно, что функции $v_r\big(t,\hat{\lambda}\big)$, принадлежат $\mathbb{C}([t_{r-1}, t_r],\ \mathbb{R}^n)$, $r = \overline{1,N}$. Обозначим через $V_r$ множество функций $v_r\big(t,\hat{\lambda}\big)$. Так как

$$\big\|v_r\big(t,\hat{\lambda}\big)\big\| \le \big[M_0 + K_0\big(\rho_\lambda + \big\|\lambda^{(0)}\big\|\big)\big]\bar{h} \times \left[1 + \bar{h} \sum_{k=1}^{m} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \|\varphi_k(t)\| \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{p=1}^{m} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \big\|R_{k,p}(\Delta_N)\big\| \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\psi_p(s)\big\| ds \right], \qquad (1.2.6)$$

множество $V_r$ равномерно ограничено на $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,N}$.

В силу (1.2.5) и (1.2.6) для точек $t'_r, t''_r \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,N}$ получаем неравенство

$$\big\|v_r\big(t''_r,\hat{\lambda}\big) - v_r\big(t'_r,\hat{\lambda}\big)\big\| = \left\| \int\limits_{t'_r}^{t''_r} f(\tau, v_r(\tau) + \hat{\lambda}_r)d\tau + \right.$$

$$+ \int\limits_{t'_r}^{t''_r} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau_1)d\tau_1 \hat{\lambda}_j d\tau + \int\limits_{t'_r}^{t''_r} \sum_{k=1}^{m} \psi_k(\tau)d\tau \sum_{p=1}^{m} R_{k,p}(\Delta_N) \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{N} \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau_2) \left\{ \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_2} f\big(\tau, v_r(\tau) + \hat{\lambda}_r\big)d\tau + \right.$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{\tau_2}\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\tau)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau_1)\hat{\lambda}_j d\tau_1 d\tau\Bigg\} d\tau_2\Bigg\| \le$$

$$\le\left[1+\bar{h}\sum_{k=1}^{m}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\|\varphi_k(t)\|\sum_{p=1}^{m}\|R_{k,p}(\Delta_N)\|\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\psi_p(s)\|ds\right]\times$$

$$\times\left[M_0+K_0\left(\rho_\lambda+\|\lambda^{(0)}\|\right)\right]|t_r''-t_r'|.$$

Следовательно, функции $v_r(t,\hat{\lambda})$, являются равностепенно непрерывными, и по теореме Арцела [93, с.207], каждое множество $V_r$, $r=\overline{1,N}$, компактно. Уравнению (1.2.5) запишем в виде операторного уравнения

$$v[t,\hat{\lambda}]=W(v[t,\hat{\lambda}]),$$

где

$$W(v[t,\hat{\lambda}])=\left(w_1^{(3)}(t,\hat{\lambda}),w_2^{(3)}(t,\hat{\lambda}),\dots,w_N^{(3)}(t,\hat{\lambda})\right),$$

$$w_r^{(3)}(t,\hat{\lambda})=\int_{t_{r-1}}^{t}f(\tau,v_r(\tau)+\hat{\lambda}_r)d\tau+\int_{t_{r-1}}^{t}\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\tau)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau_1)d\tau_1\hat{\lambda}_j d\tau+$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{t}\sum_{k=1}^{m}\psi_k(\tau)d\tau\sum_{p=1}^{m}R_{k,p}(\Delta_N)\sum_{r=1}^{N}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_p(\tau_2)\Bigg\{\int_{t_{r-1}}^{\tau_2}f(\tau,v_r(\tau)+\hat{\lambda}_r)d\tau+$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{\tau_2}\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\tau)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau_1)\hat{\lambda}_j d\tau_1 d\tau\Bigg\}d\tau_2,\quad t\in[t_{r-1},t_r],\quad r=\overline{1,N}.$$

Так как

$$\|v[\cdot,\hat{\lambda}]\|_3=\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\epsilon[t_{r-1},t_r]}\|v_r(t,\hat{\lambda})\|\le\left[M_0+K_0\left(\rho_\lambda+\|\lambda^{(0)}\|\right)\right]\bar{h}\times$$

$$\times\left[1+\bar{h}\sum_{k=1}^{m}\max_{t\in[0,T]}\|\varphi_k(t)\|\sum_{p=1}^{m}\|R_{k,p}(\Delta_N)\|\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\psi_p(s)\|ds\right]\le\rho_v,$$

оператор $W\left(v\left[t,\hat{\lambda}\right]\right)$ отображает множество $S(0,\rho_v)$ в себя. Поэтому по принципе Шаудера оператор $W\left(v\left[t,\hat{\lambda}\right]\right)$ имеет неподвижную точку $v\left[t,\hat{\lambda}\right] = \left(v_1\left(t,\hat{\lambda}\right), v_2\left(t,\hat{\lambda}\right), \dots, v_N\left(t,\hat{\lambda}\right)\right)$.

Докажем единственность решения. Предположим, что для $\hat{\lambda} \in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$, существует другое $\tilde{v}\left[t,\hat{\lambda}\right] \in S(0,\rho_v)$ − решение задачи (1.2.3), (1.2.4), т.е.

$$\tilde{v}_r(t,\hat{\lambda}) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f\left(\tau,\hat{\lambda}_r + \tilde{v}_r\left(\tau,\hat{\lambda}\right)\right) d\tau + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)\left[\hat{\lambda}_j + \tilde{v}_j\left(s,\hat{\lambda}\right)\right] ds d\tau, \quad t \in [t_{r-1},t_r], \quad r = \overline{1,N}.$$

Тогда

$$\left\|v_r(t,\hat{\lambda}) - \tilde{v}_r(t,\hat{\lambda})\right\| \le \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_0 \left\|v_r(\tau,\hat{\lambda}) - \tilde{v}_r(\tau,\hat{\lambda})\right\| d\tau + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k(\tau)\| \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(s)\| \left\|v_j(s,\hat{\lambda}) - \tilde{v}_j(s,\hat{\lambda})\right\| ds d\tau, \qquad t \in [t_{r-1},t_r], \qquad r = \overline{1,N},$$

и в силу условия A

$$\left\|v[\cdot,\hat{\lambda}] - \tilde{v}[\cdot,\hat{\lambda}]\right\|_3 \le (L_0 + K_0)\bar{h} \left\|v[\cdot,\hat{\lambda}] - \tilde{v}[\cdot,\hat{\lambda}]\right\|_3.$$

Из условия (ii) теоремы следует, что $v_r\left(t,\hat{\lambda}\right) = \tilde{v}_r\left(t,\hat{\lambda}\right)$ для всех $t \in [t_{r-1},t_r], r = \overline{1,N}$. Теорема 1.2.1 доказана.

### 1.3 Операторное уравнение для специальной задачи Коши при фиксированных значениях параметров

При решении специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2) при фиксированных значениях параметров $\lambda \in \mathbb{R}^{nN}$ воспользуемся итерационными процессами с демпфирующими множителями.

По заданному вектору $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$, системе функций $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t)\right) \in \mathbb{C}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN})$, и числам $\rho > 0$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$ построим следующие множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}: \max_{r=\overline{1,N}} \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda\right\},$$

$$S(u^{(0)}[t], \rho_u) = \left\{u[t] \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}): \left\|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\right\|_2 < \rho_u\right\},$$

$$S(x_0(t), \rho) = \{x(t) \in \mathbb{PC}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^n): \|x - x_0(t)\|_5 < \rho\},$$

$$G^0(\rho) = \{(t,x): t \in [0,T], \|x - x_0(t)\| < \rho\},$$

$$G_r^0(\rho) = \{(t,x): t \in [t_{r-1}, t_r), \|x - x_0(t)\| < \rho\}, \quad r = \overline{1,N},$$

где функция $x_0(t)$, определяемая равенствами

$$x_0(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N},$$

$$x_0(T) = \lambda_N^{(0)} + \lim_{t \to T-0} u_N^{(0)}(t),$$

принадлежит пространству $\mathbb{PC}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^n)$.

**Условие B.** *Функция* $f(t,x)$ *имеет равномерно непрерывную частную производную* $f'_x(t,x)$ *в* $G^0(\rho)$.

Одним из эффективных инструментов решения нелинейных краевых задач является сведение этих задач к нелинейным операторным уравнениям и применение итерационных процессов для нахождения их решений (см. [80, 82, 83]).

Равенствами $v_r^{(0)}(t) = u_r^{(0)}(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, и $v_r^{(0)}(t_r) = \lim_{t \to t_r - 0} u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1,N}$, определим элементы $v^{(0)}[t] = \left(v_1^{(0)}(t), \dots, v_N^{(0)}(t)\right) -$ начального приближения к решению задачи (1.2.1), (1.2.2). Предположим, что $S(v^{(0)}[t], \rho_u) = \left\{v[t] \in \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}): \left\|v[\cdot] - v^{(0)}[\cdot]\right\|_3 < \rho_u\right\}$ и $\rho_u + \rho_\lambda \le \rho$.

Задачу (1.2.1), (1.2.2) представим как операторное уравнение и используем результаты, полученных в [84, 86]. Полагаем, что

$\mathbb{X} = \left\{v[t] = \left(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\right) \in \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}): v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,N}\right\}$, $\mathbb{Y} = \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$, и введем линейный оператор $H: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ следующим образом:

$$Hv[t] = w^{(1)}[t],$$

где

$$w^{(1)}[t] = \left(w_1^{(1)}(t), w_2^{(1)}(t), \dots, w_N^{(1)}(t)\right),$$

$$w_r^{(1)}(t) = \dot{v}_r(t) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) v_j(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N}.$$

$D(H) = \{v[t] = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_N(t)) \in \mathbb{X}$, где функция $v_r(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, N}\} -$ область определения оператора $H$. $H -$ замкнутый неограниченный линейный оператор.

Теперь для любого $\lambda = \hat{\lambda} \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ специальную задачу Коши (1.2.1), (1.2.2) можем записать в виде нелинейного операторного уравнения

$$Hv[t] + F\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = 0 \tag{1.3.1}$$

где

$$F\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = \Big(w_1^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big), w_2^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big), \ldots, w_N^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big)\Big),$$

$$w_r^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big) = -f\big(t, v_r(t) + \hat{\lambda}_r\big) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) d\tau \hat{\lambda}_j,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N}.$$

Условие В обеспечивает существование и равномерную непрерывность производной Фреше

$$F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = diag\left\{-\frac{\partial f(t, v_1(t) + \hat{\lambda}_1)}{\partial x}, \ldots, -\frac{\partial f(t, v_N(t) + \hat{\lambda}_N)}{\partial x}\right\}$$

в $S\big(v^{(0)}[t], \rho_u\big)$ [80, с.646].

Замкнутый линейный оператор $H + F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big) \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ имеет ограниченный обратный, тогда и только тогда, когда линейное операторное уравнение

$$\Big(H + F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big)\Big)\vartheta = g[t], \quad g[t] = \big(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_N(t)\big) \in \mathbb{Y} \tag{1.3.2}$$

однозначно разрешимо. Уравнение (1.3.2) эквивалентно специальной задаче Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметрами

$$\frac{d\vartheta_r}{dt} = f'_x\big(t, v_r(t) + \hat{\lambda}_r\big)\vartheta_r +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\vartheta_j(\tau)d\tau + g_r(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \tag{1.3.3}$$

$$\vartheta_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \tag{1.3.4}$$

Задача (1.3.3), (1.3.4) является линеаризованной специальной задачей Коши для нелинейной задачи (1.2.1), (1.2.2). Необходимые и достаточные условия существования единственного решения специальной задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметрами получены в работах [67, 68, 73, 74].

**Определение 1.3.1.** *Задача (1.3.3), (1.3.4) называется корректно разрешимой, если для любого* $g[t] \in \mathbb{Y}$ *она имеет единственное решение* $\vartheta[t] \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$ *и выполняется неравенство* $\|\vartheta[\cdot]\|_3 \leq \chi \|g[\cdot]\|_3$, *где* $\chi -$ *постоянная, не зависящая от* $g[t]$.

Число $\chi$ называется константой корректной разрешимости задачи (1.3.3), (1.3.4).

Пусть $\mathbb{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) -$ пространство линейных ограниченных операторов $\Lambda: \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ с индуцированной нормой. Известно, что если задача (1.3.3), (1.3.4) корректно разрешима с постоянной $\chi$, то $\left\| \left[H + F'_v\big(v[t], \lambda\big)\right]^{-1} \right\|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y},\mathbb{X})} \leq \chi$.

Для расширения области начальных приближений, при которых сходится итерационный процесс, применяются демпфирующие множители.

Следующее утверждение устанавливает условия сходимости итерационных процессов с различными демпфирующими множителями и оценку разности между решением и начальным приближением.

Фиксируем $\hat{\lambda} \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$, $\hat{v}^{(0)}[t] \in S\big(v^{(0)}[t], \rho_u\big) \cap D(H)$, и $\hat{\rho}_u > 0$.

**Теорема 1.3.1.** *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) $F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big)$ *равномерно непрерывна в* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$;

(ii) *оператор* $H + F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big): \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *ограниченно обратим и* $\left\| \left[H + F'_v\big(v[t], \hat{\lambda}\big)\right]^{-1} \right\|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y},\mathbb{X})} \leq \hat{\chi}$ *для всех* $v[t] \in S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\big)$, $\hat{\chi} - const$;

(iii) $\hat{\chi} \left\| H\hat{v}^{(0)}[\cdot] + F\big(\hat{v}^{(0)}[\cdot], \hat{\lambda}\big) \right\|_3 < \hat{\rho}_u$.

*Тогда существуют числа* $\alpha_k \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *такие, что последовательность* $\{\hat{v}^{(k)}[t]\}$, *определяемая итерационным процессом:*

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = \hat{v}^{(k)}[t] - \frac{1}{\alpha_k}\left[H + F'_v\big(\hat{v}^{(k)}[t], \hat{\lambda}\big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[H\hat{v}^{(k)}[t] + F\left(\hat{v}^{(k)}[t], \hat{\lambda}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

*содержится в* $S\left(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\right)$, *сходится к* $v\left[t, \hat{\lambda}\right] -$ *изолированному решению уравнения (1.3.1) в* $S\left(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\right)$ *и справедлива оценка*

$$\left\|v\left[\cdot, \hat{\lambda}\right] - \hat{v}^{(0)}[\cdot]\right\|_3 \leq \chi\left\|H\hat{v}^{(0)}[\cdot] + F\left(\hat{v}^{(0)}[\cdot], \hat{\lambda}\right)\right\|_3. \qquad (1.3.5)$$

Теорема 2 [86, с.98] и теорема 3 [84, с.359] обеспечивают сходимость последовательности $\left\{\hat{v}^{(k)}[t]\right\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, к $v\left[t, \hat{\lambda}\right]$ −изолированному решению уравнения (1.3.1) в $S\left(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\right)$. Оценка (1.3.5) выводится аналогично оценке (1.3) в теореме 1 [94, с.39].

Теорема 1.3.1 и взаимосвязь между специальной задачей Коши (1.2.1), (1.2.2) и операторным уравнением (1.3.1) дают следующее утверждение.

**Теорема 1.3.2.** *Пусть выполнено условие B, специальная задача Коши (1.3.3), (1.3.4) корректно разрешима с константой* $\hat{\chi}$ *для всех* $v[t] \in S\left(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_u\right)$ *и справедливо следующее неравенство:*

$$\hat{\chi} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \left\| \dot{\hat{v}}_r^{(0)}(t) - f\left(t, \hat{v}_r^{(0)}(t) + \hat{\lambda}_r\right) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[\hat{v}_j^{(0)}(\tau) + \hat{\lambda}_j\right] d\tau \right\| < \hat{\rho}_u.$$

*Тогда существуют числа* $\alpha_k \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, *такие, что последовательность* $\left\{\hat{v}^{(k)}[t]\right\}$, *определяемая итерационным процессом*

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = \hat{v}^{(k)}[t] + \Delta v^{(k)}\left[t, \hat{\lambda}\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \qquad (1.3.6)$$

*где* $\Delta v^{(k)}\left[t, \hat{\lambda}\right]$ *−решение специальной задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений:*

$$\frac{d\Delta v_r}{dt} = f'_x\left(t, v_r^{(k)}\left(t, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N\right) + \hat{\lambda}_r\right)\Delta v_r +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\Delta v_j(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha_k}\left\{\dot{v}_r^{(k)}\left(t, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N\right) - \right.$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[v_j^{(k)}(\tau,\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_N)+\hat{\lambda}_j\right]d\tau-$$

$$-f\left(t,v_r^{(k)}(t,\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_N)+\hat{\lambda}_r\right)\Big\},\quad t\in[t_{r-1},t_r], \tag{1.3.7}$$

$$\Delta v_r(t_{r-1},\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_N)=0,\quad r=\overline{1,N}, \tag{1.3.8}$$

*содержится в* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u\big)$, *сходится к* $v\big[t,\hat{\lambda}\big]-$ *изолированному решению задачи (1.1.6), (1.1.7), принадлежащему* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_u\big)$ *и*

$$\left\|v[\cdot,\hat{\lambda}]-\hat{v}^{(0)}[\cdot]\right\|_3\le\hat{\chi}\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\dot{\hat{v}}_r^{(0)}(t)-f\left(t,\hat{v}_r^{(0)}(t)+\hat{\lambda}_r\right)-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[\hat{v}_j^{(0)}(\tau)+\hat{\lambda}_j\right]d\tau\right\|.$$

Для заданного $\varepsilon>0$ мы используем оценку $\left\|\Delta v^{(k)}[\cdot,\hat{\lambda}]\right\|_3\le\varepsilon$ в качестве критерия завершения итерационного процесса (1.3.6) для нахождения приближенного решения специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2).

В данном разделе установлены условия существования изолированного решения специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Изолированность решения специальной задачи Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в некотором шаре имеет такое же важное значение, как единственность решения специальной задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма.

# 2 $\Delta_N$ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЧАСТЬЮ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

## 2.1 Определение $\Delta_N$ общего решения для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и его свойства

Общее решение играет важную роль в исследовании и решении разных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Интегральный член существенно влияет на свойства уравнения (1.1.1). В частности, когда $f(t,x) = Ax + f_0(t)$ уравнение (1.1.1) может быть неразрешимым и не иметь решений без каких-либо дополнительных условий (см.[66, 67]). Следовательно, классическое общее решение существует не для всех интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Поэтому в[74] было введено новое понятие общего решения. Используя $\Delta_N -$ регулярное разбиение отрезка $[0,T]$ (см.[67, 73]), в [74] построено $x(\Delta_N, t, \lambda) - \Delta_N$ общее решение линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. В отличие от классического общего решения, $x(\Delta_N, t, \lambda) -$ общее решение существует для любого линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и зависит от произвольного параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}$.

В данном подразделе вводится новое понятие общего решения для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (1.1.1).

В подразделе 1.1 было показано, что методом параметризации интегро-дифференциальное уравнение (1.1.1) сводится к специальной задаче Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами (1.1.4), (1.1.5). Учитывая взаимосвязь между специальными задачами Коши (1.1.4), (1.1.5) и (1.2.1), (1.2.2) даем следующее определение.

**Определение 2.1.1.** *Пусть система функций* $v[t,\lambda] = \big(v_1(t,\lambda), v_2(t,\lambda), \dots, v_N(t,\lambda)\big) \in S(0,\rho_v)$ *является решением специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2) с параметром* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$. *Тогда функция* $x(\Delta_N, t, \lambda)$, *определяемая равенствами*

$$x(\Delta_N, t, \lambda) = \lambda_r + v_r(t,\lambda) \text{ для } t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1,N}, \text{ и}$$

$$x(\Delta_N, T, \lambda) = \lambda_N + v_N(T,\lambda)$$

*называется* $\Delta_N$ *общим решением уравнения (1.1.1) в* $G^0(\Delta_N, \rho)$.

Условия теоремы 1.2.2 обеспечивают существование и единственность $\Delta_N$ общего решения уравнения (1.1.1) в $G^0(\Delta_N, \rho)$. Для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$, функция $x(\Delta_N, t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1.1.1) при всех $t \in (0,T) \backslash \big\{t_p, p = \overline{1, N-1}\big\}$ и пара $\big(t, x(\Delta_N, t, \lambda)\big)$ принадлежит $G^0(\Delta_N, \rho)$.

Предположим, что условия теоремы 1.2.1 выполнены и $x(\Delta_N, t, \lambda) - \Delta_N$ общее решение уравнения (1.1.1) в $G^0(\Delta_N, \rho)$.

**Теорема 2.1.1.** *Пусть задана кусочно-непрерывная на* $[0,T]$, *с возможными точками разрыва* $t = t_p$, $p = \overline{1, N-1}$ *функция* $\tilde{x}(t)$ *и* $\big(t, \tilde{x}(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. *Предположим, что функция* $\tilde{x}(t)$ *имеет непрерывную производную и* *удовлетворяет уравнению (1.1.1) при всех* $t \in (0,T)\backslash\{t_p, p=\overline{1,N-1}\}$. *Тогда существует единственный* $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *такой, что равенство* $x(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}) = \tilde{x}(t)$ *выполняется для всех* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}_r(t)$ − сужение функций $\tilde{x}(t)$ на $[t_{r-1}, t_r)$, $r=\overline{1,N}$, и $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_N(t))$. Из условий теоремы следует, что функции $\tilde{x}_r(t)$, $r=\overline{1,N}$ удовлетворяют уравнению (1.1.2) и $(t, \tilde{x}_r(t)) \in G_r^0(\rho)$ для всех $r=\overline{1,N}$. Для функции $\tilde{x}(t)$ определим параметр $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ с компонентами $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}(t_{r-1})$. По теореме 1.2.1 в $S(0, \rho_v)$ существует $v[t, \tilde{\lambda}] = (v_1(t,\tilde{\lambda}), v_2(t,\tilde{\lambda}), \ldots, v_N(t,\tilde{\lambda}))$ − единственное решение специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2) при $\lambda = \tilde{\lambda}$. Поскольку

$$u_r(t,\tilde{\lambda}) = \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau, u_r(\tau,\tilde{\lambda}) + \tilde{\lambda}_r)d\tau +$$

$$+ \int_{t_{r-1}}^{t} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)[u_j(s,\tilde{\lambda}) + \tilde{\lambda}_j]dsd\tau,$$

и

$$\left\| \tilde{\lambda}_r + u_r(t,\tilde{\lambda}) - \lambda_r^{(0)} \right\| \le M_1(t-t_{r-1}) + \rho - M_1\bar{h} \le M_1(t-t_{r-1}) +$$

$$+\rho - M_1(t_r - t_{r-1}) = \rho - M_1(t_r - t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad r=\overline{1,N},$$

пара $(t, \tilde{\lambda}_r + u_r(t,\tilde{\lambda}))$ принадлежит $G_r^0(\rho)$, $r=\overline{1,N}$.

Определение 2.1.1 и взаимосвязь между решениями уравнений (1.1.2) и специальной задачи Коши (1.1.4), (1.1.5) приводят к следующим равенствам $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + v_r(t,\tilde{\lambda}) = x(\Delta_N, t, \tilde{\lambda})$ для $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r=\overline{1,N}$, и $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_N + v_N(T,\tilde{\lambda}) = x(\Delta_N, T, \tilde{\lambda})$, т.е. $\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \tilde{\lambda})$ при $t \in [0,T]$.

Покажем единственность $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ методом от противного. Предположим, что существует еще один вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ такой, что $\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \lambda^*)$ для всех $t \in [0,T]$. Тогда согласно определению 2.1.1 справедливы равенства $\tilde{x}(t) = \lambda_r^* + v_r(t,\lambda^*)$ при $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r=\overline{1,N}$, и $\tilde{x}(T) = \lambda_N^* + v_N(T,\lambda^*)$, где система функций $v[t,\lambda^*] = (v_1(t,\lambda^*), v_2(t,\lambda^*), \ldots, v_N(t,\lambda^*)) \in S(0,\rho_v)$ является решением специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2) при $\lambda = \lambda^*$. Теперь, используя начальные условия (1.2.2), получим $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}(t_{r-1}) = \lambda_r^* + v_r(t_{r-1}, \lambda^*) = \lambda_r^*$ для $r=\overline{1,N}$. Теорема 2.1.1 доказана.

**Следствие 2.1.1.** *Пусть* $x^*(t)-$ *решение уравнения (1.1.1) и пара* $(t, x^*(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. *Тогда существует единственный вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *такой, что равенство* $x(\Delta_N, t, \lambda^*) = x^*(t)$ *выполняется для всех* $t \in [0, T]$.

## 2.2 Построение $\Delta_N$ общего решения для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

Рассматривается квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f_0(t) + \varepsilon f(t, x), \qquad (2.2.1)$$

где $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $n \times n$ матрицы $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1, m}$ и $n$ вектор $f_0(t)$ непрерывны на $[0, T]$, $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, $\|x\| = \max\limits_{i=\underline{1,n}} |x_i|$.

Сначала в уравнении (2.2.1) положим $\varepsilon = 0$ и рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)y(\tau)d\tau + f_0(t), \quad t \in [0, T], \quad y \in \mathbb{R}^n. \qquad (2.2.2)$$

Применяя метод параметризации (см. [69, с.345]) к уравнению (2.2.2) для $\Delta_N$ разбиения получаем специальную задачу Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)(v_r + \lambda_r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[v_j(\tau) + \lambda_j\right]d\tau + f_0(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad (2.2.3)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \qquad (2.2.4)$$

Решением задачи (2.2.3), (2.2.4) для фиксированного параметра $\lambda = \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in \mathbb{R}^{nN}$ является система функций $v[t, \lambda^*] = \left(v_1(t, \lambda^*), v_2(t, \lambda^*), \dots, v_N(t, \lambda^*)\right) \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$, компоненты которой непрерывно дифференцируемы по $t$ на своих интервалах определения и удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений (2.2.3) при $\lambda = \lambda^*$ и начальным условиям (2.2.4).

Построим $nm \times nm$ матрицу

$$G(\Delta_N) = \left(G_{p,k}(\Delta_N)\right)$$

с элементами

$$G_{p,k}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau_1)\varphi_k(\tau_1)d\tau_1 d\tau, \quad p,k = \overline{1,m},$$

где $X_r(t) -$ фундаментальная матрица дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ на интервале $[t_{r-1}, t_r]$.

Предположим, что матрица $I - G(\Delta_N)$ обратима и ее обратную можно представить в виде

$$[I - G(\Delta_N)]^{-1} = \left(R_{k,p}(\Delta_N)\right), \qquad k,p = \overline{1,m},$$

где $I -$ единичная матрица размерности $nm$, $R_{k,p}(\Delta_N) -$ квадратные матрицы размерности $n$.

Обратимость матрицы $I - G(\Delta_N)$ обеспечивает существование системы функций $v[t,\lambda] = \left(v_1(t,\lambda), v_2(t,\lambda), \ldots, v_N(t,\lambda)\right) \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}) -$ единственного решения специальной задачи Коши (2.2.3), (2.2.4) для любых $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}$ и $f_0(t) \in \mathbb{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$. Кроме того, справедливо следующее неравенство

$$\|v[\cdot,\lambda]\|_2 \leq \chi \|F_0[\cdot,\lambda]\|_2,$$

где $\chi -$ постоянная, не зависящая от $\lambda \in \mathbb{R}^{nN}$ и $f_0(t) \in \mathbb{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$,

$$F_0[t,\lambda] = \left(F_{0,1}(t,\lambda), F_{0,2}(t,\lambda), \ldots, F_{0,N}(t,\lambda)\right) \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$$

с элементами

$$F_{0,r}(t,\lambda) = A(t)\lambda_r + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) d\tau \lambda_j + f_0(t), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}.$$

Число $\chi$ является константой корректной разрешимости специальной задачи Коши (2.2.3), (2.2.4). Поскольку $I - G(\Delta_N)$ обратима, то согласно полученным результатам в [74], существует $y(\Delta_N, t, \lambda)$ – единственное $\Delta_N$ общее решение уравнения (2.2.2) и

$$y(\Delta_N, t, \lambda) = \lambda_r + \sum_{j=1}^{N} d_{r,j}(\Delta_N, t)\lambda_j + b_r(\Delta_N, t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N},$$

$$y(\Delta_N, T, \lambda) = \lambda_N + \sum_{j=1}^{N} d_{N,j}(\Delta_N, T)\lambda_j + b_N(\Delta_N, T),$$

со следующими коэффициентами и правыми частями

$$d_{r,j}(\Delta_N, t) = X_r(t) \int_{t_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau) \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \left[ \sum_{p=1}^{m} R_{k,p}(\Delta_N) V_{p,j}(\Delta_N) + \right.$$

$$\left. + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad j \neq r,$$

$$d_{r,r}(\Delta_N, t) = X_r(t) \int_{t_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau) \left\{ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \left[ \sum_{p=1}^{m} R_{k,p}(\Delta_N) V_{p,r}(\Delta_N) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(\tau_1) d\tau_1 \right] + A(\tau) \right\} d\tau,$$

$$b_r(\Delta_N, t) = X_r(t) \int_{t_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau) \left[ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \sum_{p=1}^{m} R_{k,p}(\Delta_N) g_p(\Delta_N, f_0) + f_0(\tau) \right] d\tau,$$

$$V_{p,r}(\Delta_N) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau_1) A(\tau_1) d\tau_1 d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_p(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{j-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau_1) \varphi_k(\tau_1) d\tau_1 d\tau \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(\tau_2) d\tau_2,$$

$$g_p(\Delta_N, f) = \sum_{r=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau_1) f(\tau_1) d\tau_1 d\tau,$$

$$r, j = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Для вектора $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ и чисел $\rho_\lambda > 0$, $\rho > \rho_\lambda$, $\rho_v = \rho - \rho_\lambda$, выберем кусочно-непрерывную на $[0, T]$ функцию $y^{(0)}(t) = y\left(\Delta_N, t, \lambda^{(0)}\right)$, систему функций $v^{(0)}[t] = \left(v_1^{(0)}(t), v_2^{(0)}(t), \dots, v_N^{(0)}(t)\right)$ с элементами $v_r^{(0)}(t) = y^{(0)}(t) - \lambda_r^{(0)}$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, и составим следующие множества:

$$G^0(\rho) = \left\{(t, x) : t \in [0, T], \left\| x - y^{(0)}(t) \right\| < \rho\right\},$$

$$S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in R^{nN} : \left\| \lambda_r - \lambda_r^{(0)} \right\| < \rho_\lambda, r = \overline{1, N}\right\},$$

$$S\left(v^{(0)}[t], \rho_v\right) = \left\{u[t] \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}) : \left\| u[\cdot] - v^{(0)}[\cdot] \right\|_2 < \rho_v\right\},$$

$$G_p^0(\rho) = \left\{(t, x) : t \in \left[t_{p-1}, t_p\right), \left\| x - y^{(0)}(t) \right\| < \rho\right\}, \quad p = \overline{1, N-1},$$

$G_N^0(\rho) = \left\{(t, x) : t \in [t_{N-1}, t_N], \left\| x - y^{(0)}(t) \right\| < \rho\right\}$, и

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

Чтобы построить $\Delta_N$ общее решение уравнения (2.2.1), мы снова используем метод параметризации.

Если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнениям (2.2.1) и $(t, x(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$, то функции $x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, как сужение $x(t)$ на $[t_{r-1}, t_r)$, удовлетворяют системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t) x_r + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) x_j(\tau) d\tau + f_0(t) +$$

$$+\varepsilon f(t, x_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{2.2.5}$$

и $(t, x_r(t)) \in G_r^0(\rho)$, $r = \overline{1, N}$.

Введя параметры $\lambda_r \mathrel{\hat=} x_r(t_{r-1})$ и на каждом $r$ –ом интервале, произведя замену функции $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, в системе (2.2.5) получим специальную задачу Коши с параметрами вида

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big[u_j(\tau) + \lambda_j\big] d\tau + f_0(t) +$$

$$+\varepsilon f(t, u_r + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{2.2.6}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \tag{2.2.7}$$

Задачу (2.2.6), (2.2.7) представим как операторное уравнение и для нахождения его решения применяем итерационный процесс. Задаем $\mathbb{X} = \{u[t] = \big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)\big) \in \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})\colon\ u_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1, N}\}$, $\mathbb{Y} = \mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$ и введем линейный оператор $H\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ следующим образом:

$$Hu[t] = \Big(w_1^{(1)}(t), w_2^{(1)}(t), \dots, w_N^{(1)}(t)\Big),$$

где

$$w_r^{(1)}(t) = \dot{u}_r(t) - A(t)u_r - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) u_j(\tau) d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), \ \ r = \overline{1, N}.$$

Областью определения оператора $H$ является $D(H) = \{u[t] = \big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)\big) \in \mathbb{X}$, где $u_r(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}\}$. $H -$ замкнутый неограниченный линейный оператор.

Теперь мы можем записать специальную задачу Коши (2.2.6), (2.2.7) в виде нелинейного операторного уравнения

$$Hu[t] = \varepsilon F(u[t], \lambda) + F_0[t, \lambda],$$

где

$$F(u[t], \lambda) = \Big(w_1^{(2)}(t), w_2^{(2)}(t), \dots, w_N^{(2)}(t)\Big),$$

$$w_r^{(2)}(t) = f(t, u_r(t) + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}.$$

Пусть $\mathbb{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) -$ пространство линейных ограниченных операторов $\Lambda\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ с индуцированной нормой. Так как специальная задача Коши (2.2.3), (2.2.4) корректно разрешима с константой $\chi$, то оператор $H$ обратим и справедлива оценка $\|H^{-1}\|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y},\mathbb{X})} \leq \chi$.

**Теорема 2.2.1.** *Пусть специальная задача Коши (2.2.3), (2.2.4) корректно разрешима с константой $\chi$, и справедливы следующие неравенства:*

(i) $\|f(t,x') - f(t,x'')\| \leq L\|x' - x''\|$, $L - const$, $(t,x'),(t,x'') \in G^0(\rho)$;

(ii) $q_\varepsilon = \varepsilon\chi L < 1$;

(iii) $\frac{1}{1-q_\varepsilon}\, \varepsilon\chi \max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\| < \rho_v$ *для всех* $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$.

*Тогда для каждого $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ существует единственная система функций $u[t,\lambda,\varepsilon] = (u_1(t,\lambda,\varepsilon), u_2(t,\lambda,\varepsilon), \dots, u_N(t,\lambda,\varepsilon))$ − решение специальной задачи Коши (2.2.6), (2.2.7) принадлежащее $S(v^{(0)}[t], \rho_v)$ и справедливо следующее неравенство*

$$\|u[\cdot,\lambda,\varepsilon] - v[\cdot,\lambda]\|_2 \leq \frac{1}{1-q_\varepsilon}\varepsilon\chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\|. \qquad (2.2.9)$$

Доказательство. Так как оператор $H$ имеет ограниченный обратный, то уравнение (2.2.8) эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$u[t] = \varepsilon H^{-1}F(u[t],\lambda) + H^{-1}F_0[t,\lambda].$$

Для любого фиксированного $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ решение уравнения (2.2.8) находим итерационным процессом

$$u^{(0)}[t,\lambda,\varepsilon] = v[t,\lambda],$$

$$u^{(\nu+1)}[t,\lambda,\varepsilon] = \varepsilon H^{-1}F\left(u^{(\nu)}[t,\lambda,\varepsilon],\lambda\right) + H^{-1}F_0[t,\lambda], \quad \nu = 0,1,2,\dots. \qquad (2.2.10)$$

Используя наши предположения, мы получаем следующие неравенства:

$$\left\|u^{(1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon] - v[\cdot,\lambda]\right\|_2 = \varepsilon\|H^{-1}F(v[\cdot,\lambda],\lambda)\|_2 \leq$$

$$\leq \varepsilon\chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\|, \qquad (2.2.11)$$

$$\left\|u^{(2)}[\cdot,\lambda,\varepsilon] - u^{(1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\right\|_2 =$$

$$= \varepsilon\left\|H^{-1}F\left(u^{(1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon],\lambda\right) - H^{-1}F\left(u^{(0)}[\cdot,\lambda,\varepsilon],\lambda\right)\right\|_2 \leq$$

$$\leq \varepsilon\chi L\left\|u^{(1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon] - v[\cdot,\lambda]\right\|_2 \leq$$

$$\leq q_\varepsilon \varepsilon \chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t, v_r(t,\lambda)+\lambda_r)\|, \tag{2.2.12}$$

$$\left\|u^{(\nu+1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]-u^{(\nu)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\right\|_2 \leq$$

$$\leq \varepsilon\|H^{-1}\|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y},\mathbb{X})}\left\|F\left(u^{(\nu)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\right)-F\left(u^{(\nu-1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\right)\right\|_2 \leq$$

$$\leq \varepsilon\chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \left\|f\left(t, u_r^{(\nu)}(t,\lambda,\varepsilon)+\lambda_r\right)-f\left(t, u_r^{(\nu-1)}(t,\lambda,\varepsilon)+\lambda_r\right)\right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon\chi L\left\|u^{(\nu)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]-u^{(\nu-1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\right\|_2 \leq$$

$$\leq (q_\varepsilon)^\nu \varepsilon\chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t, v_r(t,\lambda)+\lambda_r)\|, \quad \nu=1,2,\ldots, \tag{2.2.13}$$

$$\left\|u^{(\nu+1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]-v[\cdot,\lambda]\right\|_2 \leq \left\|u^{(\nu+1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]-u^{(\nu)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\right\|_2 +$$

$$+\left\|u^{(\nu)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]-u^{(\nu-1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\right\|_2+\cdots+\left\|u^{(1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]-v[\cdot,\lambda]\right\|_2 \leq$$

$$\leq ((q_\varepsilon)^\nu+(q_\varepsilon)^{\nu-1}+\cdots+1)\varepsilon\chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t, v_r(t,\lambda)+\lambda_r)\| =$$

$$= \frac{1}{1-q_\varepsilon}\varepsilon\chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t, v_r(t,\lambda)+\lambda_r)\|. \tag{2.2.14}$$

Неравенства (2.2.11)-(2.2.14) и условия (ii), (iii) теоремы 2.2.1 обеспечивают сходимость итерационного процесса (2.2.10) к системе функций $u[t,\lambda,\varepsilon]$ – единственному решению уравнения (2.2.8) в $S\left(v^{(0)}[t],\rho_v\right)$ и справедливость оценки (2.2.9). Теорема доказана.

**Определение 2.2.1.** *Пусть система функций* $u[t,\lambda,\varepsilon] = (u_1(t,\lambda,\varepsilon), u_2(t,\lambda,\varepsilon),\ldots,u_N(t,\lambda,\varepsilon)) \in S\left(v^{(0)}[t],\rho_v\right)$ *является решением специальной задачи Коши (2.2.6), (2.2.7) при* $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$. *Тогда функция* $x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)$ *определяемая равенствами:*

$x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)=\lambda_r+u_r(t,\lambda,\varepsilon)$ *для* $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$,

$$x(\Delta_N,T,\lambda,\varepsilon)=\lambda_N+\lim_{t\to T-0} u_N(t,\lambda,\varepsilon),$$

*называется* $\Delta_N$ *общим решением уравнения (2.2.1) в* $G^0(\Delta_N,\rho)$.

Из определения 2.2.1 и теоремы 2.2.1 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.2.2.** *В условиях теоремы 2.2.1 существует функция* $x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)$ – *единственное* $\Delta_N$ *общее решение уравнения (2.2.1) в* $G^0(\Delta_N,\rho)$ *и эта функция имеет следующее представление в виде*

$$x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)=y(\Delta_N,t,\lambda)+\Delta x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon),$$

*где функция $\Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ составлена из равенств*

$$\Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = u_r(t, \lambda, \varepsilon) - v_r(t, \lambda), \text{ для } t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1, N},$$

$$\Delta x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) = \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon) - \lim_{t \to T-0} v_N(t, \lambda).$$

*Кроме того, справедлива оценка*

$$\sup_{t \in [0,T)} \|\Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)\| \leq \frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\|.$$

### 2.3 Постановка нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и ее сведение к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно произвольных векторов $\Delta_N$ общего решения

Рассматривается нелинейная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (2.3.1)$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \qquad (2.3.3)$$

где $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны; $n \times n$ матрицы $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1, m}$, непрерывны на $[0, T]$, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Решением задачи (2.3.1), (2.3.2) является непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$вектор-функция $x(t) \in \mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (2.3.1) (при этом в точках $t = 0$, $t = T$ системе (2.3.1) удовлетворяют односторонние производные $\dot{x}_{\text{прав.}}(0)$, $\dot{x}_{\text{лев.}}(T)$) и имеющая в точках $t = 0$, $t = T$ значения $x(0)$, $x(T)$, для которых справедливо равенство (2.3.2).

Пусть функция $x(t)$ является решением задачи (2.3.1), (2.3.2) и $\big(t, x(t)\big) \in G^0(\rho)$. Тогда функции $x_r(t)$ являющиеся сужениями функции $x(t)$ на подинтервалах $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, удовлетворяют системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) x_j(\tau) d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N} \quad (2.3.3),$$

нелинейному краевому условию

$$g\left[x_1(0), \lim_{t\to T-0} x_N(t)\right] = 0, \tag{2.3.4}$$

и условиям непрерывности решения во внутренних точках разбиения $\Delta_N$

$$\lim_{t\to t_p-0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p), \quad p = \overline{1, N-1}. \tag{2.3.5}$$

Кроме того, $\left(t, x_r(t)\right) \in G_r^{(0)}(\rho)$, $r = \overline{1, N}$.

$\Delta_N$ общее решение уравнения (2.3.1) позволяет свести разрешимость краевой задачи (2.3.1), (2.3.2) к разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров $\lambda_r \in \mathbb{R}^n$, $r = \overline{1, N}$. Для этой цели условия непрерывности решения (2.3.5) запишем в следующем виде:

$$\lim_{t\to t_p-0} x(\Delta_N, t, \lambda) - x\left(\Delta_N, t_p, \lambda\right) = 0, \quad p = \overline{1, N-1}, \tag{2.3.6}$$

где $x(\Delta_N, t, \lambda) -$ $\Delta_N$ общее решение уравнения (2.3.1). Подставляя соответствующие выражения $\Delta_N$ общего решения в краевое условие (2.3.4) и условия непрерывности (2.3.6), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$g[\lambda_1, \lambda_N + v_N(T, \lambda_1, \dots, \lambda_N)] = 0, \tag{2.3.7}$$

$$\lambda_p + v_p\left(t_p, \lambda_1, \dots, \lambda_N\right) - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = \overline{1, N-1}. \tag{2.3.8}$$

Запишем систему (2.3.7), (2.3.8) в виде:

$$Q_*(\Delta_N; \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{2.3.9}$$

Применение теоремы 2 [94, p.45] к уравнению (2.3.9) дает следующее утверждение.

**Теорема 2.3.1.** *Пусть функция* $x^*(t)$ *является решением задачи (2.3.1), (2.3.2) и пара* $\left(t, x^*(t)\right) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. *Тогда вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *является решением системы (2.3.9). Наоборот, если* $\tilde{\lambda} = \left(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\right) \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) -$ *решение системы (2.3.9), то функция* $\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \lambda)$ *является решением задачи (2.3.1), (2.3.2) и пара* $\left(t, \tilde{x}(t)\right) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.

Доказательство. Пусть $x^*(t) -$ решение задачи (2.3.1), (2.3.2), то справедливы равенства

$$g[x^*(0), x^*(T)] = 0, \tag{2.3.10}$$

$$\lim_{t\to t_p-0} x^*(t) - x^*\left(t_p\right) = 0, \quad p = \overline{1, N-1}. \tag{2.3.11}$$

Определим вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)$ с компонентами $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$. Из принадлежности $(t, x^*(t))$ множеству $G^0(\Delta_N, \rho)$ следует, что $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$. Так как функция $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3.1), то по теореме 2.1.1 равенство $x^*(t) = x(\Delta_N, t, \lambda^*)$ выполняется для всех $t \in [0, T]$. Подставляя соответствующие выражения $x(\Delta_N, t, \lambda^*)$ в (2.3.10) и (2.3.11) получим

$$g[\lambda_1^*, \lambda_N^* + v_N(T, \lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)] = 0,$$

$$\lambda_p^* + v_p(t_p, \lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*) - \lambda_{p+1}^* = 0, \quad p = \overline{1, N-1},$$

т.е. $\lambda^* \in \mathbb{R}^{nN}$ является решением системы (2.3.9).

Теперь предположим, что $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) -$ решение системы (2.3.9). Подставляя $\tilde{\lambda}$ в $\Delta_N$ общее решение, получаем функцию $\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \tilde{\lambda})$. Из условия A следует, что $(t, \tilde{x}(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. Поскольку из равенство $Q_*(\Delta_N; \tilde{\lambda}) = 0$ следуют равенства

$$g[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_N + v_N(T, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N)] = 0,$$

$$\tilde{\lambda}_p + v_p(t_p, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N) - \tilde{\lambda}_{p+1} = 0, \quad p = \overline{1, N-1},$$

и по определению 2.1.1 $\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}_r + v_r(t, \tilde{\lambda})$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, $\tilde{x}(T) = x(\Delta_N, T, \tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}_N + v_N(T, \tilde{\lambda})$, то функция $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет краевому условию (2.3.2) и условиям непрерывности (2.3.5). Поэтому в силу взаимосвязи между задачами (2.3.1), (2.3.2) и (2.3.3)-(2.3.5) функция $\tilde{x}(t)$ также удовлетворяет уравнению (2.3.1). Теорема доказана.

Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (2.3.9) используем следующее утверждение.

**Теорема 2.3.2.** *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) *матрица Якоби* $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda}$ *равномерно непрерывна в* $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$;

(ii) *матрица* $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda}$ *обратима и* $\left\| \left[\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda}\right]^{-1} \right\| \leq \gamma^*$ *для всех* $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, $\gamma^* - const$;

(iii) $\gamma^* \| Q_*(\Delta_N; \lambda^{(0)}) \| < \rho_\lambda$.

*Тогда существует единственное* $\alpha_0 \geq 1$ *такое, что для любого* $\alpha \geq \alpha_0$ *последовательность* $\{\lambda^{(k+1)}\}$, *определяемая итерационным процессом*

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)})}{\partial \lambda}\right]^{-1} Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \qquad (2.3.12)$$

*содержится в $S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$, сходится к $\lambda^*$ − изолированному решению уравнения (2.3.9) в $S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ и справедлива оценка*

$$\left\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\right\| \le \gamma^* \left\|Q_*\left(\Delta_N; \lambda^{(0)}\right)\right\|. \qquad (2.3.13)$$

Вектор $Q_*(\Delta_N; \lambda)$ в явном виде может быть найден в исключительных случаях. Однако, если $v\left[t, \hat{\lambda}\right] = \left(v_1\left(t, \hat{\lambda}\right), \dots, v_N\left(t, \hat{\lambda}\right)\right)$ является решением задачи (1.2.1), (1.2.2) при $\lambda = \hat{\lambda} \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$, то вектор $Q_*\left(\Delta_N; \hat{\lambda}\right)$ может быть определено в виде:

$$Q_*\left(\Delta_N; \hat{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} g\left[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_N + v_N\left(T, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N\right)\right] \\ \hat{\lambda}_1 + v_1\left(t_1, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N\right) - \hat{\lambda}_2 \\ \dots \\ \hat{\lambda}_{N-1} + v_{N-1}\left(t_{N-1}, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N\right) - \hat{\lambda}_N \end{pmatrix}.$$

Пусть система функций $v[t, \lambda] = \left(v_1(t, \lambda), \dots, v_N(t, \lambda)\right)$ является решением специальной задачи Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1.2.3), (1.2.4), т.е.

$$\frac{dv_r(t, \lambda_1, \dots, \lambda_N)}{dt} = f(t, v_r(t, \lambda_1, \dots, \lambda_N) + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \times$$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\left[v_j(\tau, \lambda_1, \dots, \lambda_N) + \lambda_j\right] d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad (2.3.14)$$

$$v_r(t_{r-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \qquad (2.3.15)$$

Ниже мы составим задачу, которая позволит нам найти частные производные функций $v_r(t, \lambda)$, $r = \overline{1, N}$ по параметрам $\lambda_i$, $i = \overline{1, N}$.

При условиях теоремы 1.3.2, по теореме Пеано [95, с.119] существуют частные производные

$$\frac{\partial v_r(t, \lambda_1, \dots, \lambda_N)}{\partial \lambda_i}, \quad r, i = \overline{1, N},$$

для всех $\lambda \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$.

Дифференцирование (2.3.14) и (2.3.15) по $\lambda_i$, $i = \overline{1, N}$, дает

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v_r(t,\lambda_1,\dots,\lambda_N)}{\partial\lambda_i}\right) = f_x'(t, v_r(t,\lambda_1,\dots,\lambda_N) + \lambda_r) \times$$

$$\times\left[\frac{\partial v_r(t,\lambda_1,\dots,\lambda_N)}{\partial\lambda_i} + \sigma_{ri}\right] + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial v_j(\tau,\lambda_1,\dots,\lambda_N)}{\partial\lambda_i}d\tau + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_k(\tau)d\tau,\quad t\in[t_{r-1},t_r],$$

$$\frac{\partial v_r(t_{r-1},\lambda_1,\dots,\lambda_N)}{\partial\lambda_i} = 0,\quad r,i=\overline{1,N},$$

где

$$\sigma_{ri} = \begin{cases} I, & r=i,\quad \text{где}\quad I - \text{единичная матрица размерности } n, \\ O, & r\neq i,\quad \text{где}\quad O - n\times n \text{ нулевая матрица.}\end{cases}$$

Следовательно, если обозначим через $z_{ri}(t,\lambda_1,\dots,\lambda_N)$ частные производные $\frac{\partial v_r(t,\lambda_1,\dots,\lambda_N)}{\partial\lambda_i}$, $r,i=\overline{1,N}$, тогда для каждого $i=\overline{1,N}$ система функций $z_i[t,\lambda] = \big(z_{1i}(t,\lambda),\dots,z_{Ni}(t,\lambda)\big)$ является решением линейной матричной специальной задачи Коши

$$\frac{dz_{ri}}{dt} = f_x'(t, v_r(t,\lambda_1,\dots,\lambda_N) + \lambda_r)[z_{ri}+\sigma_{ri}] + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)z_{ji}(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_k(\tau)d\tau,\quad t\in[t_{r-1},t_r], \tag{2.3.16}$$

$$z_{ri}(t_{r-1}) = 0,\quad r=\overline{1,N}. \tag{2.3.17}$$

**Условие C.** *Функция* $g(v,w)$ *имеет равномерно непрерывные частные производные* $g_v'(v,w)$ *и* $g_w'(v,w)$ *в* $G_1(\rho,\rho) = \{(v,w)\in\mathbb{R}^{2n}: \|v-x_0(0)\| < \rho, \|w-x_0(T)\| < \rho\}$.

Условие C и условия теоремы 2.3.2 обеспечивают существование матрицы Якоби

$$\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\hat{\lambda})}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} q_{1,1}(\hat{\lambda}) & \cdots & q_{1,N-1}(\hat{\lambda}) & q_{1,N}(\hat{\lambda}) \\ q_{2,1}(\hat{\lambda}) & \cdots & q_{2,N-1}(\hat{\lambda}) & q_{2,N}(\hat{\lambda}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{N,1}(\hat{\lambda}) & \cdots & q_{N,N-1}(\hat{\lambda}) & q_{N,N}(\hat{\lambda}) \end{pmatrix} \tag{2.3.18}$$

для всех $\hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ и ее равномерную непрерывность в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$. Компонентами матрицы $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\hat{\lambda})}{\partial \lambda}$ являются следующие $n \times n$ матрицы

$$q_{1,1}(\hat{\lambda}) = g'_v[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_N + v_N(T, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N)] +$$

$$+g'_w[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_N + v_N(T, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N)]z_{N,1}(T, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N),$$

$$q_{1,s}(\hat{\lambda}) = g'_w[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_N + v_N(T, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N)]z_{N,s}(T, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N), s = \overline{2, N-1},$$

$$q_{1,N}(\hat{\lambda}) = g'_w[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_N + v_N(T, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N)][I + z_{N,N}(T, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N)],$$

$$q_{p,r}(\hat{\lambda}) = z_{p-1,r}(t_{p-1}, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N), \quad p \neq r, \quad p \neq r+1,$$

$$q_{p,p}(\hat{\lambda}) = -I + z_{p-1,p}(t_{p-1}, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N),$$

$$q_{p,p-1}(\hat{\lambda}) = I + z_{p-1,p-1}(t_{p-1}, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N), \qquad p = \overline{2, N}, \qquad r = \overline{1, N},$$

где $z_i[t, \hat{\lambda}] = \left(z_{1,i}(t, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N), \ldots, z_{N,i}(t, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N)\right)$, $i = \overline{1, N}$ – решение специальной задачи Коши (2.3.16), (2.3.17) при $\lambda = \hat{\lambda}$.

## 2.4 Квазилинейная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

В этом подразделе мы исследуем разрешимость квазилинейной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau +$$

$$+f_0(t) + \varepsilon f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4.1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4.2}$$

где $\varepsilon > 0$, $n \times n$ матрицы $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1,m}$, и $n$ вектор $f_0(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, $B$, $C - n \times n$ постоянные матрицы, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Сначала рассмотрим линейную краевую задачу для уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) y(\tau) d\tau + f_0(t), \quad t \in [0,T], \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4.3}$$

с краевым условием (2.4.2).

Подставляя $\Delta_N$ общее решение уравнения (2.4.3) в краевое условие и условия непрерывности, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \sum_{j=1}^{N} d_{N,j}(\Delta_N, T)\lambda_j = d - Cb_N(\Delta_N, T), \tag{2.4.4}$$

$$\lambda_p + \sum_{j=1}^{N} d_{p,j}(\Delta_N, t_p)\lambda_j - \lambda_{p+1} = -b_p(\Delta_N, t_p), \quad p = \overline{1, N-1}. \tag{2.4.5}$$

Уравнений (2.4.4), (2.4.5) запишем в виде

$$Q_*(\Delta_N)\lambda = -F_*(\Delta_N).$$

В соответствии с теоремой 2.2 в [67] обратимость матрицы $Q_*(\Delta_N)\colon \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN}$ эквивалентна однозначной разрешимости линейной краевой задачи (2.4.3), (2.4.2).

Если $x(t)$ является решением уравнения (2.4.1), а $x[t] = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\big) -$ система функций его сужения на подинтервалах $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, то равенства

$$\lim_{t \to t_p - 0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p), \qquad p = \overline{1, N-1}, \tag{2.4.6}$$

верны. Уравнения (2.4.6) являются условиями непрерывности решения уравнения (2.4.1) во внутренних точках разбиения $\Delta_N$.

Пусть $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) - \Delta_N$ общее решение уравнения (2.4.1) в $G^0(\Delta_N, \rho)$. Подставляя соответствующие выражения $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ в краевое условие и условия непрерывности, получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C\sum_{j=1}^{N} d_{N,j}(\Delta_N, T)\lambda_j + C\Delta x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) = d - Cb_N(\Delta_N, T), \qquad (2.4.7)$$

$$\lambda_p + \sum_{j=1}^{N} d_{p,j}(\Delta_N, t_p)\lambda_j - \lambda_{p+1} +$$

$$+\Delta x\big(\Delta_N, t_p, \lambda, \varepsilon\big) = -b_p\big(\Delta_N, t_p\big), \quad p = \overline{1, N-1}. \qquad (2.4.8)$$

Запишем уравнения (2.4.39), (2.4.40) в виде:

$$Q_*(\Delta_N)\lambda = -F_*(\Delta_N) - \Delta Q_*(\Delta_N; \lambda, \varepsilon), \qquad (2.4.9)$$

где

$$\Delta Q_*(\Delta_N; \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} C\Delta x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) \\ \Delta x(\Delta_N, t_1, \lambda, \varepsilon) \\ \cdots \\ \Delta x(\Delta_N, t_{N-1}, \lambda, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Как было доказано в теореме 2.3.1, разрешимость задачи (2.4.1), (2.4.2) эквивалентна разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений (2.4.9). Условия разрешимости (2.4.9) устанавливаются в следующем утверждении.

**Теорема 2.4.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и следующие неравенства:*

(i) $Q_*(\Delta_N)$ *обратима и* $\|[Q_*(\Delta_N)]^{-1}\| \le \gamma$;

(ii) $\sigma_\varepsilon = q_\varepsilon\left(\frac{\chi}{1-q_\varepsilon}(\alpha + K_0 + \varepsilon L) + 1\right) < 1$,

*где*

$$\alpha = \max_{t\in[0,T]} \max_{i=\overline{1,n}} \left\|a_{ij}(t)\right\|,\ K_0 = \sum_{k=1}^{m} \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(\tau)\| d\tau\,;$$

(iii) $\frac{\varepsilon\chi\gamma}{(1-\sigma_\varepsilon)(1-q_\varepsilon)} max(1, \|C\|) \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \left\| f\left(t, v_r\big(t, \lambda^{(0)}\big) + \lambda_r^{(0)}\right)\right\| < \rho_\lambda$ .

*Тогда система нелинейных алгебраических уравнений (2.4.9) имеет единственное решение* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$.

Доказательство. Решение уравнения (2.4.9) найдем с помощью итерационного процесса

$$\lambda^{(0)} = [Q_*(\Delta_N)]^{-1} F_*(\Delta_N),$$

$$\lambda^{(\nu+1)} = -[Q_*(\Delta_N)]^{-1}\{F_*(\Delta_N) + \Delta Q_*(\Delta_N; \lambda^{(\nu)}, \varepsilon)\}, \nu = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (2.4.10)$$

В условиях теоремы выполняются следующие неравенства:

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \le \gamma \|\Delta Q_*(\Delta_N; \lambda^{(0)}, \varepsilon)\| \le$$

$$\le \gamma \max(1, \|C\|) \max_{r=\overline{1,N}} \|\Delta x(\Delta_N, t_r, \lambda^{(0)}, \varepsilon)\| \le$$

$$\le \gamma \max(1, \|C\|) \frac{\varepsilon\chi}{1 - q_\varepsilon} \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1}, t_r)} \left\| f\left(t, v_r(t, \lambda^{(0)}) + \lambda_r^{(0)}\right) \right\|, \qquad (2.4.11)$$

$$\|\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}\| \le q_\varepsilon \left\{ \frac{\chi}{1 - q_\varepsilon}(\alpha + K_0 + \varepsilon L) + 1 \right\} \|\lambda^{(\nu)} - \lambda^{(\nu-1)}\|, \qquad (2.4.12)$$

$$\|\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(0)}\| \le \frac{\varepsilon\chi\gamma}{(1 - \sigma_\varepsilon)(1 - q_\varepsilon)} \max(1, \|C\|) \times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1}, t_r)} \left\| f\left(t, v_r(t, \lambda^{(0)}) + \lambda_r^{(0)}\right) \right\|, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (2.4.13)$$

В силу неравенств (2.4.11)-(2.4.13) и условия (iii) теоремы вытекает сходимость итерационного процесса (2.4.10) к вектору $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ – единственному решению уравнения (2.4.9). Теорема доказана.

Из теорем 2.4.1 и 2.3.1 мы получим следующее утверждение

**Теорема 2.4.2.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1. Тогда квазилинейная краевая задача (2.4.1), (2.4.2) имеет единственное решение* $x^*(t)$ *и пара* $(t, x^*(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.

# 3 АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 3.1 Численные методы решения специальных задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма

I Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t,x) + \int_0^T f_1\big(t,s,x(s)\big)ds, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1.1}$$

где $f_0: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_1: [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны.

По шагу $h > 0$: $h = \frac{T}{N}$ $(N = 1,2,\dots)$ производится разбиение

$$[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$$

и сужение функции $x(t)$ на $r-$ый интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначается через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$ при $t \in [(r-1)h, rh)$. В качестве параметра $\lambda_r$ будем рассматривать значение функций $x_r(t)$ в левых концах подинтервалов и на каждом $r-$ом интервале произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1,N}$. Тогда система (3.1.1) сведется к специальной задаче Коши

$$\frac{du_r}{dt} = f_0(t, u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1\big(t,s,u_j(s) + \lambda_j\big)ds, t \in [(r-1)h, rh), \tag{3.1.2}$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1,N}. \tag{3.1.3}$$

Решением специальной задачи Коши (3.1.2), (3.1.3) является система функций $u[t] = \big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)\big) \in \mathbb{C}([0,T], h, \mathbb{R}^{nN})$, компоненты которой непрерывно дифференцируемы на своих интервалах определения и удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений (3.1.2) и начальным условиям (3.1.3).

По выбранному шагу $h > 0$: $Nh = T, N \in \mathbb{N}$, и заданному вектору $\tilde{\lambda} = \big(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in \mathbb{R}^{nN}$, равенствами: $x_0(t) = \tilde{\lambda}_r$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, $x_0(T) = \tilde{\lambda}_N$ на $[0,T]$ определим кусочно-постоянную вектор-функцию $x_0(t)$.

Взяв число $\rho > 0$, построим множества

$$G_0(\rho) = \{(t,x): t \in [0,T], \|x - x_0(t)\| < \rho\},$$

$$G_1(\rho) = \{(t,s,x): t \in [0,T], s \in [0,T], \|x - x_0(s)\| < \rho\},$$

$$S_h(0,\rho) = \{u[t] = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_N(t)) \in \mathbb{C}([0,T], h, \mathbb{R}^{nN}): \|u[\cdot]\|_6 < \rho\}.$$

**Условие D.** *Функции* $f_0(t,x)$, $f_1(t,s,x)$ *соответственно в* $G_0(\rho)$, $G_1(\rho)$ *непрерывны, имеют непрерывные частные производные* $\frac{\partial f_0(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1(t,s,x)}{\partial x}$ *и выполняются неравенства*

$$\left\|\frac{\partial f_0(t,x)}{\partial x}\right\| \le L_0,\ \ (t,x) \in G_0(\rho),\quad \left\|\frac{\partial f_1(t,s,x)}{\partial x}\right\| \le L_1,\ \ (t,s,x) \in G_1(\rho),$$

$L_0$, $L_1$ – *const.*

Достаточные условия существования единственного решения специальной задачи Коши (3.1.2), (3.1.3) при известных значениях параметров установлены в работе [96].

**Теорема А** [96, с.44]. *Пусть выполняются условие D и неравенства*

*(a)* $e^{L_0 h} L_1 T h < 1$,

$$(b)\ \frac{e^{L_0 h}}{1 - e^{L_0 h} L_1 T h} \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \left\| \int_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \tilde{\lambda}_r) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \tilde{\lambda}_j) ds d\tau \right\| < \rho.$$

*Тогда специальная задача Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений (3.1.2), (3.1.3) при* $\lambda = \tilde{\lambda}$ *в* $S_h(0,\rho)$ *имеет единственное решение* $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \ldots, \tilde{u}_N(t))$.

Специальная задача Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений (3.1.2), (3.1.3) при $\lambda = \tilde{\lambda}$ эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \tilde{\lambda}_j + u_j(s)) ds d\tau +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \tilde{\lambda}_r + u_r(\tau)) d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}. \qquad (3.1.4)$$

Решение специальной задачи Коши (3.1.2), (3.1.3) найдем по следующему алгоритму.

**Шаг 0.** Начальное приближение к решению (3.1.4) возьмем $u_r^{(0,0)}(t) = 0$. С помощью итерационного процесса построим функциональную последовательность

$$u_r^{(0,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0\left(\tau, \tilde{\lambda}_r + u_r^{(0,m)}(\tau)\right) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1\big(\tau, s, \tilde{\lambda}_j\big) ds d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1, N}, m = 0, 1, 2, \ldots,$$

переходя к пределу при $m \to \infty$, найдем $u^{(0)}[t]$.

**Шаг 1.** Следующее приближение решения (3.1.4)- систему функций $u^{(1)}[t]$ найдем по итерационному процессу:

$$u_r^{(1,0)}(t) = u_r^{(0)}(t),$$

$$u_r^{(1,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0\left(\tau, \tilde{\lambda}_r + u_r^{(1,m)}(\tau)\right) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1\left(\tau, s, \tilde{\lambda}_j + u_j^{(0)}(s)\right) ds d\tau, t \in [(r-1)h, rh)\,, r = \overline{1, N}. \quad (3.1.5)$$

Переходя в (3.1.5) к пределу при $m \to \infty$, найдем $u^{(1)}[t]$. И т.д.

Продолжая процесс, на $k+1-$ ом шаге алгоритма, взяв за начальное приближение

$$u_r^{(k+1,0)}(t) = u_r^{(k)}(t),$$

последующее приближение найдем по формуле:

$$u_r^{(k+1,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0\left(\tau, \tilde{\lambda}_r + u_r^{(k+1,m)}(t)\right) d\tau +$$

$$+\int_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh} f_1\left(\tau,s,\tilde{\lambda}_j+u_j^{(k)}(s)\right)dsd\tau,\quad t\in[(r-1)h,rh),$$

$$r=\overline{1,N},\quad k=1,2,\dots,\quad m=0,1,2,\dots.$$

Сходимость предложенного алгоритма устанавливает следующее утверждение

**Теорема 3.1.1.** *Пусть выполняются условия теоремы А. Тогда определяемая алгоритмом последовательность систем функций* $u^{(k)}[t]$ *при* $k\to\infty$ *сходится к* $\tilde{u}[t]-$ *единственному решению задачи (3.1.2), (3.1.3) и справедлива оценка*

$$\left\|u^{(k)}[\cdot]-\tilde{u}[\cdot]\right\|_6\le\frac{(e^{L_0h}L_1Th)^k}{1-e^{L_0h}L_1Th}\left\|u^{(1)}[\cdot]-u^{(0)}[\cdot]\right\|_6.\qquad(3.1.6)$$

Доказательство. При предположениях теоремы в [96, с.48] доказана справедливость оценки

$$\left\|u^{(k+1)}[\cdot]-u^{(k)}[\cdot]\right\|_6\le e^{L_0h}L_1Th\left\|u^{(k)}[\cdot]-u^{(k-1)}[\cdot]\right\|_6.$$

Отсюда получим, что

$$\left\|u^{(k+p)}[\cdot]-u^{(k)}[\cdot]\right\|_6\le\left\|u^{(k+p)}[\cdot]-u^{(k+p-1)}[\cdot]\right\|_6+$$

$$+\left\|u^{(k+p-1)}[\cdot]-u^{(k+p-2)}[\cdot]\right\|_6+\dots+\left\|u^{(k+2)}[\cdot]-u^{(k+1)}[\cdot]\right\|+$$

$$+\left\|u^{(k+1)}[\cdot]-u^{(k)}[\cdot]\right\|\le[(e^{L_0h}L_1Th)^{k+p-1}+(e^{L_0h}L_1Th)^{k+p-2}+\dots+$$

$$+(e^{L_0h}L_1Th)^{k+1}+(e^{L_0h}L_1Th)^{k}]\left\|u^{(1)}[\cdot]-u^{(0)}[\cdot]\right\|_6.$$

Поэтому имеет место неравенство

$$\left\|u^{(k+p)}[\cdot]-u^{(k)}[\cdot]\right\|_6\le\frac{(e^{L_0h}L_1Th)^k}{1-e^{L_0h}L_1Th}\left\|u^{(1)}[\cdot]-u^{(0)}[\cdot]\right\|.\qquad(3.1.7)$$

Переходя к пределу при $p\to\infty$ в (3.1.7), установим оценку (3.1.6). Теорема доказана.

Ниже предлагаем алгоритм нахождения численного решения специальной задачи Коши (3.1.2), (3.1.3).

Основой предлагаемого алгоритма является решение задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r), \quad u_r[(r-1)h] = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}.$$

Для решения этой задачи используется метод Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом $h_1 = \frac{h}{N_1}$, $N_1 = 2M$, $M \in \mathbb{N}$:

$$u_r^{l+1} = u_r^l + \Delta u_r^l, \quad l = \overline{0, N_1 - 1},$$

$$u_r^l = u_r(\tau_l), \quad \tau_l = (r-1)h + lh_1, \quad \Delta u_r^l = \frac{1}{6}\left[K_1^l + 2K_2^l + 2K_3^l + K_4^l\right], \qquad (3.1.8)$$

где $K_1^l, K_2^l, K_3^l, K_4^l - n$ −векторы, определяемые по следующим формулам

$$K_1^l = h_1 f_0(\tau_l, u_r^l),$$

$$K_2^l = h_1 f_0\left(\tau_l + \frac{h_1}{2}, u_r^l + \frac{K_1^l}{2}\right),$$

$$K_3^l = h_1 f_0\left(\tau_l + \frac{h_1}{2}, u_r^l + \frac{K_2^l}{2}\right),$$

$$K_4^l = h_1 f_0\left(\tau_l + h_1, u_r^l + K_3^l\right),$$

и формула Симпсона [97, с.165]

$$I_k = \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1\left(t, s, u_j^{(k)}(s) + \tilde{\lambda}_j\right) ds =$$

$$= \frac{h_1}{3} \sum_{j=1}^{N} \left[ f_1\left(t, s, \tilde{\lambda}_j + u_j^{(k)}((j-1)h)\right) + f_1\left(t, s, \tilde{\lambda}_j + u_j^{(k)}(jh)\right) + \right.$$

$$+4 \sum_{p=1}^{M} f_1\left(t, s, \tilde{\lambda}_j + u_j^{(k)}((j-1)h + (2p-1)h_1)\right) +$$

$$\left. +2 \sum_{p=1}^{M-1} f_1\left(t, s, \tilde{\lambda}_j + u_j^{(k)}((j-1)h + 2ph_1)\right) \right], \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad (3.1.9)$$

Численное решение специальной задачи Коши (3.1.2), (3.1.3) при $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, N}$, найдем по следующему алгоритму.

**Алгоритм А.**

**Шаг 0. (а)** За начальное приближение к решению задачи (3.1.2), (3.1.3) возьмем функции $u_r^{(0)}(t) = 0, r = \overline{1, N}$, и по формуле Симпсона (3.1.9) вычислим

$$I_0 = \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(t, s, \tilde{\lambda}_j) ds, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \qquad (3.1.10)$$

**(b)** Подставляя значение (3.1.10) во второе слагаемое правой части (3.1.2), получим задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах:

$$\frac{du_r^{(1)}}{dt} = f_0\left(t, \tilde{\lambda}_r + u_r^{(1)}\right) + I_0, \quad t \in [(r-1)h, rh), \qquad (3.1.11)$$

$$u_r^{(1)}[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1, N}. \qquad (3.1.12)$$

Решая задачи Коши (3.1.11), (3.1.12) методом Рунге-Кутта 4-го порядка, определим численные решения $u_r^{(1)}(t), r = \overline{1, N}$.

**Шаг 1. (а)** Используя значения систем функций $u_r^{(1)}(t)$ на $[(r-1)h, rh), r = \overline{1, N}$, по формуле Симпсона (3.1.9) вычислим

$$I_1 = \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1\left(t, s, u_j^{(1)}(s) + \tilde{\lambda}_j\right) ds, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}.$$

**(b)** Решая задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах:

$$\frac{du_r^{(2)}}{dt} = f_0\left(t, \tilde{\lambda}_r + u_r^{(2)}\right) + I_1, \quad t \in [(r-1)h, rh),$$

$$u_r^{(2)}[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1, N},$$

по формуле (3.1.8) находим численные значения функций $u_r^{(2)}(t)$, $r = \overline{1, N}$. Повторяя процесс, на $k-$ ом шаге алгоритма, используя формулу (3.1.9), вычислим $I_k$, и решая задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_r^{(k+1)}}{dt} = f_0\left(t, \tilde{\lambda}_r + u_r^{(k+1)}\right) + I_k, \quad t \in [(r-1)h, rh),$$

$$u_r^{(k+1)}[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1, N},$$

находим численные значения функций $u_r^{(k+1)}(t), r = \overline{1, N}$. Условия теоремы 3.1.1 обеспечивают сходимость предложенного алгоритма нахождения численного решения специальной задачи Коши (3.1.2), (3.1.3). Численная реализация предложенного алгоритма проиллюстрируем на следующем примере.

**Пример 1.** На отрезке $[0,1]$ рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 0.2t^2 \int_0^1 [x(s) + x^2(s)]ds + 1.4t^2 + f(t), x \in \mathbb{R}, t \in [0,1], \tag{3.1.13}$$

где $f(t) = 0.4t - 0.2 - \frac{896}{625}t^2 + \frac{2}{25}t^3 - \frac{1}{25}t^4$.

Применяя метод параметризации к уравнению (3.1.13) при $h = 0.125$, получим следующую специальную задачу Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = (u_r + \lambda_r)^2 + 0.2t^2 \sum_{j=1}^{8} \int_{0.125(j-1)}^{0.125j} \left[u_j(s) + \lambda_j + (u_j(s) + \lambda_j)^2\right]ds +$$

$$+1.4t^2 + f(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \tag{3.1.14}$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1,8}. \tag{3.1.15}$$

Используя предложенный численный алгоритм, найдем решения специальной задачи Коши (3.1.14), (3.1.15) при $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, где $\tilde{\lambda}_1 = 0$, $\tilde{\lambda}_2 = -3.122$, $\tilde{\lambda}_3 = -3.138$, $\tilde{\lambda}_4 = -3.147$, $\tilde{\lambda}_5 = -3.15$, $\tilde{\lambda}_6 = -3.147$, $\tilde{\lambda}_7 = -3.138$, $\tilde{\lambda}_8 = -3.1022$. Решением специальной задачи Коши (3.1.14), (3.1.15) при этих значениях параметров является система функций $\tilde{u}[t] = \left(\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \tilde{u}_3(t), \tilde{u}_4(t), \tilde{u}_5(t), \tilde{u}_6(t), \tilde{u}_7(t), \tilde{u}_8(t)\right)$, где $\tilde{u}_r(t) = 0.2t(t-1) - \tilde{\lambda}_r$, $t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1,8}$.

Проверим выполнение условия теоремы А: $L_0 = 0.1$, $L_1 = 1$, $\rho = 1$,

(a) $e^{L_0 h} L_1 T h = \frac{1}{8} e^{\frac{1}{80}} < 1$,

(b) $\frac{e^{L_0 h}}{1 - e^{L_0 h} L_1 T h} \|u[\cdot]\|_6 = 0.8887 < \rho$.

**Шаг 0. (a)** Выбрав $u_r^{(0)}(t) = 0,\ r = \overline{1,8}$, по формуле Симпсона (3.1.9) вычислим

$$I_0 = \sum_{j=1}^{8} \int_{0.125(j-1)}^{0.125j} [\tilde{\lambda}_j + \tilde{\lambda}_j^2] ds = -0.0328125.$$

**(b)** Решая задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения на подинтервалах:

$$\frac{du_r^{(1)}}{dt} = \left(u_r^{(1)}\right)^2 + 1.4t^2 + f(t) + 0.2t^2 I_0, \quad t \in [(r-1)h, rh),$$

$$u_r^{(1)}[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1,8},$$

методом Рунге-Кутта четвертого порядка найдем численные значения функций $u_r^{(1)}(t)$. Число разбиений на подинтервалах возьмем равным $N_1 = 2M,\ M = 2$, с одинаковым шагом $h_1 = 0.03125$.

**Шаг 1. (a)** Используя значения систем функций $u_r^{(1)}(t)$ на $[(r-1)h, rh), r = \overline{1,8}$, по формуле Симпсона (3.1.9) вычислим

$$I_1 = \sum_{j=1}^{8} \int_{0.125(j-1)}^{0.125j} \left[u_j^{(1)}(s) + \tilde{\lambda}_j + \left(u_j^{(1)}(s) + \tilde{\lambda}_j\right)^2\right] ds = 0.032002985.$$

**(b)** Подставляя значение $I_1$ в уравнение (3.1.14), снова получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{du_r^{(2)}}{dt} = \left(u_r^{(2)}\right)^2 + 1.4t^2 + f(t) + 0.2t^2 I_1, \quad t \in [(r-1)h, rh),$$

$$u_r^{(2)}[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1,8}.$$

Решая задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения на подинтервалах методом Рунге-Кутта четвертого порядка, находим численные решения функции $u_r^{(2)}(t)$. И т.д. В следующей таблице приведены результаты вычислений $4-$ой итерации нахождения численного решения задачи (3.1.14), (3.1.15).

Таблица 1 - Численные решения задачи (3.1.14), (3.1.15).

| $\hat{t}$ | $x(\hat{t})$ | $\hat{t}$ | $x(\hat{t})$ | $\hat{t}$ | $x(\hat{t})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00000 | 0.000000000000 | 0.34375 | -0.007617187338 | 0.68750 | 0.003906250124 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.03125 | -0.006054687450 | 0.37500 | -0.009374999783 | 0.71875 | 0.006445312688 |
| 0.06250 | -0.011718749900 | 0.40625 | -0.001367187444 | 0.75000 | 0.009375000253 |
| 0.09375 | -0.016992187349 | 0.43750 | -0.002343749888 | 0.78125 | 0.003320312567 |
| 0.12500 | -0.021874999797 | 0.46875 | -0.002929687332 | 0.81250 | 0.007031250135 |
| 0.15625 | -0.004492187448 | 0.50000 | -0.003124999775 | 0.84375 | 0.011132812704 |
| 0.18750 | -0.008593749896 | 0.53125 | 0.000195312588 | 0.87500 | 0.015625000276 |
| 0.21875 | -0.012304687343 | 0.56250 | 0.000781250117 | 0.90625 | 0.004882812574 |
| 0.25000 | -0.015624999790 | 0.59375 | 0.001758812676 | 0.93750 | 0.010156250149 |
| 0.28125 | -0.002929687446 | 0.62500 | 0.003125000236 | 0.96875 | 0.015820312728 |
| 0.31250 | -0.005468749892 | 0.65625 | 0.001757812562 | 1.00000 | 0.021875000308 |

Разность между точным и численным решениями задачи (3.1.14), (3.1.15) не превышает $0.3 \cdot 10^{-9}$.

II Для решения нелинейной специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2) с помощью итерационного процесса (1.3.6) нам необходимо найти решение линейной специальной задачи Коши (1.3.7), (1.3.8). При определении частных производных решения задачи (1.2.1), (1.2.2) по параметрам мы снова используем линейную специальную задачу Коши (2.3.16), (2.3.17). Поэтому ниже представим численный алгоритм [67, с.351-352] решения специальной задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vartheta_r}{dt} = A(t)\vartheta_r +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\vartheta_j(\tau)d\tau + P(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad (3.1.16)$$

$$\vartheta_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}, \qquad (3.1.17)$$

где $P(t) -$ непрерывная на $[0, T]$ квадратная матрица или вектор размерности $n$.

Этот алгоритм включает две вспомогательные задачи:

1) решение задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах;

2) вычисление определенных интегралов на подинтервалах.

Существует ряд эффективных способов решения этих задач. Точность численного решения, полученного алгоритмом, зависит от выбора методов решения вспомогательных задач.

Рассмотрим случай, когда $P(t)$ является $n$ вектор-функцией. Предполагая, что задача (3.1.16), (3.1.17) корректно разрешима, мы находим ее численное решение по следующему алгоритму.

**Алгоритм В.**

**Шаг 1.** Разобьем каждый интервал $[t_{r-1}, t_r]$ на $2N_r$ части с шагом $h_r = (t_r - t_{r-1})/2N_r$, $r = \overline{1, N}$. Введем переменную $\hat{t}$, которая принимает только дискретные значения: $\hat{t} = t_{r-1} + jh_r$, $j = \overline{0, 2N_r}$, $r = \overline{1, N}$. Используя метод

Рунге-Кутты четвертого порядка, мы решаем задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах:

$$\frac{dw_r}{dt} = A(t)w_r + \varphi_k(t), \quad w_r(t_{r-1}) = 0, \quad k = \overline{1,m}, \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

$$\frac{dw_r}{dt} = A(t)w_r + P(t), \quad w_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1,N}.$$

Через $a_r^{h_r}(\varphi_k, \hat{t})$, $a_r^{h_r}(P, \hat{t})$, $r = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,m}$, обозначим численные решения этих задач.

**Шаг 2.** По формуле Симпсона вычислим определенные интегралы

$$\hat{\psi}_p^{h_r}(\varphi_k) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) a_r^{h_r}(\varphi_k, \tau)d\tau, \qquad p = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,m}, \qquad r = \overline{1,N},$$

$$\hat{\psi}_p^{h_r}(P) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) a_r^{h_r}(P, \tau)d\tau, \qquad p = \overline{1,m}, \qquad r = \overline{1,N}.$$

Равенствами

$$g_p^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \hat{\psi}_p^{h_r}(P), \quad G_{p,k}^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \hat{\psi}_p^{h_r}(\varphi_k), \qquad p,k = \overline{1,m},$$

определим $n$ векторы $g_p^{\tilde{h}}(\Delta_N)$ и $n \times n$ матрицы $G_{p,k}^{\tilde{h}}(\Delta_N)$ где $\tilde{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

**Шаг 3.** Составим $nm \times nm$ матрицу $G^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \left(G_{p,k}^{\tilde{h}}(\Delta_N)\right)$, $p,k = \overline{1,m}$, и вектор $g^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \left(g_1^{\tilde{h}}(\Delta_N), g_2^{\tilde{h}}(\Delta_N), \dots, g_m^{\tilde{h}}(\Delta_N)\right) \in \mathbb{R}^{nm}$. Корректная разрешимость задачи (3.1.16), (3.1.17) эквивалентна обратимости матрицы $[I - G^{\tilde{h}}(\Delta_N)]: \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}^{nm}$, где $I-$ единичная матрица размерности $nm$. Решая систему линейных алгебраических уравнений

$$\left[I - G^{\tilde{h}}(\Delta_N)\right]\mu = g^{\tilde{h}}(\Delta_N)$$

находим $\mu^{\tilde{h}} = \left(\mu_1^{\tilde{h}}, \mu_2^{\tilde{h}}, \dots, \mu_m^{\tilde{h}}\right) \in \mathbb{R}^{nm}$.

**Шаг 4.** Находим численные решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах:

$$\frac{d\vartheta_r}{dt} = A(t)\vartheta_r + K^{\tilde{h}}(t) + P(t), \quad \vartheta_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N},$$

где

$$K^{\tilde{h}}(t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t)\mu_k^{\tilde{h}}.$$

Тогда система функций $\vartheta^{\tilde{h}}[P, \hat{t}] = \left(\vartheta_1^{\tilde{h}}(P, \hat{t}), \vartheta_2^{\tilde{h}}(P, \hat{t}), \dots, \vartheta_N^{\tilde{h}}(P, \hat{t})\right)$ является численным решением задачи (3.1.16), (3.1.17).

Если $P(t) = \left(P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)\right) - n \times n$ матрица с $n$ вектор-функциями $P_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, то для каждого $P_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ мы решаем специальную задачу Коши (3.1.16), (3.1.17) по вышеописанному алгоритму и находим $\vartheta^{\tilde{h}}[P_i, \hat{t}] = \left(\vartheta_1^{\tilde{h}}(P_i, \hat{t}), \vartheta_2^{\tilde{h}}(P_i, \hat{t}), \dots, \vartheta_N^{\tilde{h}}(P_i, \hat{t})\right) -$ численное решение специальной задачи Коши с $P_i(t)$. Тогда $V^{\tilde{h}}[P, \hat{t}] = \left(V_1^{\tilde{h}}[P, \hat{t}], V_2^{\tilde{h}}[P, \hat{t}], \dots, V_N^{\tilde{h}}[P, \hat{t}]\right) -$ решение задачи (3.1.16), (3.1.17) с $n \times n$ матрицей $P(t)$, где $V_r^{\tilde{h}}[P, \hat{t}] = \left(\vartheta_r^{\tilde{h}}(P_1, \hat{t}), \vartheta_r^{\tilde{h}}(P_2, \hat{t}), \dots, \vartheta_r^{\tilde{h}}(P_n, \hat{t})\right)$, $r = \overline{1, N}$.

Точность численного решения, полученного по предложенному алгоритму определяется с помощью точности метода Рунге-Кутты четвертого порядка и формулы Симпсона.

Теперь предлагаем алгоритм нахождения численного решения специальной задачи Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1.2.1), (1.2.2) при фиксированном параметре $\lambda = \hat{\lambda} \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$.

**Алгоритм C.**

**Шаг 1.** Выбрав $\hat{v}_r^{(0)}(t) = 0$, $r = \overline{1, N}$, по алгоритму B решаем линейную специальную задачу Коши (3.1.16), (3.1.17) с матрицей $A(t) = f'_x\left(t, \hat{\lambda}_r\right)$, и вектором

$$P(t) = f\left(t, \hat{\lambda}_r\right) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) d\tau \hat{\lambda}_j.$$

Через $\Delta v_r^{\tilde{h},0}(P, \hat{t})$, $r = \overline{1, N}$, обозначим численные решения этой задачи. Равенствами

$$v_r^{\tilde{h},1}(P, \hat{t}) = \Delta v_r^{\tilde{h},0}(P, \hat{t}), \quad r = \overline{1, N},$$

определим $v^{\tilde{h},1}(P, [\hat{t}]) = \left(v_1^{\tilde{h},1}(P, \hat{t}), v_2^{\tilde{h},1}(P, \hat{t}), \dots, v_N^{\tilde{h},1}(P, \hat{t})\right) -$ первое приближение к численному решению специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2). Затем применяя кубической сплайн интерполяции находим $\hat{v}^{(1)}[t] =$

$\left(\hat{v}_1^{(1)}(t), \hat{v}_2^{(1)}(t), \ldots, \hat{v}_N^{(1)}(t)\right) -$ первое приближение к решению специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2).

**Шаг 2.** Используя алгоритм В решаем линейную специальную задачу Коши (3.1.16), (3.1.17) с матрицей $A(t) = f'_x\left(t, \hat{v}_r^{(1)}(t) + \hat{\lambda}_r\right)$, и вектором $P(t) = f\left(t, \hat{v}_r^{(1)}(t) + \hat{\lambda}_r\right) - f\left(t, \hat{\lambda}_r\right) - f'_x\left(t, \hat{\lambda}_r\right)\hat{v}_r^{(1)}(t)$.

Обозначив через $\Delta v_r^{\tilde{h},1}(P, \hat{t})$, $r = \overline{1, N}$, численные решения этой задачи равенствами

$$v_r^{\tilde{h},2}(P, \hat{t}) = v_r^{\tilde{h},1}(P, \hat{t}) + \Delta v_r^{\tilde{h},1}(P, \hat{t}), \quad r = \overline{1, N}$$

находим $v^{\tilde{h},2}(P, [\hat{t}]) = \left(v_1^{\tilde{h},2}(P, \hat{t}), v_2^{\tilde{h},2}(P, \hat{t}), \ldots, v_N^{\tilde{h},2}(P, \hat{t})\right) -$ второе приближение к численному решению специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2). Аппроксимируя кубическим сплайном находим $\hat{v}^{(2)}[t] = \left(\hat{v}_1^{(2)}(t), \hat{v}_2^{(2)}(t), \ldots, \hat{v}_N^{(2)}(t)\right) -$ второе приближение к решению специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2).

Повторяя процесс, на $\nu$ –ом шаге алгоритма, используя алгоритм В, решая линейную специальную задачу Коши (3.1.16), (3.1.17) с матрицей $A(t) = f'_x\left(t, \hat{v}_r^{(\nu)}(t) + \hat{\lambda}_r\right)$, и вектором $P(t) = f\left(t, \hat{v}_r^{(\nu)}(t) + \hat{\lambda}_r\right) - f\left(t, \hat{v}_r^{(\nu-1)}(t) + \hat{\lambda}_r\right) - f'_x\left(t, \hat{v}_r^{(\nu-1)}(t) + \hat{\lambda}_r\right)\Delta\hat{v}_r^{(\nu-1)}(t)$ находим $v^{\tilde{h},\nu}(P, [\hat{t}]) = \left(v_1^{\tilde{h},\nu}(P, \hat{t}), v_2^{\tilde{h},\nu}(P, \hat{t}), \ldots, v_N^{\tilde{h},\nu}(P, \hat{t})\right) -$ $\nu -$ ое приближение к численному решению и $\hat{v}^{(\nu)}[t] = \left(\hat{v}_1^{(\nu)}(t), \hat{v}_2^{(\nu)}(t), \ldots, \hat{v}_N^{(\nu)}(t)\right) -$ $\nu$ –ое приближение к решению специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2).

### 3.2 Алгоритм нахождения решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и его численная реализация

Рассматривается нелинейная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (3.2.1)$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \qquad (3.2.2)$$

где $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны; $n \times n$ матрицы $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1, m}$, непрерывны на $[0, T]$, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Поскольку двухточечная краевая задача (3.2.1), (3.2.2) эквивалентна краевой задаче для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big[u_j(\tau) + \lambda_j\big] d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}, \quad (3.2.3),$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}, \qquad (3.2.4)$$

$$g\left[\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t)\right] = 0, \qquad (3.2.5)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \to t_p - 0} u_p(t) - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = \overline{1, N-1}, \qquad (3.2.6)$$

предлагается алгоритм нахождения решения задачи (3.2.3)-(3.2.6).

**Алгоритм D.**

**Шаг 0.** Выберем вектор $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$ как начальное приближение к решению уравнения (2.3.9). Систему функций $v^{(0,0)}[t] = v^{(0)}[t]$ можно рассматривать как начальное приближение к решению специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2) при $\lambda = \lambda^{(0)}$. По итерационному процессу (1.3.6) находится $v\big[t, \lambda^{(0)}\big] -$ решение специальной задачи Коши.

**Шаг 1. (a)** Используя элементы системы функций $v\big[t, \lambda^{(0)}\big]$, построим вектор

$$Q_*\big(\Delta_N; \lambda^{(0)}\big) = \begin{pmatrix} g\left[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + v_N\left(T, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right)\right] \\ \lambda_1^{(0)} + v_1\left(t_1, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) - \lambda_2^{(0)} \\ \dots \\ \lambda_{N-1}^{(0)} + v_{N-1}\left(t_{N-1}, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) - \lambda_N^{(0)} \end{pmatrix}.$$

**(b)** Составим $n \times n$ матрицы:

$$A_r^{(0)}(t) = f_x'\left(t, v_r\left(t, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) + \lambda_r^{(0)}\right),$$

$$P_{ri}^{(0)}(t) = A_r^{(0)}(t)\sigma_{ri} + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_k(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r, i = \overline{1, N}.$$

Затем, решая специальные матричные задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_{ri}}{dt} = A_r^{(0)}(t)z_{ri} + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) z_{ji}(\tau) d\tau + P_{ri}^{(0)}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

$$z_{ri}(t_{r-1}) = 0, \quad r, i = \overline{1, N},$$

находим системы функций

$$z_i[t, \lambda^{(0)}] = \left(z_{1i}\left(t, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right), \dots, z_{Ni}\left(t, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right)\right), \quad i = \overline{1, N}.$$

**(c)** По формуле (2.3.18) составим матрицы Якоби, $\frac{\partial Q_*(\Delta_N; \lambda^{(0)})}{\partial \lambda}$, где

$$q_{1,1}(\lambda^{(0)}) = g'_v\left[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + v_N\left(T, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right)\right] +$$

$$+ g'_w\left[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + v_N\left(T, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right)\right] z_{N,1}\left(T, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right),$$

$$q_{1,s}(\lambda^{(0)}) = g'_w\left[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + v_N\left(T, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right)\right] z_{N,s}\left(T, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right),$$

$$s = \overline{2, N-1},$$

$$q_{1,N}(\lambda^{(0)}) = g'_w\left[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + v_N\left(T, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right)\right] \times$$

$$\times \left[I + z_{N,N}\left(T, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right)\right],$$

$$q_{p,r}(\lambda^{(0)}) = z_{p-1,r}\left(t_{p-1}, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right), \quad p \neq r, \quad p \neq r+1,$$

$$q_{p,p}(\lambda^{(0)}) = -I + z_{p-1,p}\left(t_{p-1}, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right),$$

$$q_{p,p-1}(\lambda^{(0)}) = I + z_{p-1,p-1}\left(t_{p-1}, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right), \qquad p = \overline{2, N}, \qquad r = \overline{1, N}.$$

Для некоторого $\alpha \geq 1$ решая систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda^{(0)})}{\partial \lambda}\Delta\lambda = -\frac{1}{\alpha}Q_*(\Delta_N;\lambda^{(0)}), \quad \Delta\lambda \in \mathbb{R}^{nN},$$

находим $\Delta\lambda^{(0)}$. Определим $\lambda^{(1)}$ следующим образом:

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda^{(0)}.$$

**(d)** Выбирая систему функций $v[t,\lambda^{(0)}]$ в качестве начального приближения к решению задачи (1.2.1), (1.2.2) при $\lambda = \lambda^{(1)}$ и с помощью итерационного процесса (1.3.6) найдем систему функций $v[t,\lambda^{(1)}]$.

Продолжая этот процесс на $k$ −ом шаге алгоритма D, мы получаем пару $(\lambda^{(k)}, v[t,\lambda^{(k)}])$, $k = 2,3,\ldots$. Составим последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u[t,\lambda^{(k)}])$, где $u_r(t,\lambda^{(k)}) = v_r(t,\lambda^{(k)})$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$. Условия теорем 1.3.2 и 2.3.2 обеспечивают сходимость этой последовательности к решению задачи (3.2.3)-(3.2.6), при $k \to \infty$.

Для получения решения с требуемой точностью $\varepsilon > 0$ критерием завершения итерационного процесса (2.3.12) является условие $\|\Delta\lambda^{(k)}\| < \varepsilon$. Теорема 2.3.2 дает альтернативный критерий завершения итерационного процесса. Если условия этой теоремы выполнены, то выполняется неравенство $\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \le \gamma^* \|Q_*(\Delta_N;\lambda^{(k)})\|$. Следовательно, итерационный процесс (2.3.12) завершается, если $\gamma^* \|Q_*(\Delta_N;\lambda^{(k)})\| < \varepsilon$.

### 3.3 Проблема выбора начального приближения к решению специальной задачи Коши и системы нелинейных алгебраических уравнений

Алгоритм D требует выбора начальных приближений к решениям уравнения (2.3.9) и специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2). В этом разделе мы предлагаем подход к определению этих начальных приближений к решениям, когда

$$f(t,x) = \mathcal{F}(t,x) + A(t)x + f_0(t)$$

и

$$g[x(0),x(T)] = \mathcal{G}[x(0),x(T)] + Bx(0) + Cx(T) - d.$$

Итак, рассматриваем нелинейную краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{F}(t,x) + A(t)x + f_0(t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\int_0^T\psi_k(\tau)x(\tau)d\tau\,,\quad t\in(0,T),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.3.1}$$

$$\mathcal{G}[x(0),x(T)]+Bx(0)+Cx(T)-d,\quad d\in\mathbb{R}^n, \tag{3.3.2}$$

где функции $\mathcal{G}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ непрерывны, $n\times n$ матрица $A(t)$ и $n$ вектор $f_0(t)$ непрерывны на $[0,T]$.

Используем метод продолжения параметра [81, с.230], и рассматриваем семейство нелинейных краевых задач

$$\frac{dy}{dt}=\omega\mathcal{F}(t,y)+A(t)y+f_0(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\int_0^T\psi_k(\tau)y(\tau)d\tau\,,\quad t\in(0,T),\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad \omega\in[0,1], \tag{3.3.3}$$

$$\omega\mathcal{G}[y(0),y(T)]+By(0)+Cy(T)=d,\quad d\in\mathbb{R}^n. \tag{3.3.4}$$

Ясно, что если $y(\omega,t)$ является решением семейства краевых задач (3.3.3), (3.3.4), то функция $x(t)=y(1,t)$ является решением задачи (3.3.1), (3.3.2). Сначала положим $\omega=\omega_0=0$ и решаем линейную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+f_0(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\int_0^T\psi_k(\tau)y(\tau)d\tau\,,\quad t\in(0,T),\quad y\in\mathbb{R}^n, \tag{3.3.5}$$

$$By(0)+Cy(T)=d,\quad d\in\mathbb{R}^n. \tag{3.3.6}$$

Предполагая, что $\Delta_N-$ регулярное разбиение интервала $[0,T]$ (см. [67, с.346]) для интегро-дифференциального уравнения (3.3.5), а задача (3.3.5), (3.3.6) однозначно разрешима, по предложенному методу в [74], находим $y^{(0)}(t)-$ единственное решение линейной краевой задачи (3.3.5), (3.3.6). Равенствами $\lambda_r^{(0)}=y^{(0)}(t_{r-1}),v_r^{(0)}(t)=y^{(0)}(t)-y^{(0)}(t_{r-1}),\ t\in[t_{r-1},t_r],\quad r=\overline{1,N}$ определим элементы вектора $\lambda^{(0)}\in\mathbb{R}^{nN}$ и системы функций $v^{(0)}[t]\in\tilde{\mathbb{C}}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN})$. Теперь зафиксируем $\omega_1\in(0,1]$ и рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = \omega_1 \mathcal{F}(t,y) + A(t)y + f_0(t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) y(\tau) d\tau\,, \quad t \in (0,T), \quad y \in \mathbb{R}^n, \qquad (3.3.7)$$

$$\omega_1 \mathcal{G}[y(0), y(T)] + By(0) + Cy(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n. \qquad (3.3.8)$$

Задачу (3.3.7), (3.3.8) решаем методом, предложенным в разделе 3.2. Этот метод основан на построении и решении системы нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров. Запишем эту систему в виде:

$$Q_*^{\omega_1}(\Delta_N; \lambda) = 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}. \qquad (3.3.9)$$

Чтобы найти решение системы (3.3.9) в $S\big(\lambda^{(\omega_1,0)}, \rho_\lambda^{\omega_1}\big)$ используем итерационный процесс (2.3.12), выберем число $\rho_\lambda^{\omega_1} > 0$ и полагаем начальное приближение к решению $\lambda^{(\omega_1,0)} = \lambda^{(0)}$.

Решаем специальную задачу Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{dv_r}{dt} = \omega_1 \mathcal{F}(t, v_r + \lambda_r) + A(t)(v_r + \lambda_r) + f_0(t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big(v_j(\tau) + \lambda_j\big) d\tau\,, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad (3.3.10)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1,N}, \qquad (3.3.11)$$

при $\lambda_r = \lambda_r^{(\omega_1,0)}, r = \overline{1,N}$.

Пусть для задачи (3.3.10), (3.3.11) выполнены условия теоремы 1.3.2. Полагая $v^{(\omega_1,0,0)}[t] = \Big(v_1^{(\omega_1,0,0)}(t), v_2^{(\omega_1,0,0)}(t), \dots, v_N^{(\omega_1,0,0)}(t)\Big)$, где $v_r^{(\omega_1,0,0)}(t) = v_r^{(0)}(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,N}$ в качестве начального приближение решения и применяя итерационный процесс (1.3.6) находим $v^{(\omega_1)}\big[t, \lambda^{(\omega_1,0)}\big] = \Big(v_1^{(\omega_1)}\big(t, \lambda^{(\omega_1,0)}\big), v_2^{(\omega_1)}\big(t, \lambda^{(\omega_1,0)}\big), \dots, v_N^{(\omega_1)}\big(t, \lambda^{(\omega_1,0)}\big)\Big) -$ решение задачи (3.3.10), (3.3.311). Применяя (1.3.9) получим оценку

$$\big\|v^{(\omega_1)}\big[\cdot, \lambda^{(\omega_1,0)}\big] - v^{(\omega_1,0,0)}[\cdot]\big\|_3 \le \chi^{\omega_1} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \Big\|\dot{v}_r^{(\omega_1,0,0)}(t) -$$

$$-\omega_1 F\left(t, v_r^{(\omega_1,0,0)}(t)+\lambda_r^{(\omega_1,0)}\right)-f_0(t)-A(t)\left[v_r^{(\omega_1,0,0)}(t)+\lambda_r^{(\omega_1,0)}\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[v_j^{(\omega_1,0,0)}(\tau)+\lambda_j^{(\omega_1,0)}\right]\Big\|\,d\tau,$$

где $\chi^{\omega_1}$ – константа корректной разрешимости линеаризованной специальной задачи Коши, соответствующей нелинейной задаче (3.3.10), (3.3.11).

Для $\lambda^{(\omega_1,0)}$ и $v^{(\omega_1,0,0)}[t]$ мы имеем:

$$\left\|v^{(\omega_1)}\left[\cdot,\lambda^{(\omega_1,0)}\right]-v^{(\omega_1,0,0)}[\cdot]\right\|_3\le$$

$$\le\chi^{\omega_1}\omega_1\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\mathcal{F}\left(t,v_r^{(\omega_1,0,0)}(t)+\lambda_r^{(\omega_1,0)}\right)\right\|=$$

$$=\chi^{\omega_1}\omega_1\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\mathcal{F}\left(t,v_r^{(0)}(t)+\lambda_r^{(0)}\right)\right\|.$$

Предполагая, что условия теоремы 2.3.2 выполняются для уравнения (3.3.9), по алгоритму D находим пару $\left(\lambda^{(\omega_1)},v^{(\omega_1)}\left[t,\lambda^{(\omega_1)}\right]\right)$, где $\lambda^{(\omega_1)}$ – решение уравнения (3.3.9), система функций $v^{(\omega_1)}[t,\lambda^{(\omega_1)}]=\left(v_1^{(\omega_1)}\left(t,\lambda^{(\omega_1)}\right),v_2^{(\omega_1)}t\left(,\lambda^{(\omega_1)}\right),\dots,v_r^{(\omega_1)}\left(t,\lambda^{(\omega_1)}\right)\right)$ – решение специальной задачи Коши (3.3.10) (3.3.11) при $\lambda=\lambda^{(\omega_1)}$.

Поскольку

$$Q_*^{\omega_1}\left(\Delta_N;\lambda^{(\omega_1,0)}\right)=\begin{pmatrix}\omega_1\mathcal{G}\left[\lambda_1^{(\omega_1,0)},\lambda_N^{(\omega_1,0)}+v_N^{(\omega_1)}\left(T,\lambda^{(\omega_1,0)}\right)\right]+B\lambda_1^{(\omega_1,0)}+\\+C\lambda_N^{(\omega_1,0)}+Cv_N^{(\omega_1)}\left(T,\lambda^{(\omega_1,0)}\right)-d\\\lambda_1^{(\omega_1,0)}+v_1^{(\omega_1)}\left(t_1,\lambda^{(\omega_1,0)}\right)-\lambda_2^{(\omega_1,0)}\\\dots\\\lambda_{N-1}^{(\omega_1,0)}+v_{N-1}^{(\omega_1)}\left(t_{N-1},\lambda^{(\omega_1,0)}\right)-\lambda_N^{(\omega_1,0)}\end{pmatrix},$$

$$Q_*^{\omega_0}\left(\Delta_N;\lambda^{(\omega_1,0)}\right)=\begin{pmatrix}B\lambda_1^{(0)}+C\lambda_N^{(0)}+Cv_N^{(0)}(T)-d\\\lambda_1^{(0)}+v_1^{(0)}(t_1)-\lambda_2^{(0)}\\\dots\\\lambda_{N-1}^{(0)}+v_{N-1}^{(0)}(t_{N-1})-\lambda_N^{(0)}\end{pmatrix}=0,$$

применяем оценку (2.3.13) и получим

$$\left\|\lambda^{(\omega_1)}-\lambda^{(\omega_1,0)}\right\|\le\gamma_*^{\omega_1}\left\|Q_*^{\omega_1}\left(\Delta_N;\lambda^{(\omega_1,0)}\right)\right\|\le$$

$$\leq \gamma_*^{\omega_1} \left\| Q_*^{\omega_1}\left(\Delta_N; \lambda^{(\omega_1,0)}\right) - Q_*^{\omega_0}\left(\Delta_N; \lambda^{(\omega_1,0)}\right) \right\| =$$

$$= \gamma_*^{\omega_1} \max \left( \left\| \omega_1 \mathcal{G}\left[ \lambda_1^{(\omega_1,0)}, \lambda_N^{(\omega_1,0)} + v_N^{(\omega_1)}\left(T, \lambda^{(\omega_1,0)}\right) \right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + C\left( v_N^{(\omega_1)}\left(T, \lambda^{(\omega_1,0)}\right) - v_N^{(0)}(T) \right) \right\|, \max_{p=\overline{1,N-1}} \left\| v_p^{(\omega_1)}\left(t_p, \lambda^{(\omega_1,0)}\right) - v_p^{(0)}(t_p) \right\| \right) \leq$$

$$\leq \gamma_*^{\omega_1} \omega_1 \max \left( M^{\omega_1} + \|C\| \chi^{\omega_1} \max_{t \in [t_{N-1}, T]} \left\| \mathcal{F}\left(t, v_N^{(0)}(t) + \lambda_N^{(0)}\right) \right\|, \right.$$

$$\left. \chi^{\omega_1} \max_{p=\overline{1,N-1}} \max_{t \in [t_{p-1}, t_p]} \left\| \mathcal{F}\left(t, v_p^{(0)}(t) + \lambda_p^{(0)}\right) \right\| \right) \leq \gamma_*^{\omega_1} \omega_1 (1 + \|C\|) \times$$

$$\times \max \left( M^{\omega_1}, \chi^{\omega_1} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \left\| \mathcal{F}\left(t, v_r^{(0)}(t) + \lambda_r^{(0)}\right) \right\| \right), \qquad (3.3.13)$$

где $M^{\omega_1} = \left\| \mathcal{G}\left[ \lambda_1^{(\omega_1,0)}, \lambda_N^{(\omega_1,0)} + v_N^{(\omega_1)}\left(T, \lambda^{(\omega_1,0)}\right) \right] \right\|$ и $\gamma_*^{\omega_1}$ – верхняя граница нормы $\left[ \partial Q_*^{\omega_1}(\Delta_N; \lambda) / \partial \lambda \right]^{-1}$ для всех $\lambda \in S\left(\lambda^{(\omega_1,0)}, \rho_\lambda^{\omega_1}\right)$.

Теперь равенствами

$$y(\omega_1, t) = \lambda_r^{(\omega_1)} + v_r^{(\omega_1)}\left(t, \lambda^{(\omega_1)}\right), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N-1},$$

$$y(\omega_1, t) = \lambda_N^{(\omega_1)} + v_N^{(\omega_1)}\left(t, \lambda^{(\omega_1)}\right), \quad t \in [t_{N-1}, t_N]$$

определим решение краевой задачи (3.3.7), (3.3.8).

Далее выбираем $\omega_2 \in (\omega_1, 1]$ и рассматриваем нелинейную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = \omega_2 \mathcal{F}(t, y) + A(t) y + f_0(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) y(\tau) d\tau, \quad t \in (0, T), \quad y \in \mathbb{R}^n, \qquad (3.3.14)$$

$$\omega_2 \mathcal{G}[y(0), y(T)] + B y(0) + C y(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n. \qquad (3.3.15)$$

Соответствующая система нелинейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров имеет вид:

$$Q_*^{\omega_2}(\Delta_N; \lambda) = 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN}. \qquad (3.3.16)$$

Чтобы найти решение системы (3.3.16) в $S\big(\lambda^{(\omega_2,0)},\rho_\lambda^{\omega_2}\big)$, мы выберем число $\rho_\lambda^{\omega_2}>0$, полагаем $\lambda^{(\omega_2,0)}=\lambda^{(\omega_1)}$ и используем итерационный процесс (2.3.12). Сначала решаем специальную задачу Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_r}{dt}=\omega_2\mathcal{F}\left(t,v_r+\lambda_r^{(\omega_2,0)}\right)+A(t)\left(v_r+\lambda_r^{(\omega_2,0)}\right)+f_0(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left(v_j(\tau)+\lambda_j^{(\omega_2,0)}\right)d\tau\,,\qquad t\in[t_{r-1},t_r],\qquad(3.3.17)$$

$$v_r(t_{r-1})=0,\quad r=\overline{1,N}.\qquad(3.3.18)$$

С этой целью мы полагаем $v^{(\omega_2,0,0)}[t]=\left(v_1^{(\omega_2,0,0)}(t),v_2^{(\omega_2,0,0)}(t),\dots,v_N^{(\omega_2,0,0)}(t)\right)$ с компонентами $v_r^{(\omega_2,0,0)}(t)=v_r^{(\omega_1)}\big(t,\lambda^{(\omega_1)}\big)$, $t\in[t_{r-1},t_r]$, $r=\overline{1,N}$ в качестве начального приближенного решения и итерационным процессом (1.3.6) находим систему функций $v^{(\omega_2)}\big[t,\lambda^{(\omega_2,0)}\big]=\left(v_1^{(\omega_2)}\big(t,\lambda^{(\omega_2,0)}\big),v_2^{(\omega_2)}\big(t,\lambda^{(\omega_2,0)}\big),\dots,v_N^{(\omega_2)}\big(t,\lambda^{(\omega_2,0)}\big)\right)$ – решение задачи (3.3.17), (3.3.18). Из оценки (1.3.9) теоремы 1.3.2 вытекает

$$\left\|v^{(\omega_2)}[\cdot,\lambda^{(\omega_2,0)}]-v^{(\omega_2,0,0)}[\cdot]\right\|_3\le\chi^{\omega_2}\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\dot v_r^{(\omega_2,0,0)}(t)-\omega_2\mathcal{F}\left(t,v_r^{(\omega_2,0,0)}(t)+\lambda_r^{(\omega_2,0)}\right)-f_0(t)-\right.$$

$$-A(t)\left(v_r^{(\omega_2,0,0)}(t)+\lambda_r^{(\omega_2,0)}\right)-$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[v_j^{(\omega_2,0,0)}(\tau)+\lambda_j^{(\omega_2,0)}\right]d\tau\right\|,\qquad(3.3.19)$$

где $\chi^{\omega_2}$ – константа корректной разрешимости линеаризованной специальной задачи Коши, соответствующей нелинейной задаче (3.3.17), (3.3.18).

С учетом $\lambda^{(\omega_2,0)}=\lambda^{(\omega_1)}$ и $v^{(\omega_2,0,0)}[t]=v^{(\omega_1)}[t]$ имеем:

$$\left\|v^{(\omega_2)}\big[\cdot,\lambda^{(\omega_2,0)}\big]-v^{(\omega_2,0,0)}[\cdot]\right\|_3\le$$

$$\le\chi^{\omega_2}(\omega_2-\omega_1)\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\mathcal{F}\left(t,v_r^{(\omega_2,0,0)}(t)+\lambda_r^{(\omega_2,0)}\right)\right\|=$$

$$= \chi^{\omega_2}(\omega_2 - \omega_1) \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \left\| \mathcal{F}\left(t, v_r^{(\omega_1)}\left(t, \lambda^{(\omega_1)}\right) + \lambda_r^{(\omega_1)}\right) \right\|. \quad (3.3.20)$$

Учитывая

$$Q_*^{\omega_1}\left(\Delta_N; \lambda^{(\omega_1,0)}\right) = \begin{pmatrix} \omega_2 \mathcal{G}\left[\lambda_1^{(\omega_2,0)}, \lambda_N^{(\omega_2,0)} + v_N^{(\omega_2)}\left(T, \lambda^{(\omega_2,0)}\right)\right] + B\lambda_1^{(\omega_2,0)} + \\ +C\lambda_N^{(\omega_2,0)} + Cv_N^{(\omega_2)}\left(T, \lambda^{(\omega_2,0)}\right) - d \\ \lambda_1^{(\omega_2,0)} + v_1^{(\omega_2)}\left(t_1, \lambda^{(\omega_2,0)}\right) - \lambda_2^{(\omega_2,0)} \\ \cdots \\ \lambda_{N-1}^{(\omega_2,0)} + v_{N-1}^{(\omega_2)}\left(t_{N-1}, \lambda^{(\omega_2,0)}\right) - \lambda_N^{(\omega_2,0)} \end{pmatrix},$$

$$Q_*^{\omega_1}\left(\Delta_N; \lambda^{(\omega_2,0)}\right) = \begin{pmatrix} \omega_1 \mathcal{G}\left[\lambda_1^{(\omega_1)}, \lambda_N^{(\omega 1)} + v_N^{(\omega_1)}\left(T, \lambda^{(\omega_1)}\right)\right] + B\lambda_1^{(\omega_1)} + \\ +C\lambda_N^{(\omega_1)} + Cv_N^{(\omega_1)}\left(T, \lambda^{(\omega_1)}\right) - d \\ \lambda_1^{(\omega_1)} + v_1^{(\omega_1)}\left(t_1, \lambda^{(\omega_1)}\right) - \lambda_2^{(\omega_1)} \\ \cdots \\ \lambda_{N-1}^{(\omega_1)} + v_{N-1}^{(\omega_1)}\left(t_{N-1}, \lambda^{(\omega_1)}\right) - \lambda_N^{(\omega_1)} \end{pmatrix} = 0,$$

получаем

$$\left\|Q_*^{\omega_2}\left(\Delta_N; \lambda^{(\omega_2,0)}\right)\right\| = \left\|Q_*^{\omega_2}\left(\Delta_N; \lambda^{(\omega_2,0)}\right) - Q_*^{\omega_1}\left(\Delta_N; \lambda^{(\omega_2,0)}\right)\right\| =$$

$$= \max\left(\omega_2 \mathcal{G}\left[\lambda_1^{(\omega_2,0)}, \lambda_N^{(\omega_2,0)} + v_N^{(\omega_2)}\left(T, \lambda^{(\omega_2,0)}\right)\right] -\right.$$

$$-\omega_1 \mathcal{G}\left[\lambda_1^{(\omega_1)}, \lambda_N^{(\omega_1)} + v_N^{(\omega_1)}\left(T, \lambda^{(\omega_1)}\right)\right] + C\left(v_N^{(\omega_2)}\left(T, \lambda^{(\omega_2,0)}\right) - v_N^{(\omega_1)}\left(T, \lambda^{(\omega_1)}\right)\right)\Big\|,$$

$$\left.\max_{p=\overline{1,N-1}} \left\|v_p^{(\omega_2)}\left(t_p, \lambda^{(\omega_2,0)}\right) - v_p^{(\omega_1)}\left(t_p, \lambda^{(\omega_1)}\right)\right\|\right) \leq$$

$$\leq (\omega_2 - \omega_1)(1 + \omega_2 D^{\omega_1} + \|C\|) \times$$

$$\times \max\left(M^{\omega_2}, \chi^{\omega_2} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \left\|\mathcal{F}\left(t, v_r^{(\omega_1)}\left(t, \lambda^{(\omega_1)}\right) + \lambda_r^{(\omega_1)}\right)\right\|\right),$$

где $M^{\omega_2} = \left\|\mathcal{G}\left[\lambda_1^{(\omega_1)}, \lambda_N^{(\omega_1)} + v_N^{(\omega_2)}\left(T, \lambda^{(\omega_1)}\right)\right]\right\|$,
$D^{\omega_1} = \left\|\mathcal{G}'_w\left[\lambda_1^{(\omega_1)}, \lambda_N^{(\omega_1)} + v_N^{(\omega_1)}\left(T, \lambda^{(\omega_1)}\right)\right]\right\|$.
Снова используя алгоритм D, находим пару $\left(\lambda^{(\omega_2)}, v^{(\omega_2)}\left[t, \lambda^{(\omega_2)}\right]\right)$ и оценку

$$\left\|\lambda^{(\omega_2)} - \lambda^{(\omega_2,0)}\right\| \leq \gamma_*^{\omega_2}\left\|Q_*^{\omega_2}\left(\Delta_N; \lambda^{(\omega_2,0)}\right)\right\| \leq$$

$$\leq \gamma_*^{\omega_2}(\omega_2-\omega_1)(1+\omega_2 D^{\omega_1}+\|C\|)\times$$

$$\times\max\left(M^{\omega_2},\chi^{\omega_2}\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\mathcal{F}\left(t,v_r^{(\omega_1)}\big(t,\lambda^{(\omega_1)}\big)+\lambda_r^{(\omega_1)}\right)\right\|\right),$$

где $\gamma_*^{\omega_2}$ удовлетворяет неравенстве $\left\|\left[\partial Q_*^{\omega_2}(\Delta_N;\lambda)/\partial\lambda\right]^{-1}\right\|\leq\gamma_*^{\omega_2}$ для всех $\lambda\in S\big(\lambda^{(\omega_2,0)},\rho_\lambda^{\omega_2}\big)$.

Равенствами $y(\omega_2,t)=\lambda_r^{(\omega_2)}+v_r^{(\omega_2)}\big(t,\lambda^{(\omega_2)}\big)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N-1}$, $y(\omega_2,t)=\lambda_N^{(\omega_2)}+v_N^{(\omega_2)}\big(t,\lambda^{(\omega_2)}\big)$, $t\in[t_{N-1},t_N]$, определим решение задачи (3.3.14), (3.3.15).

Продолжая методом продолжения по параметру, на некотором $\nu-$ ом шаге мы достигаем $\omega_\nu=1$. Полагаем $\lambda^{(\omega_\nu,0)}\in\mathbb{R}^{nN}$ с компонентами $\lambda_r^{(\omega_\nu,0)}=\lambda_r^{(\omega_{\nu-1})}$, $r=\overline{1,N}$ в качестве начального приближенного решения уравнения (2.3.9) и $v^{(\omega_\nu,0,0)}[t]=\left(v_1^{(\omega_\nu,0,0)}(t),v_2^{(\omega_\nu,0,0)}(t),\ldots,v_N^{(\omega_\nu,0,0)}(t)\right)$ с элементами $v_r^{(\omega_\nu,0,0)}(t)=v_r^{(\omega_{\nu-1})}\big(t,\lambda^{(\omega_{\nu-1})}\big)$, $t\in[t_{r-1},t_r]$, $r=\overline{1,N}$ в качестве начального приближенного решения специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2).

Аналогично (3.3.19) получаем оценку:

$$\left\|v^{(\omega_\nu)}\big[\cdot,\lambda^{(\omega_\nu,0)}\big]-v^{(\omega_\nu,0,0)}[\cdot]\right\|_3\leq\chi^{\omega_\nu}\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\dot{v}_r^{(\omega_\nu,0,0)}(t)-\right.$$

$$-\omega_\nu\mathcal{F}\left(t,v_r^{(\omega_\nu,0,0)}(t)+\lambda_r^{(\omega_\nu,0)}\right)-A(t)\left(v_r^{(\omega_\nu,0,0)}(t)+\lambda_r^{(\omega_\nu,0)}\right)-$$

$$\left.-f_0(t)-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left[v_j^{(\omega_\nu,0,0)}(\tau)+\lambda_j^{(\omega_\nu,0)}\right]d\tau\right\|,$$

где $v^{(\omega_\nu)}\big[t,\lambda^{(\omega_\nu,0)}\big]$ – решение специальной задачи Коши:

$$\frac{dv_r}{dt}=\omega_\nu\mathcal{F}\left(t,v_r+\lambda_r^{(\omega_\nu,0)}\right)+A(t)\left(v_r+\lambda_r^{(\omega_\nu,0)}\right)+f_0(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)\left(v_j(\tau)+\lambda_j^{(\omega_\nu,0)}\right)d\tau,\quad t\in[t_{r-1},t_r],\qquad(3.3.22)$$

$$v_r(t_{r-1})=0,\quad r=\overline{1,N}.\qquad(3.3.23)$$

Аналогично (3.3.20) получаем оценки:

$$\left\|v^{(\omega_\nu)}\left[\cdot,\lambda^{(\omega_\nu,0)}\right]-v^{(\omega_\nu,0,0)}[\cdot]\right\|_3\le\chi^{\omega_\nu}(\omega_\nu-\omega_{\nu-1})\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\mathcal{F}\left(t,v_r^{(\omega_\nu,0,0)}(t)+\lambda_r^{(\omega_\nu,0)}\right)\right\|=$$

$$=\chi^{\omega_\nu}(\omega_\nu-\omega_{\nu-1})\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\mathcal{F}\left(t,v_r^{(\omega_{\nu-1})}(t)+\lambda_r^{(\omega_{\nu-1})}\right)\right\|,\qquad(3.3.24)$$

$$\left\|\lambda^{(\omega_\nu)}-\lambda^{(\omega_\nu,0)}\right\|\le\gamma_*^{\omega_\nu}\left\|Q_*^{\omega_\nu}\left(\Delta_N;\lambda^{(\omega_\nu,0)}\right)\right\|\le$$

$$\le\gamma_*^{\omega_\nu}(\omega_\nu-\omega_{\nu-1})(1+\omega_\nu D^{\omega_{\nu-1}}+\|C\|)\times$$

$$\times\max\left(M^{\omega_\nu},\chi^{\omega_\nu}\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\mathcal{F}\left(t,v_r^{(\omega_{\nu-1})}(t)+\lambda_r^{(\omega_{\nu-1})}\right)\right\|\right),\qquad(3.3.25)$$

где $M^{\omega_\nu}=\left\|\mathcal{G}\left[\lambda_1^{(\omega_\nu,0)},\lambda_N^{(\omega_\nu,0)}+v_N^{(\omega_\nu)}\left(T,\lambda^{(\omega_\nu,0)}\right)\right]\right\|$,
$D^{\omega_{\nu-1}}=\left\|\mathcal{G}'_w\left[\lambda_1^{(\omega_\nu,0)},\lambda_N^{(\omega_\nu,0)}+v_N^{(\omega_{\nu-1})}\left(T,\lambda^{(\omega_\nu,0)}\right)\right]\right\|$.

Равенствами $y(1,t)=\lambda_r^{(\omega_\nu)}+v_r^{(\omega_\nu)}\left(t,\lambda^{(\omega_\nu)}\right)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N-1}$, $y(1,t)=\lambda_N^{(\omega_\nu)}+v_N^{(\omega_\nu)}\left(t,\lambda^{(\omega_\nu)}\right)$, $t\in[t_{N-1},t_N]$, определим решение краевой задачи (2.3.1), (2.3.2). Здесь $v^{(\omega_\nu)}\left[t,\lambda^{(\omega_\nu)}\right]$ – решение специальной задачи Коши (3.3.22), (3.3.23) при $\lambda_r=\lambda_r^{(\omega_\nu)}$, $r=\overline{1,N}$.

Отметим, что из оценок (3.3.12), (3.3.20) и (3.3.24) следует, что метод продолжения по параметру с небольшими шагами $\omega$ позволяет найти хорошее начальное приближение решения специальной задачи Коши (1.2.1), (1.2.2). На основании оценок (3.3.13), (3.3.21) и (3.3.25) можно сделать аналогичный вывод относительно начальных приближений решения нелинейного алгебраического уравнения (2.3.9).

Следующие примеры иллюстрируют численные реализации предлагаемых алгоритмов.

**Пример 2.** На $[0,1]$ рассматривается нелинейная краевая задача

$$\frac{dx}{dt}=\mathcal{F}(t,x)+A(t)x+f_0(t)+\varphi(t)\int_0^1\psi(\tau)x(\tau)d\tau,t\in(0,1),x\in\mathbb{R}^2,\qquad(3.3.26)$$

$$x(0)-x(1)=d,\quad d\in\mathbb{R}^2,\qquad(3.3.27)$$

где

$$\mathcal{F}(t,x)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1^2\\ \frac{1}{2}(x_1+x_2^2)\end{pmatrix},\quad A(t)=\begin{pmatrix}t & t^2-1\\ 1 & t^3\end{pmatrix},\quad \varphi(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ t^2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\psi(\tau)=\begin{pmatrix}\tau & 0\\ 1 & \tau^2\end{pmatrix},\quad f_0(t)=\begin{pmatrix}-\frac{t^4}{2}-2t^3+t^2+\frac{73t}{12}-\frac{1}{4}\\ -t^4-t^3-\frac{5t^2}{4}-t+\frac{55}{12}\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Решением задачи (3.3.26), (3.3.27) является вектор-функция $x^*(t)$ с компонентами $x_1^*(t)=t^2-2$ и $x_2^*(t)=t+1$.

Составляем семейство краевых задач:

$$\frac{dy}{dt}=\omega\mathcal{F}(t,y)+A(t)y+f_0(t)+$$

$$+\varphi(t)\int_0^1\psi(\tau)y(\tau)d\tau,\quad t\in(0,1),\quad y\in\mathbb{R}^2,\quad \omega\in[0,1],\qquad (3.3.28)$$

$$y(0)-y(1)=d,\quad d\in\mathbb{R}^2.\qquad (3.3.29)$$

**Шаг 0.** Полагаем $\omega=\omega_0=0$, получим линейную краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+f_0(t)+\varphi(t)\int_0^1\psi(\tau)y(\tau)d\tau,\quad t\in(0,T),\quad y\in\mathbb{R}^2,\qquad (3.3.30)$$

$$y(0)-y(1)=d,\quad d\in\mathbb{R}^2.\qquad (3.3.31)$$

Решаем задачу (3.3.30), (3.3.31) используя алгоритм предложенный в [67, с.351]. Для этого отрезок $[0,1]$ делим на 4 части точками $t_r=\frac{1}{4}r$, $r=\overline{0,4}$ и сводим задачу (3.3.30), (3.3.31) к многоточечной краевой задаче с параметрами

$$\frac{dv_r}{dt}=A(t)[v_r+\lambda_r]+f_0(t)+$$

$$+\varphi(t)\sum_{j=1}^{4}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(\tau)\left[v_j(\tau)+\lambda_j\right]d\tau,\quad t\in[t_{r-1},t_r],\quad r=\overline{1,4},$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,4},$$

$$\lambda_1 - \lambda_4 - v_4(1) = d,$$

$$\lambda_p + v_p(t_p) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1,3}.$$

Основой предлагаемого алгоритма является задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и вычисление определенных интегралов. Для решения задач Коши и оценки определенных интегралов мы используем метод Рунге-Кутты четвертого порядка и метод Симпсона с шагом $h = 0.0125$. Далее, используя интерполяцию кубическим сплайном, мы находим $y^{(0)}(t),\ \ t \in [0,1] -$ решения задачи (3.3.30), (3.3.31). Равенствами $\lambda_r^{(0)} = y^{(0)}(t_{r-1}),\ \ v_r^{(0)}(t) = y^{(0)}(t) - y^{(0)}(t_{r-1}),\ \ t \in [t_{r-1}, t_r],\ \ r = \overline{1,4}$ определим элементы вектора $\lambda^{(0)} \in R^8$ и системы функций $v^{(0)}[t] \in \tilde{\mathbb{C}}([0,T], \Delta_N, R^8)$.

**Шаг 1.** Теперь полагаем $\omega = \omega_1 = \frac{1}{5}$ и рассматриваем нелинейную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}\mathcal{F}(t,y) + A(t)y + f_0(t) +$$

$$+\varphi(t)\int_0^1 \psi(\tau)y(\tau)d\tau, \quad t \in (0,1), \quad y \in \mathbb{R}^2, \tag{3.3.32}$$

$$y(0) - y(1) = d, \quad d \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3.33}$$

Методом параметризации задачу (3.3.32), (3.3.33) сводим к задаче

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{1}{5}\mathcal{F}(t, v_r + \lambda_r) + A(t)[v_r + \lambda_r] + f_0(t) +$$

$$+\varphi(t)\sum_{j=1}^{4}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(\tau)\left[v_j(\tau) + \lambda_j\right]d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \tag{3.3.34}$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,4}, \tag{3.3.35}$$

$$\lambda_1 - \lambda_4 - v_4(1) = d, \tag{3.3.36}$$

$$\lambda_p + v_p\left(t_p\right) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1,3}. \tag{3.3.37}$$

Выбирая $\lambda^{\left(\frac{1}{5},0\right)}=\lambda^{(0)}$, $v^{\left(\frac{1}{5},0,0\right)}[t]=v^{(0)}[t]$ и решая задачу (3.3.34)-(3.3.37) алгоритмом D находим пару $\left(\lambda^{\left(\frac{1}{5},5\right)}, v^{\left(\frac{1}{5}\right)}\left[t,\lambda^{\left(\frac{1}{5},5\right)}\right]\right)$. Решение задачи (3.3.32), (3.3.33) определим равенствами

$$y\left(\frac{1}{5},t\right)=\lambda_r^{\left(\frac{1}{5}\right)}+v_r^{\left(\frac{1}{5}\right)}\left(t,\lambda^{\left(\frac{1}{5}\right)}\right),\quad t\in[t_{r-1},t_r],$$

где $\lambda_r^{\left(\frac{1}{5}\right)}=\lambda_r^{\left(\frac{1}{5},5\right)}$, $v_r^{\left(\frac{1}{5}\right)}\left(t,\lambda^{\left(\frac{1}{5}\right)}\right)=v_r^{\left(\frac{1}{5}\right)}\left(t,\lambda^{\left(\frac{1}{5},5\right)}\right)$, $r=\overline{1,4}$.

**Шаг 2.** Полагая $\omega=\omega_2=\frac{1}{4}$ и рассматриваем задачу

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{4}\mathcal{F}(t,y)+A(t)y+f_0(t)+$$

$$+\varphi(t)\int_0^1\psi(\tau)y(\tau)d\tau,\quad t\in(0,1),\quad y\in\mathbb{R}^2,\tag{3.3.38}$$

$$y(0)-y(1)=d,\quad d\in\mathbb{R}^2.\tag{3.3.39}$$

Равенствами $\lambda_r^{\left(\frac{1}{4},0\right)}=y\left(\frac{1}{5},t_{r-1}\right)$, $v_r^{\left(\frac{1}{4},0,0\right)}(t)=y\left(\frac{1}{5},t\right)-y\left(\frac{1}{5},t_{r-1}\right)$, $t\in[t_{r-1},t_r]$, $r=\overline{1,4}$ определяем элементы вектора $\lambda^{\left(\frac{1}{4},0\right)}\in\mathbb{R}^8$ и системы функций $v^{\left(\frac{1}{4},0,0\right)}[t]\in\tilde{\mathbb{C}}([0,1],\Delta_4,\mathbb{R}^8)$. Выполняя 5 шагов алгоритма D находим $y\left(\frac{1}{4},t\right)$ – решение задачи (3.3.38), (3.3.39).

**Шаг 3.** Полагая $\omega=\omega_3=\frac{1}{2}$ и рассматриваем задачу

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\mathcal{F}(t,y)+A(t)y+f_0(t)+$$

$$+\varphi(t)\int_0^1\psi(\tau)y(\tau)d\tau,\quad t\in(0,1),\quad y\in\mathbb{R}^2,\tag{3.3.40}$$

$$y(0)-y(1)=d,\quad d\in\mathbb{R}^2.\tag{3.3.41}$$

Равенствами $\lambda_r^{\left(\frac{1}{2},0\right)}=y\left(\frac{1}{4},t_{r-1}\right)$, $v_r^{\left(\frac{1}{2},0,0\right)}(t)=y\left(\frac{1}{4},t\right)-y\left(\frac{1}{4},t_{r-1}\right)$, $t\in[t_{r-1},t_r]$, $r=\overline{1,4}$ определяем элементы вектора $\lambda^{\left(\frac{1}{2},0\right)}\in\mathbb{R}^8$ и системы функций

$v^{\left(\frac{1}{2},0,0\right)}[t] \in \tilde{\mathbb{C}}([0,1],\Delta_4,\mathbb{R}^8)$. На 5 −ом шаге алгоритма D находим $y\left(\frac{1}{2},t\right)-$ решение задачи (3.3.40), (3.3.41).

**Шаг 4.** Полагая $\omega = 1$ и получим задачу (3.3.26), (3.3.27). Равенствами $\lambda_r^{(1,0)} = y\left(\frac{1}{4},t_{r-1}\right)$, $v_r^{(1,0,0)}(t) = y\left(\frac{1}{4},t\right) - y\left(\frac{1}{4},t_{r-1}\right)$, $t \in [t_{r-1},t_r]$, $r = \overline{1,4}$ определяем элементы вектора $\lambda^{(1,0)} \in \mathbb{R}^8$ и системы функций $v^{(1,0,0)}[t] \in \tilde{\mathbb{C}}([0,1],\Delta_4,\mathbb{R}^8)$. Выполняя 5 шагов алгоритма D находим $y(1,t)-$ решение задачи (3.3.26), (3.3.27).

В таблицах 2 и 3 приведены значения численных решений задач (3.3.30), (3.3.31) и (3.3.28), (3.3.29) (при $\omega = \frac{1}{5}$, $\omega = 1$) с шагом $h_1 = 0.0625$.

**Таблица 2** - Значения первых компонент численных решений задачи (3.3.26), (3.3.27)

| $\hat{t}$ | $y_1(0,\hat{t})$ | $y_1\left(\frac{1}{5},\hat{t}\right)$ | $y_1(1,\hat{t})$ | $x_1^*(\hat{t})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.0000 | -1.4255434948 | -1.4385159448 | -2.0000000021 | -2.000000000 |
| 0.0625 | -1.4325208559 | -1.4491690564 | -1.9960937521 | -1.996093750 |
| 0.1250 | -1.4331685171 | -1.4527035527 | -1.9843750021 | -1.984375000 |
| 0.1875 | -1.4269257505 | -1.4485723815 | -1.9648437521 | -1.964843750 |
| 0.2500 | -1.4131471579 | -1.4361747846 | -1.9375000021 | -1.937500000 |
| 0.3125 | -1.3911210453 | -1.4148722628 | -1.9023437521 | -1.902343750 |
| 0.3750 | -1.3600913537 | -1.3840059900 | -1.8593750021 | -1.859375000 |
| 0.4375 | -1.3192833827 | -1.3429158611 | -1.8085937521 | -1.808593750 |
| 0.5000 | -1.2679336818 | -1.2909615167 | -1.7500000027 | -1.750000000 |
| 0.5625 | -1.2053248144 | -1.2275460018 | -1.6835937526 | -1.683593750 |
| 0.6250 | -1.1308262848 | -1.1521432523 | -1.6093750025 | -1.609375000 |
| 0.6875 | -1.0439438313 | -1.0643314197 | -1.5273437524 | -1.527343750 |
| 0.7500 | -0.9443806449 | -0.9638352698 | -1.4375000023 | -1.437500000 |
| 0.8125 | -0.8321160815 | -0.8505827096 | -1.3398437522 | -1.339843750 |
| 0.8750 | -0.7075104116 | -0.7247832397 | -1.2343750022 | -1.234375000 |
| 0.9375 | -0.5714486567 | -0.5870402997 | -1.1210937522 | -1.121093750 |
| 1.0000 | -0.4255434948 | -0.4385159448 | -1.0000000021 | -1.000000000 |

**Таблица 3** - Значения вторых компонент численных решений задачи (3.3.26), (3.3.27)

| $\hat{t}$ | $y_2(0,\hat{t})$ | $y_2\left(\frac{1}{5},\hat{t}\right)$ | $y_2(1,\hat{t})$ | $x_2^*(\hat{t})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.0000 | -0.5851749037 | -0.3230135631 | 1.0000000031 | 1.0000000000 |
| 0.0625 | -0.4534197206 | -0.1972720430 | 1.0625000031 | 1.0625000000 |
| 0.1250 | -0.3267422030 | -0.0771546068 | 1.1250000030 | 1.1250000000 |
| 0.1875 | -0.2057700705 | 0.0370246356 | 1.1875000030 | 1.1875000000 |
| 0.2500 | -0.0911967241 | 0.1448810030 | 1.2500000030 | 1.2500000000 |
| 0.3125 | 0.0162355102 | 0.2459715352 | 1.3125000030 | 1.3125000000 |
| 0.3750 | 0.1157429235 | 0.3397989723 | 1.3750000030 | 1.3750000000 |
| 0.4375 | 0.2064969603 | 0.4258063532 | 1.4375000030 | 1.4375000000 |
| 0.5000 | 0.2876077385 | 0.5033608207 | 1.5000000030 | 1.5000000000 |
| 0.5625 | 0.3580921305 | 0.5717247175 | 1.5625000030 | 1.5625000000 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.6250 | 0.4168232169 | 0.6300112607 | 1.6250000031 | 1.6250000000 |
| 0.6875 | 0.4624565979 | 0.6771208312 | 1.6875000032 | 1.6875000000 |
| 0.7500 | 0.4933268613 | 0.7116519650 | 1.7500000032 | 1.7500000000 |
| 0.8125 | 0.5073040126 | 0.7317781312 | 1.8125000031 | 1.8125000000 |
| 0.8750 | 0.5015941880 | 0.7350767873 | 1.8750000034 | 1.8750000000 |
| 0.9375 | 0.4724603549 | 0.7182901671 | 1.9375000037 | 1.9375000000 |
| 1.0000 | 0.4148250963 | 0.6769864369 | 2.0000000031 | 2.0000000000 |

Используя числовые данные, представленные в таблицах 2 и 3, мы получаем следующие оценки:

$$\|x^*(\hat{t}) - y(0,\hat{t})\| < 1.5852, \quad \|x^*(\hat{t}) - y(\omega_1,\hat{t})\| < 1.3230,$$
$$\|x^*(\hat{t}) - y(1,\hat{t})\| \leq 4.3127 \cdot 10^{-9},$$

где $x_1^*(\hat{t})$, $x_2^*(\hat{t})$ – компоненты численного решения исходной задачи (3.3.24), (3.3.25).

**Пример 3.** Рассматриваем двухточечную нелинейную краевую задачу

$$z'' = q_1(t)cos(tz') + q_2(t)sin(tz) + \int_0^T K_1(t,\tau)z'(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^1 K_2(t,\tau)z(\tau)d\tau + q_0(t), \quad t \in (0,T), \qquad (3.3.42)$$

$$z(0) - z'(T) + cos\big(Tz(T)\big) = 1, \qquad (3.3.43)$$

$$z(T) + z'^2(0) + sin\big(Tz'(T)\big) = 1, \qquad (3.3.44)$$

где

$$T = 1, \quad q_1(t) = t^2, \quad q_2(t) = \frac{t+2}{3}, \quad K_1(t,\tau) = 2t^2\tau^3, \quad K_2(t,\tau) = t\tau^2,$$

$$q_0(t) = \frac{t^2}{10} + \frac{359t}{60} - 4 - \frac{t+2}{3}sin(t^4 - 2t^3 + t^2) - t^2cos(3t^3 - 4t^2 + t).$$

Решением задачи (3.3.42)-(3.3.44) является функция $z^*(t) = t(t-1)^2$.

Эту задачу запишем в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{F}(t,x) + A(t)x + f_0(t) + \sum_{k=1}^{2} \varphi_k(t)\int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^2, \qquad (3.3.45)$$

$$\mathcal{G}[x(0),x(T)] + Bx(0) + Cx(T) - d = 0, \qquad (3.3.46)$$

где

$$\mathcal{F}(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ q_1(t)cos(tx_2) + q_2(t)sin(tx_1) \end{pmatrix}, \ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ f_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0(t) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t^2 \end{pmatrix}, \ \psi_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau^3 \end{pmatrix}, \ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \ \psi_2(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}[x(0), x(T)] = \begin{pmatrix} cos\big(Tx_1(T)\big) \\ x_2^2(0) + sin\big(Tx_2(T)\big), \end{pmatrix}, \ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим семейство краевых задач

$$\frac{dy}{dt} = \omega\mathcal{F}(t,y) + A(t)y + f_0(t) + \sum_{k=1}^{2} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)y(\tau)d\tau, t \in (0,T), y \in \mathbb{R}^2,$$

$$\omega\mathcal{G}[y(0), y(T)] + By(0) + Cy(T) - d = 0, \quad \omega \in [0,1].$$

Для $\omega = \omega_0 = 0$, мы получим линейную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f_0(t) + \sum_{k=1}^{2} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)y(\tau)d\tau, \quad t \in (0,1), \qquad (3.3.47)$$

$$By(0) + Cy(T) - d = 0. \qquad (3.3.48)$$

Отрезок [0,1] делим на две части и находим численное решение задачи (3.3.47), (3.3.48) на сетке с шагом $h = 0.0125$. Таблицы 4 и 5 представляют решение в сетке с размером шага $h_1 = 0{,}0625$. Используя алгоритмы, предложенные в разделах 3.1 и 3.2, мы решаем семейство краевых задач при $\omega = \omega_1 = \frac{1}{5}$, $\omega = \omega_2 = \frac{2}{5}$, $\omega = \omega_3 = \frac{3}{5}$, $\omega = \omega_4 = \frac{4}{5}$, и $\omega = \omega_5 = 1$.

**Таблица 4** - Значения первых компонент численных решений задачи (3.3.45), (3.3.46)

| $\hat{t}$ | $y_1(0,\hat{t})$ | $y_1\left(\frac{1}{5},\hat{t}\right)$ | $y_1(1,\hat{t})$ | $x_1^*(\hat{t})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.0000 | 0.9258871749 | 0.795695967 | -0.000000665 | 0.0000000000 |
| 0.0625 | 0.9879424718 | 0.8518554047 | 0.0549310057 | 0.0549316406 |
| 0.1250 | 1.0358906141 | 0.8939710624 | 0.0957025200 | 0.0957031250 |
| 0.1875 | 1.0712087874 | 0.9234999593 | 0.1237787215 | 0.1237792969 |
| 0.2500 | 1.0953347539 | 1.9419149925 | 0.1406244538 | 0.1406250000 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.3125 | 1,1096718821 | 0.9506624533 | 0.1477045608 | 0.1477050781 |
| 0.3750 | 1.1155939636 | 0.9511657618 | 0.1464838858 | 0.1464843750 |
| 0.4375 | 1.1144500295 | 0.9448292451 | 0.1384272727 | 0.1384277344 |
| 0.5000 | 1.1075690820 | 0.9330418908 | 0.1249995652 | 0.1250000000 |
| 0.5625 | 1.0962642197 | 0.9171806382 | 0.1076656068 | 0.1076660156 |
| 0.6250 | 1.0818352277 | 0.8986124224 | 0.0878902414 | 0.0878906250 |
| 0.6875 | 1.0655684937 | 0.8786940117 | 0.0671383126 | 0.0671386719 |
| 0.7500 | 1.0487332581 | 0.8587688025 | 0.0468746642 | 0.0468750000 |
| 0.8125 | 1.0325738519 | 0.8401602817 | 0.0285641395 | 0.0285644531 |
| 0.8750 | 1.0182988802 | 0.8241629693 | 0.0136715811 | 0.0136718750 |
| 0.9375 | 1.0070704729 | 0.8120335107 | 0.0036618273 | 0.0036621094 |
| 1.0000 | 1.0000000000 | 0.8049874421 | -0.0000002965 | 0.0000000000 |

**Таблица 5** - Значения вторых компонент численных решений задачи (3.3.45), (3.3.46)

| $\hat{t}$ | $y_2(0,\hat{t})$ | $y_2\left(\frac{1}{5},\hat{t}\right)$ | $y_2(1,\hat{t})$ | $x_2^*(\hat{t})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.0000 | 0.0000000000 | 1.0201675465 | 1.0000004807 | 1.0000000000 |
| 0.0625 | 0.8760315428 | 0.7825187448 | 0.7617192297 | 0.7617187500 |
| 0.1250 | 0.6622467122 | 0.5691902081 | 0.5468754765 | 0.5468750000 |
| 0.1875 | 0.4717675360 | 0.3796611915 | 0.3554692215 | 0.3554687500 |
| 0.2500 | 0.3040044330 | 0.2134756615 | 0.1875004646 | 0.1875000000 |
| 0.3125 | 0.1584458268 | 0.0702378603 | 0.0429692061 | 0.0429687500 |
| 0.3750 | 0.0346569162 | -0.0503881338 | -0.0781245539 | -0.0781250000 |
| 0.4375 | -0.0677199376 | -0.1486773418 | -0.1757808151 | -0.1757812500 |
| 0.5000 | -0.1489695223 | -0.2248467406 | -0.2499995773 | -0.2500000000 |
| 0.5625 | -0.2093199965 | -0.2790681731 | -0.3007808402 | -0.3007812500 |
| 0.6250 | -0.2489763985 | -0.3114958437 | -0.3281246035 | -0.3281250000 |
| 0.6875 | -0.2681723476 | -0.3223091394 | -0.3320308674 | -0.3320312500 |
| 0.7500 | -0.2672339789 | -0.3117657456 | -0.3124996333 | -0.3125000000 |
| 0.8125 | -0.2466409717 | -0.2802522885 | -0.2695309086 | -0.2695312500 |
| 0.8750 | -0.2070575589 | -0.2283094355 | -0.2031247235 | -0.2031250000 |
| 0.9375 | -0.1492906933 | -0.1565944549 | -0.1132811885 | -0.1132812500 |
| 1.0000 | -0.0741128251 | -0.0657263459 | -0.0000006650 | 0.0000000000 |

Используя числовые данные, представленные в таблицах 4 и 5, мы получаем следующие оценки:

$$\|x^*(\hat{t}) - y(0,\hat{t})\| < 1.00088, \quad \|x^*(\hat{t}) - y(\omega_1,\hat{t})\| < 0.81189,$$
$$\|x^*(\hat{t}) - y(1,\hat{t})\| \le 6.6496 \cdot 10^{-7}.$$

В представленных примерах мы использовали итерационные процессы (1.3.6) и (2.3.12) с $\alpha_k = 1, k = 0, 1, \dots$ и делали по пять итераций в обоих случаях.

### 3.4 Усреднение в краевой задаче для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра

Рассматриваются краевые задачи для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x), \quad F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0, \qquad (3.4.1)$$

и

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^t \varphi\big(t,s,x(s)\big)ds\right), \quad F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0, \qquad (3.4.2)$$

где $\varepsilon > 0 -$ малый параметр, $X, F - \ d -$мерные вектор-функции, $\varphi - \ m -$ мерная вектор-функция.

При условии существования интегрального среднего

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,x)dt \qquad (3.4.3)$$

задаче (3.4.1) ставится в соответствие усредненная краевая задача

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y), \quad F\left(y(0), y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0, \qquad (3.4.4)$$

или в "медленном времени" $\tau = \varepsilon t$

$$\frac{dy}{d\tau} = X_0(y), \quad F\big(y(0), y(T)\big) = 0. \qquad (3.4.5)$$

Аналогично для задачи (3.4.2), если

$$\varphi_1(t,x) = \int_0^t \varphi(t,s,x)ds,$$

то интегральное среднее имеет вид

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X\big(t,x,\varphi_1(t,x)\big)dt, \qquad (3.4.6)$$

а усредненная краевая задача – вид (3.4.4) или (3.4.5).

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений к исследованию краевых задач успешно применялся метод усреднения [90], позволяющий свести решение краевой задачи для неавтономной системы к исследованию аналогичной задачи для автономной усредненной системы. Метод усреднения разработан и для интегро-дифференциальных уравнений с последующим его применением к решению краевых задач [91]. При этом для решения краевых задач он имеет еще большее значение, так как позволяет свести краевую задачу для интегро-дифференциальных уравнений к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматриваем аналогичные вопросы как для обыкновенных, так и для интегро-дифференциальных уравнений. При этом для обыкновенных уравнений, в отличие от работы [90], где рассмотрена система с быстрыми и медленными переменными, рассматриваем систему только с медленными переменными.

Что касается применения метода усреднения к решению краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений, то, например, в работе [91] доказана только близость решений краевых задач для точных и усредненных уравнений, при условии их существования. Само же существование решения краевой задачи (3.4.2) не доказывалось, в отличие от аналогичного результата из [90] для обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказываем существование и единственность решения краевой задачи (3.4.2), как это сделано в [90] для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом мы используем аналог первой теоремы Боголюбова метода усреднения [92]. Однако эта теорема доказана в предположении существования глобального решения системы интегро-дифференциальных уравнений. Этот вопрос для таких систем нетривиален, так как для них, в отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не всегда возможно продолжение решения. В [92, 102] этот вопрос рассмотрен частично, однако при весьма жестких ограничениях. В связи с этим доказываем теорему о существовании и единственности глобального решения задачи Коши до момента его выхода из области для уравнения вольтерровского типа.

Заметим, что для существования решения краевой задачи (3.4.2) нам нужно использовать гладкость решения (3.4.2) по начальным данным. В связи с этим для систем интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа доказываем теоремы о непрерывной и непрерывно-дифференцируемой зависимости решений от начальных данных и параметров, а также записываем соответствующую систему в вариациях.

Для задачи (3.4.1) имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.4.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1.1) функция $X(t,x)$ непрерывна в области $Q=\{t\geqslant 0,\ x\in D\subset\mathbb{R}^d\}$ ($D-$ область в $\mathbb{R}^d$) и имеет равномерно непрерывные по $x$ из $\rho-$ окресности $y(\tau)$ частные производные, равномерно по $t\geqslant 0$, а $\frac{\partial X_0}{\partial x}$ непрерывна в $\rho-$ окресности $y(\tau)$;*

*1.2) в области $Q$ функция $X(t,x)$ ограничена постоянной $M>0$ и удовлетворяет по переменной $x$ условию Липшица с постоянной $L>0$;*

*1.3) равномерно по $x\in D$ существует предел (3.4.3), а также предел*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial X}{\partial x}(t,x)dt = \frac{\partial X_0}{\partial x};$$

*1.4) усредненная задача (3.4.5) имеет решение* $y = y(\tau) = y(\varepsilon t)$, *лежащее в области* $D$ *с некоторой* $\rho$ *−окрестностью, и в этой окрестности функция* $F$ *имеет равномерно непрерывные частные производные* $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$, *при этом*

$$det\frac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0} \neq 0 \tag{3.4.7}$$

*где* $x_0 = y(0)$, *а* $F_0(x_0) = F\big(x_0, y(T, x_0)\big)$.

*Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *можно указать функцию* $\xi = \xi(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0$, *такую, что краевая задача (3.4.1) имеет единственное решение* $x(t,\varepsilon)$, *лежащее в* $\xi(\varepsilon) -$ *окрестности* $y(\varepsilon t)$, *т. е.*

$$|x(t,\varepsilon) - y(\varepsilon t)| < \xi(\varepsilon), \quad t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{3.4.8}$$

В дальнейшем через $|\cdot|$ будем обозначать норму вектора, а через $\|\cdot\|$ норму матрицы, согласованную с нормой вектора.

Относительно задачи (3.4.2) справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.4.2.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1.5) функция* $X(t,x,y)$ *непрерывна вместо со своими частными производными* $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}$ *в области* $Q = \{t \geqslant 0,\ x \in D,\ y \in \mathbb{R}^m\}$, $D$ *−область в* $\mathbb{R}^d$;

*1.6) в области* $Q$ *функция* $X(t,x,y)$ *ограничена постоянной* $M > 0$ *и удовлетворяет вместе с* $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial X_0}{\partial x}$ *по переменным* $x$ *и* $y$ *условию Липшица с постоянной* $L > 0$;

*1.7) функция* $\varphi(t,s,z)$ *определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ *в области* $Q_1 = \{t \geqslant 0,\ s \geqslant 0,\ z \in D\}$, $\varphi\colon Q_1 \to \mathbb{R}^m$;

*1.8) функция* $\varphi$ *ограничена в* $Q_1$ *постоянной* $M$ *и удовлетворяет вместе с* $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ *по* $z$ *условию Липшица в форме*

$$|\varphi(t,s,z_1) - \varphi(t,s,z_2)| \leqslant \mu(t,s)|z_1 - z_2|, \tag{3.4.9}$$

*при этом*

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau,s)ds \to 0, \quad t \to \infty$$

*и интеграл*

$$\int_0^s \mu(s,\tau)d\tau$$

*ограничен при* $s \geqslant 0$ *некоторой постоянной* $\mu_0$;

*1.9) равномерно по* $x \in D$ *существует предел (3.4.6), а также предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial X\big(t,x,\varphi_1(t,x)\big)}{\partial x} + \frac{\partial X\big(t,x,\varphi_1(t,x)\big)}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1(t,x)}{\partial x}\right)dt = \frac{\partial X_0}{\partial x};$$

*1.10) выполнено условие 1.4) теоремы 3.4.1.*

*Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$,, *что при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *можно указать функцию* $\xi = \xi(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ *такую, что краевая задача (3.4.2) имеет единственное решение* $x(t,\varepsilon)$, *лежащее в* $\xi(\varepsilon) -$ *окрестности* $y(\varepsilon t)$, *т. е.*

$$|x(t,\varepsilon) - y(\varepsilon t)| < \xi(\varepsilon), \quad t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Рассмотрим задачу Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа

$$\dot{x} = X\left(t, x, \int_0^t \varphi\big(t,s,x(s)\big)ds\right), \quad x(0) = x_0. \qquad (3.4.10)$$

Будут изучены вопросы нелокального существования и единственность решения задачи Коши (3.4.10), а также его зависимость от начальных данных и параметров. Относительно задачи (3.4.10) имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.4.3.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*2.1) функция* $X(t,x,y)$ *определена и непрерывна в области* $t \in [0,T]$, $x \in D$, $D -$ *область в* $\mathbb{R}^d$, $\partial D -$ *ее граница,* $\overline{D} = D \cup \partial D$, $y \in D_1$, $D_1$ *—область в* $\mathbb{R}^m$;

*2.2)* $\varphi(t,s,z)$ *определена и непрерывна в* $Q_1 = \{[0,T] \times [0,T] \times D\}$ *и* $\varphi\colon Q_1 \to D_1$;

*2.3)* $X$ *удовлетворяет по* $x$, $y$ *условию линейного роста и условию Липшица, т. е. существуют постоянные* $M > 0$ *и* $L > 0$, *что для* $t \in [0,T]$, $x, x_1 \in D$, $y, y_1 \in D_1$

$$|X(t,x,y)| \leqslant M(1 + |x| + |y|), \qquad (3.4.11)$$

$$|X(t,x,y) - X(t,x_1,y_1)| \leqslant L(|x - x_1| + |y - y_1|), \qquad (3.4.12)$$

*где через* $|\cdot|$ *обозначена евклидова норма в* $\mathbb{R}^d$ *и* $\mathbb{R}^m$*;*

*2.4)* $\varphi$ *удовлетворяет по* $z$ *условию Липшица с постоянной* $L$*, для всех* $t, s \in [0, T]$ *и* $z, z_1 \in D$ *имеем*

$$|\varphi(t,s,z) - \varphi(t,s,z_1)| \leqslant L|z - z_1| \qquad (3.4.13)$$

*и ограничена в* $Q_1$ *постоянной* $M$*. Пусть также область* $D_1$ *содержит шар радиуса* $TM$*. Тогда если отрезок* $|x - x_0| \leqslant b$ *содержится в* $D$*, то решение задачи Коши (3.4.10) существует и единственно на интервале* $0 \leqslant t \leqslant h$*, где* $h = min\left\{T, \frac{b}{N}\right\}$, $N = \max\limits_{|x-x_0|\leqslant b, |y|\leqslant TM, t\in[0,T]} |X(t,x,y)|$.

*При этом оно однозначно продолжается до момента его выхода на* $\partial D$*.*

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность функций $x_0(t) \equiv 0$, а $x_n(t) -$ решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_n(t) = X\left(t, x_n, \int\limits_0^t \varphi\big(t, s, x_{n-1}(s)\big)ds\right), \quad x_n(0) = x_0. \qquad (3.4.14)$$

Поскольку функция $\varphi$ ограничена постоянной $M$, а область $D_1$ содержит шар радиуса $TM$, то при каждом $n$ для системы (3.4.14) справедливы условия теоремы Пикара. Поэтому последовательность функций $\{x_n(t)\}$ определена на отрезке $[0, a_n]$, где

$$a_n = \min\left\{T, \frac{b}{M_n}\right\}, \quad M_n = \max_{t\in[0,T], |x-x_0|\leqslant b} \left|X\left(t, x, \int\limits_0^t \varphi\big(t, s, x_{n-1}(s)\big)ds\right)\right|$$

но

$$M_n \leqslant \max_{t\in[0,T], |x-x_0|\leqslant b, y\in B_{TM}(0)} |X(t,x,y)|.$$

Здесь $B_{TM}(0) -$ шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в нуле радиуса $TM$. Так что $a_n \geqslant \min\left\{T, \frac{b}{M_n}\right\} = a$ для любого $n$. Поэтому для каждого $n$, последовательность $x_n(t)$ определена на общем отрезке $[0, a]$. Выберем теперь $h_0 \leqslant a$ так, чтобы

$$\frac{L^2 h_0^2}{1 - L h_0} < 1. \qquad (3.4.15)$$

Покажем равномерную на $[0, h_0]$ сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$. Действительно на $[0, h_0]$ мы имеем

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant L\int_0^t |x_n(s) - x_{n-1}(s)|ds + L^2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)|ds.$$

Отсюда

$$\sup_{t\in[0,h_0]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant Lh_0 \sup_{t\in[0,h_0]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| + (Lh_0)^2 \sup_{t\in[0,h_0]} |x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)|.$$

Так,

$$\sup_{t\in[0,h_0]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant \frac{(Lh_0)^2}{1 - Lh_0} \sup_{t\in[0,h_0]} |x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)|.$$

Из (3.4.15) следует равномерная на $[0, h_0]$ сходимость последовательности $x_n(t) \rightrightarrows x^{(0)}(t)$. Предельным переходом в интегральном равенстве

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t X\left(\tau, x_n(\tau), \int_0^\tau \varphi\big(\tau, s, x_{n-1}(s)\big)ds\right)d\tau$$

убеждаемся, что $x^{(1)}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x^{(0)}(t) = x_0 + \int_0^t X\left(\tau, x^{(0)}(\tau), \int_0^\tau \varphi\left(\tau, s, x^{(0)}(s)\right)ds\right)d\tau,$$

т. е. является решением задачи Коши для системы

$$\dot{x} = X\left(\tau, x, \int_0^t \varphi\big(t, s, x(s)\big)ds\right), \quad x(0) = x_0 \qquad (3.4.16)$$

на $[0, h_0]$.

Покажем теперь, что это решение можно продолжить вправо, до момента его выхода на $\partial D$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 3.4.1.** *Для любого компакта $K$, целиком содержащегося в области $Q = \{(0, T) \times D\}$, решение $x(t)$ задачи (3.4.16) можно продолжить до точки $t_+$, что $\big(t_+, x(t_+)\big)$ не принадлежит $K$.*

Доказательство. Действительно, если точка $\left(h_0, x^{(0)}(h_0)\right)$ принадлежит $K$, то утверждение доказано. Пусть $\left(h_0, x^{(0)}(h_0)\right)$ не принадлежит $K$. Тогда применим рассмотренные выше рассуждения. Рассмотрим последовательность функций $\{x_n(t)\}$ таких, что $x_n(t) \equiv x^{(0)}(t)$, при $t \in [0, h_0]$, а для $t > h_0$ определим их, как решения задач Коши систем (3.4.14) с начальными данными $x_n(h_0) = x^{(0)}(h_0)$.

Покажем теперь, что все они определены на общем отрезке $[h_0, h_0 + h_1]$, где $h_1$ не зависит от выбора $n$ и точки $\left(h_0, x^{(0)}(h_0)\right)$.

Выберем число $\varepsilon > 0$ насколько малым, чтобы для каждой точки $(t', x') \in K$ квадрат

$$\Pi_\varepsilon(t', x') = \{(t, x) \in D \colon |t - t'| \leqslant \varepsilon, |x - x'| \leqslant \varepsilon\}$$

целиком лежал в $D$. Тогда

$$K_\varepsilon = \overline{\bigcup_{(t', x') \in K} \Pi_\varepsilon(t', x')} \subset D$$

и $\Pi_\varepsilon(t', x') \subset K_\varepsilon$, если $(t', x') \in K_\varepsilon$. И как следствие отсюда получим

$$\max_{(t,x) \in \Pi_\varepsilon(t', x'), y \in B_{TM}(0)} \leqslant M_\varepsilon = \max_{(t,x) \in K_\varepsilon, y \in B_{TM}(0)} |X(t, x, y)|.$$

Из теоремы Пеано, примененной к квадрату $\Pi_\varepsilon(t', x')$, следует, что решения $x_n(t)$ системы (3.4.14) с начальными данными $\left(h_0, x^{(0)}(h_0)\right)$ существуют на отрезке $[h_0, h_0 + h_1]$, где $h_1 = \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{M_\varepsilon}\right\}$. Далее выберем $h_1$ так, чтобы для него выполнялось условие

$$\frac{(Lh_1)^2}{1 - Lh_1} < 1.$$

Тогда при $t \in [h_0, h_0 + h_1]$ получим

$$\sup_{t \in [h_0, h_0 + h_1]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant L \int_{h_0}^{h_0 + h_1} |x_n(s) - x_{n-1}(s)| ds +$$

$$+ \int_{h_0}^{h_0 + h_1} L^2 \left( \int_0^\tau |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)| ds \right) d\tau. \quad (3.4.17)$$

Но в силу построения $x_n(t)$

$$\int\limits_0^{h_0} |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)|ds = 0.$$

Поэтому (3.4.17) можно записать в виде

$$\sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant Lh_1 \sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| +$$

$$+L^2 \int\limits_{h_0}^{h_0+h_1} d\tau \left( \int\limits_0^{\tau} |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)|ds \right) \leqslant Lh_1 \sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| +$$

$$+(Lh_1)^2 \sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} |x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)|.$$

Отсюда получим неравенство

$$\sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant \frac{(Lh_1)^2}{1 - Lh_1} \sup_{t\in[h_0,h_0+h_1]} |x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)|,$$

из которого и следует равномерная на $[h_0, h_0 + h_1]$ сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$ к предельной функций $x^{(1)}(t)$. Предельным переходом в равенстве

$$x_n(t) = x^{(0)}(h) + \int\limits_0^t X\left(\tau, x_n(\tau), \int\limits_0^{\tau} \varphi\big(\tau, s, x_{n-1}(s)\big)ds\right)d\tau$$

убеждаемся, что $x^{(1)}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x^{(1)}(t) = x^{(0)}(h) + \int\limits_h^t X\left(\tau, x^{(1)}(\tau), \int\limits_0^{\tau} \varphi\left(\tau, s, x^{(1)}(s)\right)ds\right)d\tau.$$

Теперь функция

$$x(t) = \begin{cases} x^{(0)}(t), & t \in [0, h_0], \\ x^{(1)}(t), & t \in [h_0, h_0 + h_1], \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению (3.4.16) как на интервалах $[0, h_0]$, так и на $[h_0, h_0 + h_1]$. При этом левая и правая производные функции $x(t)$ в точке $h_0$ существуют и равны соответственно $X\left(h_0, x^{(0)}(h_0), \int_0^{h_0} \varphi\left(h_0, s, x^{(0)}(s)\right) ds\right)$ и $X\left(h_0, x^{(1)}(h_0), \int_0^{h_0} \varphi\left(h_0, s, x^{(1)}(s)\right) ds\right)$. Но по построению $x^{(1)}(t)$ эти значения совпадают. Таим образом, $x(t)$ является решением задачи Коши (3.4.16) на $[0, h_0 + h_1]$.

Если точка $\left(h_0 + h_1, x(h_0 + h_1)\right)$ не принадлежит $K$, то лемма доказана. Если же $\left(h_0 + h_1, x(h_0 + h_1)\right) \in K$, то повторяем данную процедуру на отрезке $[h_0 + h_1, h_0 + 2h_1]$. Поскольку $K$ ограничено, то за конечное число шагов мы покинем компакт $K$. Лемма 3.4.1 доказана.

Доказательство теоремы. Поскольку компакт $K$ был выбран произвольно, то решение $x(t)$ достигнет границы области $D$. Единственность такого решения и его непрерывная зависимость от начальных данных следует из аналога леммы Гронуолла [92] (теорема 2.1). Теорема 3.4.3 доказана.

**Замечание 3.4.1.** *Условие ограниченности функции $\varphi$ не является необходимым и взято для технического удобства. Немного изменив доказательство теоремы 3.4.3, нетрудно показать, что она остается в силе, если условие ограниченности функции $\varphi(t, s, z)$ заменить условием ее линейного по z роста:*

$$|\varphi(t, s, z)| \leqslant M(1 + |z|).$$

Рассмотрим теперь задачу Коши типа (3.4.10) с параметром

$$\dot{x} = X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s), \lambda) ds, \lambda\right), \quad x(0) = x_0. \qquad (3.4.18)$$

При этом ее решение уже является функция от $x_0$ и $\lambda$, $x(t) = x(t, x_0, \lambda)$.

Изучим вопрос зависимости решения от начальных данных и параметров. Нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 3.4.2.** *Предположим что выполнены следующие условия:*

*2.9) функция $X(t, x, y, \lambda)$ определена и непрерывна в области $Q = \{t \in [0, T], x \in D, y \in D_1, \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]\}$, где $D$ и $D_1 -$ те же области, что в теореме 3.4.3;*

*2.10) $\varphi(t, s, z, \lambda)$ определена и непрерывна в области $Q_1 = \{t \in [0, T], s \in [0, T], x \in D, \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]\}$ и $\varphi: Q_1 \to D_1$;*

*2.11) $X(t, x, y, \lambda)$ равномерно относительно $\lambda$ удовлетворяет по $x$, $y$ условию линейного роста и условию Липшица (3.4.11), (3.4.12);*

*2.12) $\varphi(t, s, z, \lambda)$ равномерно относительно $\lambda$ удовлетворяет по z условию Липшица (3.4.13) т.е.*

$$|\varphi(t,s,z,\lambda)-\varphi(t,s,z_1,\lambda)|\leqslant L|z-z_1|$$

*и ограничена в $Q_1$ постоянной $M$.*

*Пусть также область $D_1$ содержит шар $B_{TM}(0)$. Тогда при $x_0\in D$ и $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_1]$ для решения задачи Коши (3.4.18) справедливо заключение теоремы 3.4.3 и решение $x(t,x_0,\lambda)$ является непрерывной функцией по совокупности аргументов в области $\{t\in[0,h],x_0\in D,\lambda\in[\lambda_0,\lambda_1]\}$.*

Доказательство. Применим к построению решения задачи Коши (3.4.18) теорему 3. В результате получим аналогично последовательность функций $\{x_n(t,x_0,\lambda)\}$, которая по построению будет непрерывно зависеть от $x_0$ и $\lambda$. При этом, в силу равномерности по $\lambda$ условий леммы 2, эта последовательность будет иметь равномерно по $t$, $x_0$ и $\lambda$ сходящуюся к решению задачи (3.4.18) подпоследовательность, что в силу единственности решения задачи (3.4.18) и доказывает лемму.

Для дальнейшего важным является вопрос непрерывной дифференцируемости решений задачи (3.4.10) по начальным данным.

**Лемма 3.4.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 3.4.3 и при этом частные производные $\frac{\partial X}{\partial x},\frac{\partial X}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ непрерывны по совокупности аргументов в указанных областях. Тогда решение задачи Коши (3.4.10) является непрерывно дифференцируемой функцией параметра $x_0$ и при этом функция $z(t)=\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,x_0)$ удовлетворяет линейному интегро-дифференциальному уравнению*

$$\dot z=\frac{\partial X\left(t,x(t,x_0),\int_0^t\varphi\big(t,s,x(s,x_0)\big)ds\right)}{\partial x}z(t)+$$

$$+\frac{\partial X\left(t,x(t,x_0),\int_0^t\varphi\big(t,s,x(s,x_0)\big)ds\right)}{\partial y}\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi\big(t,s,x(s,x_0)\big)}{\partial z}z(s)ds.$$

**Замечание 3.4.2.** *По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями уравнение (3.4.19) назовем уравнением в вариациях.*

Доказательство. Идейно доказательство похоже на аналогичное утверждение для обыкновенных дифференциальных уравнении. Поэтому, не вдаваясь в подробности, все выкладки проведем для $d=m=1$. Для многомерного случая рассуждения аналогичны. Обозначим $\tilde x(t)=x(t,x_0+\Delta x_0)$, а $x(t)=x(t,x_0)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t,x_0+\Delta x_0)-x(t,x_0)}{\Delta x_0}\right)=$$

$$= \frac{\partial X\left(t, x(t) + \theta\big(\tilde{x}(t) - x(t)\big), \int_0^t \varphi\big(t, s, \tilde{x}(s)\big)ds\right)}{\partial x} \frac{\tilde{x}(t) - x(t)}{\Delta x_0} +$$

$$+ \frac{\partial X(t, x(t), \int_0^t \varphi(t,s,x(s))ds + \theta_1 \int_0^t (\varphi(t,s,\tilde{x}(s)) - \varphi(t,s,x(s)))ds)}{\partial y} \times$$

$$\times \int_0^t \frac{\partial \varphi(t,s,x(s) + \theta_2(\tilde{x}(s) - x(s)))}{\partial z} \frac{\tilde{x}(s) - x(s)}{\Delta x_0} ds, \quad (3.4.20)$$

$$\theta, \theta_1, \theta_2 \in (0,1).$$

Уравнение (3.4.20) является линейным уравнением относительно функции $\frac{\tilde{x}(t)-x(t)}{\Delta x_0}$, при этом его коэффициенты, в силу условий леммы, непрерывно зависят от $\Delta x_0$, как от параметра. Следовательно, и решение уравнения (3.4.20), в силу леммы 3.4.2, непрерывно зависит от $\Delta x_0$. Выполнив предельный переход в (3.4.20), при $\Delta x_0 \to 0$ получим утверждение леммы.

**Замечание 3.4.3.** *Изучение гладкости решения задачи Коши (3.4.18) по параметру сводится к гладкости по начальным данным, следовательно в предположении гладкости функций* $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial \lambda}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ *и при выполнении условий леммы 3.4.3 решение задачи Коши (3.4.18) непрерывно дифференцируемы по* $\lambda$.

Для получения основных результатов нам понадобятся две леммы об усреднении, касающиеся близости производных по начальным данным решений от точных и усредненных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (3.4.1), (3.4.4) и интегро-дифференциальных уравнений (3.4.2), (3.4.4).

**Лемма 3.4.4.** *Пусть выполнены условия 1.1-1.4 и функции* $\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial X_0(t,x)}{\partial x}$ *равномерно непрерывны по* $x$ *из* $\rho$ *−окрестности решения* $y(\tau)$ *равномерно по* $t \geqslant 0$.

*Тогда для производных по начальным данным решений точных и усредненных задач* $\frac{\partial x(t,z,\varepsilon)}{\partial z}|_{z=x_0}$ *и* $\frac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z}|_{z=x_0}$ *справедливо утверждение: для любого* $\eta > 0$ *существует* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *имеет место неравенство*

$$\left\| \frac{\partial x(t,z,\varepsilon)}{\partial z}|_{z=x_0} - \frac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z}|_{z=x_0} \right\| \leqslant \eta$$

*при* $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$.

Для систем интегро-дифференциальных уравнений справедлив аналогичный результат.

**Лемма 3.4.5.** *Пусть выполнены условия 1.5-1.10, функции* $\frac{\partial X}{\partial x}$ , $\frac{\partial X}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial X_0}{\partial x}$ *липшицевы с постоянной* $L$ *по* $x \in D$ *и* $y \in \mathbb{R}^m$, *а* $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ *удовлетворяет по* $z$ *условию Липшица (3.4.9).*

*Тогда для производных по начальным данным решений точных (3.4.2) и усредненных (3.4.4) уравнений для любого* $\eta > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \frac{\partial x(t,z,\varepsilon)}{\partial z}|_{z=x_0} - \frac{\partial y(\varepsilon t, z)}{\partial z}|_{z=x_0} \right\| \leqslant \eta \qquad (3.4.21)$$

*при* $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$.

Поскольку лемма 3.4.4 является следствием леммы 3.4.5, проведем доказательство только леммы 3.4.5.

Доказательство леммы 3.4.5. Обозначим $\frac{\partial x(t,z,\varepsilon)}{\partial z}|_{z=x_0} = z(t)$, а $\frac{\partial y(\varepsilon t,z)}{\partial z}|_{z=x_0} = z_1(t)$. Тогда, согласно лемме 3.4.3, $z(t)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\dot{z} = \varepsilon[\frac{\partial X\left(t, x(t,x_0,\varepsilon), \int_0^t \varphi\big(t,s,x(s,x_0,\varepsilon)\big)ds\right)}{\partial x} z(t) +$$

$$+\frac{\partial X\left(t, x(t,x_0,\varepsilon), \int_0^t \varphi\big(t,s,x(s,x_0,\varepsilon)\big)ds\right)}{\partial y} \int\limits_0^t \frac{\partial \varphi\big(t,s,x(s,x_0,\varepsilon)\big)}{\partial z} z(s)ds]$$

а $z_1(t)$ − уравнению в вариациях вида

$$\dot{z}_1 = \varepsilon \frac{\partial X_0\big(y(\varepsilon t, x_0)\big)}{\partial x} z_1$$

с начальными условиями, равным единичным ортам.

Из аналога первой теоремы Боголюбова для интегро-дифференциальных уравнений следует существование такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ решение $x(t, x_0, \varepsilon)$ точной системы (3.4.2) принадлежит области $D$ при $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$. Следовательно, для него выполнена оценка

$$|x(t,x_0,\varepsilon)| \leqslant |x_0| + TM, \quad t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right].$$

Аналогичная оценка справедлива и для решения усредненной задачи. Из липшицевости функций $X$, $X_0$, $\varphi$ следует, что

$$|z(t)| \leqslant |z(0)| + \varepsilon \int_0^t \left( L|z(s)| + \int_0^s \mu(s,\tau)|z(\tau)|d\tau \right) ds.$$

Поэтому в силу аналога неравенства Гронуолла [92, с. 58] имеем

$$|z(t)| \leqslant |z(0)| e^{\varepsilon \int_0^t \left(L + \int_0^s \mu(s,\tau)d\tau\right)ds} \leqslant |z(0)| e^{LK},$$

при $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$, где $K > 0 -$ некоторая константа.

Используя стандартную лемму Гронуолла, аналогичную оценку можно получить и для $z_1(t)$:

$$|z_1(t)| \leqslant |z_1(0)| e^{L}.$$

Зафиксируем $\eta > 0$ и оценим на $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ разность $z(t) - z_1(t)$. Далее положим $x(t, x_0, \varepsilon) = x(t)$, а $y(\varepsilon t, x_0) = y(t)$. Тогда

$$|z(t) - z_1(t)| =$$

$$= \varepsilon \int_0^t \left[ \frac{\partial X\left(s, x(s), \int_0^s \varphi\left(s, \tau, x(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial x} - \frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi\left(s, \tau, y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial x} \right] z(s) ds +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \Big[ \frac{\partial X\left(s, x(s), \int_0^s \varphi\left(s, \tau, x(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial y} \int_0^s \frac{\partial \varphi\left(s, \tau, x(\tau)\right)}{\partial z} z(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi\left(s, \tau, y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial y} \int_0^s \frac{\partial \varphi\left(s, \tau, y(\tau)\right)}{\partial z} z(\tau) d\tau \Big] ds +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi\left(s, \tau, y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial x} \left(z(s) - z_1(s)\right) ds +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \frac{\partial X(s, y(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, y(\tau))d\tau}{\partial x} z_1(s) ds + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial X\left(s, y(s), \int_0^s \varphi\left(s, \tau, y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial y}$$

$$\times \int_0^s \frac{\partial\varphi\big(s,\tau,y(\tau)\big)}{\partial x} z(\tau)d\tau ds - \varepsilon \int\limits_0^t \frac{\partial X_0\big(y(s)\big)}{\partial x} z_1(s)ds. \qquad (3.4.22)$$

Оценим первое слагаемое в (3.4.22). Учитывая липшицевость $\frac{\partial X}{\partial x}$ и ограниченность $z(t)$, это слагаемое оценивается выражением

$$\left(\varepsilon L \int\limits_0^t L|x(s)-y(s)|ds + \varepsilon L \int\limits_0^t ds \int\limits_0^s \mu(s,\tau)|x(\tau)-y(\tau)|d\tau\right)|z(0)|e^{LK}. \, (3.4.23)$$

Из аналога первой теоремы Боголюбова для интегро-дифференциальных уравнений следует возможность выбора такого $0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ выражение (3.4.23) не превышает $\frac{\eta}{a}$. Здесь $a > 0$ —постоянная, определенная ниже, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(a)$.

Второе слагаемое в (3.4.22) оценивается выражением

$$\varepsilon \int\limits_0^t \left[\frac{\partial X\big(s, x(s), \int_0^s \varphi\big(s,\tau,x(\tau)\big)d\tau\big)}{\partial y} \times\right.$$

$$\left. \times \int\limits_0^s \left(\frac{\partial\varphi\big(s,\tau,x(\tau)\big)}{\partial z} - \frac{\partial\varphi\big(s,\tau,y(\tau)\big)}{\partial z}\right) z(\tau)d\tau\right] ds +$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \left[\frac{\partial X\big(s, x(s), \int_0^s \varphi\big(s,\tau,x(\tau)\big)d\tau\big)}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial X\big(s, y(s), \int_0^s \varphi\big(s,\tau,y(\tau)\big)d\tau\big)}{\partial y} \int\limits_0^s \frac{\partial\varphi\big(s,\tau,y(\tau)\big)}{\partial z} z(\tau)d\tau\right] ds.$$

В силу условий Липшица последнее выражение по норме не превышает выражения

$$\varepsilon \int\limits_0^t L ds \int_0^s \mu(s,\tau)|x(\tau)-y(\tau)||z(\tau)|d\tau +$$

$$+\varepsilon\int_0^t L\left(|x(s)-y(s)|+\int_0^s \mu(s,\tau)|x(\tau)-y(\tau)|d\tau\right.$$

$$\left.+\int_0^s \mu(s,\tau)|z(\tau)|d\tau\right)ds. \ (3.4.24)$$

Выражение (3.4.24) не превышает при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ выражение

$$\varepsilon\frac{\eta L}{a}|z(0)|e^{LK}\varepsilon\left(\int_0^t ds\int_0^s \mu(s,\tau)d\tau+\frac{T}{\varepsilon}L+\mu_0\int_0^t ds\int_0^s \mu(s,\tau)d\tau\right).$$

С учетом оценок (3.4.23), (3.4.24) выражение (3.4.22) теперь оценивается выражением

$$\frac{\eta}{a}+\frac{\eta}{a}L|z(0)|e^{LK}(T+TL+\mu_0T)+$$

$$+\varepsilon\int_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial x}(z(s)-z_1(s))+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial y}\int_0^s\frac{\partial\varphi\left(s,\tau,y(\tau)\right)}{\partial z}(z(\tau)-z_1(\tau))d\tau\right]ds+$$

$$+\varepsilon\int_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial x}z_1(s)+\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial y}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^s\frac{\partial\varphi\left(s,\tau,y(\tau)\right)}{\partial z}z_1(\tau)d\tau-\frac{\partial X_0\left(y(s)\right)}{\partial x}z_1(s)\right]ds. \qquad (3.4.25)$$

Оценим последнее слагаемое в (3.4.25), записав его в виде

$$\varepsilon\int_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial x}-\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(s)\right)d\tau\right)}{\partial x}\right]z_1(s)ds+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(\tau)\right)d\tau\right)}{\partial y}\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi\left(s,\tau,y(\tau)\right)}{\partial z}z_1(\tau)d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(s)\right)d\tau\right)}{\partial y}\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi\left(s,\tau,y(s)\right)}{\partial z}z_1(s)d\tau\right]ds+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(s)\right)d\tau\right)}{\partial x}+\frac{\partial X\left(s,y(s),\int_0^s\varphi\left(s,\tau,y(s)\right)d\tau\right)}{\partial y}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi(s,\tau,y(s))}{\partial z}-\frac{\partial X_0\left(y(s)\right)}{\partial x}\right]z_1(s)ds. \qquad (3.4.26)$$

Первое слагаемое в (3.4.26) допускает оценку

$$\varepsilon L\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)|y(s)-y(\tau)|d\tau|z_1(0)|e^L\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon LMT\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)d\tau|z_1(0)|e^L. \qquad (3.4.27)$$

В силу условия 1.5 существует монотонно стремящаяся к нулю при $t\to\infty$ функция $\psi_1(t)$, что

$$\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)d\tau\leqslant t\psi_1(t).$$

Поэтому выражение (3.4.27) не превышает выражения

$$\varepsilon LMT\psi_1(t)|z_1(0)|e^L\leqslant$$

$$\leqslant TLM\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\tau\psi_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)|z_1(0)|e^L=\delta(\varepsilon)\to 0,\quad\varepsilon\to 0, \qquad (3.4.28)$$

в силу теоремы Дини.

Оценим второе слагаемое в (3.4.26) представив его в виде

$$\varepsilon\int\limits_0^t\left(\left[\frac{\partial X\big(s,y(s),\int_0^s\varphi\big(s,\tau,y(\tau)\big)d\tau\big)}{\partial y}-\frac{\partial X\big(s,y(s),\int_0^s\varphi\big(s,\tau,y(s)\big)d\tau\big)}{\partial y}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^s\frac{\partial\varphi\big(s,\tau,y(\tau)\big)}{\partial z}z_1(\tau)d\tau ds\right)+\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\big(s,y(s),\int_0^s\varphi\big(s,\tau,y(s)\big)d\tau\big)}{\partial y}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi\big(s,\tau,y(\tau)\big)}{\partial z}-\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi\big(s,\tau,y(s)\big)}{\partial z}\right)z_1(s)d\tau\right]ds. \qquad (3.4.29)$$

Первое слагаемое в (3.4.29) не превышает по норме выражения

$$\varepsilon LMT\mu_0\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s\mu(s,\tau)d\tau\cdot|z_1(0)|e^L\leqslant\mu_0\delta(\varepsilon).$$

Второе слагаемое в (3.4.29), оценивается, аналогично (3.4.27) выражением

$$\varepsilon L\int\limits_0^t ds\left(\int\limits_0^s\mu(s,\tau)|y(\tau)-y(s)|d\tau|z_1(s)|\right)=\delta(\varepsilon).$$

Таким образом, второе слагаемое в (3.4.26) не превышает выражения

$$(\mu_0+1)\delta(\varepsilon)\to 0,\quad \varepsilon\to 0. \qquad (3.4.30)$$

Осталось оценить третье слагаемое в (3.4.26). Запишем его в виде

$$\varepsilon\int\limits_0^t\left[\frac{\partial X\left(s,y(s),\varphi_1\big(s,y(s)\big)\right)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial X(s,y(s),\varphi_1(s,y(s)))}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1(s,y(s))}{\partial z}-\frac{\partial X_0\big(y(s)\big)}{\partial x}\right]z_1(s)ds. \qquad (3.4.31)$$

Распространим интегрирование на весь интервал $\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$, считая, что справа от $t$ подинтегральное выражение равно нулю. Разделим интервал $\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ на $n$ равных частей точками $\{t_i\}_1^n$. Тогда (3.4.31) примет вид

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{\partial X\left(s,y(s),\varphi_1\big(s,y(s)\big)\right)}{\partial x}z_1(s)-\frac{\partial X\left(s,y(t_i),\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)\right)}{\partial x}z_1(t_i)\right)ds\right.$$

$$+$$

$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{\partial X\left(s,y(s),\varphi_1\big(s,y(s)\big)\right)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1\big(s,y(s)\big)}{\partial z}z_1(s)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial X\left(s,y(t_i),\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)\right)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)}{\partial z}z_1(t_i)\right)ds+$$

$$\left.+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{\partial X_0\big(y(t_i)\big)}{\partial x}z_1(t_i)-\frac{\partial X_0\big(y(s)\big)}{\partial x}z_1(s)\right)ds\right]+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{\partial X\left(s,y(t_i),\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)\right)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial X(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i)))}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1(s,y(t_i))}{\partial z}-\frac{\partial X_0\big(y(t_i)\big)}{\partial x}\right)dsz_1(t_i). \qquad (3.4.32)$$

Оценим каждое слагаемое в (3.4.32). Первое слагаемое в первой сумме не превышает выражения

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\left(\frac{\partial X\left(s,y(s),\varphi_1\big(s,y(s)\big)\right)}{\partial x}-\frac{\partial X\left(s,y(t_i),\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)\right)}{\partial x}\right)z_1(s)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial X\left(s,y(t_i),\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)\right)}{\partial x}(z_1(s)-z_1(t_i))\,\|\,ds\right]\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(L|y(s)-y(t_i)|+L\int_0^s\mu(s,\tau)|y(s)-y(t_i)|d\tau\right)ds\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{LMT^2(1+\mu_0)}{n}|z_1(0)|e^L. \qquad (3.4.33)$$

Третье слагаемое в первой сумме оценивается величиной

$$\frac{LMT^2}{n}+\frac{(LT)^2}{n}. \tag{3.4.34}$$

Учитывая (3.4.33) и (3.4.34) первое и третье слагаемые в первой сумме в (3.4.32) оцениваются выражением

$$\frac{LMT^2}{n}\big((1+\mu_0)|z_1(0)|e^L+1\big)+2\frac{(LT)^2}{n}+\frac{LMT^2}{n}. \tag{3.4.35}$$

Аналогично для второго слагаемого получаем с некоторой постоянной $A=A(L,M,T,\mu_0,|z_1(0)|)$ оценку $\frac{A}{n}$.

Оценим теперь последнее слагаемое в (3.4.32). Очевидно, оно не превышает выражения

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{\partial X\left(s,y(t_i),\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)\right)}{\partial x}+\frac{\partial X\left(s,y(t_i),\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)\right)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)}{\partial z}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial X_0\big(y(t_i)\big)}{\partial x}\right)ds\right\|\,|z_1(t_i)|$$

$$\leqslant|z_1(0)|e^L\left(\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\left\|\int_{0}^{t_{i+1}}\left(\frac{\partial X\left(s,y(t_i),\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)\right)}{\partial x}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial X(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i)))}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1(s,y(t_i))}{\partial z}-\frac{\partial X_0\big(y(t_i)\big)}{\partial x}\right)ds\right\|+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\left\|\int_{0}^{t_i}\left(\frac{\partial X\left(s,y(t_i),\varphi_1\big(s,y(t_i)\big)\right)}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial X(s,y(t_i),\varphi_1(s,y(t_i)))}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1(s,y(t_i))}{\partial z}-\frac{\partial X_0\big(y(t_i)\big)}{\partial x}\right)ds\right\|\right). \tag{3.4.36}$$

В силу условия 1.6 можно указать монотонно стремящуюся к нулю при $t\to\infty$ функцию $\psi(t)$ такую, что

$$\left\| \int_0^t \left( \frac{\partial X\big(s,x,\varphi_1(s,x)\big)}{\partial x} + \frac{\partial X\big(s,x,\varphi_1(s,x)\big)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1(s,x)}{\partial x} - \frac{\partial X_0(x)}{\partial x} \right) ds \right\| \leqslant t\psi(t),$$

равномерно по $x \in D$. Поэтому (3.4.36) оценивается выражением

$$|z_1(0)|e^L \left( \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1}\psi(t_{i+1}) + \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} t_i\psi(t_i) \right). \qquad (3.4.37)$$

Если $t$ в (3.4.31) принадлежит любому интервалу $[t_i, t_{i+1}]$, $i \geqslant 1$, то (3.4.37) оценивается величиной

$$2|z_1(0)|e^L T\psi\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right). \qquad (3.4.38)$$

Если же $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon_n}\right]$, то выражение (3.4.32) оценивается величиной

$$|z_1(0)|e^L \varepsilon t\psi(t) = |z_1(0)|e^L \tau\psi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \leqslant$$

$$\leqslant |z_1(0)|e^L \sup_{\tau\in[0,T]} \left(\tau\psi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) = \delta_1(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \qquad (3.4.39)$$

в силу теоремы Дини.

Выбором достаточно большого $n$ выражения (3.4.35) можно сделать меньше $\frac{\eta}{a}$. Зафиксировав теперь $n$ выберем достаточно малое $\varepsilon$ так, чтобы выражения (3.4.38) и (3.4.39) также сделать меньшими $\frac{\eta}{a}$.

Из (3.4.25) с учетом оценок (3.4.28), (3.4.30), (3.4.35), (3.4.38) и (3.4.39) для разности $z(t) - z_1(t)$ имеем оценку

$$|z(t) - z_1(t)| \leqslant \frac{\eta}{a} + \frac{\eta}{a} L|z(0)|e^{LK}(T + TL + \mu_0 T) + \delta(\varepsilon)(2 + \mu_0) + \frac{\eta}{a} + \frac{\eta}{a} +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \left( L|z(s) - z_1(s)| + L \int_0^s \mu(s,\tau)|z(\tau) - z_1(\tau)|d\tau \right) ds,$$

откуда с учетом аналога неравенство Гронуолла [92, с.58], надлежащим выбором $a > 0$ получаем оценку (3.4.21). Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 3.4.1. Согласно условию 1.4 усредненная задача (3.4.4) имеет решение $y(\tau) = y(\varepsilon t)$, кторое при $\tau \in [0, T]$ или при $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ лежит в $D$ вместе с некоторой фиксированной $\rho -$окрестностью.

Пусть $x_0 = y(0) -$ начальное значение этого решения. Решение краевой задачи (3.4.1) будем искать в виде

$$x(t, \varepsilon) = x(t, x_0 + \overline{x}, \varepsilon), \qquad (3.4.40)$$

где $\overline{x}$ выбирается из некоторой окрестности нуля. Рассмотрим решение усредненной задачи $y(\tau, x_0 + \overline{x})$. Тогда для разности $y(\tau)$ и $y(\tau, x_0 + \overline{x})$ справедлива оценка

$$|y(\tau) - y(\tau, x_0 + \overline{x})| \leqslant |\overline{x}| e^{LT} \qquad (3.4.41)$$

до момента выхода $y(\tau, x_0 + \overline{x})$ на границу области $D$. Следовательно, если

$$|\overline{x}| < \frac{\rho}{2} e^{-LT},$$

то решение $y(\tau, x_0 + \overline{x})$ существует при $\tau \in [0, T]$ и лежит в $\frac{\rho}{2}$ $-$окрестности $y(\tau)$.

Неизвестный параметр $\overline{x}$ в (3.4.40) будем определять из уравнения

$$F\left(x_0 + \overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)\right) = 0. \qquad (3.4.42)$$

Отметим, что в силу первой теоремы Боголюбова метода усреднения решение $x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)$ точной системы при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует на отрезке $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ и при выполнении (3.4.3) для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедлива оценка

$$|x(t, x_0 + \overline{x}, \varepsilon) - y(\varepsilon t, x_0 + \overline{x})| < \eta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \qquad (3.4.43)$$

Следовательно, при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, если $\varepsilon_0$ достаточно мало, отображение, стоящееся в левой части (3.4.42), как отображение по $\overline{x}$, определено корректно в шаре $B_r(0)$, где $r \leqslant \frac{\rho}{2} e^{-LT}$. Отметим также, что поскольку $y(\tau)$ при $\tau \in [0, T]$ является ограниченной функцией, то в силу оценок (3.4.41) и (3.4.43) $x(t, x_0 + \overline{x}, \varepsilon)$ лежит в ограниченной области при $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Поэтому отображение $F\left(x_0 + \overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)\right)$ непрерывно по $\overline{x}$ и имеет равномерно непрерывные в $B_r(0)$ частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ в силу условия

1.4. Следовательно, существует постоянная $N(r) > 0$ такая, что $\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\| \leqslant N(r)$ и $\left\|\frac{\partial F}{\partial y}\right\| \leqslant N(r)$ при $\overline{x} \in B_r(0)$.

Далее

$$F\left(x_0 + \overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)\right) = F\left(x_0 + \overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)\right) -$$

$$-F\big(x_0 + \overline{x}, y(T, x_0 + \overline{x})\big) + F\big(x_0 + \overline{x}, y(T, x_0 + \overline{x})\big) - F\big(x_0, y(T, x_0)\big).$$

Обозначим $R_1(\overline{x}, \varepsilon) = F\left(x_0 + \overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right)\right) - F\big(x_0 + \overline{x}, y(T, x_0 + \overline{x})\big)$. Для него справедлива оценка

$$|R_1(\overline{x}, \varepsilon)| \leqslant N(r)\left|x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \overline{x}, \varepsilon\right) - y(T, x_0 + \overline{x})\right| \leqslant$$

$$\leqslant N(r)\eta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.4.44}$$

в силу (3.4.43). Имеем

$$F\big(x_0 + \overline{x}, y(T, x_0 + \overline{x})\big) - F\big(x_0, y(T, x_0)\big) =$$

$$= \left(\frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial x} + \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial x_0}\right)\overline{x} +$$

$$+\int_0^1 \left(\frac{\partial F\big(x_0 + s\overline{x}, y(T, x_0 + s\overline{x})\big)}{\partial x} - \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial x}\right)\overline{x}ds +$$

$$+\int_0^1 \left(\frac{\partial F\big(x_0 + s\overline{x}, y(T, x_0 + s\overline{x})\big)}{\partial y}\frac{\partial y(T, x_0 + s\overline{x})}{\partial z}\bigg|_{z = x_0 + s\overline{x}} -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\bigg|_{z = x_0}\right)\overline{x}ds$$

или

$$R_1(\overline{x}, \varepsilon) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\big(x_0, y(T, x_0)\big) + \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial y}\frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\bigg|_{z = x_0}\right)\overline{x} +$$

$$+R_2(\overline{x})\overline{x}+R_3(\overline{x})\overline{x},$$

где

$$R_2(\overline{x})=\left(\frac{\partial F\big(x_0,y(T,x_0)\big)}{\partial x}+\frac{\partial F\big(x_0,y(T,x_0)\big)}{\partial y}\frac{\partial y(T,x_0)}{\partial x_0}\right)\overline{x}+$$

$$+\int\limits_0^1\left(\frac{\partial F\big(x_0+s\overline{x},y(T,x_0+s\overline{x})\big)}{\partial x}-\frac{\partial F\big(x_0,y(T,x_0)\big)}{\partial x}\right)\overline{x}ds,$$

$$R_3(\overline{x})=\int\limits_0^1\left(\frac{\partial F\big(x_0+s\overline{x},y(T,x_0+s\overline{x})\big)}{\partial y}\frac{\partial y(T,x_0+s\overline{x})}{\partial z}\bigg|_{z=x_0+s\overline{x}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F(x_0,y(T,x_0))}{\partial y}\frac{\partial y(T,x_0)}{\partial z}\bigg|_{z=x_0}\right)\overline{x}ds.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в (3.4.45). Для первого получим в силу обозначения $F_0(x_0)$ в (3.4.7) следующее представление:

$$\left(\frac{\partial F\big(x_0,y(T,x_0)\big)}{\partial x}+\frac{\partial F\big(x_0,y(T,x_0)\big)}{\partial y}\frac{\partial y(T,x_0)}{\partial z}\bigg|_{z=x_0}\right)\overline{x}=\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\overline{x}.$$

Для второго слагаемого, в силу равномерной непрерывности частных производных и (3.4.41), при $|\overline{x}|\leqslant r$ имеем оценку

$$|R_2(\overline{x})|\leqslant\delta(r)\to 0,\quad r\to 0,$$

где $r\leqslant\frac{\rho}{2}e^{-LT}$.

Для оценки третьего слагаемого заметим, что производная по начальным данным $\frac{\partial y(T,z)}{\partial z}$ удовлетворяет линейному уравнению в вариациях, поэтому является непрерывно дифференцируемой функцией параметра $z$. Так что, согласно равномерной непрерывности и (3.4.41), аналогично предыдущему для $|\overline{x}|\leqslant r$ получаем оценку

$$|R_3(\overline{x})|\leqslant\delta_1(r)\to 0,\quad r\to 0. \qquad (3.4.46)$$

Теперь уравнение (3.4.42) для определения $\overline{x}$ можно записать в виде

$$\overline{x} = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} \left(R_1(\overline{x},\varepsilon) + \left(R_2(\overline{x}) + R_3(\overline{x})\right)\cdot \overline{x}\right), \quad \overline{x} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\overline{x},\varepsilon),$$

где для $M(\overline{x},\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|M(\overline{x},\varepsilon)| \leqslant N(r)\eta(\varepsilon) + \delta_2(r)\overline{x}. \tag{3.4.47}$$

При этом $\eta(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $\delta_2(r) \to 0$, $r \to 0$.

Теперь оценим $\frac{\partial M}{\partial \overline{x}}$. Имеем

$$\frac{\partial R_1(\overline{x},\varepsilon)}{\partial \overline{x}} = \left.\frac{\partial F\left(x_0+\overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\overline{x},\varepsilon\right)\right)}{\partial x}\right|_{x=x_0+\overline{x}} +$$

$$+\left.\frac{\partial F\left(x_0+\overline{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\overline{x},\varepsilon\right)\right)}{\partial y}\cdot\frac{\partial x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\overline{x},\varepsilon\right)}{\partial z}\right|_{z=x_0+\overline{x}} -$$

$$-\left.\frac{\partial F\left(x_0+\overline{x}, y(\tau, x_0+\overline{x})\right)}{\partial x}\right|_{x=x_0+\overline{x}} +$$

$$+\left.\frac{\partial F\left(x_0+\overline{x}, y(\tau, x_0+\overline{x})\right)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(\tau, x_0+\overline{x})}{\partial z}\right|_{z=x_0+\overline{x}}.$$

Заметим, что в силу леммы 4 разность $\frac{\partial x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\overline{x},\varepsilon\right)}{\partial z} - \frac{\partial y(\tau, x_0+\overline{x})}{\partial z}$ можно сделать столь угодно малой путем выбора малого $\varepsilon$, так что из неравенства (3.4.43) и равномерной непрерывности $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ в области $|\overline{x}| \leqslant r$ для $\frac{\partial R_1}{\partial \overline{x}}$ имеем оценку

$$\left|\frac{\partial R_1(\overline{x},\varepsilon)}{\partial \overline{x}}\right| \leqslant \delta_3(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad |\overline{x}| \leqslant r. \tag{3.4.48}$$

Оценим теперь $\frac{\partial R_2}{\partial \overline{x}}$. Имеем

$$R_2 = F\left(x_0+\overline{x}, y(T, x_0+\overline{x})\right) - \frac{\partial F\left(x_0, y(T, x_0)\right)}{\partial x}\overline{x},$$

$$\left|\frac{\partial R_2}{\partial \overline{x}}\right| = \left|\frac{\partial F\big(x_0+\overline{x}, y(T, x_0+\overline{x})\big)}{\partial x} - \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0)\big)}{\partial x}\right| \leqslant \delta_4(\overline{x}) \to 0, \;\; r \to 0, (3.4.49)$$

в силу равномерной непрерывности $\frac{\partial F}{\partial x}$ и оценки (3.4.41).

Аналогично для $\frac{\partial R_3}{\partial \overline{x}}$ получаем

$$\left|\frac{\partial R_3}{\partial \overline{x}}\right| \leqslant \left|\frac{\partial F\big(x_0+\overline{x}, y(T, x_0+\overline{x})\big)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(T, x_0+\overline{x})}{\partial z}\right|_{z=x_0+\overline{x}} -$$

$$- \frac{\partial F\big(x_0, y(T, x_0+\overline{x})\big)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(T, x_0)}{\partial z}\Big|_{z=x_0+\overline{x}}\Bigg| \leqslant \delta_5(\overline{x}) \to 0, \quad r \to 0, \qquad (3.4.50)$$

в силу равномерной непрерывности $\frac{\partial F}{\partial y}$, оценки (3.4.41) и равномерной по $|\overline{x}| \leqslant r$ ограниченности $\frac{\partial y(T,x_0+\overline{x})}{\partial z}$. Таким образом, для $\frac{\partial M(\overline{x},\varepsilon)}{\partial \overline{x}}$ из (3.4.48)-(3.4.50) получаем оценку

$$\left|\frac{\partial M(\overline{x}, \varepsilon)}{\partial \overline{x}}\right| \leqslant \delta_3(\varepsilon) + \delta_4(\overline{x}) + \delta_5(\overline{x}) = \zeta(\varepsilon, \overline{x}) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \overline{x} \to 0.$$

Пусть $C = \left\|\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1}\right\|$. Тогда выберем $r$ так, чтобы

$$\delta_2(r) \leqslant \frac{1}{2}, \qquad (3.4.51)$$

а затем $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ так, чтобы

$$\eta(\varepsilon) \leqslant \frac{r}{2CN(r)}. \qquad (3.4.52)$$

Тогда, если $|\overline{x}| \leqslant r$, из (3.4.47) получаем

$$C|M(\overline{x}, \varepsilon)| \leqslant C(N(r)\eta(r) + \delta_2(r)|\overline{x}|) \leqslant \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Таким образом, отображение $\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\overline{x}, \varepsilon)$ при выполнении (3.4.51) и (3.4.52) переводит шар $B_0(r)$ в себя. А если еще выбрать $\varepsilon$ и $r$ так, чтобы кроме неравенств (3.4.51) и (3.4.52) выполнялось неравенство $\zeta(\varepsilon, \overline{x}) < 1$, то отображение (3.4.46) будет и сжимающим. Следовательно оно имеет единственную неподвижную точку $\overline{x}^* = \overline{x}^*(\varepsilon, r)$, которая и является начальным значением решения краевой задачи (3.4.1).

Выберем теперь $r$ как функцию параметра $\varepsilon$ так, чтобы $r(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, а $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ так, чтобы для функции $\eta(\varepsilon)$ в (3.4.44) выполнялось неравенство

$$\frac{\eta(\varepsilon)}{r(\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{2CN\big(r(\varepsilon)\big)}.$$

Отметим, что такой выбор возможен, поскольку функция $N\big(r(\varepsilon)\big)$, ограничивающая частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ в шаре $B_r(0)$, не растет с уменьшением $r(\varepsilon)$.

Оценка (3.4.8) теперь следует из неравенств (3.4.41) и (3.4.43). Теорема 3.4.1 доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме. При этом неравенство (3.4.41) следует из теоремы 2.1 [92], а оценка типа (3.4.43) для разности между решениями задач Коши точных и усредненных уравнений - из аналога первой теоремы Боголюбова для систем интегро-дифференциальных уравнений [92] (теорема 3.3). Еще заметим, что вместо стандартных уравнений в вариациях нужно воспользоваться уравнениями (3.4.19), а также свойствами решений (леммы 3, 5). В остальном доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 3.4.1.

Таким образом, сужение класса систем позволило нам ослабить некоторые условия работы [90], в частности опустить требование дважды гладкости функции $F(x, y)$ из краевого условия (3.4.1), заменив его равномерной непрерывностью первых производных, а также ослабить условие на матрицу Якоби $\frac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0}$ из (3.4.3).

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию и решению начальных и краевых задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Основным объектом диссертации являются краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с нелинейными дифференциальными частями и краевые задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра с малым числовым параметром.

Основные результаты:

- получены достаточные условия существования решений специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами;
- предложены итерационные методы решения специальной задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами и их численные реализации;
- построено $\Delta_N$ общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и установлены его свойства;
- предложен метод параметризации решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;
- разработаны алгоритмы решения нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и их численные реализации;
- установлены достаточные условия существования изолированного решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;
- построена система нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров для краевой задачи интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью и предложен алгоритм нахождения ее решения;
- разработаны алгоритмы нахождения начальных приближений для нелинейной специальной задачи Коши и построенной системы нелинейных алгебраических уравнений;
- применен метод усреднения к исследованию существования решений начальных и краевых задач для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра.

**Оценка полноты решения поставленных задач.** Вопросы разрешимости нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с нелинейной дифференциальной частью полностью решены, построены эффективные алгоритмы нахождения их решений и обоснован метод усреднения начальной и краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра с малым числовым параметром.

**Разработка рекомендаций и исходных данных по конкретному использованию результатов.** Полученные в работе результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы при решении краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, а также при чтении элективных курсов на математических факультетах университетов.

**Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области.** Результаты выполненной научной работы опубликованы в журналах, рекомендованных КОКСОН МОН РК, в материалах международных конференций и в журналах, индексируемых в базах Scopus и Web of Science.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1 Volterra V. Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentielles. – Paris, 1913.

2 Volterra V. Theorie of functionals and of Integral and integro-differential equations. – London, 1931.

3 Tomson J. Application of dinamics to physics and chemestry. – London and New-York, 1888.

4 Ферле Л. Критические числа оборотов ротора определенной форме с учетом гироскопического эффекта // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. – М., 1956. – № 6(40). – С. 135-139.

5 Klöppel H. Lie. Lotrechte Swingungen von Hangebrücken // Ing. -Arch., 13, – 1942. – P. 211-266.

6 Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж.Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. – М.-Л.: Физматлит, 1961. – 551 с.

7 Выпов Г.П. Нестандартное движение вязкой несжимаемой жидкости между близко расположенными движущимися поверхностями // Изв.ВУЗов, матем. – 1958. – № 3, – С. 41-49.

8 Volpert. V. Elliptic Partial Differential Equations. Volume 2: Reaction-Diffusion Equations. - Springer Basel, Villeurbanne, France, 2014. – 784 p.

9 Kythe P.K., Puri. P. Computational methods for linear integral equations. - Univ. of New Orleans, New Orleans, 1992. – 528 p.

10 Kean J.M. and Barlow N. D. A Spatial Model for the Succesful Biological Control of Sitona discoidens by Microctonus aethiopoides // The Journal of Applied Ecology. – 2001. – № 38. – P. 162-169.

11 Thilme. H.R. A model for the spatio-spread of an epidemic // J.Math.Biol. – 1977. – № 4. – P. 337-351.

12 Быков Я. В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. - Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. – 327 с.

13 Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ, – 1934. – вып. 190. – С. 1-25.

14 Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 274 с.

15 Иманалиев М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно - возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе. Илим, 1972. – 356 с.

16 Касымов К. А. Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. – Алматы: Изд-во Санат, 1997. – 195 с.

17 Касымов К. А. Асимптотика решения задачи с начальным скачком для нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старшей производной // Изв. Каз. ССР, сер. физ.-мат. – 1968. – № 5. – С. 69-72.

18 Дауылбаев М. К., Касымов К. А. О сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях с особенностями // Изв. АН Каз. ССР, сер. физ.-

мат. – 1990. – № 5. – С. 18-23.

19 Дауылбаев М. К., Касымов К. А. Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Диф. ур-ния. Москва-Минск. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 822-830.

20 Дауылбаев М. К., Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения. – Алматы: Изд-во Казак университетi, 1999. – 170 с.

21 Быков Я. В., Танкиев И. А. Об одной обобщенной краевой задаче для счетной системы интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе. Илим. – 1982. – вып. 15. – С. 44-62.

22 Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги //Дифференц. уравн. – 1979. – Т. 15, № 1. – С. 96-105.

23 Виграненко Т. И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений //Зап. Ленинградского горн. ин-та. – 1956. – Т. 33, вып. 3. – С. 161-176.

24 Виграненко Т. И. Об одной граничной задаче для линейных интегро-дифференциальных уравнений //Зап. Ленинградского горн. ин-та. – 1956. – Т. 33, вып. 3. – С. 177-187.

25 Васильев В.В. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. – 1955. –Т. 100, № 5. – С. 849-852.

26 Васильев В.В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. –1961. – вып. 4. № 4(23). – С. 8-24.

27 Васильев В.В., Лобов В.В. О фундаментальных решениях системы линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений // Диф. и интегр. ур-ния. – 1976. – вып. 4. – С. 260-269.

28 Николенко В.Н . Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма // Успехи мат. наук. – 1952. – Т. 7, вып. 5(51). – С. 225-228.

29 Ландо Ю.К. О функции Грина краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра // Уч. зап. Минского пед. ин-та. – 1958. – Вып. 9. – С. 21-27.

30 Ландо Ю.К. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения // Дифференц. ур-ния. – 1967. – Т. 3, № 4. – С. 695-697.

31 Кривошеин Л.Е. Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Акад. наук Киргиз. ССР. Ин-т физики, математики и механики, 1962. – 184 с.

32 Кривошеин Л.Е. К решению одной задачи для интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Изд-во АН Киргиз. ССР. – 1961. – Вып. 1. – С. 177-189.

33 Samoilenko A.M., Boichuk A.A., and Krivosheya S.A. Boundary value problem for linear systems of integro-differential equations with degenerate kernel // Ukr. Math. Zh. – 1996. – 48, № 11, – P. 1576-1579.

34 Bratu M. Sur les equations mixtes lineaires. – Comptes, Rendus, Paris, 1909. – 148 p.

35 Шароглазов В.С., Васильев В.В. Об одном методе приближенного решения краевой задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений //Диф. и интегр. ур-ния. – Иркутск. – 1975. – вып. 3. – С. 212-217.

36 Крамаровский Б. И. Существование и единственность решения двухточечной краевой задачи //Вопросы вычисл. и прикл. матем. – Ташкент. – 1977. – вып. 46. – С. 9-23.

37 Лобов В.В. Построение фундаментальной матрицы-решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Диф. и интегр. ур-ния. – Иркутск. – 1978. – вып. 5. – С. 94-101.

38 Вайникко Г.М. О сходимости квадратурно-разностных методов для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. –1971. – Т. 11, № 3. – С. 770-776.

39 Фодчук О.В. Вариационно-итеративный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений // Методы исследования диф. и функц.-диф. уравн. АН ССР. Ин-т матем. Киев. – 1990. – С. 101-109.

40 Клименко Р.К. Методы расщепления решения линейных неоднородных задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений // Автоматиз. научн. исслед. и испыт. АН СССР. – 1990. – С. 28-34.

41 Артыков А.Ж. Условия разрешимости краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим. – 1994. – Вып. 25. – С. 110-113.

42 Сарыгулов К. С. Приближенное решение одного класса обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений методом конечных элементов // Исслед. по интегро-дифференц. уравн. – Фрунзе. – 1983. – вып. 16. – С. 140-145.

43 Еремин А. С. Андреев А.А. Краевая задача для уравнения с матричным интегро-дифференциальным оператором //Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. – 2004. – № 26. – С. 5-10.

44 Власов В. В. О некоторых краевых задачах для одного класса интегро-дифференциальных уравнений //Функц.-диф. ур-ния. – 1987. – С. 124-133.

45 Arqub O.A., Al-Smadi M. Numerical algorithm for solving two-point, second-order periodic boundary value problems for mixed integro-differential equations// Appl. Math. Comput. – 2014. – № 243. – P. 911-922.

46 Berenguer M.I., Gamez D., Lopez Linares A.J. Fixed point techniques and Schauder bases to approximate the solution of the first order nonlinear mixed Fredholm–Volterra integro-differential equation // J. Comput. Appl. Math. – 2013. – № 252. – P. 52-61.

47 Bothayna S.H. Kashkaria, Muhammed I. Syam. Evolutionary computational intelligence in solving a class of nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2017. – № 311. – P. 314-323.

48 Kheybari S., Darvishi M.T., Wazwaz A.M. A semi-analytical algorithm to solve systems of integro-differential equations under mixed boundary conditions // J.Comput.Appl.Math. – 2017, – № 317. – P. 72-89.

49 Maleknejad K., Basirat B., Hashemizadeh E. Hybrid Legendre polynomials and Block-Pulse functions approach for nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations // Comput. Math. Appl. – 2011. – № 61. – P. 2821-2828.

50 Molabahrami A. Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integro-differential equation under the mixed conditions: Degenerate and non-degenerate kernels // J. Comput. Appl. Math. – 2015. – № 282. – P. 34-43.

51 Momani S., Arqub O.A., Hayat T., Al-Sulami H. A computational method for solving periodic boundary value problems for integro-differential equations of Fredholm–Volterra type // Appl. Math. Comput. – 2014. – № 240. – P. 229-239.

52 Parts I., Pedas A., Tamme E. Piecewise polynomial collacation for Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels // SIAM. J. Numer. Anal. – 2005. – V. 43. – P. 1897-1911.

53 Turkyilmazoglu, M. High-order nonlinear Volterra–Fredholm-Hammerstein integro-differential equations and their effective computation // Appl. Math. Comput. – 2014. – № 247. – P. 410-416.

54 Y\"{u}zbasi, S. A collocation method based on Bernstein polynomials to solve nonlinear Fredholm–Volterra integro-differential equations // Appl. Math. Comput. – 2016. – № 273. – P. 142-154.

55 Yulan W., Chaolu T., Ting P. New algorithm for second order boundary value problems of integro-differential equation // J. Comput. Appl. Math. – 2009. – № 229. – P. 1-6.

56 Zarebnia M., Ali Abadi M.G. Numerical solution of system of nonlinear second-order integro-differential equations // Comput. Math. Appl. – 2010. – № 60. – P. 591-601.

57 Zeinali M., Shahmorad S. An equivalence lemma for a class of fuzzy implicit integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – № 327. – P. 388-399.

58 Zhao, J. Compact finite difference methods for high order integro-differential equations // Appl. Math. Comput. – 2013. – № 221. – P. 66-78.

59 Zhao J., Corless R.M. Compact finite difference method for integro-differential equations // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – № 177. – P. 271-288.

60 Wazwaz, A.M. Linear and Nonlinear Integral Equations [Methods and Applications]. – Higher Equacation Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 639 p.

61 Самойленко А. М., Ткач Б. П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – АН Украины, Институт математики. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.

62 Bainov, D.D., Simeonov, P.S. Integral Inequalities and Applications. – Springer Science and Business Media, 1992. – 245 p.

63 Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. – Birkhauser

Verlag, Baseletc., 1993. – 391 p.

64 Lakshmikantham V., Rao M. R. M. Theory of Integro-Differential Equations. – London: Gordon and Breach, 1995. – 375 p.

65 Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B. Numerical Solutions of Three Classes of Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations. – Copyright © 2016 Elsevier Inc. All rights reserved, 2016. – 254 p.

66 Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Berlin, De Gruyter, 2016. – 317 p.

67 Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – Vol. 294. – P. 342-357.

68 Dzhumabaev D.S. A Method for Solving the Linear Boundary Value Problem for an Integro Differential Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2010 – Vol. 50, № 7. – P. 1150-1161.

69 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.

70 Dzhumabaev D.S. An Algorithm for Solving a Linear Two Point Boundary Value Problem for an Integrodifferential Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – Vol. 53, № 6. – P. 736-758.

71 Dzhumabaev D.S. and Bakirova E.A. Criteria for the Well-Posedness of a Linear Two-Point Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations // Differential Equations. – 2010. – Vol. 46, № 4. – P. 553-567.

72 Dzhumabaev D.S. and Bakirova E.A. Criteria for the Unique Solvability of a Linear Two-Point Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations // Differential Equations. – 2013. – Vol. 49, № 9. – P. 1-16.

73 Dzhumabaev D.S. Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of Linear Boundary-Value Problems for the Fredholm Integro-differential Equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 66, № 8. – P. 1200-1219.

74 Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 327. – P. 79-108.

75 Нахушев А. М. Уравнения мат. биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 205 с.

76 Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы, 1995. – 269 с.

77 Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 9. – С. 1585-1595.

78 Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Math. Meth Appl. Sci. – 2018. – Vol. 41, № 4. – P. 1439-1462.

79 Dzhumabaev D.S. New general solutions to ordinary differential equations and methods for solving boundary value problems // Ukrainian Math. J. – 2019. – Vol.

71, № 7. – P. 884-905.
80 Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 752 с.
81 Ortega J.M., Rheintboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. – Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadephia, 2000. – 599 p.
82 Kelley C. T. Solving nonlinear equations with Newton's method. – Philadelphia: SIAM Publ., 2003. – 119 p.
83 Deuflhard P. Newton Methods for Nonlinear Problems. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. – 437 p.
84 Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations // Mat. Zametki. – 1987. – Vol. 41, № 5. – P. 356-361.
85 Dzhumabaev D.S. On the solvability of nonlinear closed operator equations // Amer. Math. Soc. Transl. – 1989. – Series 2, № 142. – P. 91-94.
86 Dzhumabaev D.S. On the convergence of a modification of the Newton-Kantorovich method for closed operator equations // Amer. Math. Soc. Transl. – 1989. – Series 2, № 142. – P. 95-99.
87 Джумабаев Д.С. Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 1. – С. 13-29.
88 Джумабаев Д.С. Скорость сходимости итерационных процессов для неограниченных операторных уравнений // Известия академия наук Каз ССР. – 1988. – № 5. – С. 24-28.
89 Джумабаев Д.С. Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применение // Математический журнал. Алматы. - 2001. - Том 1, № 1. - С. 30-40.
90 Самойленко А.М., ПетришинР.И. Метод усреднения в некоторых краевых задачах // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Vol. 25, № 6. – С. 956-964.
91 Митропольский Ю.А., Байнов Д.Д., Милушева С.Д. Применение метода усреднения для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений // Мат.физика. – 1979. – Вып.25. – С. 3-22.
92 Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М. Наука., 1976. – 152 с.
93 Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 249 с.
94 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Comput. Math. Math. Phys. – 2007. – № 47. – P. 37-61.
95 Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
96 Бакирова Э.А. Существование и единственность решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Математический журнал. – 2011. – Т. 11, № 1(39). – С. 43-52.

97 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

98 Alownel A., Al-Khaled K. and Al-Towiq M. Reliable algorithms for solving integro-differential equations with applications // International Journal of Computer Mathematics. – 2009. – Vol. 87, № 7. – P. 1538-1554.

99 Wazwaz A.M. A comparison study between the modified decomposition method and the traditional methods for solving nonlinear integral equations // Applied Mathematic and Computation. – 2006. – Vol. 181, № 2. – P. 1703-1712.

100 Бойчук О.А., Головацька І.А. Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2013. – Vol. 16, № 3. – P. 314-321.

101 Бойчук О.А., Головацька І.А. Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2013. – Vol. 16, № 4. – P. 460-474.

102 Шмарда З. Существование и единственность решения задачи Коши для сингулярных систем интегро-дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн. – 1993. – Vol. 45, № 12. – С. 1716-1720.

103 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2020. – № 43. – P. 1788-1802.

104 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А., Мынбаева С.Т. Численная реализация одного алгоритма нахождения решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Математический журнал. – 2017. – Т. 17, № 4 (66). – С. 25-36.

105 Джумабаев Д.С., Мынбаева С.Т. Об одном алгоритме нахождения численного решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Известия МКТУ имени Х.А.Яссави, Серия математика, физика, инфооматика. Спец.вып. по материалы конференции математиков Казахстана "Актуальные проблемы математики". Туркестан. – 2018. – Т. II, № 1(4). – С. 44-46.

106 Джумабаев Д.С., Мынбаева С.Т. Решение квазилинейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Традиционная международная научная апрельская конференция. Тезисы докладов. Алматы. – 2018. – С. 48-49.

107 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. Solving a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications – MADEA 8, Bishkek Cholpon-Ata, Kyrgyzstan. – 2018. – P. 56.

108 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A property of the special Cauchy problem for a system of integro-differential equations with parameters. Proceedings VIII International Scientific Conference: Problems of Differential Equations, Analysis and Algebra. Aktobe. – 2018. – P. 30-34.

109 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A numerical method for solving a nonlinear boundary value problem for Fredholm integro-differential equation //

Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях. Чернівці, Україна. – 2018 року. – P. 23.

110 Mynbayeva S.T. The existence of a solution to the special Cauchy problem for the system of nonlinear Fredholm integro-differential equations // Kazakh Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 19, № 1. – P. 69-81.

111 Mynbayeva S.T. Conditions of the existence of a solution to the special Cauchy problemfor a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Annual International April Mathematical Conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan. – 2019. – P. 100.

112 Mynbayeva S.T. Solvability of the special Cauchy problem for the system of nonlinear Fredholm integro-differential equations // International Conference of Young Mathematicians. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2019. – P. 36.

113 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А., Мынбаева С.Т. Об одном методе решения нелинейной краевой задачи с параметром для нагруженных уравнений // Международная научная конференция "Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и инфораматики". Караганда. – 2019. – С. 73.

114 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // International Conference "Actual problems of analysis, differential equations and algebra" (EMJ-2019) dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. – Nur-Sultan. – 2019. – P. 90-92.

115 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Eurasian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 10, № 4. – P. 24-33.

116 Станжицкий А.Н., Мынбаева С.Т., Марчук Н.А. Усреднение в краевых задачах для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2020. – Т. 72, № 2. – С. 245-266.

117 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. One approach to solve a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. – 2020. – №2020-97-1. – P. 27-36.

118 Mynbayeva S.T. On an algorithm of finding a solution to a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Annual International April Mathematical Conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan. Institute of mathematics and mathematical modeling. Almaty. – 2020. – P. 132-133.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Список опубликованных работ по теме диссертации

*Публикации в международных изданиях, входящих в базу Scopus:*

1 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Eurasian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 10, № 4. – P. 24-3 (SJR=0.624, процентиль=27).
DOI: https://doi.org/10.32523/2077-9879-2019-10-4-24-33

*Публикации в международных изданиях, входящих в базу Web of Science:*

2 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2020. – № 43. – P. 1788-1802 (IF= 1.533, квартиль=Q2, процентиль=87). DOI:10.1002/mma.6003

3 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. One approach to solve a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. – 2020. – №2020-97-1. – P. 27-36.

*Публикации, входящие в базу данных ZbMath:*

4 Станжицкий А.Н., Мынбаева С.Т., Марчук Н.А. Усреднение в краевых задачах для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2020. – Т. 72, №2. – С. 245-266.

*Публикации в изданиях, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан:*

5 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А., Мынбаева С.Т. Численная реализация одного алгоритма нахождения решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Математический журнал. – 2017. – Том 17, № 4 (66). – С. 25-36.

6 Mynbayeva S.T. The existence of a solution to the special Cauchy problem for the system of nonlinear Fredholm integro-differential equations // Kazakh Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 19, № 1. – P. 69-81.

*Публикации в материалах международных конференций:*

7 Джумабаев Д.С., Мынбаева С.Т. Решение квазилинейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Традиционная

международная научная апрельская конференция. Тезисы докладов. Алматы. – 2018. – С. 48-49.

8 Джумабаев Д.С., Мынбаева С.Т. Об одном алгоритме нахождения численного решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Известия МКТУ имени Х.А.Яссави, Серия математика, физика, инфооматика. Спец.вып. по материалы конференции математиков Казахстана "Актуальные проблемы математики". Туркестан. – 2018. – Т. II, № 1 (4). – С. 44-46.

9 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. Solving a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications – MADEA 8, Bishkek Cholpon-Ata, Kyrgyzstan. – 2018. – P. 56.

10 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A numerical method for solving a nonlinear boundary value problem for Fredholm integro-differential equation // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях. Чернівці, Україна. – 2018 року. – P. 23.

11 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A property of the special Cauchy problem for a system of integro-differential equations with parameters. Proceedings VIII International Scientific Conference: Problems of Differential Equations, Analysis and Algebra. Aktobe. – 2018. – P. 30-34.

12 Mynbayeva S.T. Conditions of the existence of a solution to the special Cauchy problemfor a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Annual International April Mathematical Conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan. Almaty. – 2019. – P. 100.

13 Mynbayeva S.T. Solvability of the special Cauchy problem for the system of nonlinear Fredholm integro-differential equations // International Conference of Young Mathematicians. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2019. – P. 36.

14 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А., Мынбаева С.Т. Об одном методе решения нелинейной краевой задачи с параметром для нагруженных уравнений // Международная научная конференция "Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и инфораматики". Караганда. – 2019. – С. 73.

15 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // International Conference "Actual problems of analysis, differential equations and algebra" (EMJ-2019) dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. Nur-Sultan. – 2019. – P. 90-92.

16 Mynbayeva S.T. On an algorithm of finding a solution to a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Annual International April Mathematical Conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan. Institute of mathematics and mathematical modeling. Almaty. – 2020. – P. 132-133.