Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ӘОЖ 517.952 Қолжазба құқығында

ОМАРОВА БИБИГУЛ ЖАРБОЛОВНА

Векторлық өріс бағыттары бойынша дифференциалдау операторлы жүйелеріндегі көппериодты тербелістердің Ляпунов әдісі

6D060100 – Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
ф.-м.ғ.д., профессор
Сартабанов Ж.

Шетелдік ғылыми кеңесші
ф.-м.ғ.д., профессор
Керимбеков А.
(Қырғыз Республикасы)

Қазақстан Республикасы
Ақтөбе, 2021

МАЗМҰНЫ

ҚЫСҚАРТУЛАР МЕН БЕЛГІЛЕУЛЕР

R^m	– m-өлшемді нақты Евклид кеңістігі, $R^m = R \times ... \times R$.
$(\tau,\ t)$	– уақыт айнымалылары, $\tau \in R,\ t = (t_1,..., t_m) \in R^m$.
B_δ^n	– R^n кеңістігіндегі центрі координаталар басында жататын ашық шар.
ζ	– кеңістік айнымалысы, $\zeta = (\zeta_1,\ ...,\ \zeta_l) \in B_\delta^{2l}$, компоненттері $\zeta_j = (\xi_j,\ \eta_j) \in B_\delta^2$.
$\langle a,b \rangle$	– a және b векторларының скаляр көбейтіндісі.
e	– бірлік компонентті m-вектор, $e = (1,...,1)$.
$C_t^{(e)}(R^m)$	– R^m кеңістігінде e ретті тегіс функциялар класы
I_2	– екінші ретті симплектикалық бірлік $I_2 = [s_{ij}]_1^2,\ s_{11} = s_{22} = 0,\ -s_{12} = s_{21} = 1$.
Z^m	– m-өлшемді бүтін сандық векторлар жиыны, Z^m.
q	– m- өлшемді бүтін сандық векторлар $q = (q_1,...,q_m) \in Z^m$.
(θ, ω)	– вектор-период, $(\theta,\omega) = (\theta,\omega_1,...,\omega_m),\ \theta > 0, \omega_j > 0, j = \overline{1,m}$.
$\lvert \cdot \rvert$	– вектор немесе матрица нормасының белгіленуі.
E	– бірлік матрица.
$[\tau/\theta]$	– τ/θ санының бүтін бөлігі.
$s^*(\tau)$	– $\tau = k\theta\ (k \in Z)$ нүктелеріндегі секірісі мен қадамдары бірдей болатын кемімейтін сатылы функция және $s^*(\tau) = [\tau/\theta]\theta$.
Π_ρ	– t айнымалысы анықталған жолақ: $\Pi_\rho = \{2\pi\nu \lvert \mathrm{Im} t \rvert < \rho\},\ \rho = const > 0$.
$Ab^{\theta,\omega}(\Pi_\rho \times \Pi_\rho^m)$	– Π_ρ^{1+m} жолағында нақты аналитикалық және $\overline{\Pi}_\rho^{1+m}$ тұйықталуында үзіліссіз, (θ,ω)-периодты вектор-функциялар класы.
$\nu = (\nu_1,..., \nu_m)$	– рационалды, бейөлшемдес жиіліктер, $\nu_1 = \omega^{-1},..., \nu_m = \omega^{-1}$.
Γ	– екінші ретті матрица: $\Gamma = [\gamma_{ij}]_1^2,\ \gamma_{11} = \gamma_{22} = 1/2,,$ $-\gamma_{12} = \gamma_{21} = i/2$, i – жорымал бірлік.
$\overline{\Gamma}$	– Γ матрицасымен түйіндес матрица.
$\lvert x \rvert_\rho$	– Π_ρ^{1+m} жолағындағы координаталары x_j болатын x вектор-функциясының нормасы, $\lvert x \rvert_\rho = \max_j \sup_{(\tau,t)} \lvert x_j(\tau,t) \rvert$.
$Ab_{\rho_*,\Delta}^{\theta,\omega}$	– $\Pi_{\rho_*}^{1+m}$ жолағында (θ,ω)-периодты, нақты аналитикалық, және $\overline{\Pi}_{\rho_*}^{1+m}$ тұйықталуында үзіліссіз, $\Delta > 0$ санымен нормасы бойынша шенелген вектор-функциялар класы, $0 < \rho_* < \rho$.

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Диссертациялық жұмыс бірінші дәрежелі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің көппериодты шешімдері мәселелерін Ляпунов әдісі негізінде зерттеуге арналады. Жұмыста (τ,t) уақыт айнымалылары бойынша $t=e\tau$ бас диагонал және ζ кеңістік айнымалылары бойынша $\dot{\zeta}=M\zeta+\psi$ Ляпунов векторлық өрісі бағыттарымен анықталған сызықты D дифференциалдау операторлы

$$Dx=Px+f\,,\ D=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle e,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle+\left\langle M\zeta+\psi,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle$$

квазисызықты жүйенің уақыт айнымалылары бойынша көппериодты шешімдердің бар болуы туралы сұрақ зерттеледі, мұнда жүйенің P сызықты бөлігі екі тәуелсіз айнымалылардан тұрады, ал f сызықты емес бөлігі ол айнымалылардан басқа ізделініп отырған вектор-функцияны да қамтиды.

D операторының бұлай таңдап алынуы, біріншіден, оның сызықты болуымен, екіншіден, оның өрісін анықтайтын жүйенің қолданылымы бар механикалық жүйемен анықталуымен байланысты. Дербес жағдайда, бұл жүйе орнықты тепе-теңдік күйі маңайында сызықты емес тербелісті сипаттайтын Гамильтон-Якоби жүйесі болуы мүмкін. Осылайша, ортақ дифференциалдау операторлы жүйелерді өмірдегі, практикадағы қолданылымдарға жақындатылады.

Диссертациялық жұмыста, периодты қозғалыстарды зерттеу бойынша белгілі Ляпунов әдісіне [1-3] сәйкес сызықты жүйенің тербелмелі қозғалыстары зерттеледі, мұнда алдымен олардың интегралдық өрнектері анықталады, одан кейін сызықты жүйеге қолданылған әдістер квазисызықты жағдайға таратылады. Бұл әдіс осы жұмыста қарастырылып отырған жүйелердің көппериодты шешімдерін зерттеу мәселелеріне үйлестіріліп қолданылады.

Сондай-ақ жұмыста Ляпунов пен Пуанкареге тиесілі кіші қоздыртқы әдісінің [4, 5] және А.А. Андронов [6, 7], Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов [8] жетекшіліктерімен жүргізілген классикалық зерттеулердің элементтері қолданылады.

Тақырыптың өзектілігі. Мұндай зерттеу жүргізудің қажеттілігін жағдайларға байланысты механикалық және теориялық деп аталатын екі қосымшамен негіздеуге болады. Көп жағдайларда дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді бағыттар өрісіндегі өзара әсерлеспейтін бөлшектер ағынының математикалық модельдері ретінде түсіндіруге болады. Сонда біртұтас ортаның қозғалысы ретінде анықталған процесс дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен, ал бөлшектер қозғалысы – жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесімен сипатталады.

Демек, қарастырылып отырған зерттеудің бір жағынан *механикалық қолданылымы*, ал екінші жағынан оның жәй теңдеулермен байланысын жәй дифференциалдық теңдеулер теориясындағы мәселелерді шешуге пайдалану, зерттеудің *теориялық қолданылымы бар* екендігін көрсетеді.

Бұл жұмыс осы қолданылымы және мазмұны жағынан Н.Н.Боголюбов – Ю.А.Митропольский – А. М. Самойленко [9-11] және А.Н. Колмогоров – В.И.Арнольдтың [12-19] КАМ-теория бойынша әйгілі ғылыми мектептері жетекші орын алатын тербелістер теориясы есептері зерттеулеріне жатады.

Диссертацияның зерттеуінде уақыт көп өлшемді. Бұл оның компоненттерінің рационалды бейөлшемдес болуына байланысты. Қозғалыстың жылдамдығы уақыт және кеңістік айнымалыларымен берілген векторлық өріс бағыттары бойынша дифференциалдау операторымен анықталатыны белгілі. Сондықтан диссертацияда қарастырылған бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер дифференциалдау операторлы векторлы-матрицалық теңдеулер арқылы жазылады. Дыбыстың, жарықтың, жылу мен электромагниттік толқындардың ортада таралуы сияқты көптеген табиғи процестер осындай теңдеулермен сипатталатындығын көрсететін мысалдар баршылық. Мысалы, гидромеханикадан Эйлер теңдеулерін, соққы толқындарының динамикасындағы Хопфа теңдеуін, оптикадағы эйконал теңдеуін [20-28] сәйкес векторлық өріс бағыты бойынша дифференциалдау операторлы теңдеулер арқылы сипаттауға болады. Бұл процестер толқындық сипатта болады. Ал толқындық процестер теориясында олардың математикалық модельдерінің көппериодты тербелмелі шешімдері есебін зерттеу маңызды орын алады. Осындай зерттеулердің маңыздылығы [29] жұмысында Бюргерс, Клейн-Гордон теңдеулері арқылы айқын түсіндірілген, сондай-ақ [30-32] жұмыстарында да келтірілген. Бұл бағыттағы тақырыптың өзектілігі әр түрлі көзқарастар бойынша [33-45] фундаменталды еңбектерде, сондай-ақ негізге алынып отырған [46-58] зерттеулерінде атап көрсетілген. Ғылыми-техникалық процестің дамуына байланысты зерттеушілердің периодты, периодты дерлік және көппериодты шешімдерді зерттеуге деген қызығушылығы бүгінгі күнге дейін бәсеңдемегендігі [59-99] еңбектерінен байқалады.

Сонымен, диссертацияның зерттеуінің өзектілігі оның *механика, физика және ғылыми-техникалық процестеріндегі қолданбалы аспектілерінің мүмкіндігімен* негізделеді.

Диссертациядағы зерттеудің теориялық қолданылымын негіздеу үшін жәй теңдеулер мәселелерінен оған эквивалентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер мәселелеріне көшу қажеттігі туындады. Бұл оңай мәселе емес, әрі ол зерттеушінің шеберлігіне байланысты екені анық. Мысалы, К. Якоби Гамильтонның канондық жүйелерін интегралдау туралы мәселені бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеуге көшу арқылы зерттеу әдісін ұсынды. Осылайша, Гамильтон-Якоби теңдеулерін зерттеуге арналған Якоби әдістері пайда болды [16,34].

Тағы бір маңызды мысал ретінде жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесінің квазипериодты шешімдері туралы мәселелерден дифференциалдау операторлы бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің көппериодты шешімдері туралы есептерге көшуді атап өтуге болады. Бұл әдіс В.Х. Харасахал әдісі деп аталған [46, 38-72 б.], әрі оны Д.Ү.Үмбетжанов [47, 48], Ж.А.Сартабанов [49-51], А.Б.Бержанов [58, 3-29 б.] және олардың ізбасарлары дамытқан. Диссертациядағы жүйелер мен зерттелетін мәселелер жалпы түрдегі жүйелер мен оларға қойылатын мәселелерге жатады. Демек, диссертациядағы зерттеулердің жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесінің квазипериодты шешімдері теориясында өте маңызды теориялық қолданылымы бар. Осы жұмыста жүргізілген барлық зерттеулер осы қолданылымға ұқсас. Сонымен, диссертациядағы зерттеулер өзекті мәселелерге жатады деп қорытындылауға болады.

Зерттеу тақырыбының қазіргі жағдайы. Бұл тақырып уақыт және кеңістік тәуелсіз айнымалылары бойынша ортақ бірдей дифференциалдау операторлы теңдеулер жүйелерінің көппериодты шешімдері теориясының қарастырылған бағытына жатады [47, 12-118 б.; 58, 8-23 б.]. Векторлық өріс бағыттары неғұрлым жалпы түрге ие болған сайын айтарлықтай нәтижелер алу қиындайды. Демек, дербес жағдайларға назар аудару керек. Жұмыстың зерттеу тақырыбы бойынша уақыт айнымалыларына қатысты В.Х. Харасахал енгізген дифференциалдау операторы алынды [46, 38-40 б.], ал кеңістік айнымалылары бойынша бағыттар өрісі Ляпунов жүйесімен анықталды. Дербес жағдайда, Ляпунов жүйесі ретінде Гамильтон-Якоби жүйесін алуға болады. Жоғарыда атап өтілген зерттеулерде квазисызықты жүйелердің сындық емес жағдайы кең көлемде зерттелген. Сындық жағдайды қамтитын жалпы жағдай зерттелмеген күйінде қалды. Дифференциалдау операторының бөлігіндегі Ляпунов жүйесі туралы мәліметтерді қолдана отырып, бұл зерттеу көппериодты шешімдердің бар болуы мен сызықты жағдайларда интегралдық өрнектерін анықтау және квазисызықты жүйелерде көппериодты тербелістерді зерттеу бойынша неғұрлым жалпы контексте жүргізілді. Осы тақырыппен тығыз байланысты басқа зерттеулер байқалмады.

Жұмыстың мақсаты. Уақыт айнымалыларына қатысты В.Х.Харасахал енгізген және кеңістік айнымалылары бойынша Ляпунов жүйесінің әртүрлі формаларымен анықталған векторлық өріс бағыттары бойынша дифференциалдау операторлы жүйелердегі көппериодты тербелістерді Ляпунов әдісін жалпылау негізінде зерттеу.

Зерттеу міндеттері:

а) уақыт айнымалылары В.Х. Харасахал енгізген және кеңістік айнымалылары Ляпунов жүйесі арқылы анықталған векторлық өріс бағыттары бойынша дифференциалдау операторлы дербес туындылы бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің квазисызықты жүйелерінің көппериодты шешімдерінің бар болуының жеткілікті шартын алу;

б) сындық емес және сындық жағдайларда сызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің интегралдық өрнектерін анықтау;

в) жоғарыда аталған дифференциалдау операторлы автономды сызықты және квазисызықты жүйелердің көппериодты тербелістерін зерттеу, көппериодты қоздыртқы жағдайларын қарастыру;

г) экспоненциал-гиперболалық өзгермелі кіші параметрлі квазисызықты жүйелердегі көппериодты тербелістерді зерттеу.

Зерттеу нысаны. Уақыт айнымалылары В.Х. Харасахал енгізген және кеңістік айнымалылары Ляпунов жүйесінің әртүрлі формаларымен анықталған векторлық өріс бағыттары бойынша дифференциалдау операторлы сызықты және квазисызықты жүйелердің Ляпунов әдісін жалпылау арқылы алынған көппериодты шешімдері.

Зерттеу пәні. Жоғарыда көрсетілген дифференциалдау операторлы сызықты және квазисызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің бар болуының жеткілікті шарттары, олардың құрылымы мен интегралдық өрнектері және оларды анықтауда, құруда қолданылатын әдістер.

Ғылыми жаңалығы.

а) Ляпунов жүйесінің түрлеріне байланысты айырмашылықта болатын әртүрлі дифференциалдау операторлы сызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің бар болуының жеткілікті шарттары орнатылды.

б) Сындық жағдайда сызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің бар болуы шарттары анықталды. Мұндай мәселе алғаш рет зерттелді.

в) Сызықты біртекті емес жүйелердің көппериодты шешімдерінің сындық және сындық емес жағдайларда да қолдануға болатын интегралдық өрнектері құрылды.

г) Сындық емес жағдайда квазисызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің бар болуының жеткілікті шарттары табылды.

д) Автономды сызықты және квазисызықты жүйелер зерттелді және бұл жүйелер үшін де жоғарыға ұқсас нәтижелер алынды.

е) Экспоненциал-гиперболалық өзгермелі кіші параметрлі бір квазисызықты жүйенің көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары табылды және оның біртіндеп жуықтау әдісімен тұрғызылуы негізделді.

ж) Жәй дифференциалдық теңдеулердің периодты шешімдерін зерттеудегі Ляпуновтың белгілі әдістері көппериодты жағдай үшін таратылды. Есептің көппериодты шешімдерді құру мәселесін зерттеу әдістері дамытылды және келесі схемаға сәйкес жүргізілді: дифференциалдау операторының нөлдері; біртекті сызықты жүйе; біртекті емес сызықты жүйе; квазисызықты жүйе зерттелді және бастапқы берілгендер немесе кіші параметр бойынша олардың өзара байланысы анықталды.

Қорғауға ұсынылатын нәтижелер:

- векторлық өріс бағыттары бойынша дифференциалдау операторлы сызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары;
- сындық жағдайда біртекті емес сызықты жүйелердің нақты аналитикалық көппериодты шешімдерінің бар болуы шарттары мен зерттеу әдістері;
- автономды сызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің бар болуы шарттары мен зерттеу әдістері;

- сызықты біртекті емес жүйелердің көппериодты шешімдерінің сындық және сындық емес жағдайларда да қолданылатын интегралдық өрнегі;

- векторлық өріс бағыттары бойынша дифференциалдау операторлы сызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің құрылымдық талдауы;

- сындық емес жағдайда қарастырылған квазисызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің бар болуы шарттары;

- сызықты емес бөлігі ізделінді функцияға қатысты біртектес форма болатын, экспоненциал-гиперболалық өзгермелі параметрлі бір квазисызықты жүйенің сындық жағдайда көппериодты шешімінің бар болуы шарттары мен зерттеу әдістері.

Алынған нәтижелердің нақтылығы және негізделуі. Диссертациялық жұмыстың ғылыми нәтижелері леммалар және теоремалар түрінде тұжырымдалады. Келтірілген тұжырымдар қатаң математикалық дәлелдемелермен, ал формулалар қатаң математикалық қорытулармен негізделеді. Диссертацияның ғылыми жағдайы, қорытулары мен нәтижелерінің нақтылығы және негізделуі алынған нәтижелердің талап етілген журналдарда жариялануымен расталады.

Алынған нәтижелердің практикалық және теориялық маңыздылығы. Алынған нәтижелер теориялық сипатқа ие. Көппериодты шешімдердің табылатындығының шарттары алынуы; олардың интегралдық өрнектерінің ұсынылуы; сындық жағдайда көппериодты шешімдердің зерттелуі және осы мәселенің автономды жүйелер үшін қарастырылуы; экспоненциал-гиперболалық өзгермелі параметрлі жүйенің сызықты емес бөлігі ізделінді функцияға қатысты біртектес форма болғанда біртіндеп жуықтау әдісінің қолданылуы бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің көппериодты шешімдері теориясының дамуының маңызды толықтырмасы болып табылады.

Зерттеу нәтижелері осы теорияның одан әрі дамуына түрткі болуы мүмкін. Оны физика-математика, инженер мамандықтарының студенттеріне, магистранттарына және докторанттарына элективті курстар жасақтауда пайдалануға болады.

Жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Өткен ғасырдың 20-шы жылдарында Ляпунов пен Пуанкаренің дифференциалдық теңдеулердің периодты шешімдерін зерттеуге арналған әдістері периодты дерлік шешімдер мәселелерін зерттеуге жарамсыз болғаны белгілі. Оның негізгі кедергілері: 1) дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің периодты дерлік болуының қажетті және жеткілікті шарттарының болмауы, 2) периодты дерлік коэффициентті сызықты жүйелердің тұрақты коэффициентті сызықты жүйеге келтірілімділігі мәселесінің шешілмеуі. Бұл мәселелер жәй дифференциалдық теңдеулер теориясында осы күнге дейін ашық күйінде қалып отыр.

В.Х Харасахал әдісі арқасында, бұл мәселелерді бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің көппериодты шешімдері теориясының тіліне аударуға болады. 1) мәселесін осы теория тұрғысында 1972 жылы Д.Ү.Үмбетжанов Ж.А.Сартабановпен [52, 22-27 б.] бірлесіп шешкендігін атап өткен жөн. Бұл жұмыстың нәтижелері саналымды жүйелерді зерттеуге таратылды [53, б. 53-58] және бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің көппериодты шешімдері теориясында айырымдық теңдеулер әдісінің негізін қалады [54-57]. Диссертацияның зерттеулері негізінде осы фундаменталды еңбектер жатырғандығын байқауға болады. Сондай-ақ 2) мәселесін осы теория шеңберінде зерттеу айтарлықтай нәтижелерге әкелуі мүмкін.

Осы теориямен қатар, әйгілі КАМ-теориясының [14-17] және Н.М.Крылов, Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко [8-11] бастаған Киевтің ғылыми мектебінің зерттеушілерінің дифференциалдық теңдеулердің квазипериодты және периодты дерлік шешімдері теориясы (бір өлшемді уақыт шеңберінде) бойынша орасан зор зерттеулер жүргізіп жатырғандығын атап өтуге болады. Бұл мектептердің зерттеу әдістерінің Республикамыздағы В.Х. Харасахал мен Д.Ү. Үмбетжановтың ғылыми мектебінің әдістерімен ортақ жерлері жоқ. Демек диссертациялық жұмыстағы зерттеуде алынған нәтижелер және зерттеу әдістері бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелері теориясының жаңа бағытына жатады. Қойылған есеп бойынша жүргізілген зерттеулер жаңа болып табылады.

Пуанкаре мен Ляпунов өз зерттеулерін аспан механикасының қажеттіліктеріне орай жүргізген. Ал аспан механикасының теңдеулері көбінесе автономды және гамильтондық болады. Бірақ көптеген физика-техникалық процестер автономды емес және гамильтондық емес жәй және дербес туындылы теңдеулермен сипатталады. Осыған байланысты, жұмыста автономды және гамильтондық (Ляпунов жүйесі түрінде берілген) векторлық өрістердің бағыттары бойынша дифференциалдау операторлы теңдеулер жүйелеріндегі тербелістердің сапалы зерттеулері, көп өлшемді уақыт бойынша тербелетін қоздыртқы есептері қарастырылады. Қазіргі кезде дифференциалдау операторлы көппериодты жүйелердің сапалы теориясы қарқынды даму үстінде. Бұған осы жұмыспен байланысы бар [61-99] жұмыстарының пайда болуы дәлел болады.

Автордың қосқан жеке үлесі. Диссертацияда келтірілген барлық нәтижелерді автордың өзі алды. Қосалқы авторлар және ғылыми кеңесшілер есептің қойылымына және алынған нәтижелерді талқылауға үлестерін қосты.

Алынғын нәтижелерді апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

- «Тайманов оқулары – 2017» атты халықаралық ғылыми-практикалық конференция (Орал, Қазақстан, 25 қазан 2017 ж.);
- «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» атты халықаралық ғылыми конференция (Ақтөбе, Қазақстан, 10-11 қараша 2017 ж.);
- «Математиканың өзекті мәселелері» атты Қазақстан математиктерінің ғылыми конференция (Түркістан, Қазақстан, 28-30 сәуір 2018 ж.);
- fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018) (Lefkosa (Nicosia), Turkey, September 6-9, 2018);

- дәстүрлі халықаралық сәуір ғылыми конференциясы, ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты (Алматы, Қазақстан, 5-8 сәуір 2021ж.);

-«Үлестірілген параметрлі жүйелерде сызықты емес оптимизация мәселелерін зерттеу» ғылыми семинары, Қырғыз-Орыс Славян университеті, Бішкек, Қырғыз Республикасы (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор А.Керимбеков);

-«Дифференциалдық теңдеулердің сапалы теориясы» ғылыми семинары, Ж.Баласағұни атындағы Қырғыз Ұлттық университеті, Бішкек, Қырғыз Республикасы (семинар жетекшілері – ф.-м.ғ.д., профессор А. Саадабаев, ф.-м.ғ.д., профессор Б.К. Темиров);

-«Дифференциалдық теңдеулерді зерттеудің сапалы және жуықтау әдістері» ғылыми семинары, ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор А.Т.Асанова);

-«Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті математика кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан (семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Ж.Сартабанов).

Жарияланымдар. Диссертацияның нәтижелері 11 жұмыста жарияланды. Оның ішінде 1 мақала Scopus мәліметтер базасында индекстелген рейтингтік ғылыми журналда [100], 4 мақала ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған басылымдарда [101-104], 1 мақала ҚР ғылыми журналында [105], 5 мақала халықаралық конференциялар материалдарында [106-110], оның ішінде 1 мақала Scopus мәліметтер базасында индекстелетін шетелдік конференция материалында жарияланды [106, 020041 б.].

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс титулдық беттен, мазмұннан, қысқартулар мен белгілеулерден, кіріспеден, негізгі 2 тараудан, қорытындыдан және 110 атаулардан тұратын пайдаланылған әдебиеттер тізімінен, қосымшалардан тұрады. Диссертацияның жалпы көлемі 149 бет. Тұжырымдар, формулалар үш индекстен тұратын сандармен номерленеді. Бірінші индекс бөлімнің нөмірін, екіншісі - бөлімшенің нөмірін, үшіншісі – осы бөлімшедегі тұжырымның, формуланың нөмірін білдіреді.

Жұмыстың қысқаша мазмұны. Жұмыстың **бірінші бөлімінде** жалпы түрдегі

$$Dx = P(\tau,t,\zeta)x + f(\tau,t,\zeta,x) \tag{0.1}$$

квазисызықты жүйесіне сәйкес келетін

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle M\zeta + \psi(\tau,t,\zeta), \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\rangle \tag{0.2}$$

дифференциалдау операторлы *сызықты жүйеге* қатысты алынған нәтижелер баяндалады, мұндағы $(\tau,t)=(\tau,t_1,...,t_m)\in R\times R\times...\times R=R\times R^m$ – уақыт айнымалылары; $\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_l)\in\overline{B}_\delta^2\times...\times\overline{B}_\delta^2=\overline{B}_\delta^{2l}$ – кеңістік айнымалылары, $\zeta_j=(\xi_j,\eta_j)\in\overline{B}_\delta^2$, $j=\overline{1,l}$, $B_\delta^2=\{\zeta\in R:|\zeta|<\delta\}$, $\delta=const>0$, $\overline{B}_\delta^2$ – B_δ^2 шарының тұйықталуы, дербес жағдайда $\delta=+\infty$; $e=(1,...,1)$ – m-вектор, $\frac{\partial}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial t_1},...,\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$ – векторлық дифференциалдау операторы, $\langle\ ,\ \rangle$ – векторлардың скаляр көбейтіндісі белгісі, M – тұрақты $2l\times 2l$-матрица, ψ – өз аргументтерінің вектор-функциясы, $\frac{\partial}{\partial\zeta}=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1},...,\frac{\partial}{\partial\zeta_l}\right)$, $\frac{\partial}{\partial\zeta_j}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j},\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right)$ – кеңістік айнымалылары бойынша векторлық дифференциалдау операторы, $j=\overline{1,l}$; P – өз аргументтерінің $n\times n$-матрицалық функциясы, f – (τ,t,ζ) тәуелсіз айнымалыларының және $x=(x_1,...,x_n)$ ізделінді функцияның вектор-функциясы.

$x(\tau,t,\zeta)$ векторлық функциясы (τ,t) *бойынша* (θ,ω)*-периодты* деп аталады, егер $x(\tau+\theta,t+q\omega,\zeta)=x(\tau,t,\zeta)$, $(\tau,t,\zeta)\in R\times R^m\times B_\delta^{2l}$ теңдігі орындалса, мұндағы $\omega_0=\theta,\omega_1,...,\omega_m$ – *рационал бейөлшемдес* оң тұрақтылар:

$$\frac{\omega_i}{\omega_j}\neq r\in Q,\quad i\neq j,\quad i,j=\overline{0,m}.$$

(τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты $x=x(\tau,t,\zeta)$ функциясымен сипатталған қозғалыс *көппериодты тербеліс* деп аталады.

Диссертациялық жұмыста (0.2) операторлы (0.1) жүйесінің (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімдері мәселесі зерттеледі. Зерттеу барысында M, P матрицалары мен ψ және f вектор-функцияларының түрлері өзгереді. Демек, оператор да, (0.1) жүйесі де әртүрлі формаларға ие болады.

Егер f вектор-функциясына ізделінді функция кірмесе, онда (0.2) операторлы (0.1) жүйесіне сәйкес жоғарыда аталған

$$Dx=P(\tau,t,\zeta)x+f(\tau,t,\zeta)\tag{0.3}$$

сызықты жүйе алынады. (0.3) жүйесінің көппериодты шешімдерін зерттеу мәселелері алты бөлімшеде қарастырылады.

1.1 және 1.2 бөлімшелерінде зерттелетін жүйе екі теңдеуден тұратын дербес жағдайда қарастырылады және олар бір-бірінен белгісіздердің алдындағы коэффициенттері бойынша ғана айырмашылықта болады, яғни 1.1 бөлімшеде тұрақты, 1.2 бөлімшеде айнымалы болған жағдай. Мұнда кеңістік айнымалысына қатысты дифференциалдау операторы сызықты біртекті Ляпуновпен жүйесімен анықталады.

1.1 бөлімшеде

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial\tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \nu\eta\frac{\partial}{\partial\xi} - \nu\xi\frac{\partial}{\partial\eta}$$

дифференциалдау операторы қарастырылады және

1) $D_1 x = 0$ теңдеуінен D_1 операторының нөлдері анықталады, олардың (τ, t) бойынша көппериодтылығы қасиеттері зерттеледі (1.1.1-теорема);

2) тұрақты матрицалы $D_1 x = Ax$ теңдеуі үшін бастапқы есеп шешімі тұрғызылып, оның көппериодтылығы шарттары алынады (1.1.2-теорема); сындық емес жағдайда теңдеудің тек тривиалды (нөлдік) көппериодты шешімі болатындығы дәлелденеді (1.1.3-теорема); сындық жағдайда нөлден өзге шешімнің болмауының жеткілікті шарттары орнатылады (1.1.4-теорема);

3) сындық жағдайда $D_1 x = Ax + f(\tau, t, \zeta)$ теңдеуінің көппериодты шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары алынады (1.1.6-теорема);

4) $A = A(t - e\tau)$ матрицасы жағдайында осыған ұқсас зерттеу де жүргізіледі (1.1.7-теорема).

1.2 бөлімшеде коэффициенттерінің матрицасы P айнымалы матрицасы болатын, D_1 операторлы және $x = (x_1, x_2)$ ізделінді вектор-функциясынан тұратын жүйелер зерттеліп келесі нәтижелер алынады.

1) Коэффициенттерінің $P(\tau, t)$ матрицасы (θ, ω)-периодты $D_1 x = P(\tau, t)x$ теңдеуінің t бойынша ω-периодты шешімінің табылуының жеткілікті шарттары орнатылады (1.2.1-теорема), теореманың нөлден өзге көппериодты шешімдердің болмауы туралы салдары келтіріледі.

2) Сәйкес біртекті теңдеудің нөлден өзге көппериодты шешімдері болмаған жағдайда $D_1 x = P(\tau, t)x + f(\tau, t, \zeta)$ теңдеуінің көппериодты шешімнің бар және жалғыз болуы шарттар анықталады (1.2.2-теорема). Мұнда зерттеу Грин функциясы тұрғысынан жүзеге асырылады. Осы шешімнің бағалауы келтіріледі (1.2.3-теорема).

3) $X(\theta, t, \zeta)$ монодромия матрицасы негізінде $D_1 x = P(\tau, t, \zeta)x$ теңдеуі үшін матрицант тұрғызылып, нөлден өзге көппериодты шешімдерінің болмауы шарты анықталады. Әрі қарай $D_1 x = P(\tau, t, \zeta)x + f(\tau, t, \zeta)$ теңдеудің көппериодты шешімінің бар және жалғыз болатындығы дәлелденеді (1.2.4-теорема) және оның интегралдық өрнегі келтіріледі. Осындай тұжырым сындық емес жағдай үшін де дәлелденеді (1.2.5-теорема).

4) $D_1 x = P(\zeta)x + f(\zeta)$ автономды теңдеуі үшін ерекше шешім ұғымы енгізіледі және шешімдердің периодтылығы шарттары орнатылады (1.2.6-теорема). Автономды теңдеудің периодты шешімінің бар және жалғыз болуы дәлелденеді. Зерттеу Грин функциясы тұрғысынан жүргізіледі (1.2.7-теорема).

1.3 бөлімшеде

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial\tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial\tau} \right\rangle + \left\langle 2\pi\nu^{\circ} I_2 \zeta + \psi(\zeta), \frac{\partial}{\partial\zeta} \right\rangle$$

операторлы $x = (x_1, x_2)$ ізделінді вектор-функциясының екінші ретті жүйелері зерттеледі, мұндағы I_2 – екінші ретті симплектикалық бірлік.

Келесі нәтижелер алынады.

1) D_2 операторының $D_2 x = 0$ теңдеуімен анықталған ζ бойынша аналитикалық, t-ға қатысты ω-периодты және τ-ға қатысты $(\nu^0, \nu_1, ..., \nu_m)$, $\nu_j = \omega_j^{-1}, j = \overline{1,m}$ жиіліктерімен квазипериодты нөлдерінің бар болуы шарттары орнатылады (1.3.1-теорема).

2) $A = [a_{ij}],\ a_{11} = a_{22} = \alpha,\ a_{12} = -a_{21} = \beta$ матрицалы $D_2 x = Ax$ біртекті теңдеудің нөлден өзге көппериодты шешімдерінің болуы және болмауының жеткілікті шарттары алынады (1.3.2-теорема).

3) Автономды біртекті емес $D_2 x = Ax + f(\zeta)$ теңдеуінің ζ бойынша аналитикалық, t-ға қатысты ω-периодты және τ-ға қатысты квазипериодты шешімінің табылуының жеткілікті шарттары анықталады (1.3.3-теорема). Берілген біртекті емес теңдеудің (τ, t) бойынша көппериодты болатын шешімдерге жататын ζ бойынша аналитикалық және тек ζ-дан тәуелді болатын шешімінің болуы шарттары көрсетіледі (1.3.4-теорема). Сондай-ақ, осы теңдеуге қатысты негізгі мәселе Грин функциясы тұрғысынан зерттелді және алынған нәтижелер 1.3.5-теоремасы түрінде тұжырымдалады. Нәтиже $f = f(\tau, t, \zeta)$ жағдайындағы жүйе үшін жалпыланады (1.3.6-теорема).

1.4 бөлімше дифференциалдау операторы

$$D_3 = \frac{\partial}{\partial\tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle J\zeta + \psi(\zeta), \frac{\partial}{\partial\zeta} \right\rangle \qquad (0.4)$$

түрінде анықталған жүйелердің көппериодты шешімдерін зерттеуге арналады, мұндағы (τ, t) – уақыт айнымалылары, $\zeta \in B_\delta^{2l+2}$ – кеңістік айнымалылары, J – $(2l+2)$-өлшемді блок-диагональды матрица; $\psi(\zeta) = (\psi_0(\zeta_0), ..., \psi_l(\zeta_l))$, $\psi_j(\zeta_j) = \left(-\frac{\partial g_j(\zeta_j)}{\partial\eta_j}, \frac{\partial g_j(\zeta_j)}{\partial\xi_j} \right)$, $j = \overline{0,l}$, $g(\zeta) = (g_0(\zeta_0), ..., g_l(\zeta_l))$ – вектор-функциялар.

(0.4) операторын анықтаушы параметрлерге қатысты келесі шарттар орындалсын деп ұйғарылады:

а) J матрицасы

$$J = diag\,[\nu_0 I_2,...,\nu_l I_2], \qquad \langle q,\nu\rangle \neq 0 \tag{0.5}$$

түрінде анықталады, мұнда $\nu = (\nu_0,...,\nu_l)$ – тұрақты вектор, $q = (q_0,...,q_l) \in Z^{l+1}$.

б) $g(\zeta) = g(\xi, \eta)$ функциялары $\zeta = 0$ нүктесінің $O_\delta(0)$ δ-маңайында аналитикалық болсын және олардың дәрежелік қатарларға жіктелуі үшінші дәрежелі формадан басталады, яғни

$$g(\zeta) = \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{j!}\left\langle \zeta, \frac{\partial}{\partial \zeta}\right\rangle^j g(0). \tag{0.6}$$

t уақыт айнымалысының m өлшемі ζ кеңістік айнымалысының

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = J\zeta + \psi(\zeta) \tag{0.7}$$

векторлық өрісінен анықталады. Бірінші интегралдары

$$H(\xi,\eta) \equiv \xi^2 + \eta^2 + \frac{2}{\nu} g(\xi,\eta) = \varepsilon^2 \tag{0.8}$$

түрінде анықталған (0.7) жүйесі *Ляпунов жүйесі* деп аталады, мұндағы ε – еркін алынған тұрақты. Ляпунов жүйесінің шешімдерінің қасиеттері негізінде 1) t уақыт айнымалысының $m = l$ өлшемі және $(\tau, t_1, ..., t_l)$ вектор-айнымалылары бойынша компоненттері $\theta = \omega_0(\varepsilon_0)$, $\omega = (\omega_1(\varepsilon_1),...,\omega_l(\varepsilon_l))$ болатын $(\theta, \omega_1,...,\omega_l)$ вектор-периоды анықталады; 2) (0.4) операторының $t^0 = h(\tau^0, \tau, t)$, $\zeta^0 = \mu(\tau^0 - \tau, e\tau^0 - t, \zeta)$ бірінші интегралдары анықталады; 3) (0.4) дифференциалдау операторының көппериодты нөлдерінің табылуының жеткілікті шарттарын анықтайтын 1.4.1-теоремасы дәлелденеді.

Әрі қарай, сындық емес жағдайда

$$D_3 x = Ax + f(\zeta) \tag{0.9}$$

жүйесі қарастырылады, мұндағы A –тұрақты $n \times n$ матрица, $f(\zeta)$ – вектор-функция. Сәйкес

$$D_3 x = Ax \tag{0.10}$$

біртекті жүйесіндегі A матрицасының барлық меншікті мәндері үшін

$$\mathrm{Re}\,\lambda(A) \neq 0 \tag{0.11}$$

шарты орындалады деп, ал $f(\zeta)$ вектор-функциясы

$$f(\zeta)\in C_{\zeta}^{(\tilde{e})}\left(B_{\delta}^{2l+2}\right),\ f(\zeta)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left\langle \zeta,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle^{j} f(0) \tag{0.12}$$

қасиетін қанағаттандырады деп ұйғарылады. Сонда (0.9) жүйесінің көппериодты шешімі келесі түрде жазылады:

$$x^{*}(\tau,t,\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\tau-s)f(\mu(s-\tau,es-t,\zeta))ds. \tag{0.13}$$

(0.9) жүйесінің көппериодты шешімінің бар және жалғыз болуын зерттеу нәтижесі келесі теорема түрінде тұжырымдалды.

01-теорема. *(0.5), (0.6), (0.8), (0.11) және (0.12) шарттары орындалған жағдайда (0.10) біртекті теңдеуінің тек нөлдік көппериодты шешімі, ал біртекті емес (0.9) теңдеуінің жалғыз ғана (0.13) түріндегі* (θ,ω)*-периодты шешімі болады.*

(0.9) жүйесін зерттеу әдістері коэффициенттері матрицасы айнымалы

$$D_3 x = P(\zeta)x + f(\zeta) \tag{0.14}$$

автономды жүйесі үшін жалпыланады, мұндағы $P(\zeta)=[p_{ij}(\zeta)]_1^n$ – матрица, әрі ол келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$P(\zeta)\in C_{\zeta}^{(\tilde{e})}\left(B_{\delta}^{2l+2}\right),\quad P(\zeta)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left\langle \zeta,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle^{j} P(0). \tag{0.15}$$

$P(\zeta)$ матрицасы $D_3 x = P(\zeta)x$ жүйесінің экспоненциалды орнықтылық қасиетін қамтамасыз етеді деп ұйғарылады, яғни

$$\left|X\left(\tau^{0},\tau,t,\zeta\right)\right|\le\tilde{\alpha}e^{-\kappa\left(\tau-\tau^{0}\right)},\ \tau\ge\tau^{0}, \tag{0.16}$$

мұндағы $\tilde{\alpha}\ge 1,\ \kappa>0$ – тұрақтылар. (0.14) жүйесінің көппериодты шешімдерінің зерттелуі нәтижесі келесі теоремада тұжырымдалады.

02-теорема. *(0.5), (0.6), (0.8), (0.12), (0.15) және (0.16) шарттары орындалсын. Онда (0.14) жүйесінің жалғыз ғана* $\zeta\in B_{\delta}^{2l+2}$ *бойынша голоморфты,* (τ,t) *бойынша* (θ,ω)*-периодты шешімі*

$$x^{*}(\tau,t,\zeta)=\int_{-\infty}^{\tau}X(s,\tau,t,\zeta)f(\mu(s-\tau,es-t,\zeta))ds$$

өрнегімен анықталады.

Алынған нәтиже одан әрі $f(\tau,t,\zeta)$ бос мүшесі (τ,t) бойынша үзіліссіз дифференциалданатын және $\mu(s-\tau,es-t,\zeta)$ интегралымен бірдей (θ,ω)-периодты болған жағдайға жалпыланады (1.4.4-теорема).

Ляпунов жүйелеріне жақын, бірақ олардан уақыт айнымалылары бойынша тербелмелі қоздыртқымен айырмашылықта болатын жүйелермен берілген өрістер арқылы анықталған дифференциалдау операторлы теңдеулерді қарастырудың маңызы зор [35, 234-238 б.]. Осыған байланысты 1.5 бөлімшеде

$$D_4 = \frac{\partial}{\partial\tau} + \left\langle a(\tau,t), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle J\zeta + g(\tau), \frac{\partial}{\partial\zeta} \right\rangle \tag{0.17}$$

дифференциалдау операторлы жүйелер зерттеледі, мұндағы $a(\tau,t) = (a_1(\tau,t),..., a_m(\tau,t))$, $g(\tau) = (g_1(\tau),..., g_l(\tau))$ – вектор-функциялар.

D_4 операторын анықтаушы параметрлерге қатысты келесі шарттар орындалсын деп ұйғарылады:

1) $a(\tau,t)$ вектор-функциясы

$$a(\tau+\theta,t+q\omega) = a(\tau,t) \in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R\times R^m) \tag{0.18}$$

шартын, ал

2) $g_j(\tau) = (\varphi_j(\tau),\psi_j(\tau)), j=\overline{1,l}$ вектор-функциялары

$$g_j(\tau+\beta_j) = g_j(\tau) \in C_\tau^{(0)}(R),\ j=\overline{1,l} \tag{0.19}$$

шартын қанағаттандырады мұндағы $\beta_j > 0$ периоды $2\pi\nu_j^{-1}$ $(j=\overline{1,l})$ сандарымен рационал бейөлшемдес.

Алдымен (0.17) операторының нөлдерін анықтайтын $D_4x = 0$ теңдеуінің шешімдерінің қасиеттері зерттеледі. Тек (τ,t) уақыт айнымалыларынан және (τ,ζ) айнымалыларынан тәуелді болатын нөлдер құрылымы анықталады. Әрі қарай, алынған нәтижелерді 1.5.1-теоремасына жинақтап, D_4 операторының барлық тәуелсіз айнымалыларды қамтитын нөлдерінің негізгі қасиеттері келтіріледі. Осыдан кейін

$$D_4x = Ax \tag{0.20}$$

біртекті теңдеуі қарастырылып, A матрицаның меншікті мәндерінің түрлеріне байланысты матрицанттың әртүрлі қасиеттері анықталады (1.5.3-1.5.5-леммалар), матрицанттың құрылымы бойынша 1.5.2-теоремасы дәлелденеді.

(0.20) жүйесінің жалпы шешімінің көппериодты құрылымы 1.5.1 және 1.5.2-теоремалары негізінде анықталып, нәтижелері 1.5.3-теоремасы түрінде тұжырымдалады. 1.5.4-теоремада (0.20) жүйесінің көппериодты шешімінің табылуының шарттары берілсе, 1.5.5-теоремасында тривиалды шешімдерден басқа мұндай шешімдердің болмауы шарттары келтіріледі.

D_4 операторының нөлдеріне сәйкес келетін (θ,ω)-периодты шешімдер класы 1.5.6-теоремада анықталады. Соның негізінде (0.20) біртекті жүйенің нөлдік емес (θ,ω)-периодты шешімдерінің болмауы шарты

$$\det[X(\theta)-E]\neq 0 \tag{0.21}$$

алынады, мұндағы $X(\tau)$ – (0.20) жүйесінің матрицанты. Ал D_4 оператордың нөлдерінің (θ,ω)-периодтылығы шарттары 1.5.7-теоремада функционалды-айырымдық жүйелер түрінде беріледі. Ал 1.5.8-теоремада

$$D_4 x = Ax + f(\tau,t,\zeta) \tag{0.22}$$

біртекті емес жүйесінің көппериодты шешімнің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары келтіріледі, мұнда $f(\tau,t,\zeta)$ бос мүшесі (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты қайсыбір $f_0 = f_0(\zeta)$ функциясымен $f - f_0$ қоздыртқысы арқылы алған күшті білдіреді және ол

$$f(\tau+\theta,t+q\omega,\zeta)=f(\tau,t,\zeta)\in C_{\tau,t,\zeta}^{(0,\hat{e},\tilde{e})}\left(R\times R^m\times B_\delta^{2l}\right) \tag{0.23}$$

шартын қанағаттандырады. Зерттеу барысында (0.22) жүйесінің жалғыз көппериодты шешімі келесі түрде

$$x(\tau,t,\zeta)=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}\int\limits_{\tau}^{\tau+\theta}X^{-1}(s)f_\theta(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds. \tag{0.24}$$

анықталатыны негізделеді, мұндағы

$$f_\theta(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))=\begin{cases} f(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)), & \tau\le s\le 0,\\ f(s,\lambda(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta)), & 0<s\le\tau+\theta.\end{cases}$$

Жоғарыда айтылғандай, бұл зерттеуді жәй дифференциалдық теңдеулердің көп жиілікті тербелмелі шешімдері теориясында қолдану үшін көппериодты шешімдердің құрылымдарын зерттеу маңызды.

(0.17) операторлы (0.22) жүйесімен байланысты бастапқы-көппериодты есептердің көппериодты шешімдерінің құрылымы анықталады. Ізделінді шешім келесі компоненттерден: D_4 операторының сипаттауыштарынан және сипаттаушы жүйелерінің бірінші интегралдарынан, матрицанттан және жүйенің бос мүшесінен тұрады. Бұл компоненттер өз кезегінде периодты және периодты емес құрылымдық компоненттерден тұрады және олар зерттелетін жүйені сипаттайтын қозғалыстардың көппериодтылық сипатын ашуда маңызды рөл атқарады. Шешімді көппериодты компоненттері арқылы өрнектеу *шешімнің көппериодты құрылымы* деп аталады.

(0.24) өрнегінен шешімнің көппериодты

$$\begin{aligned}\hat{x}(\bar{s},\bar{\sigma},\hat{\tau},\tau,t,\zeta)&=\left[\hat{X}^{-1}(\tau+\theta,\hat{\tau}+\hat{e}\theta)-\hat{X}^{-1}(\tau,\hat{\tau})\right]^{-1}\times\\&\times\int_{\tau}^{\tau+\theta}X^{-1}(p)f_{\theta}\big(p,\lambda(p,\tau,t),\bar{\zeta}(p-\bar{s},z(p),\zeta-z(\bar{\sigma}))\big)dp\end{aligned}\tag{0.25}$$

құрылымы анықталады, ал бұл

$$\begin{aligned}\bar{\bar{D}}_4=\bar{D}_4+\hat{D}_4&=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle a(\tau,t),\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle+\left\langle e,\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\right\rangle+\left\langle e,\frac{\partial}{\partial\bar{\sigma}}\right\rangle+\\&+\left\langle \nu I_2\bar{\zeta}+g(\bar{\sigma}),\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{s}}+\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{\sigma}},\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right\rangle+\left\langle\hat{e},\frac{\partial}{\partial\hat{\tau}}\right\rangle\end{aligned}\tag{0.26}$$

дифференциалдау операторлы

$$\bar{\bar{D}}_4\hat{x}=A\hat{x}+f(\tau,t,\zeta)\tag{0.27}$$

теңдеуін қанағаттандырады, мұндағы $e=(1,...,1)$ – l-вектор, $\bar{s}=(\bar{s}_1,...,\bar{s}_l)$, $\bar{\sigma}=(\bar{\sigma}_1,...,\bar{\sigma}_l)$ – уақыт айнымалылары, $\bar{\zeta}=(\bar{\zeta}_1,...,\bar{\zeta}_l)$, $\bar{\zeta}_j=\bar{\zeta}_j(\bar{s}_j,\bar{\sigma}_j)$, $j=\overline{1,l}$ – кеңістік айнымалылары. Осылайша келесі теорема дәлелденеді.

03-теорема. *(0.5), (0.18), (0.19), (0.21), (0.23) шарттары орындалғанда (0.22) жүйесінің жалғыз ғана* (τ,t) *бойынша* (θ,ω)*-периодты шешімі (0.24) өрнегімен беріліп, оның* $(s,\sigma,\hat{\tau},\tau,t)$ *бойынша* $(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\omega)$*-периодты құрылымы (0.25) өрнегімен анықталып, ол (0.26) дифференциалдау операторлы (0.27) теңдеуін қанағаттандырады.*

Диссертациядағы зерттеудің басты ерекшеліктерінің бірі – дифференциалдау операторлы жүйелерде *сындық жағдайдың бірінші рет* қарастырылуы. Сондықтан 1.6 бөлімшеде уақыт айнымалыларына қатысты

$$D_5=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle e,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle\tag{0.28}$$

дифференциалдау операторы қарастырылады. D_5 операторы [46, 38-40 б.] фундаменталды жұмысында қарастырылғандықтан (0.28) операторының нөлдерінің қасиеттері де белгілі болып есептеледі. Келесі түрдегі біртекті

$$D_5 x = Ax \qquad (0.29)$$

сызықты векторлы-матрицалық теңдеуі қарастырылады. Төменде келтірілген шарттар орындалсын деп ұйғарылады:

а) A тұрақты матрицасының

$$\mathrm{Im}\lambda_{1,2} = \pm 2\pi\nu^0 \neq 0,\ \mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 0, \mathrm{Re}\lambda_j \neq 0,\ j = \overline{3,m} \qquad (0.30)$$

меншікті мәндері бар;

б) еркін тербелістердің ν^0, еріксіз тербелістердің $\nu_0 = \theta^{-1}$, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$, $\nu_j = \omega_j^{-1}$, $j = \overline{1,m}$ жиіліктері бейөлшемдестіктің күшейтілген шартын, яғни

$$\left|\nu^0 + k_0\nu_0 + k_1\nu_1 + ... + k_m\nu_m\right| \geq c^{-1} \,|\,\hat{k}\,|^{-\gamma}, |\,\hat{k}\,| \neq 0 \qquad (0.31)$$

теңсіздігін қанағаттандырады, мұндағы $c > 0$ и $\gamma > 1 + m-$ тұрақтылар, $\hat{k} = (k_0, k_1, ..., k_m), |\,\hat{k}\,| = \sum_{j=0}^{m} |\,k_j\,|, k_j \in Z$.

Біртекті (0.29) жүйесі $x = B\widetilde{x}$ түрлендіруі арқылы ішкі

$$D_5 y = 2\pi\nu^0 I_2 y, \qquad D_5 z = \widetilde{A}z \qquad (0.32)$$

жүйелеріне жіктеледі, мұндағы B – ерекше емес тұрақты $n \times n$-матрица, $\widetilde{x} = (y, z),\ y = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2),\ z = (\widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$, $\widetilde{A}$ – тұрақты $(n-2)\times(n-2)$-өлшемді матрица және $\mathrm{Re}\lambda_j(\widetilde{A}) \neq 0,\ j = \overline{3,n}$.

(0.32) жүйелерінің әрқайсысына сәйкес (θ, ω)-периодты шешімдерді тұрғызудың Грин функциялары белгілі: $G_{11}(\tau, s)$, $G_{22}(\tau, s)$. Ал (0.29) біртекті жүйесіне сәйкес Грин функциясы түрлендіруімізге сәйкес $G(\tau, s) = B\ diag\left[G_{11}(\tau, s), G_{22}(\tau, s)\right] B^{-1}$ түрінде жазылатындықтан $G(\tau, s) = G_1(\tau, s) + G_2(\tau, s)$ болады, мұндағы $G_1(\tau, s)$ – θ^0-периодты шенелген матрицалық функция, ал $G_2(\tau, s)$ – сындық емес жағдайдағы Грин функциясы.

1.6.1 және 1.6.2-леммаларында D_5 оператордың нөлдерінің көппериодтылығы және (0.29) біртекті жүйесінің көппериодты шешімдерінің болмау шарттары дәлелденеді. $G(\tau, s)$ функциясы (0.29) біртекті жүйенің Грин функциясы екені 1.6.2 леммада келтіріледі. Одан кейін, сызықты біртекті емес

$$D_5 x = Ax + \varepsilon^0 f(\tau, t) \qquad (0.33)$$

жүйесі қарастырылады, мұндағы $f(\tau,t)$ вектор-функциясы

$$f(\tau,t)\in Ab_{\Delta_0}^{\theta,\omega}\left(\Pi_\rho\times\Pi_\rho^m\right) \tag{0.34}$$

шартын қанағаттандырады деп ұйғарылады. (0.33) жүйенің жалғыз (θ,ω)-периодты нақты аналитикалық шешімі

$$x^0(\tau,t)=\varepsilon^0\int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)}G_1(\tau,s)f(s,h(s,\tau,t))ds+\varepsilon^0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G_2(\tau,s)f(s,h(s,\tau,t))ds \tag{0.35}$$

өрнегімен берілетіні және оның

$$\left|x^0\right|_{\rho-2\delta}\le\varepsilon^0 a\xi\left|f\right|_\rho=\Delta_0 \tag{0.36}$$

бағалауына бағынатыны дәлелденеді, мұндағы a – оң тұрақты, $\xi=\delta^{-\alpha}$ – кіші бөлгіштердің әсер ету параметрі, $\alpha=1+m+\gamma$, $\delta\in(0,\rho/2)$.

04-теорема. *(0.30), (0.31) және (0.34) шарттары орындалғанда (0.28) уақыт айнымалылар кеңістігінің бас диагоналы бағытында дифференциалдау операторлы (0.33) жүйенің жалғыз* (θ,ω)*-периодты және* $\Pi_{\rho-2\delta}\times\Pi_{\rho-2\delta}^m$ *жолағында нақты аналитикалық* $x^0(\tau,t)$ *шешімі (0.35) түрінде болады, әрі ол (0.36) бағалауына бағынады.*

Диссертациялық жұмыстың **екінші бөлімінде** бірінші бөлімнің 1.4, 1.5 және 1.6 бөлімшелеріндегі дифференциалдау операторлары бойынша квазисызықты жүйелердің көппериодты шешімдерін зерттеу келтіріледі.

2.1 бөлімшедегі 2.1.1-теоремада сындық емес жағдайда, қысушы бейнелеу әдісі арқылы $D_3x=Ax+f(\zeta,x)$ автономды квазисызықты жүйесінің шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары орнатылады, мұндағы D_3 – (0.4) түріндегі дифференциалдау операторы, $f(\zeta,x)$ – вектор-функция, ол центрі $(0,0)$ болатын $B_\delta^{2l+2}\times B_\Delta^n$ ашық шарда

$$f(\zeta,x)\in C_{\zeta,x}^{(\tilde{e},\tilde{\tilde{e}})}\left(B_\delta^{2l+2}\times B_\Delta^n\right),\quad f(\zeta,x)=f(\bar{y})=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left\langle\bar{y},\ \frac{\partial}{\partial\bar{y}}\right\rangle^j f(0,0) \tag{0.37}$$

шартын қанағаттандырады, $\tilde{e}=(1,...,1)$ – $(2l+2)$-вектор, $\tilde{\tilde{e}}=(1,...,1)$ – n-вектор, δ, Δ – оң тұрақтылар. 2.1.1-теоремасының нәтижелері

$$D_3x=P(\zeta)x+f(\zeta,x) \tag{0.38}$$

автономды біртекті жүйесі үшін жалпыланады, мұндағы $P(\zeta)$ – $n\times n$-матрица және (0.15), (0.16) шарттарын қанағаттандырады.

Автономды квазисызықты жүйенің көппериодты шешімдерін зерттеу үшін $(\tau,t)\in R\times R^{l}$ бойынша үзіліссіз және (θ,ω)-периодты, $\zeta\in\overline{B}_{\delta}^{2l+2}$ болғанда $\|x\|=\max\limits_{j}\sup\limits_{R\times R^{l}\times\overline{B}_{\delta}^{2l+2}}\left|x_{j}(\tau,t,\zeta)\right|\le\tilde{\gamma}$ нормасы бойынша шенелген $x(\tau,t,\zeta)$ вектор-функциялардың $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігінде

$$\left(\tilde{F}x\right)(\tau,t,\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{\tau}X(s,\tau,t,\zeta)f\left(\mu(s-\tau,es-t,\zeta),x(s,es,\ \mu(s-\tau,es-t,\zeta))\right)ds$$

сызықты емес операторын қарастырады, мұндағы $\theta=\omega_{0}(\varepsilon_{0})$, $\omega=(\omega_{1}(\varepsilon_{1}),...,\omega_{l}(\varepsilon_{l}))$, $\varepsilon_{j}\in\mathrm{O}_{\delta}(0), j=\overline{0,l},$ ε_{j}– еркін тұрақтылар, $\varepsilon_{j}\in\mathrm{O}_{\delta}(0), j=\overline{0,l}$; $\overline{B}_{\delta}^{2l+2}$ – B_{δ}^{2l+2} шарының тұйықталуы, $\tilde{\gamma}$ – оң тұрақтылар.

Зерттеу барысында $\tilde{\alpha},\kappa,c,d$ және $\tilde{\gamma}$ оң тұрақтылары үшін

$$(\kappa-\tilde{\alpha}c)\tilde{\gamma}>\tilde{\alpha}d \tag{0.39}$$

шарты орындалғанда $\tilde{F}$ операторы $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігін өзіне бейнелейтін қысушы оператор болатыны анықталып келесі лемма дәлелденеді.

01-лемма. *(0.5), (0.6), (0.8), (0.15), (0.16), (0.37) және (0.39) шарттары орындалсын, онда* $\delta>0$ *жеткілікті аз болғанда* $\tilde{F}$ *операторының* $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ *кеңістігінде жалғыз ғана қозғалмайтын нүктесі бар.*

(0.38) жүйесінің жалғыз ғана (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі болатыны, әрі оның $x(\tau,t,\zeta)=\left(\tilde{F}x\right)(\tau,t,\zeta)$ интегралдық теңдеуін қанағаттандыратыны зерттеліп келесі нәтиже алынады.

05-теорема. *01-лемма шарттары орындалғанда (0.38) жүйесінің* $\delta>0$ *жеткілікті аз болғанда* (τ,t) *бойынша жалғыз* (θ,ω)*-периодты шешімі бар.*

2.2 бөлімшеде (0.17) дифференциалдау операторлы

$$D_{4}x=Ax+f(\tau,t,\zeta,x) \tag{0.40}$$

квазисызықты жүйесі қарастырылады, мұндағы сызықты емес $f(\tau,t,\zeta,x)$ вектор-функциясы

$$f(\tau+\theta,t+q\omega,\zeta,x)=f(\tau,t,\zeta,x)\in C_{\tau,t,\zeta,x}^{(0,2e,2\tilde{e},2\hat{e})}\left(R\times R^{m}\times\overline{B}_{\delta}^{2l}\times\overline{B}_{\Delta}^{n}\right), \tag{0.41}$$

шартын қанағаттандырады, мұндағы $e,\tilde{e},\hat{e}$ векторлары сәйкесінше $m,2l,n$ өлшемді бірлік компонентті векторлар.

Мұнда 1.5 бөлімшедегі 1.5.5-теоремада келтірілген нәтижелер үзіліссіз дифференциалданатын функциялар кеңістігіндегі қозғалмайтын нүкте принциптін қолдана отырып (0.40) квазисызықты жүйе үшін жалпыланады.

(0.40) жүйесінің сызықты бөлігін анықтайтын параметрлерге қатысты 1.5-бөлімшеде жасалған ұйғарымдар орындалады. Зерттеу қысушы бейнелеу әдісі арқылы жүргізіледі. (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты, $(\tau,t,\zeta)\in R\times R^m\times B_\delta^{2l}$ бойынша үзіліссіз дифференциалданатын және дербес туындыларымен бірге $R\times R^m\times\overline{B}_\delta^{2l}$ тұйықталуында үзіліссіз, $\bar{\gamma}>0$ тұрақты санымен $\|x\|<\bar{\gamma}$ нормасы бойынша шенелген вектор-функциялардың $S_{\delta,\bar{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігінде

$$(Tx)(\tau,t,\zeta)=\int_{\tau}^{\tau+\theta}K(\tau,s)f_\theta(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta),x(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)))ds, \quad (0.42)$$

интегралдық операторы қарастырылады, мұнда $x(\tau,t,\zeta)$ n-вектор-функциясының нормасы $\|x\|=\|x\|_\circ+\sum_{j=0}^{m}\left\|\frac{\partial x}{\partial t_j}\right\|_\circ+\sum_{k=1}^{l}\left(\left\|\frac{\partial x}{\partial\xi_k}\right\|_\circ+\left\|\frac{\partial x}{\partial\eta_k}\right\|_\circ\right)$ арқылы анықталған, $(\tau,t,\zeta)\in R\times R^m\times\overline{B}_\delta^{2l}$ үшін $\|x\|_\circ=\sup|x(\tau,t,\zeta)|$, $|\cdot|-$ R^n кеңістігіндегі евклид нормасы, $K(\tau,s)=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(s)$. Сонда

$$c_*(\chi+c\bar{\gamma})\le\bar{\gamma},\ c_0(\chi+c\bar{\gamma})<1 \quad (0.43)$$

шарты орындалғанда (0.42) операторының $S_{\delta,\bar{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігін өзіне бейнелейтіні және қысушы оператор болатыны анықталады. Алынған шарттар көппериодты шешімнің табылатынын қамтамасыз етеді және олар 2.2.1-теоремасында баяндалады. Осы бөлімшеде алынған нәтижелер келесі теоремада келтіріледі.

06-теорема. *1) D_4 операторы (0.5), (0.18), (0.19) шарттарына, 2) A матрицасы (0.21) теңсіздігіне, 3) f вектор-функциясы (0.41) қасиетіне бағынса және 4) T интегралдық операторы (0.43) шарттарды қанағаттадырса, онда (0.40) квазисызықты жүйесінің жалғыз ғана (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі болады.*

2.3 бөлімшеде (0.28) дифференциалдау операторлы

$$D_5x=Ax+\varepsilon^0f(\tau,t)+\varepsilon\varphi(x) \quad (0.44)$$

жүйесінің көппериодты шешімдерін зерттеуге арналған әдіс ұсынылады, мұнда $\varphi=\varphi(x)$ сызықты емес вектор-функция, әрі x белгісізіне қатысты l дәрежелі тұрақты коэффициентті форма

$$\varphi(\eta\,x)=\eta^l\varphi(x), \quad (0.45)$$

η – скаляр шама, $l > 1$ – бүтін сан; $\varepsilon > 0$ – (0.44) жүйесіндегі еріксіз және сызықты емес қозғалыстарды байланыстыратын параметр.

Бұл бөлімшедегі зерттеу 1.6 бөлімшесінің жалғасы. Сондықтан мұндағы барлық белгілеулер мен олардың мағыналары сол күйінде сақталады.

(0.44) жүйесінің $Ab^{\theta,\omega}_{\rho_*,\Delta} = Ab^{\theta,\omega}_{\Delta}\left(\Pi_{\rho_*} \times \Pi^{m}_{\rho_*}\right), 0 < \rho_* \le \rho$ кеңістігінде жататын x^* жалғыз шешімінің табылатындығын анықтау үшін $x(\tau,t) \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ болғандағы

$$\begin{gathered} x(\tau,t) = x^0(\tau,t) + \varepsilon \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds + \\ + \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds \end{gathered} \tag{0.46}$$

операторлық теңдеуі қарастырылады, мұндағы $x^0(\tau,t)$ – (0.33) сызықты жүйесінің (0.35) арқылы анықталған шешімі.

02-лемма. *(0.30), (0.31), (0.34) және (0.45) шарттары орындалғанда $x^* \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ жалғыз шешімінің бар болуы туралы негізгі есептің шешілімділігі (0.46) операторлық теңдеуінің осы $Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ кеңістігінде бірмәнді шешілімділіне эквивалентті болады.*

(0.44) жүйесінің $\varepsilon^0 > 0$, $\varepsilon > 0$ параметрлері көбейткіш $\mu_0 > 0$, $\mu > 0$ параметрлері арқылы

$$\varepsilon^0 = \mu^0 e^{-S_0},\ \varepsilon = \mu e^{-1S} \tag{0.47}$$

экспоненциалды-гиперболалық өзгеру шартын қанағаттандырады, мұнда S_0 мәні $e^{-S_0} < \left(\dfrac{\rho_0}{4+\rho_0}\right)^{\alpha}$ теңсіздігін қанағаттандыратындай етіп алынған, $\rho_0 - \mathit{\Pi}_\rho \times \mathit{\Pi}^m_\rho$ жолақтың бастапқы ені. Жуықтаулар тізбегі жинақты болу үшін кіші параметр $\mu > 0$ – мейлінше кішкене мәндер қабылдайды деп есептеліп, анықталғандық үшін ол келесі шартты қанағаттандырсын деп алынады:

$$\mu q a < 1, \tag{0.48}$$

мұндағы $q > 0$ – $\varphi(x)$ функциясының Липшиц тұрақтысы, $a > 0$ – тұрақты сан. (0.45) және (0.47) шарттары негізінде (0.46) теңдеуі $x = x^{(0)} + \mu Q(\eta x)$ операторлық теңдеуі арқылы жазылады, мұндағы

$$Qx(\tau,t) = \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds\,.$$

Зерттеу классикалық біртіндеп жуықтау әдісі үлгісімен жүргізіледі. $x^{(0)}$ шамасын нөлдік жуықтау ретінде алып, j-ші жуықтау $x^{(j)} = x^{(0)} + \mu Q\big(\eta\, x^{(j-1)}\big),\ j = 1,2,...$ түрінде алынады, мұндағы η параметрі кіші бөлгіштердің әсерін басушы және оның мәндері $\eta = e^{-S}$ өзгеру заңдылығына сәйкес таңдап алынады.

Әрбір $x^{(j)}$ жуықтау $\left|x^{(j)} - x^0\right|_{\rho_*} \le r$ шартын, демек, $\left|x^{(j)}\right| \le \Delta_0 + r = \Delta$ шенелгендік шартына бағынатыны, ал жинақтылық жылдамдығы $\left|x^{(j+1)} - x^{(j)}\right|_{\rho_*} \le \mu q a \left|x^{(j)} - x^{(j-1)}\right|_{\rho_*}$ теңсіздігімен анықталатындығы көрсетіледі, мұндағы $\rho_* = \rho_0 - 2\sum\limits_{j=0}^{-\infty} \delta_j \ge \dfrac{\rho_*}{2}$. Осы жағдайда жуықтаулар тізбегі шегі бар және $j \to +\infty$ кезде $x^{(j)} \to x^*$ болатыны анықталады. Нормасы бойынша жинақтылық оның бірқалыптылығын анықтайтындықтан x^* нақты аналитикалық функция болатыны алынады. Сонымен алынған нәтижелер келесі теорема түрінде келтіріледі.

07-теорема. *Егер (0.30), (0.31), (0.34), (0.45) шарттары орындалып, ал* $\varepsilon > 0$ *параметрі (0.47) заңдылығына сәйкес, (0.48) қасиетімен анықталған* $\mu > 0$ *коэффициентімен өзгерсе, онда (0.44) жүйесінің жалғыз ғана нақты аналитикалық* (θ,ω)*-периодты шешімі бар және оны біртіндеп жуықтау әдісімен анықтауға болады.*

Осы бөлімшенің негізгі міндеті – (0.44) жүйесінің көппериодты шешімнің табылуы туралы мәселені КАМ теориясы әдісінің элементтерін біртіндеп жуықтау әдісімен үйлестіріп пайдалану әдісі арқылы зерттеу. КАМ теориясының негізгі әдісі гамильтондық жүйелерді канондық түрлендірулер негізінде зерттеу үшін жасалғандығы және оның гамильтондық емес жүйелерді зерттеу үшін қолданылмайтындығы жалпыға мәлім. Ал жуықтауларда кіші бөлгіштер пайда болғанда біртіндеп жуықтау әдісі қолданылмайды. Демек, гамильтондық емес жүйелерді зерттеу үшін оларды гамильтондық жүйеге келтіру керек, ал бұл әдістің әрқашан орындала бермейтіні белгілі. Сондықтан біртіндіп жуықтау әдісін қолдану мүмкін болатын басқа әдіс іздеу керек болады. Бұл бөлімшеде осы классикалық жуықтау әдісі қолданылатын жаңа тәсіл ұсынылады. Бұл әдіс кіші параметрдің қоздыртқы кезінде экспоненциал-гиперболалық заңдылықпен өзгеруімен негізделеді. Зерттеу әдісі осы бөлімшеде толық сипатталған және 2.3.1-теоремада біртіндеп жуықтау әдісі арқылы тұрғызылған жалғыз көппериодты шешімнің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары көрсетіледі.

1 УАҚЫТ АЙНЫМАЛЫЛАРЫ ДИАГОНАЛЫ ЖӘНЕ ЛЯПУНОВ ВЕКТОРЛЫҚ ӨРІСІ БОЙЫНША ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЛЫ СЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ КӨППЕРИОДТЫ ШЕШІМДЕРІ

1.1 D_1 дифференциалдау операторлы тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықты жүйелердің көппериодты шешімдері

Бөлімшеде сызықты екі теңдеуден тұратын жүйе қарастырылады. $(\tau,\, t)\in R^{1+m}$ уақыт және $\zeta=(\xi,\eta)\in B_\delta^2$ кеңістік айнымалылары бойынша

$$D_1=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle e,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle+\nu\eta\frac{\partial}{\partial\xi}-\nu\xi\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial t_1}+...+\frac{\partial}{\partial t_m}+\nu\eta\frac{\partial}{\partial\xi}-\nu\xi\frac{\partial}{\partial\eta} \qquad (1.1.1)$$

дифференциалдау операторын қарастыралық, мұндағы $e=(1,...,1)$ – m-вектор, $\frac{\partial}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial t_1},...,\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$ – векторлық оператор, ν – оң тұрақты.

(τ,t) уақыт айнымалыларының векторлық өрісі

$$\frac{dt}{d\tau}=e \qquad (1.1.2)$$

теңдеуімен анықталады. (1.1.2) теңдеуінің шешімі

$$t=t^0+e\left(\tau-\tau^0\right) \qquad (1.1.3)$$

болады, мұндағы $\tau^0\in R,\ t^0=(t_1^0,...,t_m^0)\in R^m$. (1.1.3) теңдеуі (τ,t) уақыт айнымалыларының D_1 операторының *сипаттаушы теңдеуі* деп аталады. (1.1.3) теңдеуін t^0 айнымалысына қатысты шешіп,

$$t-e\left(\tau-\tau^0\right)=t^0 \qquad (1.1.4)$$

бірінші интегралын аламыз. Ал

$$h\left(\tau^0,\tau,t\right)=t-e\left(\tau-\tau^0\right) \qquad (1.1.5)$$

функциясы D_1 операторының уақыт айнымалылары бойынша *базалық бірінші интегралы* немесе *базалық сипаттаушы интегралы* деп аталады. Кез келген дифференциалданатын $u(t)\in C_t^{(e)}\left(R^m\right)$ функциясы арқылы анықталған

$$H\left(\tau^0,\tau,t\right)=u\left(h(\tau^0,\tau,t)\right) \qquad (1.1.6)$$

функциясын (1.1.1) операторының (τ,t) уақыт айнымалыларының *жалпы сипаттаушы интегралы* деп атаймыз. (1.1.2) - (1.1.6) қатынастарына сәйкес кеңістік айнымалылары бойынша да (1.1.1) операторының сипаттауышы мен сипаттаушы интегралдары анықталады.

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \nu\eta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\nu\xi \tag{1.1.7}$$

теңдеулері $(\xi,\eta)=\zeta$ кеңістік айнымалысы бойынша D_1 операторының сипаттаушы теңдеулерінің τ параметрлі жүйесі.

Екінші ретті I_2 симплектикалық бірлігі арқылы (1.1.7) жүйесін

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \nu\, I_2\zeta \tag{1.1.8}$$

түріндегі векторлық теңдеумен жазамыз. Сонда оның жалпы шешімі

$$\zeta = U(\tau-\tau^0)\zeta^0 \tag{1.1.9}$$

болады, мұндағы $U(\tau)$ – Коши матрицасы

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\nu\tau & \sin\nu\tau \\ -\sin\nu\tau & \cos\nu\tau \end{pmatrix}, \tag{1.1.10}$$

$\zeta^0 = \left(\xi^0,\eta^0\right)$ – B_δ^2 шарындағы кез келген тұрақты вектор.

(1.1.7) жүйесі немесе (1.1.8) векторлық теңдеуі ζ кеңістік айнымалылары бойынша D_1 дифференциалдау операторының векторлық өрісін анықтайды, ал (1.1.10) матрицалы (1.1.9) теңдеуі ζ -ға қатысты D_1 операторының сипаттаушы теңдеуі болып табылады.

(1.1.9) шешімінен ζ кеңістік айнымалылары бойынша D_1 операторының

$$\mu(\tau^0,\tau,\zeta) \equiv U(\tau^0,\tau)\zeta = \zeta^0 \tag{1.1.11}$$

базалық сипаттаушы интегралының теңдеуін анықтаймыз, мұндағы $U(\tau^0,\tau) = U^{-1}(\tau,\tau^0)$.

Кез келген дифференциалданатын $v(\zeta)$ функциясы арқылы $\zeta=(\xi,\eta)$ кеңістік вектор-айнымалысына сәйкес D_1 операторының

$$\Phi(\tau^0,\tau,\zeta) = v\left(U(\tau^0,\tau)\zeta\right) \equiv v\left(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\right) \tag{1.1.12}$$

жалпы сипаттаушы интегралын табамыз.

Енді (1.1.1) қатынасымен анықталатын D_1 дифференциалдау операторлы

$$D_1 x(\tau, t, \zeta) = 0 \qquad (1.1.13)$$

теңдеуін, яғни

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \ldots + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_m} + \nu\eta \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi} - \nu\xi \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta} = 0, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_m} + \nu\eta \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi} - \nu\xi \dfrac{\partial x_2}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

жүйесін қарастыралық. Сонда

$$D_1 h(\tau^0, \tau, t) = 0, \;\; D_1 \mu(\tau^0, \tau, \zeta) = 0 \qquad (1.1.14)$$

теңдіктерінің орындалатынын көреміз, мұндағы $h(\tau^0, \tau, t)$ және $\mu(\tau^0, \tau, \zeta)$ – (1.1.5) және (1.1.11) түрлеріндегі D_1 операторының сипаттаушы интегралдары.

Шынында да, (1.1.5), (1.1.11) арқылы анықталған $h(\tau^0, \tau, t)$ және $\mu(\tau^0, \tau, \zeta)$ сипаттаушы интегралдарына D_1 операторын қолдансақ, (1.1.14) теңдіктерін аламыз, яғни

$$D_1 h = \frac{\partial h}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle + \nu\eta \frac{\partial h}{\partial \xi} - \nu\xi \frac{\partial h}{\partial \eta} = -e + e + 0 - 0 = 0;$$

$$D_1 \mu = \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial \mu}{\partial t} \right\rangle + \nu\eta \frac{\partial \mu}{\partial \xi} - \nu\xi \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} -\nu\xi \sin\nu(\tau - \tau^0) - \nu\eta \cos\nu(\tau - \tau^0) \\ \nu\xi \cos\nu(\tau - \tau^0) - \nu\eta \sin\nu(\tau - \tau^0) \end{pmatrix} +$$

$$+ \nu\eta \begin{pmatrix} \cos\nu(\tau - \tau^0) \\ \sin\nu(\tau - \tau^0) \end{pmatrix} - \nu\xi \begin{pmatrix} -\sin\nu(\tau - \tau^0) \\ \cos\nu(\tau - \tau^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1.1.6), (1.1.12) қатыстарындағы кез келген $u(t)$, $v(\zeta)$ тегіс функциялары

$$D_1 H(\tau^0, \tau, t) = 0, \;\; D_1 \Phi(\tau^0, \tau, \zeta) = 0 \qquad (1.1.15)$$

теңдіктерін қанағаттандыратындығына (1.1.14) арқылы көз жеткізу қиын емес.

Шынында да, (1.1.14) арқылы келесі теңдіктер тізбегін аламыз:

$$D_1 H(\tau^0,\tau,t) = D_1 u\big(h(\tau^0,\tau,t)\big) = \frac{\partial u\big(h(\tau^0,\tau,t)\big)}{\partial\tau} D_1 h(\tau^0,\tau,t) = 0,$$

$$D_1 \Phi(\tau^0,\tau,\zeta) = D_1 v\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big) = \frac{\partial v\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big)}{\partial\mu} D_1 \mu(\tau^0,\tau,\zeta) = 0.$$

$V(t,\zeta)$ дифференциалданатын функция болса, онда (1.1.14) теңдігінен

$$\Phi(\tau^0,\tau,t,\zeta) = V\big(h(\tau^0,\tau,t), \mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big) \qquad (1.1.16)$$

функциясы үшін де

$$D_1\Phi(\tau^0,\tau,t,\zeta) = 0 \qquad (1.1.17)$$

теңдігі орындалатынын көреміз, себебі $D_1\Phi = \frac{\partial V}{\partial h} D_1 h + \frac{\partial V}{\partial \mu} D_1 \mu = 0.$

Сонымен, (1.1.13) теңдеуін қанағаттандыратын $x = x(\tau,t,\zeta)$ функциялары бар және олар шексіз көп екенін (1.1.14) - (1.1.17) қатыстарынан көреміз. (1.1.13) теңдеуінің шешімдерін D_1 *операторының нөлдері* деп атаймыз.

(1.1.13) теңдеудің

$$x\big|_{\tau=\tau^0} = x_0(t,\zeta) \in C_{t,\zeta}^{(e,\tilde{e})}\big(R^m \times B_\delta^2\big) \qquad (1.1.18)$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімін табу есебін, яғни (1.1.13)-(1.1.18) есебін қарастыралық, мұндағы $\tilde{e} = (1,1)$ – вектор. Оның

$$x(\tau^0,\tau,t,\zeta) = x_0\big(h(\tau^0,\tau,t), \mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big) \qquad (1.1.19)$$

жалғыз шешімі бар екені [47, 25-26 б.] жұмысынан белгілі.

Зерттеудің негізгі есебі қарастырылып отырған теңдеулердің уақыт айнымалыларының көппериодты шешімдерін анықтаумен байланысты. Осыған орай, бейөлшемдес рационал оң сандар тізбегін қарастырамыз:

$$\omega_0 = \theta, \omega_1, \ldots, \omega_m, \ \frac{\omega_i}{\omega_j} \neq r \in Q, \ i \neq j. \qquad (1.1.20)$$

Теңдеулердің көппериодты шешімдері туралы есептерде кейде периодтар алдын ала беріледі, ал кейде берілмейді. (1.1.13) теңдеуінің (1.1.18) шартын қанағаттандыратын $x(\tau,t,\zeta)$ шешімі t-ға қатысты периодты болуы үшін кез келген кейбір $(\hat{\omega}_1,\ldots,\hat{\omega}_m) = \hat{\omega} \in \hat{\Omega}$ периодтар үшін бастапқы функцияның

$$x_0(t+\widehat{\omega},\zeta) = x_0(t,\zeta) \in C^{(e,\tilde{e})}_{t,\zeta}\left(R^m \times B^2_\delta\right) \tag{1.1.21}$$

қасиетін қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті, мұндағы $\widehat{\Omega}$ – $x_0(t,\zeta)$ функциясының периодтарының жиыны.

Шынында да, егер (1.1.19) шешімі t-ға қатысты $\widehat{\omega}$-периодты болса, онда (1.1.5) сипаттаушы интегралының

$$h\left(\tau^0,\tau,t+\widehat{\omega}\right) = t+\widehat{\omega}-e\left(\tau-\tau^0\right) = t-e\left(\tau-\tau^0\right)+\widehat{\omega} = h\left(\tau^0,\tau,t\right)+\widehat{\omega}$$

қасиетінен келесі теңдіктер тізбесін аламыз:

$$x(\tau^0,\tau,t+\widehat{\omega},\zeta) = x_0\left(h(\tau^0,\tau,t)+\widehat{\omega},\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\right) = x(\tau^0,\tau,t,\zeta).$$

Сонда (1.1.19) шешімдер ескерсек, соңғы теңдіктен (1.1.21) қасиетін аламыз. Егер (1.1.21) қасиетін сипаттауыш арқылы жазсақ, онда (1.1.19) шешімдерінен және жоғарыда келтірілген $h\left(\tau^0,\tau,t\right)$ сипаттауышының қасиеттерінен шешімнің t айнамалысына қатысты $\widehat{\omega}$-периодты болатынын көреміз. Егер шешімнің ω периоды алдын ала көрсетілсе, онда $\widehat{\omega}=\omega$ теңдігінің орындалуы тиіс.

Шешімнің τ бойынша периодтылығын зерттеу біршама қиындау. Себебі τ айнымалысы уақыт және кеңістік айнымалылары бойынша сипаттаушы интегралдарды анықтауға қатысады, әрі бұл олардың жиіліктерінің (периодтарының) өлшемдестігімен байланысты. Осылайша, x шешімінің τ бойынша периодтылығы $x_0(t,\zeta)$ бастапқы функциясынан және $h(\tau^0,\tau,t)$, $\mu(\tau^0,\tau,\zeta)$ сипаттаушы интегралдарынан тәуелді. Осыған байланысты, әртүрлі 1) - 4) жағдайларын қарастырамыз.

1) $x_0 = const$. Демек, $x = x_0$ шешімі τ бойынша периодты және периоды кез келген $p \in R$.

2) $x_0 = x_0(\zeta)$ бастапқы функциясы тек ζ кеңістік айнымалысынан айқын тәуелді. Онда $x = x_0(\mu(\tau^0,\tau,\zeta))$ шешімі τ бойынша $p = 2\pi\nu^{-1} = \theta_1$-периодты.

3) $x_0 = x_0(t)$ бастапқы функциясының периоды $\widehat{\omega} = (\widehat{\omega}_1,...,\widehat{\omega}_m)$ болсын. Бұл жағдайда $x = x_0(h(\tau^0,\tau,t)) \equiv x_0(t-e\tau+e\tau^0)$ шешімі τ бойынша $\left(\widehat{\omega}_1^{-1},...,\widehat{\omega}_m^{-1}\right)$ жиіліктері базасында квазипериодты.

4) $x_0 = x_0(t,\zeta) = x_0(t+\widehat{\omega},\zeta)$ – t және ζ айнымалыларынан айқын тәуелді. Онда (1.1.12) теңдеуінің $x = x_0\left(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\right)$ шешімі τ бойынша $\left(\theta_1^{-1},\widehat{\omega}_1^{-1},...,\widehat{\omega}_m^{-1}\right)$ жиіліктері базасында квазипериодты, ал t-ға қатысты $\widehat{\omega}$-периодты.

Шынында да, 1) жағдайда $x(\tau^0,\tau,t,\zeta) = x_0 = const$ шешімін аламыз, ол τ бойынша периодты және периоды кез келген $p \in R$. (1.1.10) матрицасынан

$\mu(\tau^0,\tau,\zeta)$ сипаттауышы τ-ға қатысты $p = 2\pi\nu^{-1} = \theta_1$-периодты. Онда 2) жағдайда $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}_1 = ... = \widehat{\omega}_m = \theta_1$ болғанда $x = x_0\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big)$ шешімдерінің τ бойынша θ_1-периодтылығын аламыз. 3) және 4) жағдайларында $x(\tau^0,\tau,t)$ шешімінің τ бойынша периодтылығын (1.1.20) сандарының өлшемдестігін ұйғару арқылы қамтамасыз етеміз. Ал период (1.1.20) сандарының ең кіші ортақ еселігі $\widehat{\omega}^0$ болады. Бұл жағдайда (1.1.21) қасиетіне сәйкес $x_0(t,\zeta)$ функциясының $t = (t_1,...,t_m)$ векторының барлық компоненттері бойынша периодтары бірдей, ал (1.1.19) шешімі барлық $t_j,\ j = \overline{1,m}$ айнымалылары бойынша $\widehat{\omega}^0$-периодты.

Осылайша, жүргізген зерттеуді келесі теоремамен тұжырымдаймыз.

1.1.1-теорема. *(1.1.18) бастапқы шартын қанағаттандыратын (1.1.13) теңдеуімен анықталатын (1.1.1) операторының нөлдері*

1) t бойынша периодты және периоды $\widehat{\omega} = (\widehat{\omega}_1,...,\widehat{\omega}_m)$ болуы үшін (1.1.20) және (1.1.21) шарттары орындалуы қажетті және жеткілікті;

2) τ бойынша периодты және кез келген периоды $\widehat{\theta}$ болуы үшін $x_0 = const$ болуы қажетті және жеткілікті;

3) τ бойынша периодты және периоды $\theta_1 = 2\pi\nu^{-1}$ болуы үшін (1.1.21) шарты $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}_1 = ... = \widehat{\omega}_m = \theta_1$ шарты орындалуы қажетті және жеткілікті;

4) τ бойынша квазипериодты болуы үшін кез келген $\widehat{\omega}$ периоды үшін (1.1.20) және (1.1.21) шарттары орындалуы қажетті және жеткілікті.

1.1.1-теоремасы бойынша (1.1.13) - (1.1.18) қатынастары негізінде (1.1.21) шарты (1.1.1) операторының нөлдерінің көппериодтылығының қажетті шарты екенін көреміз. Олай болса, бұдан былай теңдеулердің t-ға қатысты көппериодты шешімдерін қарастырумен шектелеміз.

I. Келесі түрдегі

$$D_1 x = Ax \tag{1.1.22}$$

немесе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + ... + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_m} + \nu\eta\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi} - \nu\xi\dfrac{\partial x_1}{\partial \eta} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + ... + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_m} + \nu\eta\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi} - \nu\xi\dfrac{\partial x_2}{\partial \eta} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

біртекті жүйені қарастыралық, мұндағы $A = [a_{ij}]_1^2$ – $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ шартын қанағаттандыратын тұрақты матрица, $x = (x_1, x_2)$ –ізделінді вектор-функция.

Бұл жағдайда A матрицасының нөлдік емес меншікті мәндері бар және T ерекше емес матрицасымен $T^{-1}AT = J$ канондық түріне келтіріледі. $\operatorname{Re} A(\lambda) \neq 0$

жағдайында (1.1.22) жүйесі *сындық емес* деп, ал керісінше жағдайда *сындық* деп аталады.

(1.1.22) теңдеуінің $X(\tau)$ матрицанты

$$X(\tau) = \exp\left[A\tau\right] \tag{1.1.23}$$

түрінде анықталады. $\operatorname{Re}\lambda_1 \le \operatorname{Re}\lambda_2 < 0$ болғанда (1.1.23) матрицанты

$$\left|X(\tau - \tau^0)\right| \le \Omega e^{-\kappa(\tau-\tau^0)},\ \tau \ge \tau^0 \tag{1.1.24}$$

шартына қанағаттандыратыны [47, 59-69 б.] жұмысынан белгілі, мұндағы $\Omega \ge 1,\ \kappa > 0$ – тұрақтылар, $|\cdot|$ –матрицалардың белгілі (кубтық, октаэдрлік, евклидтік) нормаларының бірі.

$\operatorname{Re}\lambda_1 \ge \operatorname{Re}\lambda_2 > 0$ үшін келесі бағалау

$$\left|X(\tau - \tau^0)\right| \le \Omega e^{\kappa(\tau-\tau^0)},\ \tau \le \tau^0 \tag{1.1.25}$$

орынды. Ал $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ болғанда (1.1.22) жүйенің дихотомиялық жағдайына келеміз және матрицант (1.1.24), (1.1.25) бағалауларын қанағаттандыратын екі матрицалық шешімдердің қосындысына жіктеледі:

$$\begin{gathered} X(\tau) = X_-(\tau) + X_+(\tau), \qquad D_1 X_\mp = AX_\mp, \\ \left|X_-\left(\tau - \tau^0\right)\right| \le \Omega e^{-\kappa(\tau-\tau^0)},\ \tau > \tau^0,\quad \left|X_+\left(\tau - \tau^0\right)\right| \le \Omega\, e^{\kappa(\tau-\tau^0)},\ \tau < \tau^0. \end{gathered} \tag{1.1.26}$$

Осылайша, (1.1.22) жүйенің сындық емес жағдайында (1.1.23) матрицанты (1.1.24) - (1.1.26) қатыстарының біреуін қанағаттандырады.

Сындық жағдайда (1.1.23) матрицанты

$$X(\tau) = T^{-1}\begin{pmatrix} \cos\beta\tau & \sin\beta\tau \\ -\sin\beta\tau & \cos\beta\tau \end{pmatrix} T \tag{1.1.27}$$

түрінде болады. (1.1.22) теңдеуінің

$$\begin{gathered} x(\tau^0, \tau, t, \zeta)\Big|_{\tau=\tau^0} = u(t,\zeta) \in C_{t,\zeta}^{(e,\tilde{e})}\left(R^m \times B_\delta^2\right), \\ u(t+\omega,\zeta) = u(t,\zeta) \end{gathered} \tag{1.1.28}$$

бастапқы шартты есебі шешімі келесі түрде бірмәнді анықталады:

$$x(\tau^0, \tau, t, \zeta) = X(\tau - \tau^0)\, u\left(h(\tau^0, \tau, t), \mu(\tau^0, \tau, \zeta)\right), \tag{1.1.29}$$

мұндағы $X = X(\tau)$ – (1.1.23) қатысымен, дербес жағдайда (1.1.27) формуласымен анықталатын матрицант; $h = h(\tau^0, \tau, t)$, $\mu = \mu(\tau^0, \tau, \zeta)$ – сәйкесінше (1.1.5), (1.1.12) түрлеріндегі сипаттаушы интегралдар.

Енді (1.1.22) векторлық теңдеуінің нөлден өзге көппериодты шешімдерінің табылатындығы туралы мәселені зерттейміз.

(1.1.22) теңдеудің (τ, t) бойынша (θ, ω)-периодты $x = x(\tau, t, \zeta)$ шешімі (1.1.28) шартын қанағаттандыратыны айқын. Демек, 1.1.1-теоремасына сәйкес бұл шешім t бойынша $\widehat{\omega}$-периодты. Олардың ішінен τ бойынша периодты болатын шешімдерді бөліп алу керек.

(1.1.29) шешімнің құрылымынан оның τ-ға қатысты периодтылығы X матрицалық функциясынан, $u(t, \zeta)$ бастапқы вектор-функциясынан, h және φ сипаттаушы бірінші интегралдарынан тәуелді екенін көреміз. X, h және φ функциялары (1.1.22) жүйесінен анықталады. Сонда тек $u = u(t, \zeta)$ бастапқы вектор-функциясын таңдап алу керек болғандықтан 4 жағдайды қарастырамыз.

1°. Егер $u = u_0$ тұрақты деп таңдасақ, онда (1.1.29) формуласына сәйкес x шешімі

$$x(\tau) = X(\tau) u_0 \tag{1.1.30}$$

түрінде анықталады, ал сындық жағдайда, яғни $X(\tau)$ матрицанты (1.1.27) формуласымен анықталып, периоды $\theta_2 = 2\pi\beta^{-1}$ болса ғана периодты болады.

(1.1.24) - (1.1.26) қатыстарына сәйкес, сындық емес жағдайда (1.1.30) шешімі периодты болмайды.

2°. Егер $u = u(\zeta)$ бастапқы функциясы тек $(\xi, \eta) = \zeta$ кеңістік айнымалыларынан тәуелді болса, онда x ізделінді шешімі келесі

$$x(\tau^0, \tau, \zeta) = X(\tau - \tau^0) u\left(\mu(\tau^0, \tau, \zeta)\right) \tag{1.1.31}$$

түрде болады, мұндағы $\mu(\tau^0, \tau, \zeta)$ – $\theta_1 = 2\pi\nu^{-1}$-периодты вектор-функция. Демек, (1.1.31) шешімі квазипериодты. Дербес жағдайда, ν және β жиіліктері рационал өлшемдес, яғни $k\nu = l\beta$ болғанда, шешім периодты және периоды $\widetilde{\theta} = 2\pi\, l\nu^{-1} = 2\pi\, k\beta^{-1} = l\theta_1 = k\theta_2$ арқылы анықталады.

3°. Егер бастапқы u функциясы тек $(t_1, ..., t_m) = t$ уақыт айнымалыларынан тәуелді болса, онда (1.1.29) өрнегіне сәйкес келесі x шешімін аламыз:

$$x(\tau^0, \tau, t) = X(\tau - \tau^0) u\left(h(\tau^0, \tau, t)\right). \tag{1.1.32}$$

(1.1.28) бастапқы шартынан (1.1.32) шешім t-ға қатысты ω-периодты, демек, $\widetilde{\nu}_2 = \theta_2^{-1}$, $\nu_j = \omega_j^{-1}$, $j = \overline{1, m}$ жиіліктерімен τ бойынша квазипериодты, мұндағы θ_2 – (1.1.27) қатысымен анықталған $X(\tau)$ матрицантының периоды.

4°. Бастапқы u функциясы t және ζ айнымалыларынан тәуелді болғанда x шешімі (1.1.29) түрінде болады және оның көппериодылығы 2° және 3° жағдайларымен сипатталады. Нақтырақ айтсақ, (1.1.29) шешімі t-ға қатысты ω-периодты және $\tilde{\nu}_2 = \theta_2^{-1}, \nu_j = \omega_j^{-1},\ j = \overline{1,m}$ жиіліктерімен τ бойынша квазипериодты.

Сонымен, 1°-4° пунктерінде келтірілген (1.1.22)-(1.1.28) есебі шешімінің көппериодтылығын талдау негізінде келесі теореманы тұжырымдаймыз.

1.1.2-теорема. *(1.1.28) шартымен берілген (1.1.22) біртекті сызықты жүйенің бастапқы есебі бірмәнді шешілімді, ал оның шешімі t-ға қатысты ω-периодты және сындық жағдайда τ бойынша $\tilde{\nu}_2 = \dfrac{\beta}{2\pi}, \tilde{\nu}_1 = \dfrac{\nu}{2\pi},\ \nu_j = \omega_j^{-1},\ j = \overline{1,m}$ жиілікті квазипериодты болады, мұндағы $\beta = \operatorname{Im}\lambda(A)$ $-A$ матрицасының меншікті мәндерінің жорымал бөлігі, $\nu = \operatorname{Im}\lambda(A_0)$ – D_1 операторының кеңістік айнымалылары бойынша сипаттауыш жүйесінің $A_0 = \nu I_2$ матрицасының меншікті мәндерінің жорымал бөлігі, ω_j – $u(t,\zeta)$ бастапқы функциясының $t_j, j = \overline{1,m}$ айнымалыларына қатысты периоды.*

Сындық емес жағдайда (1.1.22) жүйесінің (1.1.28) шартын қанағаттандыратын тривиалды шешімінен басқа (τ,t) бойынша көппериодты шешімдері жоқ екенін байқаймыз.

Шынында да, егер (1.1.22) жүйесінің (θ,ω)-периодты $x(\tau,t,\zeta)$ шешімі бар болса, онда бекітілген ζ мәнінде ол шенелген болады. Бекітілген ζ мәнінде $\mu(\tau^0,\tau,\zeta)$ және $u(t,\zeta)$ функцияларының (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодтылығынан олардың шенелгендігі шығады. Сонда (1.1.29) өрнегінен (1.1.23) матрицантының шенелмегендігіне қатысты (1.1.24) - (1.1.26) шарттарынан ($u = 0$ жағдайынан басқа), бекітілген ζ мәнінде $x(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ шешімінің шенелмегендігін аламыз. Осылайша, төмендегі теорема дәлелденді.

1.1.3-теорема. *Сындық емес жағдайда (1.1.22) жүйесінің (1.1.28) бастапқы функциялы (1.1.29) өрнегімен анықталатын тек қана тривиалды (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі бар.*

Осындай мазмұнды теореманы $X(\tau)$ матрицанты (1.1.27) формуласымен берілген жағдайда алуға болады. Бірақ, ол үшін жүйенің $\tilde{\nu}_1 = \dfrac{\nu}{2\pi}$ және $\tilde{\nu}_2 = \dfrac{\beta}{2\pi}$ жиіліктері $\nu_0 = \theta^{-1}, \nu_1 = \omega_1^{-1}, \dots, \nu_m = \omega_m^{-1}$ жиіліктерімен рационалды бейөлшемдес болуын қосымша талап ету керек, яғни

$$k_1\tilde{\nu}_1 \neq l_j\nu_j,\ k_2\tilde{\nu}_2 \neq l_j\nu_j;\ k_1,k_2,l_j \in Z,\ j = \overline{0,m}. \tag{1.1.33}$$

(1.1.33) шарты орындалғанда (1.1.29) түрдегі шешім t-ға қатысты ω-периодты, ал τ бойынша

$$\tilde{\nu}_2, \tilde{\nu}_1, \nu_1, ..., \nu_m \qquad (1.1.34)$$

жиіліктерімен квазипериодты. $\nu_0 = \theta^{-1}$ жиілігі (1.1.33) шарты негізінде (1.1.34) жиіліктерімен рационалды бейөлшемдес екенін байқаймыз. Сондықтан (1.1.29) шешімі τ бойынша $\theta = \omega_0$-периодты бола алмайды.

Осылайша, келесі теореманы тұжырымдауға болады.

1.1.4-теорема. *Сындық жағдайда (1.1.33) шарты орындалғанда (1.1.22) жүйесінің нөлден өзге (1.1.29) арқылы өрнектелетін* (τ, t) *бойынша* (θ, ω)*-периодты шешімі болмайды.*

1.1.3 және 1.1.4-теоремалары біртекті емес сызықты жүйелердің (θ, ω)-периодты шешімдерінің жалғыздығын анықтауда маңызды рөл атқарады.

II. Енді (1.1.22) жүйеге сәйкес екінші ретті біртекті емес сызықты жүйені қарастыралық:

$$D_1 x = Ax + f(\tau, t, \zeta) \qquad (1.1.35)$$

немесе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + ... + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_m} + \nu\eta \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi} - \nu\xi \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(\tau, t_1, ..., t_m, \xi, \eta), \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + ... + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_m} + \nu\eta \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi} - \nu\xi \dfrac{\partial x_2}{\partial \eta} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(\tau, t_1, ..., t_m, \xi, \eta), \end{cases}$$

мұндағы $f(\tau, t, \zeta) = (f_1(\tau, t, \zeta), f_2(\tau, t, \zeta))$ – вектор-функция. Қалған белгілеулер бұрынғы мағынаны білдіреді.

$f(\tau, t, \zeta)$ вектор-функциясы үшін келесі

$$f(\tau + \theta, t + \omega, \zeta) = f(\tau, t, \zeta) \in C_{\tau, t, \zeta}^{(0, e, \tilde{e})}\left(R \times R^m \times B_\delta^2\right) \qquad (1.1.36)$$

шарты орындалады деп ұйғарамыз, мұндағы $\theta = \omega_0$ және $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ периодтары (1.1.20) қасиетті қанағаттандырады.

(1.1.36) бос мүшелі (1.1.35) жүйенің (1.1.28) бастапқы шартын қанағаттандыратын x жалғыз шешімін $X(\tau)$ матрицанты, f мәжбүрлеуші күші, u бастапқы функциясы, h және μ сипаттаушы интегралдары арқылы

$$\begin{aligned} x\left(\tau^0, \tau, t, \zeta\right) = {} & X\left(\tau - \tau^0\right) u\left(h(\tau^0, \tau, t),\ \mu(\tau^0, \tau, \zeta)\right) + \\ & + \int_{\tau^0}^{\tau} X(\tau - s)\, f\left(s,\ h(s, \tau, t),\ \mu(s, \tau, \zeta)\right) ds \end{aligned} \qquad (1.1.37)$$

түрінде жазамыз. Енді (1.1.35) жүйенің көппериодты шешімін зерттеумен айналысамыз. Осы мақсатта, алдымен (1.1.22) жүйесі және сәйкесінше (1.1.35) жүйесі ***сындық емес*** болсын деп ұйғаралық.

а) (1.1.35) жүйенің $X(\tau)$ матрицанты (1.1.24) немесе (1.1.25) шартын қанағаттандырады делік.

Қарастырылып отырған сындық емес жағдайда жәй дифференциалдық теңдеулер теориясынан белгілі Ляпунов әдісін жалпылауға болады. Осы әдісті жалпылау үшін бұл жерде дәстүрлі тәсілден өзге тәсілдеме қолданамыз. Нақтырақ айтсақ, біртекті емес теңдеудің ізделінді шешімі біртекті теңдеудің $u=0$ болғанда алынатын нөлдік шешіміне сәйкес келетінін ескереміз. Сонда $u=0$ десек, (1.1.37) өрнегінен

$$x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=\int\limits_{\tau^0}^{\tau} X(\tau-s)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds \qquad (1.1.38)$$

шешімін аламыз және (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты деп ұйғарамыз.

$h(s,\tau,t)$ және $\mu(s,\tau,\zeta)$ сипаттауыштардың келесі түрдегі

$$h(s+q_0\theta,\tau+q_0\theta,t+q\omega)=h(s,\tau,t)+q\omega,\ q_0\in Z, \qquad (1.1.39)$$

$$\mu(s+q_0\theta,\tau+q_0\theta,\zeta)=\mu(s,\tau,\zeta),\ q_0\in Z \qquad (1.1.40)$$

қасиеттерін орындалатындығын дәлелделік, мұндағы $q\omega=(q_1\omega_1,...,q_m\ \omega_m)$.

Шынында да, (1.1.5) және (1.1.11) сипаттауыш интегралдары бойынша

1) $h(s+q_0\theta,\tau+q_0\theta,t+q\omega)=t+q\omega-e\left(\tau+q_0\theta-(s+q_0\theta)\right)==h(s,\tau,t)+q\omega;$

2) $\mu(s+q_0\theta,\tau+q_0\theta,\zeta)=U(s+q_0\theta,\tau+q_0\theta)\zeta=$

$$=\begin{pmatrix}\cos\nu(\tau+q_0\theta-(s+q_0\theta)) & -\sin\nu(\tau+q_0\theta-(s+q_0\theta))\\ \sin\nu(\tau+q_0\theta-(s+q_0\theta)) & \cos\nu(\tau+q_0\theta-(s+q_0\theta))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=U(s,\tau)\zeta=\mu(s,\tau,\zeta).$$

(1.1.36) және (1.1.39) қасиеттерінен (1.1.38) шешімі t бойынша ω-периодты екенін көреміз, яғни $x(\tau^0,\tau,t+q\omega,\zeta)=x(\tau^0,\tau,t,\zeta)$.

x шешімінің θ-периодтылығы жөніндегі ұйғаруды ескере отырып, (1.1.38) қатынасынан τ айнымалысын $q_0\theta$ периодына ығыстыру арқылы

$$\begin{gathered}x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=x(\tau^0,\tau+q_0\theta,t,\zeta)=\\ =\int\limits_{\tau^0}^{\tau+q_0\theta} X\left(\tau+q_0\theta-s\right)f\left(s,h(s,\tau+q_0\theta,t),\mu(s,\tau+q_0\theta,\zeta)\right)ds\end{gathered} \qquad (1.1.41)$$

қатысын аламыз. Әрі қарай, (1.1.41) теңдікте s параметрін $s+q_0\theta$ ауыстырсақ,

$$x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=\int\limits_{\tau^0-q_0\theta}^{\tau} X(\tau-s)f\left(s+q_0\theta,h(s+q_0\theta,\tau+q_0\theta,t),\mu(s+q_0\theta,\tau+q_0\theta,\zeta)\right)ds$$

интегралдық өрнегі шығады. Осыған (1.1.36), (1.1.39), (1.1.40) орындалғанда [47, 47-54 б.] жұмысы нәтижесін қолдансақ,

$$x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=\int\limits_{\tau^0-q_0\theta}^{\tau} X(\tau-s)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds=x\left(\tau^0-q_0\theta,\tau,t,\zeta\right). \quad (1.1.42)$$

Енді (1.1.24) шарты орындалды деп есептеп, (1.1.42) теңдікте $q_0\to+\infty$ болғанда шекке көшеміз

$$\bar{x}\left(\tau,t,\zeta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\tau} X(\tau-s)f\left(s,h(s,\tau,t),\ \mu(s,\tau,\zeta)\right)ds, \quad (1.1.43)$$

мұндағы меншіксіз интеграл (1.1.24) шарты бойынша жинақты, ал $\bar{x}\left(\tau,t,\zeta\right)$ арқылы $\lim\limits_{q_0\to+\infty} x\left(\tau^0-q_0\theta,\tau,t,\zeta\right)=\bar{x}\left(\tau,t,\zeta\right)$ шектік мәні белгіленген. Осылайша, (1.1.38) шешімде $\tau^0\to-\infty$ болғанда $\bar{x}$ шектік функциясына көшу арқылы ізделінді шешім құрылады.

Егер $f(\tau,t,\zeta)$ вектор-функциясы

$$\left|f\left(\tau,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)\right|\le\Lambda(\zeta)\in C_{\zeta}^{(\tilde{e})}\left(B_{\delta}^{2}\right) \quad (1.1.44)$$

бағалауын қанағаттандырса, онда (1.1.24) негізінде (1.1.43) шешім шенелген:

$$\left|\bar{x}\left(\tau,t,\zeta\right)\right|\le\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left|X(\tau-s)\right|\left|f\left(s,h(s,\tau,t),\ \mu(s,\tau,\zeta)\right)\right|ds\le\Omega\cdot\Lambda(\zeta)\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-\kappa(\tau-s)}ds\le$$

$$\le\frac{\Omega}{\kappa}\Lambda(\zeta)e^{-\kappa(\tau-s)}\Big|_{-\infty}^{\tau}=\frac{\Omega}{\kappa}\Lambda(\zeta)(1-0)=\frac{\Omega}{\kappa}\Lambda(\zeta)=b(\zeta),$$

мұндағы $\Lambda(\zeta)$ – қандай да бір теріс емес үзіліссіз функция. (1.1.24) шартын (1.2.25) шартына ауыстырғанда (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты

$$\bar{\bar{x}}\left(\tau,t,\zeta\right)=\int\limits_{+\infty}^{\tau} X(\tau-s)f\left(s,h(s,\tau,t),\ \mu(s,\tau,\zeta)\right)ds \quad (1.1.45)$$

шешімін және (1.1.25), (1.1.44) шарттары орындалғанда $\left|\bar{\bar{x}}\left(\tau,t,\zeta\right)\right|\le b(\zeta)$

бағалауын аламыз. Ал (1.1.26) дихотомиялық жағдайында (1.1.38) шешімді x_- және x_+ шешімдерінің қосындысы түрінде жазамыз:

$$x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=x_-\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)+x_+\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right),$$

мұндағы $x_-\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=\int\limits_{\tau^0}^{\tau}X_-(\tau-s)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds$, $x_+\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=$ $=-\int\limits_{\tau}^{\tau^0}X_+(\tau-s)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds.$

(1.1.26) негізінде келесі шектік функцияларын аламыз:

$$\tilde{x}_-(\tau,t,\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{\tau}X_-(\tau-s)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds=\lim_{\tau^0\to-\infty}x_-\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right), \quad (1.1.46)$$

$$\tilde{x}_+(\tau,t,\zeta)=-\int\limits_{\tau}^{+\infty}X_+(\tau-s)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds=\lim_{\tau^0\to+\infty}x_+\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right). \quad (1.1.47)$$

Олардың қосындысы

$$\tilde{x}(\tau,t,\zeta)=\tilde{x}_-(\tau,t,\zeta)+\tilde{x}_+(\tau,t,\zeta) \quad (1.1.48)$$

(1.1.35) жүйесінің шешімі болады. Егер

$$G(\tau-s)=\begin{cases}X_-(\tau,s), & \tau\geq s,\\ -X_+(\tau,s), & \tau<s\end{cases} \quad (1.1.49)$$

матрицалық функциясын анықтасақ, онда (1.1.46), (1.1.47) және (1.1.49) орындалғанда (1.1.35) жүйенің (1.1.48) түріндегі (θ,ω)-периодты шешімінің

$$\tilde{x}(\tau,t,\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tau-s)f\left(s,h(s,\tau,t),\ \mu(s,\tau,\zeta)\right)ds \quad (1.1.50)$$

интегралдық өрнегін аламыз, мұндағы $G(\tau-s)$ – (1.1.49) қатысы арқылы анықталған Грин функциясы және ол келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned}&1^0.\ D_1G(\tau-s)=AG(\tau-s),\ \tau\neq s;\\ &2^0.\ G(\tau+0)-G(\tau-0)=E;\\ &3^0.\ \left|G(\tau-s)\right|\leq\Omega e^{-\kappa|\tau-s|}.\end{aligned} \quad (1.1.51)$$

(1.1.51) қасиетінің дәлелдеуі А1 қосымшасында келтірілген.

(1.1.44) және (1.1.51) қатысының 3° қасиеті негізінде (1.1.50) шешімі

$$\left|\tilde{x}(\tau,t,\zeta)\right| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|G(\tau-s)\right|\left|f(s,h(s,\tau,t),\, \mu(s,\tau,\zeta))\right| ds \leq \frac{\Omega}{\kappa}\Lambda(\zeta) = b(\zeta)$$

бағалауын қанағаттандырады. Осыдан, қарастырылып отырған жағдай үшін алынған нәтижені келесі теорема түрінде тұжырымдаймыз.

1.1.5-теорема. *Сындық емес жағдайда бос мүшесі (1.1.36), (1.1.44) шарттарын қанағаттандыратын вектор-функция болатын (1.1.35) сызықты жүйесінің* (τ,t) *бойынша жалғыз ғана* (θ,ω)*-периодты шешімі бар және жүйенің коэффициенттерінің* A *матрицасының канондық түріне байланысты шешімнің интегралдық өрнегі (1.1.43), (1.1.45), (1.1.50) өрнектерінің бірімен анықталады, ал нормасы бойынша* $b(\zeta), \zeta \in B_\delta^2$ *функциясымен шенеледі.*

(1.1.35) теңдеудің (θ,ω)-периодты шешімінің жалғыздығы 1.1.3-теоремасының салдары болып табылады. Кері жору бұл теореманың тұжырымына қайшы келеді.

б) Әрі қарай, $X(\tau)$ матрицанты (1.1.27) қатынасымен анықталған ***сындық жағдайда*** көппериодты шешімдердің болатындығы туралы сұрақты зерттейміз.

Бұл жерде жиіліктердің (1.1.33) бейөлшемдестік шарты орындалады деп ұйғарамыз. Сонда 1.1.4-теоремасы бойынша (1.1.35) теңдеуіне сәйкес (1.1.22) біртекті теңдеудің $x=0$ тривиалды көппериодты шешімі болады. Ал бұл (1.1.35) біртекті емес теңдеудің жалғыз ғана (θ,ω)-периодты шешімі табылатынын қамтамасыз етеді. Сонда (θ,ω)-периодты шешімнің болатынын ғана көрсетсек жеткілікті.

Негізгі сұрақты конструктивті тәсілмен шешелік, яғни ізделінді шешімді бар деп ұйғарып, оны құрамыз. Егер оны құру зерттеліп отырған теңдеудің жалпы теориясына қайшы болмаса, онда оның өрнегін анықтаумен қатар оның табылатынын дәлелдейміз. Осы мақсатпен алдымен (1.1.37) жалпы шешімін анықтайтын D_1 операторының $u=u(h,\mu)$ нөлдерін қарастырамыз. τ бойынша θ-периодты шешімді бар деп ұйғарсақ, (1.1.33) шарты $\tilde{v}_j,\ j=\overline{1,m}$ және $\tilde{v}_2$ бейөлшемді жиілікті тербелістерді тудыратын h және μ сипаттауыштарын жояды. Сондықтан бастапқы функция $u=u^0$ тұрақты болуы керек.

Сонда ізделінді x шешімі (1.1.37) негізінде келесі түрдегі шешімдердің арасында болады:

$$x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right) = X\left(\tau-\tau^0\right)u^0 + \int\limits_{\tau^0}^{\tau} X(\tau-s)f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds. \qquad (1.1.52)$$

Ұйғарым бойынша

$$x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=x\left(\tau^0,\tau+\theta,t,\zeta\right)=X\left(\tau+\theta-\tau^0\right)u^0+$$
$$+\int_{\tau^0}^{\tau+\theta}X\left(\tau+\theta-s\right)f\left(s,h(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta)\right)ds= \qquad (1.1.53)$$
$$=X\left(\tau+\theta-\tau^0\right)u^0+\int_{\tau^0-\theta}^{\tau}X\left(\tau-s\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds,$$

мұндағы соңғы интеграл біріншісінен s параметрін $s+\theta$ ауыстыру және (1.1.39), (1.1.40) сипаттауыштардың қасиеттері арқылы алынды. Әрі қарай, (1.1.52) және (1.1.53) қатыстарынан u^0 параметрін жою үшін $\tau^0=0$ десек,

$$X^{-1}\left(\tau+\theta\right)x^*\left(\tau,t,\zeta\right)=u^0+\int_{-\theta}^{\tau}X^{-1}\left(\theta+s\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds,$$
$$X^{-1}\left(\tau\right)x^*\left(\tau,t,\zeta\right)=u^0+\int_{0}^{\tau}X^{-1}\left(s\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds,$$

теңдіктерін аламыз, мұнда $x^*\left(\tau,t,\zeta\right)=x\left(0,\tau,t,\zeta\right)$ және $X\left(-\tau\right)=X^{-1}\left(\tau\right),\ X\left(\tau+s\right)=X\left(\tau\right)X\left(s\right)$ екені ескерілді. Олардың айырмасынан (1.1.35) жүйесінің (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі

$$x^*\left(\tau,t,\zeta\right)=\left[X^{-1}\left(\tau+\theta\right)-X^{-1}\left(\tau\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left\{X^{-1}\left(\theta\right)\int_{-\theta}^{\tau}X^{-1}\left(s\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds+\right. \qquad (1.1.54)$$
$$\left.+\int_{\tau}^{0}X^{-1}\left(s\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds\right\}$$

арқылы өрнектелетіндігі шығады. Ал $X^{-1}\left(\tau+\theta\right)-X^{-1}\left(\tau\right)=Y(\tau)$ матрицасының кежәне керіленетіндігі (1.1.33) шартынан шығады, себебі $\det\left[X(\theta)-E\right]\neq 0$ шарты (1.1.33) арқылы анықталады және $Y(\tau)$ матриканты (1.1.22) біртекті теңдеуін қанағаттандырады. s параметрін $s-\theta$ ауыстыру арқылы келесі теңдік

$$\int_{-2\theta}^{-\theta}X^{-1}\left(s\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds=X\left(\theta\right)\int_{-\theta}^{0}X^{-1}\left(s\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds \quad (1.1.55)$$

орындалатынына оңай көз жеткізуге болады. Сонда (1.1.55) негізінде (1.1.35) жүйесінің (1.1.54) шешімінің θ-периодтылығын тексеру қиын емес.

(1.1.54) түріндегі (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешім (1.1.35) біртекті жүйенің шешілімділігінің жалпы теориясы шеңберінде құрылғанын байқаймыз.

Олай болса, осы жүйенің (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты жалғыз шешімінің табылатыны дәлелденді. Егер

$$G(\tau,s)=\begin{cases}\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(s+\theta), & -\theta\le s\le\tau,\\ \left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(s), & \tau<s\le 0\end{cases} \tag{1.1.56}$$

деп ұйғарсақ, онда (1.1.54) шешімді

$$x^*(\tau,t,\zeta)=\int_{-\theta}^{0}G(\tau,s)f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds \tag{1.1.57}$$

арқылы жазамыз. (1.1.57) интегралы x^* шешімін $[-\theta,0]$ аралығында өрнектейді. Оны $[k\theta,k\theta+\theta),\ k\in Z$ аралығында

$$s^*(\tau+\theta)=s^*(\tau)+\theta,\ \ \frac{d}{d\tau}s^*(\tau)=0,\ \tau\in R \tag{1.1.58}$$

қасиеттері орындалатын және $\tau=k\theta, k\in Z$ нүктелеріндегі туындылары нөлмен үзіліссіз дәл анықталған $s^*(\tau)=[\tau/\theta]\theta$ сатылы функциясы арқылы периодты жалғастыруға болады. Сонда (1.1.57) өрнектен

$$x^*(\tau,t,\zeta)=\int_{s^*(\tau)-\theta}^{s^*(\tau)}G(\tau,s)f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds \tag{1.1.59}$$

интегралдық өрнегін аламыз, мұндағы $G(\tau,s)$ – (1.1.35) теңдеудің (θ,ω)-периодты шешімінің болуы туралы есептің Грин функциясы. Ол келесі қасиеттерге ие:

$$\begin{aligned}&1^0.\ D_1G(\tau,s)=AG(\tau,s),\ \tau\ne s,\\ &2^0.\ G(\tau,\tau+0)-G(\tau,\tau-0)=E,\\ &3^0.\ G(\tau+\theta,s+\theta)=G(\tau,s),\\ &4^0.\ G(\tau+\theta_2,s)=G(\tau,s+\theta_2)=G(\tau,s),\ \theta_2=\frac{2\pi}{\beta},\\ &5^0.\ |G(\tau,s)|\le\overline{\Omega}e^{2|A|\theta}=\overline{\Delta}_0.\end{aligned} \tag{1.1.60}$$

(1.1.60) қасиетінің дәлелдеуі А1 қосымшасында келтірілген.

(1.1.44) және (1.1.60) қатысындағы 5° қасиет негізінде (1.1.59) шешімі

$$\left|x^*(\tau,t,\zeta)\right| \le \overline{\Delta}_0\theta\,\Lambda(\zeta) \tag{1.1.61}$$

бағалауын қанағаттандырады, себебі

$$\left|x^*(\tau,t,\zeta)\right| = \int\limits_{s^*(\tau)-\theta}^{s^*(\tau)} \left|G(\tau,s)\right|\left|f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right|ds \le \Delta_0\Lambda(\zeta)\int\limits_{s^*(\tau)-\theta}^{s^*(\tau)} ds = \Delta_0\theta\,\Lambda(\zeta).$$

Осылайша, сындық жағдайда алынған жаңа нәтижені және (1.1.59) түрдегі көппериодты шешімнің интегралдық өрнегін төмендегі теорема түрінде тұжырымдаймыз.

1.1.6-теорема. *Жүйенің коэффициенттерінің* A *матрицасының меншікті мәндері* $\lambda_{1,2}(A) = \pm i\beta$ *жорымал сандар болған сындық жағдайында (1.1.33) шартын қанағаттандырса, (1.1.36) шартымен берілген* f *бос мүшелі (1.1.35) жүйесінің жалғыз ғана* (θ,ω)*-периодты* $x^*(\tau,t,\zeta)$ *шешімі бар және ол (1.1.60) қасиетті (1.1.56) өрнекті* $G(\tau,s)$ *Грин функциясы мен* f *бос мүшесіне қолданылған (1.1.59) интегралдық операторымен өрнектеледі, әрі ол (1.1.61) бағалауын қанағаттандырады.*

Сындық жағдайға Б қосымшасында 1-мысал келтірілген.

Сындық емес жағдайда (1.1.22) біртекті жүйенің τ бойынша θ-периодты шешімінің болмауынан $\det[X(\theta)-E]\neq 0$ шартын аламыз. Соның негізінде $Y(\tau) = X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)$ матрицасы керіленеді және (1.1.56) матрицалық Грин функциясын оңай құруға болады. Матрицалық Грин функциясының табылатындығынан (1.1.59) арқылы анықталған жалғыз көппериодты шешімнің бар екені шығады. Бұл тәсілді сындық жағдайда да, сындық емес жағдайда да қолдануға болатындықтан 1.1.5-теоремасын негіздегенде қолданылған әдіспен салыстырғанда жалпырақ тәсіл болып табылады.

III. Коэффицентері матрицасы $t = e\tau$ диагоналы бойында тұрақты

$$D_1 x = A(t - e\tau)x + f(\tau,t,\zeta) \tag{1.1.62}$$

немесе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \ldots + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_m} + \nu\eta\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi} - \nu\xi\dfrac{\partial x_1}{\partial \eta} = a_{11}(t_1-\tau,\ldots,t_m-\tau)x_1 + \\ \qquad\qquad + a_{12}(t_1-\tau,\ldots,t_m-\tau)x_2 + f_1(\tau,t_1,\ldots,t_m,\xi,\eta), \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_m} + \nu\eta\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi} - \nu\xi\dfrac{\partial x_2}{\partial \eta} = a_{21}(t_1-\tau,\ldots,t_m-\tau)x_1 + \\ \qquad\qquad + a_{22}(t_1-\tau,\ldots,t_m-\tau)x_2 + f_2(\tau,t_1,\ldots,t_m,\xi,\eta) \end{cases}$$

жүйесін қарастырамыз, мұндағы $A(t-e\tau)=[a_{ij}(t-e\tau)]_1^2$ – екінші ретті матрица, $f(\tau,t,\zeta)$ мәжбүрлеуші күші (1.1.36) шартын және (1.1.44) бағалауын қанағаттандырады.

$\sigma=t-e\tau$ болғанда $A=A(\sigma)$ матрицасы және оның $\lambda_{1,2}(\sigma)$ меншікті мәндері келесі шарттарды қанағаттандырады деп ұйғарамыз:

$$A(\sigma+\omega)=A(\sigma)\in C_\sigma^{(e)}\left(R^m\right), \tag{1.1.63}$$

$$\lambda_{1,2}(\sigma+\omega)=\lambda_{1,2}(\sigma)\in C_\sigma^{(e)}\left(R^m\right), \tag{1.1.64}$$

$$a_{11}(\sigma)a_{22}(\sigma)-a_{12}(\sigma)a_{21}(\sigma)\neq 0,\ \left(\lambda_1(\sigma)=\lambda_2(\sigma)\right)\bigcup\left(\lambda_1(\sigma)\neq\lambda_2(\sigma)\right),\ \sigma\in R^m. \tag{1.1.65}$$

(1.1.65) шарты $\sigma\in R^m$ болғанда меншікті мәндердің нөлге айналмайтынын және олар барлық жерде не беттесетінін, не қиылыспайтынын білдіреді.

Сындық жағдайда A матрицасының $\lambda_{1,2}$ меншікті мәндері таза жорамал, яғни $\lambda_{1,2}=\pm i\beta(\sigma)$ болады. Бұл жерде олардың жорамал бөліктерінің тұрақты жағдайын ғана қарастырумен шектелеміз. Осыған орай келесі шартты орындалады деп ұйғарамыз:

$$\operatorname{Im}\lambda_{1,2}=\beta=const. \tag{1.1.66}$$

Мысалы, $a_{11}=a_{22}=\alpha(\sigma)$ және $a_{12}a_{21}=-\beta^2=const$ болғанда A матрицасының меншікті мәндерінің жорымал бөлігі тұрақты болады, мұндағы $\alpha(\sigma)$ – кез келген функция.

(1.1.65) шарты негізінде

$$T^{-1}(\sigma)A(\sigma)T(\sigma)=J(\sigma) \tag{1.1.67}$$

орындалатындай ерекше емес $T(\sigma)\in C_\sigma^{(e)}\left(R^m\right)$ матрицасының бар екенін көрсетуге болады, мұндағы $J(\sigma)$ – $A(\sigma)$ матрицасының жордандық қалыпты түрі, $T(\sigma+\omega)=T(\sigma)$ – түрлендіру матрицасы.

Демек, (1.1.62) жүйесінің x жалпы шешімінің құрылымы A матрицасының тұрақты болған жағдайына ұқсас. (1.1.62) теңдеуге сәйкес

$$D_1x=A(t-e\tau)x \tag{1.1.68}$$

біртекті теңдеуінің (1.1.28) бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімі

$$x(\tau^0,\tau,t,\zeta)=\exp\left[A(t-e\tau)(\tau-\tau^0)\right]\cdot u\left(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\right).$$

Сындық жағдайда (1.1.68) теңдеуінің

$$X(\tau-\tau^0,t-e\tau)=\exp\left[A(t-e\tau)(\tau-\tau^0)\right] \tag{1.1.69}$$

матрицантын (1.1.67) формуласын пайдаланып

$$X(\tau-\tau^0,t-e\tau)=$$
$$=T^{-1}(t-e\tau)\begin{pmatrix}\cos\left[(\tau-\tau^0)\beta(t-e\tau)\right] & \sin\left[(\tau-\tau^0)\beta(t-e\tau)\right]\\ -\sin\left[(\tau-\tau^0)\beta(t-e\tau)\right] & \cos\left[(\tau-\tau^0)\beta(t-e\tau)\right]\end{pmatrix}T(t-e\tau) \tag{1.1.70}$$

арқылы жазамыз. (1.1.70) қатысынан (1.1.69) матрицантының шенелгендігі шығады, әрі $\beta=\beta(t-e\tau)$ жиілігі $t=e\tau$ диагоналында тұрақты функция.

Сындық емес жағдайда (1.1.67) формуласынан (1.1.69) матриканты

$$X(\tau-s,t-e\tau)=T^{-1}(t-e\tau)e^{J(t-e\tau)(\tau-s)}T(t-e\tau) \tag{1.1.71}$$

түрінде анықталады және бұдан

$$G(\tau-s,t-e\tau)=\begin{cases}X_-(\tau,s,t-e\tau),\tau\geq s,\\ -X_+(\tau,s,t-e\tau),\tau<s\end{cases} \tag{1.1.72}$$

Грин функциясының бар екенін көрсетуге болады, әрі ол келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned}&1^0.\ D_1G(\tau-s,t-e\tau)=A(t-e\tau)G(\tau-s,t-e\tau),\tau\neq s;\\&2^0.\ G(\tau+0,t-e\tau)-G(\tau-0,t-e\tau)=E;\\&3^0.\ \left|G(\tau-s,t-e\tau)\right|\leq\Omega e^{-\kappa(t-e\tau)|\tau-s|}=\Omega e^{-\kappa(\sigma)|\tau-s|},\end{aligned} \tag{1.1.73}$$

мұндағы $\kappa(\sigma+\omega)=\kappa(\sigma)\in C_\sigma^{(e)}\left(R^m\right)$, $\sigma=t-e\tau$, $\kappa(\sigma)>0,\kappa\in R^m$. (1.1.73) қасиетінің дәлелдеуі А1 қосымшасында келтірілген.

(1.1.71) негізінде (1.1.73) қасиетті (1.1.72) Грин функциясы бар болса, онда 1.1.3, 1.1.5-теоремаларынан (1.1.68) біртекті теңдеуінің тек шенелген нөлдік шешімі $x=0$, ал (1.1.36) шарты мен (1.1.44) бағалауын қанағаттандыратын f бос мүшелі (1.1.62) біртекті емес теңдеудің кез келген бекітілген $\zeta\in B_\delta^2$ мәнінде (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты жалғыз шенелген шешімі бар екені шығады.

(1.1.68) теңдеуіне t-ға қатысты ω-периодты τ бойынша $\nu_1=\omega_1^{-1},...,\nu_m=\omega_m^{-1}$ жиіліктерімен квазипериодты шешімінің болуы жөнінде есеп қойылады, себебі $A(t-e\tau)$ матрицасының да осыған ұқсас қасиеттері бар.

(1.1.71) матрицантынан сындық емес жағдайда (1.1.68) жүйесінің шешімі шенелмеген болатыны айқын. Сондықтан нөлден өзге барлық шешімдері t-ға қатысты ω-периодты және τ бойынша $\nu = (\omega_1^{-1}, ..., \omega_m^{-1})$ жиіліктерімен квазипериодты болмайды.

Сындық жағдайда қосымша (1.1.66) шарты орындалады деп ұйғарамыз және әрі қарай β периодының (1.1.33) шартын қанағаттандыруын талап етеміз. Сонда (1.1.68) біртекті жүйесінің сындық жағдайда да нөлден өзге t-ға қатысты ω-периодты және τ бойынша $\nu = \left(\omega_1^{-1}, ..., \omega_m^{-1}\right) = \left(\nu_1, ..., \nu_m\right)$, $\widetilde{\nu}_1 = \dfrac{\nu}{2\pi}$, $\widetilde{\nu}_2 = \dfrac{\beta}{2\pi}$ жиіліктері базисінде квазипериодты шешімдері болмайды.

Осылайша (1.1.72) Грин функциясымен берілген

$$x^*(\tau, t, \zeta) = \int\limits_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)} G(\tau - s, t - e\tau) f(s, h(s, \tau, t), \mu(s, \tau, \zeta)) ds \tag{1.1.74}$$

функциясы (1.1.62) жүйесінің, сындық немесе сындық емес жағдайлардан тәуелсіз, t-ға қатысты ω-периодты және τ бойынша (1.1.33) жиіліктерімен квазипериодты жалғыз шешімі болады.

(1.1.74) функциясының τ-ға қатысты квазипериодтылығын негіздеу барысында, алдымен

$$x^*(\tau, t, \zeta, \sigma) = \int\limits_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)} G(\tau - s, \sigma) f(s, h(s, \tau, t), \mu(s, \tau, \zeta)) ds$$

функциясының (τ, t) бойынша (θ, ω)-периодтылығын көрсетеміз. Одан кейін, σ параметрін $t - e\tau$ ауыстырсақ, $x^*(\tau, t, \zeta) = x^*(\tau, t, \zeta, t - e\tau)$ шешімінің τ-ға қатысты сол жиіліктер базисінде квазипериодты болатыны шығады.

(1.1.74) шешімінің басқа сипаттамаларының негіздемесін жоғарыда қарастырылған тұрақты A матрицасы жағдайына ұқсас көрсетуге болады.

(1.1.44), (1.1.70) және (1.1.73) қатысындағы 3° қасиеті негізінде

$$\begin{aligned} \left|x^*(\tau, t, \zeta, \sigma)\right| &\le \int\limits_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)} \left|G(\tau - s, \sigma)\right| \left|f(s, h(s, \tau, t), \mu(s, \tau, \zeta))\right| ds \le \\ &\le \Omega\Lambda(\zeta) \int\limits_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)} e^{-\kappa(\sigma)|\tau - s|} ds \le \frac{\Omega\Lambda(\zeta)}{\kappa(\sigma)} \left[e^{-\kappa(\sigma)\left|\tau - s^*(\tau)\right|} - e^{-\kappa(\sigma)\left|\tau - s^*(\tau)\right|} e^{-\kappa(\sigma)\theta} \right] \le \\ &\le \frac{\Omega\Lambda(\zeta)}{\kappa(\sigma)} \left[e^{-\kappa(\sigma)\theta} - e^{-2\kappa(\sigma)\theta} \right] \le \frac{\Omega}{\kappa(\sigma)} \Omega_0 \Lambda(\zeta) = \Omega_* \Lambda(\zeta), \end{aligned} \tag{1.1.75}$$

бағалауын аламыз, мұндағы Ω_0, Ω_* – бекітілген ζ мәнінде $\Omega_0 = \left[e^{-\kappa(\sigma)\theta} - e^{-2\kappa(\sigma)\theta}\right]$, $\Omega_* = \max\left\{\Omega_0, \dfrac{\Omega}{\kappa(\sigma)}\right\}$ арқылы анықталады.

Сонымен келесі теорема орынды.

1.1.7-теорема. *$t = e\tau$ диагоналында тұрақты $A(t - e\tau)$ матрицасы (1.1.33) жиілікті (1.1.63)-(1.1.66) шарттарын, ал f вектор-функциясы (1.1.36), (1.1.44) қасиеттерін қанағаттандырсын.*

Онда (1.1.62) жүйесінің (1.1.74) өрнегімен анықталған t-ға қатысты ω-периодты, τ бойынша (1.1.33) жиілікті квазипериодты жалғыз ғана $x^*(\tau, t, \zeta)$ шешімі бар және ол (1.1.75) бағалауына бағынады.

Сындық жағдайда матрицант (1.1.70) түрінде болғанда және $\tau - \tau^0$ бойынша $t = e\tau$ тұрақты диагоналда t-ға қатысты ω-периодты $\beta(\sigma) = \beta(t - e\tau)$ жиілігімен тербелгенде (1.1.62) жүйеге сәйкес (1.1.68) біртекті жүйесінің нөлден өзге тербелмелі шешімінің болмайтындығын тұжырымдауға болмайды. Осындай қиындықтар жүйенің коэффициенттері айнымалы болғанда да кездеседі.

1.2 D_1 дифференциалдау операторлы айнымалы коэффициентті екінші ретті сызықты жүйелердің көппериодты шешімдері

(1.1.35) жүйесіндегі коэффициенттер (τ, t) уақыт айнымалыларынан тәуелді болған жағдайдағы D_1 дифференциалдау операторлы

$$D_1 x = P(\tau, t)x + f(\tau, t, \zeta) \tag{1.2.1}$$

жүйесін қарастыралық, мұндағы $P(\tau, t) = [p_{kj}(\tau, t)]_1^2$ – екінші ретті матрица, ал қалған мүшелер бұрынғы мағынаны білдіреді.

(1.2.1) жүйесінің (θ, ω)-периодты шешімдерінің болатындығын зерттейміз. Зерттеуді алдымен біртекті жүйе, одан кейін біртекті емес жүйе үшін бастапқы есептің шешілімдігі жөнінде сұрақтан бастаймыз. Содан соң бұл жүйелердің көппериодты шешімдері мәселесін зерттеуге көшеміз. Ол келесі ұйғарымдар негізінде зерттеледі.

а) $P(\tau, t)$ матрицасы үшін төмендегі қасиет орынды

$$P(\tau + \theta, t + \omega) = P(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{(0,e)}\left(R \times R^m\right). \tag{1.2.2}$$

б) $f(\tau, t, \zeta)$ вектор-функциясы үшін (1.1.36) қасиеті мен (1.1.44) бағалауы орынды, мұндағы $(\theta, \omega), \theta_1, \theta_2$ – (1.1.33) шарттарын қанағаттандыратын периодтар.

Келесі біртекті жүйесін

$$D_1 x = P(\tau, t)x \tag{1.2.3}$$

қарастыру арқылы

$$X\left(\tau^0, \tau, t\right) = E + \int_{\tau^0}^{\tau} P\left(s, h(s, \tau, t)\right) X\left(\tau^0, s, h(s, \tau, t)\right) ds \tag{1.2.4}$$

матрицантын аламыз. Ол үшін

$$X(\tau^0 + \theta, \tau + \theta, t) = X(\tau^0, \tau, t) \in C_{\tau^0, \tau, t}^{(1,1,e)}\left(R \times R \times R^m\right), \tag{1.2.5}$$

$$X(\tau^0, \tau, t + \omega) = X(\tau^0, \tau, t) \tag{1.2.6}$$

қасиеттері орынды болсын. (1.2.3) жүйесінің

$$x\left(\tau^0, \tau, t, \zeta\right) = X\left(\tau^0, \tau, t\right) u\left(h(\tau^0, \tau, t), \mu(\tau^0, \tau, \zeta)\right) \tag{1.2.7}$$

шешімі (1.1.28) бастапқы шартымен бірмәнді анықталады.

(1.1.28) шарты орындалса

$$u\left(h(\tau^0, \tau, t), \mu(\tau^0, \tau, \zeta)\right) = v\left(\tau^0, \tau, t, \zeta\right) \tag{1.2.8}$$

функциясы D_1 операторының нөлі болады және ол 1.1.1-теоремасына сәйкес u, h, μ функцияларының қасиеттеріне байланысты (θ, ω)-периодты болуы да, болмауы да мүмкін.

Қоздыртқылар теориясынан қоздыртқысыз

$$D_1 v = 0 \tag{1.2.9}$$

жүйесінің шешімдеріне сәйкес келетін қоздыртқылы (1.2.3) жүйесінің көппериодты шешімдерін анықтау керек. Сондықтан (1.1.28) бастапқы функциясы D_1 операторының (1.2.9) теңдеуімен анықталған (1.2.8) нөлі 1.1.1-теорема негізінде (τ, t) бойынша (θ, ω)-периодты болатындай етіп таңдалған деп есептейміз, яғни

$$v(\tau^0, \tau + \theta, t + \omega, \zeta) = v(\tau^0, \tau, t, \zeta) \in C_{\tau^0, \tau, t, \zeta}^{(1,1,e,\tilde{e})}\left(R \times R \times R^m \times B_\delta^2\right). \tag{1.2.10}$$

Енді (1.2.10) орындалғанда (1.2.3) жүйесінің (θ, ω)-периодты шешімдерін зерттеуге көшелік.

(1.2.3) жүйесінің (1.2.7) шешімі (1.2.10) шарты орындалғанда (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты болады, егер (1.2.4) матриcанты да бұл көппериодтылық қасиетін қанағаттандырса. (1.2.6) шартынан оның t-ға қатысты ω-периодты екенін көреміз. (1.2.5) қасиеті орындалғанда матрицант τ -ға қатысты θ -периодты болады, яғни

$$X(s+\theta,\tau,t)=X(s,\tau+\theta,t)=X(s,\tau,t). \qquad (1.2.11)$$

Сонда (1.2.11) шарты орындалғанда (1.2.7) шешімі (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты. Осыдан, D_1 операторының әрбір (θ,ω)-периодты нөліне (1.2.3) біртекті жүйенің дәл сондай шешімі сәйкес келетіндігі шығады. D_1 операторының көппериодты нөлдері шексіз көп.

Егер де (1.2.11) шарты орындалмаса, онда (1.2.3) біртекті жүйесінің нөлден өзге көппериодты шешімдері болмайды.

t-ға қатысты ω-периодты, (t,ζ) бойынша тегіс болатын (1.1.28) функциялары класында

$$\left[X_0(\theta,t)-E\right]u(t,\zeta)=0 \qquad (1.2.12)$$

теңдеуінің шешілімділігі (1.2.11) шартына эквивалентті болатынын көреміз, мұндағы $X_0(\tau,t)=X(0,\tau,t)$.

(1.2.12) шартынан (1.2.3) біртекті жүйесінің нөлден өзге (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімдерінің болмауы шартын аламыз

$$\det\left[X_0(\theta,t)-E\right]\neq 0. \qquad (1.2.13)$$

1.2.1-теорема. *(1.2.2) шарты орындалғанда (1.2.3) біртекті жүйесінің (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі болуы үшін (1.2.12) векторлы-матрицалық теңдеуі $(t,\zeta)\in R^m\times B_\delta^2$ бойынша тегіс, t-ға қатысты ω-периодты болатын $u(t,\zeta)$ функциялар класында шешілімді болуы қажетті және жеткілікті.*

Салдар. *1.2.1-теорема шарттары орындалғанда (1.2.3) жүйесінің нөлден өзге (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімдері болмауы үшін (1.2.13) шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.*

Келесі теореманы дәлелделік.

1.2.2-теорема. *(1.1.28), (1.1.33), (1.1.36), (1.1.44), (1.2.2), (1.2.10) және (1.2.13) шарттары орындалғанда (1.2.1) жүйесінің жалғыз (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі бар.*

Шынында, да (1.2.1) жүйесінің (1.1.28), (1.2.8)-(1.2.10) шарттарын қанағаттандыратын $u(t,\zeta)$ бастапқы функциялы шешімі

$$
\begin{aligned}
x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right) &= X\left(\tau^0,\tau,t\right)u\left(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta\right)+ \\
&+\int_{\tau^0}^{\tau} X\left(s,\tau,t\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds
\end{aligned}
\qquad (1.2.14)
$$

түрінде анықталады. (1.2.14) шешімі t-ға қатысты ω-периодты екені айқын.

(1.1.28), (1.2.8) - (1.2.10) шарттарына сәйкес D_1 операторының $u\left(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta\right)=v\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)$ нөлі τ-ға қатысты θ -периодты.

Сонда бұдан (1.2.14) өрнегінде τ айнымалысын θ периодына ығыстыру арқылы басқа шешімді аламыз:

$$
\begin{aligned}
x\left(\tau^0,\tau+\theta,t,\zeta\right) &= X\left(\tau^0,\tau+\theta,t\right)u\left(h(\tau^0,\tau+\theta,t),\mu(\tau^0,\tau+\theta,\zeta\right)+ \\
&+\int_{\tau^0}^{\tau+\theta} X\left(s,\tau+\theta,t\right)f\left(s,h(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta)\right)ds.
\end{aligned}
\qquad (1.2.15)
$$

$X(\tau^0,\tau,t)$ матрицанты

$$
X(s,\tau,t)=X(\tau^0,\tau,t)X^{-1}(\tau^0,s,h(s,\tau,t))
$$

шартын қанағаттандыратындықтан, (1.2.14) және (1.2.15) жүйелерін

$$
\begin{aligned}
&X^{-1}\left(\tau^0,\tau,t\right)x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=v\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)+\int_{\tau^0}^{\tau}X^{-1}\left(\tau^0,s,h(s,\tau,t)\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds, \\
&X^{-1}\left(\tau^0,\tau+\theta,t\right)x\left(\tau^0,\tau+\theta,t,\zeta\right)=v\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)+ \\
&\quad+\int_{\tau^0}^{\tau+\theta}X^{-1}\left(\tau^0,s,h(s,\tau+\theta,t)\right)f\left(s,h(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta)\right)ds.
\end{aligned}
$$

түрінде өрнектелік. Әрі қарай, D_1 операторының $v(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ бастапқы нөлі $x(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ шешімінің θ-периодтылығын қамтамасыз етсін, яғни $x(\tau^0,\tau+\theta,t,\zeta)=x(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ теңдігін қанағаттандырсын деп ұйғарып, $\tau^0=0$ болғанда v функциясын жойсақ,

$$
\begin{aligned}
&\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]x^*\left(\tau,t,\zeta\right)= \\
&=\int_0^{\tau+\theta}X_0^{-1}\left(s,h(s,\tau+\theta,t)\right)f\left(s,h(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta)\right)ds+ \\
&+\int_{\tau}^{0}X_0^{-1}\left(s,h(s,\tau,t)\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds
\end{aligned}
$$

теңдігін аламыз, мұндағы $x^*(\tau,t,\zeta)=x(0,\tau,t,\zeta)$. (1.2.13) шарты негізінде $X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)$ матрицасы керіленеді. Бірінші интеграл астында $s=s'+\theta$ ауыстыруын жасаймыз, одан кейін s' параметрін s шамасымен ауыстырсақ,

$$\begin{gathered} x^*(\tau,t,\zeta)=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}\times \\ \times\left\{\int_{-\theta}^{\tau}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds+\right. \\ \left.+\int_{\tau}^{0}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds\right\} \end{gathered} \tag{1.2.16}$$

өрнегін шығады. Бұл жерде Флоке теоремасы [45, 183-188 б.] арқылы $X_0(\tau,t)-X(0,\tau,t)$ матрицантының

$$X(0,s+\theta,h(s,\tau,t))=X(0,s,h(s,\tau,t))X(0,\theta,h(0,\tau,t))$$

қасиеті қолданылды. Тікелей тексеру арқылы (1.2.16) шешімі τ-ға қатысты θ-периодты болатынына көз жеткізуге болады. $g(\tau)=g(\tau+\theta)$ функциясы үшін

$$\int_{s^*(\tau-\theta+0)}^{-\theta}g(s)ds=\int_{s^*(\tau+0)}^{0}g(s)ds$$

теңдігі орынды. Осы теңдікті пайдалансақ, (1.2.16) өрнегі

$$\begin{gathered} x^*(\tau,t,\zeta)=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}\times \\ \times\left\{\int_{s^*(\tau-\theta+0)}^{\tau}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds+\right. \\ \left.+\int_{\tau}^{s^*(\tau)}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds\right\} \end{gathered} \tag{1.2.17}$$

түріне келеді. Сонда Грин функциясы

$$G(s,\tau,t)=\begin{cases}\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t)), \\ \qquad\qquad s^*(\tau-\theta+0)\le s\le\tau; \\ \left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t)),\tau<s\le s^*(\tau)\end{cases} \tag{1.2.18}$$

түрінде болады және ол төмендегі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned}
&1^0.\ D_1G(s,\tau,t)=P(\tau,t)G(s,\tau,t),\ \tau\neq s;\\
&2^0.\ G(\tau-0,\tau,t)-G(\tau+0,\tau,t)=E;\\
&3^0.\ G(s+\theta,\tau+\theta,t)=G(s,\tau,t);\\
&4^0.\ G(s,\tau,t+\omega)=G(s,\tau,t);\\
&5^0.\ |G(s,\tau,t)|\leq\frac{\Delta_0}{\theta},\ 0\leq s\leq\theta,\ 0\leq\tau\leq\theta,\ 0\leq t_j\leq\omega_j,\ j=\overline{1,m},
\end{aligned}\qquad(1.2.19)$$

мұндағы $\Delta_0>0$ – тұрақты. (1.2.19) қасиетінің дәлелдеуі А2 қосымшасында келтірілген.

Олай болса, (1.2.17) шешімінен (1.2.18) негізінде $x^*(\tau,t,\zeta)$ ізделінді шешімнің интегралдық өрнегін Грин функциясы арқылы өрнектейміз, яғни

$$x^*(\tau,t,\zeta)=\int\limits_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)}G(s,\tau,t)f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds,\qquad(1.2.20)$$

ал (1.2.19), (1.1.44) қасиеттері арқылы оның (1.2.1) жүйесін қанағаттандыратынын, (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодтылығын және (1.1.44) шартын ескерсек,

$$\left|x^*(\tau,t,\zeta)\right|\leq\frac{\Delta_0}{\theta}\Lambda(\zeta)\int\limits_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)}ds=\Delta_0\Lambda(\zeta)\qquad(1.2.21)$$

бағалауын қанағаттандыратынын көреміз.

(1.2.1) теңдеуінің (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты екі шешімнің айырмасы тек нөлдік (θ,ω)-периодты шешімі ғана бар (1.2.3) біртекті теңдеуінің шешімі болады. Сондықтан (1.2.20) шешімі жалғыз.

Осылайша дәлелдеген 1.2.2-теоремасын келесі теорема түрінде толықтырып тұжырымдалық.

1.2.3-теорема. *(1.1.33), (1.1.36), (1.1.44), (1.2.2) және (1.2.13) шарттары орындалғанда (1.2.1) жүйесінің (1.2.18) Грин функция арқылы (1.2.20) интегралдық өрнегімен анықталған жалғыз ғана* (τ,t) *бойынша* (θ,ω)*-периодты* $x^*(\tau,t,\zeta)$ *шешімі бар және ол (1.2.21) бағалауын қанағаттандырады.*

Дербес жағдайда, яғни (1.2.3) жүйесі, сәйкесінше (1.2.1) жүйесі сындық емес болғанда (1.2.13) шарты автоматты түрде орындалады.

Әрі қарай (1.2.1) теңдеуі үшін 1) $P=P(\tau,t,\zeta)$ және 2) $P=P(\zeta)$, $f=f(\zeta)$ жағдайларын қарастырамыз.

1) $P=P(\tau,t,\zeta)$ болсын. Сонда (1.2.1) теңдеуінен келесі сызықты векторлы-матрицалық теңдеуді аламыз:

$$D_1 x = P(\tau,t,\zeta)x + f(\tau,t,\zeta), \tag{1.2.22}$$

мұндағы $P(\tau,t,\zeta)=\left[\tilde{p}_{ij}(\tau,t,\zeta)\right]_1^2$ – матрица, $f(\tau,t,\zeta)$ – (1.1.44) бағалауы мен (1.1.36) шартын қанағаттандыратын вектор-функция; D_1 – (1.1.1) дифференциалдау операторы.

Сызықты біртекті

$$D_1 x = P(\tau,t,\zeta)x \tag{1.2.23}$$

теңдеуінің $X(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ матрицантын интегралдық теңдеу арқылы енгіземіз:

$$X\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=E+\int\limits_{\tau^0}^{\tau} P\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)X\left(\tau^0,s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds, \tag{1.2.24}$$

мұндағы $\tau^0\in R$, E – екінші ретті бірлік матрица, $P(\tau,t,\zeta)$ матрицасы (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты, (t,ζ) бойынша үзіліссіз дифференциалданады және нормасы бойынша шенелген, яғни

$$P(\tau+\theta,t+\omega,\zeta)=P(\tau,t,\zeta)\in C_{\tau,t,\zeta}^{(0,e,\tilde{e})}\left(R\times R^m\times B_\delta^2\right), \tag{1.2.25}$$

$$\left|P\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)\right|\le p(\zeta)\in C_\zeta^{(0)}\left(B_\delta^2\right), \tag{1.2.26}$$

мұндағы $\omega_0=\theta,\ \omega=(\omega_1,...,\omega_m)$ периодтары компоненттері рационал бейөлшемдес; $p(\zeta)$ – қайсыбір теріс емес үзіліссіз скаляр функция, $e=(1,...,1),\ \tilde{e}=(1,1)$ – сәйкесінше m және 2-өлшемді векторлар.

(1.2.24) - (1.2.26) шарттары орындалғанда (1.2.23) теңдеуінің $\tau^0\in R$, $\tau\in R,\ t\in R^m,\ \zeta\in B_\delta^2$ үшін анықталған $x(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ шешімі бар.

Сондықтан, (1.2.24) интегралдық теңдеуінен $X(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ матрицантының табылатындығын итерациялау әдісі арқылы дәлелдеу қиын емес [47, 39-46 б.]. Сонда (1.1.28) шартты (1.2.23) теңдеуі үшін бастапқы есептің шешімі

$$x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=X\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)u\left(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\right) \tag{1.2.27}$$

өрнегімен анықталады, мұндағы $u(t,\zeta)$ – (1.1.28) шартында көрсетілген кластан алынған функция.

(1.1.36), (1.1.44), (1.2.25), (1.2.26) шарттары орындалғанда (1.1.25) шартты (1.2.22) теңдеу үшін бастапқы есеп бірмәнді шешіледі және шешім

$$x(\tau^0,\tau,t,\zeta)=X(\tau^0,\tau,t,\zeta)u(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta))+$$
$$+\int_{\tau^0}^{\tau}X(s,\tau,t,\zeta)f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds$$

арқылы өрнектеледі. (1.2.25) қатысындағы (τ,t) бойынша көппериодтылық қасиеті негізінде матрицант t-ға қатысты ω-периодты және (s,τ) бойынша диагоналды периодты болады:

$$X(s,\tau,t+\omega,\zeta)=X(s,\tau,t,\zeta),\quad X(s+\theta,\tau+\theta,t,\zeta)=X(s,\tau,t,\zeta).$$

D_1 операторының $u(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta))$ нөлі h,μ және $u(t,\zeta)$ функцияларына байланысты (θ,ω)-периодты болуы да, болмауы да мүмкін. Бұл сұрақ 1.1.1-теоремасының негіздеуінде толық талқыланды. (θ,ω)-периодты жағдайда оператордың $u^+(\tau^0,\tau,t,\zeta)=u(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta))$ нөлдерін

$$u^+(\tau^0,\tau+\theta,t+\omega,\zeta)=u^+(\tau^0,\tau,t,\zeta) \qquad (1.2.28)$$

арқылы, ал керісінше жағдайда $u^-(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ деп белгілейміз.

Тербелістер теориясында, әдетте, туындатқыш теңдеудің тербелмелі шешімдеріне сәйкес келетін жалпы түрдегі тербелмелі шешімдер табылады.

(1.2.23) біртекті теңдеу жағдайында (1.1.14) теңдеуі туындатқыш теңдеу және оны

$$D_1u=0 \qquad (1.2.29)$$

түрінде жазамыз, ал оның (θ,ω)-периодты шешімдері (1.2.28) арқылы анықталады. Демек, (1.2.23) теңдеудің (1.2.27) шешімдерінен (1.2.28), (1.2.29) түрдегі нөлдермен анықталатындарын бөліп алу керек. Сонда

$$x(\tau^0,\tau,t,\zeta)=X(\tau^0,\tau,t,\zeta)\,u^+(\tau^0,\tau,t,\zeta) \qquad (1.2.30)$$

шешімінің көппериодтылығы мәселесін зерттеуге келеміз. Себебі (1.2.27) шешімінен (θ,ω)-периодты нөлдерге (1.2.30) шешімдері сәйкес келеді.

(1.2.23) теңдеуі үшін бастапқы есептің шешімінің жалғыздығы негізінде (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодтылық шартын аламыз

$$[X(\tau^0,\tau^0+\theta,t,\zeta)-E]\,u^+(\tau^0,\tau^0,t,\zeta)=0. \qquad (1.2.31)$$

Дербес жағдайда,

$$\det\left[X\left(\tau^0,\tau^0+\theta,t,\zeta\right)-E\right]\neq 0 \qquad (1.2.32)$$

орындалады. Сонда (1.2.31) жүйенің, сол сияқты (1.2.23) теңдеуінің D_1 операторының нөлдеріне сәйкес келетін нөлдік көппериодты шешімі бар.

Жоғарыда келтірілген қағидаға сәйкес, (1.2.22) теңдеуі үшін (1.2.23) туындатқыш теңдеу болып табылады. Сондықтан келесі шешімнің

$$x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=X\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)u^+\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)+\int_{\tau^0}^{\tau}X\left(s,\tau,t,\zeta\right)f\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)ds \qquad (1.2.33)$$

(τ,t) бойынша (θ,ω)-периодтылығын зерттейміз, мұндағы бірінші қосылғыш – (1.2.23) біртекті теңдеудің (1.2.31) шартын қанағаттандыратын (1.2.30) шешімі.

Тербелістер теориясындағы біртекті емес сызықты теңдеудің негізгі мәселесі көппериодты шешімінің бар және жалғыз болуы туралы мәселе болып табылады, егер сәйкес біртекті теңдеудің осындай периодты тек тривиалды (нөлдік) шешімі бар болса.

Осыған байланысты (1.2.32) шарт орындалады деп есептелік.

Бұл жағдайда (1.2.18) формуласына ұқсас Грин функциясын құрамыз:

$$G\left(s,\tau,t,\zeta\right)=\begin{cases}\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1}X_0^{-1}\left(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta)\right)\times \\ \qquad\times X_0^{-1}\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right), s^*(\tau-\theta+0)\leq s\leq\tau; \\ \left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1}X_0^{-1}\left(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right), \\ \qquad\tau<s\leq s^*(\tau)\end{cases} \qquad (1.2.34)$$

және ол

$$\begin{aligned}&1^0.\ D_1G\left(s,\tau,t,\zeta\right)=P(\tau,t,\zeta)G\left(s,\tau,t,\zeta\right),\ \tau\neq s;\\ &2^0.\ G\left(\tau-0,\tau,t,\zeta\right)-G\left(\tau+0,\tau,t,\zeta\right)=E;\\ &3^0.\ G\left(s+\theta,\tau+\theta,t,\zeta\right)=G\left(s,\tau,t,\zeta\right); \qquad (1.2.35)\\ &4^0.\ G\left(s,\tau,t+\omega,\zeta\right)=G\left(s,\tau,t,\zeta\right);\\ &5^0.\ \int_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)}\left|G\left(s,\tau,t,\zeta\right)\right|ds\leq\widetilde{\Delta}_0(\zeta),\ |\tau-s|\leq\theta, 0\leq t_j\leq\omega_j,\ j=\overline{1,m},\zeta\in B_\delta^2\end{aligned}$$

қасиеттерін қанағаттандырады, мұндағы $X_0(\tau,t,\zeta)=X(0,\tau,t,\zeta)$, $\widetilde{\Delta}_0(\zeta)=\widetilde{\Omega}e^{2p(\zeta)\theta}$. (1.2.35) қасиетінің дәлелдеуі А2 қосымшасында келтірілген.

(τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты жалғыз шешім

$$x^*(\tau,t,\zeta)=\int\limits_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)} G(s,\tau,t,\zeta)f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds \qquad (1.2.36)$$

формуласымен анықталады және

$$\begin{aligned}&|x^*(\tau,t,\zeta)|\le \int\limits_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)} |G(s,\tau,t,\zeta)||f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))|ds\le\\ &\le \Lambda(\zeta)\int\limits_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)} |G(s,\tau,t,\zeta)|ds\le \widetilde{\Delta}_0(\zeta)\Lambda(\zeta)=\Delta(\zeta),\ \zeta\in B_\delta^2\end{aligned} \qquad (1.2.37)$$

бағалауын қанағаттандырады.

(1.2.35) - (1.2.37) тұжырымдары P матрицасы (τ,t) бойынша көппериодты болған жағдайда келтірілген негіздеулерге ұқсас дәлелденеді.

Осылайша, келесі теорема орынды.

1.2.4-теорема. *(1.1.36), (1.1.44), (1.2.25), (1.2.26) және (1.2.32) шарттары орындалғанда (1.2.22) жүйесінің (1.2.37) бағалауын қанағаттандыратын (1.2.36) өрнегімен анықталатын жалғыз шешімі бар.*

Жүйе тұрақты коэффициентті болғанда меншікті мәндерінен жүйенің дихотомиялық күйін оңай анықтай алатынымыз белгілі. Ал сызықты теңдеулер айнымалы коэффициентті болған жағдайда олардың шешімдерінің дихотомиялық қасиеті бар-жоғын анықтау қиын.

Егер теңдеудің дихотомиялық екенін анықталса, дербес жағдайда олардың барлық шешімдері $\tau\to+\infty$ немесе $\tau\to-\infty$ болғанда шенелген болса, онда (1.2.32) нөлдік емес көппериодты шешімдердің болмауы шарты автоматты түрде орындалады. Ал (1.2.23) біртекті теңдеуінің матриканты екі матрицалық X_- және X_+ шешімдерінің қосындысына жіктеледі, әрі

$$\begin{aligned}&X(\tau^0,\tau,t,\zeta)=X_-(\tau^0,\tau,t,\zeta)+X_+(\tau^0,\tau,t,\zeta),\\ &|X_-(s,\tau,t,\zeta)|\le\widetilde{\Omega}_0e^{-\kappa(\tau-s)},\tau>s,\ |X_+(s,\tau,t,\zeta)|\le\widetilde{\Omega}_0e^{\kappa(\tau-s)},\tau<s\end{aligned} \qquad (1.2.38)$$

экспоненциалдық бағалауын қанағаттандырады, мұндағы $\widetilde{\Omega}_0\ge1$ және $\kappa>0$ – тұрақтылар. Сонда

$$G(s,\tau,t,\zeta)=\begin{cases} X_-(s,\tau,t,\zeta), & s\le\tau,\\ -X_+(s,\tau,t,\zeta), & s>\tau\end{cases} \qquad (1.2.39)$$

деп алсақ, (1.2.22) теңдеуінің (τ,t) бойынша көппериодты жалғыз шешімін

$$x^*(\tau,t,\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(s,\tau,t,\zeta)f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds \qquad (1.2.40)$$

қатысы түрінде жазамыз, ал бұл шешімнің Ляпуновша өрнектелуі болады.

(1.2.39) Грин функциясы (1.2.35) формуласындағы 1^o-4^o қасиеттері және (1.2.38) негізінде

$$|G(s,\tau,t,\zeta)|\leq\widetilde{\Omega}_0e^{-\kappa|\tau-s|} \qquad (1.2.41)$$

бағалауын қанағаттандырады. (1.2.39) функциясы үшін (1.2.35) қатысының 1^o-4^o қасиеттерінің және (1.2.41) бағалауының орындалатындығы А2 қосымшасында дәлелденген.

(1.2.41) теңсіздігінен (1.2.40) шешімі үшін

$$|x^*(\tau,t,\zeta)|\leq\frac{\widetilde{\Omega}_0}{\kappa}\|f\| \qquad (1.2.42)$$

бағалауы орынды, мұндағы

$$\|f\|=\sup_{s,\tau,t}|f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))|\leq\frac{\widetilde{\Omega}_0}{\kappa}\Lambda(\zeta)\,.$$

(1.2.23) теңдеудің кез келген шешімі (1.2.38) шартынан $\tau\to+\infty$ немесе $\tau\to-\infty$ болғанда нөлге ұмтылады. Демек, (1.2.23) теңдеуінің жалғыз ғана (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты тривиалды шешімі бар және (1.2.32) шарты орындалады. Бұл дербес жағдайдан 1.2.4-теоремасының орнына келесі теореманы аламыз.

1.2.5-теорема. *(1.1.36), (1.1.44), (1.2.25), (1.2.26) және (1.2.38) шарттары орындалғанда (1.2.22) жүйесінің (1.2.42) бағалауын қанағаттандыратын жалғыз ғана (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі бар және ол (1.2.40) интегралдық өрнегі арқылы анықталады.*

Бұл жағдайда (1.2.39) формуласы арқылы анықталған Грин функциясы (1.2.34) формуласымен салыстырғанда біршама ықшамдалғанын және (1.2.38) бағалауынан (1.2.32) шарттың орындалатындығы шығатынын көреміз.

Егер $X_-+X_+=X$ қосындысында бір қосылғышы нөлдік матрицаға тең болса, онда Грин функциясы $X=G$ матрицантымен анықталады, ал (1.2.40) интегралындағы $(-\infty,+\infty)$ болып тұрған шектері $X=X_-,X_+=O$ болғанда $(-\infty,\tau)$ шегіне, $X=X_+,X_-=O$ болғанда $(+\infty,\tau)$ шегіне ауыстырылады.

2) $P=P(\zeta)$, $f=f(\zeta)$ болсын. Сонда (1.2.1) сызықты теңдеуінде $t_0=\tau,t_1,...,t_m$ уақыт айнымалылары айқын түрде енбесе, онда мұндай теңдеу *автономды* деп аталады. Егер (1.2.1) теңдеуіне t_j, $j=\overline{0,m}$ айнымалыларының бірі айқын түрде енбейтін болса, онда ол енбеген айнымалы бойынша *салыстырмалы автономды* деп аталады.

Сонымен автономды

$$D_1 x = P(\zeta)x + f(\zeta) \tag{1.2.43}$$

теңдеуін қарастыралық, мұндағы $P(\zeta) = [\widetilde{p}_{ij}(\zeta)]_1^2$ – матрица, $f(\zeta) = (f_1(\zeta), f_2(\zeta))$ – вектор-функция.

$\zeta \in B_\delta^2$ мәндерінде анықталған $P(\zeta)$ матрицасы мен $f(\zeta)$ вектор-функциясы үшін

$$P(\zeta) \in C_\zeta^{(\widetilde{e})}(B_\delta^2),\ |P(\zeta)| \le p(\zeta), \tag{1.2.44}$$

$$f(\zeta) \in C_\zeta^{(\widetilde{e})}(B_\delta^2),\ |f(\zeta)| \le \Lambda(\zeta) \tag{1.2.45}$$

шарттары орындалады деп ұйғаралық, мұндағы $p(\zeta)$ және $\Lambda(\zeta)$ – B_δ^2 ашық шарында теріс емес үзіліссіз функциялар.

(1.2.44) және (1.2.45) шарттары орындалғанда (1.2.43) теңдеуінің дербес жағдайда (1.1.28) бастапқы шартымен берілген

$$D_1 x = P(\zeta)x \tag{1.2.46}$$

біртекті теңдеуінің жалғыз $x(\tau^0, \tau, \zeta)$ шешімі бар. (1.2.43)-(1.1.28) есебінің (1.2.33) формуласына ұқсас шешімі

$$x\left(\tau^0, \tau, \zeta\right) = X\left(\tau^0, \tau, \zeta\right) u\left(h(\tau^0, \tau, t), \mu(\tau^0, \tau, \zeta)\right) + \int_{\tau^0}^{\tau} X\left(s, \tau, \zeta\right) f\left(\mu(s, \tau, \zeta)\right) ds \tag{1.2.47}$$

арқылы анықталады, мұндағы $X(\tau^0, \tau, \zeta)$ – (1.2.46) біртекті теңдеуін және $X(\tau^0, \tau^0, \zeta) = E$ шартын қанағаттандыратын матрицант.

Дербес жағдайда, (1.2.47) өрнегінен $f = 0$ болғанда (1.2.46) біртекті теңдеуінің

$$x\left(\tau^0, \tau, \zeta\right) = X\left(\tau^0, \tau, \zeta\right) u\left(h(\tau^0, \tau, t), \mu(\tau^0, \tau, \zeta)\right) \tag{1.2.48}$$

жалғыз шешімін аламыз. Егер (1.2.43) теңдеудің оң жағын нөлге айналдыратын

$$P(\zeta)x^0(\zeta) + f(\zeta) = 0, \tag{1.2.49}$$

дифференциалданатын $x^0(\zeta)\in C_{\zeta}^{(\tilde{e})}(B_{\delta}^2)$ вектор-функциясы бар болса, онда

$$x = x^0\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big) \tag{1.2.50}$$

(1.2.43) теңдеуінің шешімі болады.

Шынында да, (1.2.43) ауыстыруын (1.2.50) теңдеуге қойсақ,

$$D_1 x^0\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big) = P\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big)x^0\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big) + f\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big).$$

Көріп отырғанымыздай, бұл теңдіктің сол жағы (1.2.50) функциясы D_1 оператордың нөлі болғандықтан, ал оң жағы (1.2.49) теңдігіне байланысты нөлге айналады. Демек, (1.2.50) вектор-функциясы (1.2.43) теңдеудің шешімі.

Сонымен (1.2.43) теңдеуі үшін Коши есебінің жалғыз шешімі (1.1.28) шартынан (1.2.47) түрінде бірмәнді өрнектеледі.Егер бастапқы функция

$$u(t,\zeta) \neq x^0(\zeta) \tag{1.2.51}$$

шартын қанағаттандырса, онда (1.2.47) шешімі ақырлы τ үшін (1.2.43) теңдеуінің шешімінің жалғыздығы қасиетінен (1.2.50) шешімімен беттеспейді, мұндағы $x^0(\zeta)$ шамасы (1.2.49) қатысымен анықталады.

$x(\tau^0,\tau,\zeta)$ вектор-функциясы (1.2.43) теңдеуінің бекітілген $\tau^0 \in R$ мәнінде $\zeta \in B_{\delta}^2$ айнымалысына қатысты бірқалыпты болғанда

$$\lim_{\tau\to+\infty} x(\tau^0,\tau,\zeta) = x^0(\zeta)\in C_{\zeta}^{(\tilde{e})}(B_{\delta}^2) \tag{1.2.52}$$

шартты қанағаттандыратын шешімі болсын. Сонда (1.2.52) шектік функциясы үшін (1.2.49) қасиеті орынды екенін дәлелдеуге болады.

Шынында да, егер керісінше тұжырымдасақ,

$$\left|P(\tilde{\zeta})x^0(\tilde{\zeta}) + f(\tilde{\zeta})\right| > a$$

орындалады. Олай болса, ζ айнымалысына қатысты бірқалыптылығы негізінде

$$\left|P\big(\mu(s,\tau,\zeta)\big)x^0\big(\mu(s,\tau,\zeta)\big) + f\big(\mu(s,\tau,\zeta)\big)\right| > a$$

орынды, мұндағы, $a = const > 0$, $\tilde{\zeta} = \mu(s,\tau,\zeta)$ – (1.1.11) формуласындағы ζ-ға қатысты сызықты, s және τ айнымалыларына бойынша периодты вектор-функция, $\zeta = \mu(\tau,s,\tilde{\zeta})$.

$\left|x - x^0\big(\mu(s,\tau,\zeta)\big)\right| < a_0$ болғанда, үзіліссіздігінен қайсыбір ζ мәндері үшін

$$\left|P\big(\mu(s,\tau,\zeta)\big)x+f\big(\mu(s,\tau,\zeta)\big)\right|>\frac{a}{2} \qquad (1.2.53)$$

орындалады. Жеткілікті үлкен $\tau'>\tau^0$ үшін $x(\tau',\tau',\zeta)=x^0(\zeta)$ шарты орындалғанда

$$D_1x(\tau',\tau,\zeta)=P(\zeta)x(\tau',\tau,\zeta)+f(\zeta)$$

теңдігін интегралдасақ,

$$x(\tau',\tau,\zeta)=x^0\big(\mu(\tau',\tau,\zeta)\big)+\int_{\tau'}^{\tau}\big[P\big(\mu(s,\tau,\zeta)\big)x\big(\tau',s,\mu(s,\tau,\zeta)\big)+f\big(\mu(s,\tau,\zeta)\big)\big]ds$$

шешімін аламыз. Бұдан (1.2.53) шарты орындалатын қайсыбір ζ мәндері үшін

$$\left|x(\tau',\tau,\zeta)-x^0\big(\mu(\tau',\tau,\zeta)\big)\right|>(\tau-\tau')\cdot\frac{a}{2}$$

бағалауын аламыз, ал бұл (1.2.52) шартына қайшы.

Егер (1.2.43) теңдеуінің $x(\tau^0,\tau,\zeta)$ шешімі бекітілген τ^0 мәнінде ζ-ға қатысты бірқалыпты және ол үшін

$$\lim_{\tau\to-\infty}x(\tau^0,\tau,\zeta)=x^0(\zeta)\in C_{\zeta}^{(\tilde{e})}(B_{\delta}^2) \qquad (1.2.54)$$

шартын орындалса, онда D_1 операторының $x=x^0\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big)$ нөлі (1.2.49) қасиетін қанағаттандыратындығы салыстырмалы түрде дәлелденеді.

Осылайша D_1 операторының берілген (1.2.43) теңдеуінің шешімі болатын, бірақ (1.2.47) формуласымен қамтылмайтын τ-ға қатысты периодты $x=x^0\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big)$ нөлінің болатындығы негізделді. Осындай сипаттағы шешімдер (1.2.43) теңдеуінің *ерекше шешімдері* деп аталады.

Сонымен келесі теорема дәлелденді.

1.2.6-теорема. *Егер (1.2.43) теңдеуінің (1.1.28), (1.2.44) және (1.2.45) шарттары орындалғанда (1.2.47) өрнегімен анықталған* $x(\tau^0,\tau,\zeta)$ *шешімінің* $|\tau|\to+\infty$ *болғанда (1.2.52) және (1.2.54) түрлеріндегі шектері бар болса, онда* D_1 *операторының* τ*-ға қатысты* θ_1*-периодты* $x=x^0\big(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\big)$ *нөлі ерекше шешім болады.*

(1.2.47) жалпы шешімімен анықталатын (1.2.46) және (1.2.43) теңдеулердің көппериодты шешімдері алдыңғы пункттерде қарастырылған әдістерге ұқсас зерттеледі.

Оларға сәйкес (1.2.46) теңдеуінің (1.2.48) формуласымен анықталатын (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімдері бар, егер $X(\tau^0,\tau,\zeta)$ матриცанты мен $u\left(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\right)$ нөлі τ-ға қатысты θ-периодты болса.

Егер τ бойынша θ-периодты нөлден өзге шешімнің болмауын анықтайтын (1.2.32) шартына сәйкес

$$\det\left[X\left(\tau^0,\tau^0+\theta,\zeta\right)-E\right]\neq 0 \tag{1.2.55}$$

шарты орындалса, онда (1.2.43) теңдеуінің жалғыз τ-ға қатысты θ-периодты шешімі бар және ол (1.2.36) формуласына ұқсас

$$x^*(\tau,\zeta)=\int_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)} G(s,\tau,\zeta)f(\mu(s,\tau,\zeta))ds \tag{1.2.56}$$

интегралдық өрнегі арқылы анықталады, мұндағы $G(s,\tau,\zeta)$ – (1.2.34) формуласына ұқсас анықталған Грин функциясы. (1.2.35) қатысындағы 5° қасиеті мен (1.2.44), (1.2.45) шарттарынан (1.2.56) шешім үшін

$$\left|x^*(\tau,\zeta)\right|\leq \int_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)}\left|G(s,\tau,\zeta)\right|\left|f(\mu(s,\tau,\zeta))\right|ds\leq \Delta_0(\zeta)\Lambda(\zeta)=\Delta(\zeta)$$

бағалауын аламыз. Дербес жағдайда, (1.2.43) теңдеу сындық емес жағдайда қарастырылса, онда θ-периодты (1.2.56) шешім

$$x^*(\tau,\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(s,\tau,\zeta)f(\mu(s,\tau,\zeta))ds \tag{1.2.57}$$

арқылы өрнектеледі, мұндағы $G(s,\tau,\zeta)$ – Грин функциясы, ол (1.2.40) формуласына ұқсас анықталады. (1.2.41), (1.2.44) және (1.2.45) негізінде (1.2.57) шешімі үшін

$$\left|x^*(\tau,\zeta)\right|\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(s,\tau,\zeta)\right|\left|f(\mu(s,\tau,\zeta))\right|ds\leq \Omega_0\Lambda(\zeta)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\kappa|\tau-s|}ds\leq \frac{2\Omega_0}{\kappa}\Lambda(\zeta)$$

бағалауы орынды. Осылайша, келесі теореманы аламыз.

1.2.7-теорема. *(1.2.44), (1.2.45) және (1.2.55) шарттары орындалсын. Онда (1.2.43) теңдеуінің (1.2.56) интегралық өрнегімен анықталатын τ бойынша θ-периодты жалғыз $x^*(\tau,\zeta)$ шешімі бар, әрі ол сындық емес жағдайда (1.2.57) арқылы анықталады.*

1.3 Қоздыртқылы D_2 дифференциалдау операторлы екінші ретті сызықты жүйелердің көппериодты шешімдері

$(\tau,t,\zeta)\in R\times R^m\times B_\delta^2$ айнымалыларына бойынша

$$D_2=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle e,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle+\left\langle 2\pi\nu^0 I_2\zeta+\psi(\zeta),\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle \tag{1.3.1}$$

дифференциалдау операторын қарастыралық, мұндағы $\dfrac{\partial}{\partial\zeta}=\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi},\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right)$ – векторлық оператор, $\zeta=(\xi,\eta)$, ν^0 – оң тұрақты, I_2 – екінші ретті симплектикалық бірлік, $\psi(\zeta)=(\psi_1(\zeta),\,\psi_2(\zeta))$ – вектор-функция.

(1.3.1) операторының векторлық өрісі (τ,t,ζ) мәндерінде

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{d\tau}=e,\\[2mm] \dfrac{d\zeta}{d\tau}=2\pi\nu^0 I_2\zeta+\psi(\zeta)\end{cases} \tag{1.3.2}$$

сипаттаушы теңдеулер жүйесімен анықталады.

(1.3.2) теңдеуінің бірінші векторлық теңдеуі (τ,t) кеңістігінде бас диагоналға параллель тұрақтылар бойымен $(\tau,t)=(\tau,t_1,...,t_m)$ уақыт айнымалылары бойынша, ал екінші векторлық теңдеуі қарапайым Ляпунов жүйесі арқылы анықталған бағытпен $\zeta=(\xi,\eta)$ кеңістік айнымалылары бойынша дифференциалдау жүргізілетінін сипаттайды.

Демек, $\zeta\in B_\delta^2$ үшін $\psi(\zeta)=\psi(\xi,\eta)$ вектор-функциясы аналитикалық және оның ζ бойынша дәрежелік қатарға жіктелуіндегі $\zeta^k=\xi^{k_1}\eta^{k_2}$ дәрежелері кем дегенде екінші реттен басталады, яғни

$$\psi(\zeta)=\sum_{|k|\geq 2}\psi_k\zeta^k,\; k=(k_1,k_2),\; |k|=|k_1|+|k_2|. \tag{1.3.3}$$

Ендеше g_k коэффициентті және $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ еркін тұрақтылы

$$|\zeta|^2+\frac{2}{\nu^0}g(\zeta)=\varepsilon^2,\quad g(\zeta)=\sum_{|k|\geq 3}g_k\zeta^k \tag{1.3.4}$$

бірінші интегралын аламыз, мұндағы $|\zeta|^2=\xi^2+\eta^2$.

$$D_2x(\tau,t,\zeta)=0 \tag{1.3.5}$$

теңдеуінен анықталатын D_2 операторының нөлдерін қарастыралық, мұндағы $x=(x_1,x_2)$ – $(\tau,t,\zeta)\in R\times R^m\times B_\delta^2$ айнымалы ізделінді вектор-функция.

(1.3.5) теңдеудің сипаттаушы жүйесі (1.3.2) векторлық өрісі болады. (1.3.2) жүйенің бірінші теңдеуінің $(\tau^0,t^0)\in R\times R^m$ нүктесінен шығатын (1.1.3) жалпы шешімі бар. Осы шешім арқылы

$$\begin{gathered} D_2 h(s,\tau,t)=0, \quad h(\tau,\tau,t)=t; \quad h(s,\tau^0,h(\tau^0,\tau,t))=h(s,\tau,t); \\ h(s+\theta,\tau+\theta,t+q\omega)=h(s,\tau,t)+q\omega,\ q\in Z^m \end{gathered} \tag{1.3.6}$$

қасиеттерін [47, 21-26 б.] қанағаттандыратын $s\in R$ параметрлі (1.1.5) бірінші интегралы анықталған. (1.3.2) жүйесінің екінші теңдеуін

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau}=2\pi\nu^0\eta+\psi_1(\xi,\eta), \\ \dfrac{d\eta}{d\tau}=-2\pi\nu^0\xi+\psi_1(\xi,\eta) \end{cases} \tag{1.3.7}$$

арқылы жазалық. Ляпунов әдісі бойынша [1, 246-251 б.; 2, 166-171 б.] (1.3.3) шартына сәйкес

$$\xi=r\cos\varphi, \quad \eta=r\sin\varphi \tag{1.3.8}$$

ауыстыруы арқылы (1.3.7) теңдеуі мен (1.3.4) бірінші интегралын

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\tau}=r^2\ \psi_1(r,\varphi), \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau}=2\pi\nu^0+r\psi_2(r,\varphi), \end{cases} \tag{1.3.9}$$

$$r[1+r\,w^*(r,\varphi)]=\varepsilon \tag{1.3.10}$$

түрлеріне келтіреміз, мұндағы $w^*(r,\varphi)$ – r бойынша аналитикалық функция, $r\in R_\delta=\{r\in R:|r|<\delta\}$, $\varphi\in R$. Сонда (1.3.9) және (1.3.10) формулаларынан

$$\tau=\frac{1}{2\pi\nu^0}\int_0^\varphi\left[1+\tau_1(\varphi)\varepsilon+\tau_2(\varphi)\varepsilon^2+...\right]d\varphi\equiv\tau(\varphi,\varepsilon) \tag{1.3.11}$$

шамасын табамыз, мұнда $\tau_j(\varphi+2\pi)=\tau_j(\varphi)$ – φ коэффициентіне қатысты аналитикалық функция. (1.3.11) қатысынан $\tau(\varphi,\varepsilon)$ функциясы $\varphi=\varphi(\tau,\varepsilon)$

функциясына қатысты керіленетінін, аналитикалық және периодты болатынын көреміз, әрі периоды

$$\theta^0 = \tau(\varphi+2\pi,\varepsilon)-\tau(\varphi,\varepsilon)=\nu_0^{-1}\left(1+\theta_1^0\varepsilon+\theta_2^0\varepsilon^2+...\right) \qquad (1.3.12)$$

арқылы анықталады, мұндағы $\theta_j^0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tau_j(\varphi)d\varphi,\ j=0,1,2,...$ – коэффициенттер және $\varepsilon=0$ болғанда $\theta^0=(\nu^0)^{-1}$.

Сонымен (1.3.9) - (1.3.12) қатыстары арқылы (1.3.7) жүйесінің кез-келген

$$\zeta=\mu(\tau,\tau^0,\zeta^0) \qquad (1.3.13)$$

шешімі барлық $\tau\in R,\ \tau^0\in R,\ \zeta\in B_\delta^2$ аргументтерге қатысты аналитикалық және τ,τ^0 бойынша θ^0-периодты болатыны дәлелденді. Демек, уақыт айнымалыларына қатысты $h=h(s,\tau,t)$ сипаттауышымен қатар, (1.3.7) жүйесінің кеңістік айнымалыларының тағы бір $\mu=\mu(s,\tau,\zeta)$ сипаттауышы бар және ол келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned}
&1^0.\ \mu(s,\tau,\zeta)=\sum_{j\in Z,\,k\in N^2}\mu_{jk}\,\zeta^k\,e^{2\pi i\,j\nu^0(\tau-s)},\\
&2^0.\,D_2\mu(s,\tau,\zeta)=0,\ \ \mu(\tau,\tau,\zeta)=\zeta,\ \ \mu(s,\tau^0,\mu(\tau^0,\tau,\zeta))=\mu(s,\tau,\zeta),\\
&3^0.\,\mu(s+\theta^0,\tau,\zeta)=\mu(s,\tau+\theta^0,\zeta)=\mu(s,\tau,\zeta),\\
&4^0.\,\left|\mu(s,\tau,\zeta)\right|\le r,\,\left|\zeta\right|\le\delta,\,r=r(\varepsilon)\to 0,\,\varepsilon\to 0.
\end{aligned} \qquad (1.3.14)$$

(1.3.13) сипаттауышының (1.3.14) қасиетінің 2° және 3° пункттері (1.3.7) жүйесінің шешімінің жалғыз болуы негізінде дәлелденеді. Ал қалғандарының дәлелдемелері жоғарыдағы (1.3.9) - (1.3.12) қатыстарынан шығады.

(1.3.5) теңдеудің

$$x(\tau,t,\zeta)\big|_{\tau=\tau^0}=u(t,\zeta)\in C_{t,\zeta}^{(e,\tilde{e})}\left(R^m\times B_\delta^2\right) \qquad (1.3.15)$$

бастапқы шартымен берілген Коши есебі шешімі

$$x(\tau,t,\zeta)=u(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta)) \qquad (1.3.16)$$

өрнегі арқылы жазылады. 1.1.1-теоремасынан $x(\tau,t,\zeta)$ шешімі t бойынша ω-периодты болуы үшін $u(t,\zeta)$ бастапқы функциясының t шамасына қатысты ω -периодты болуы қажетті және жеткілікті екендігін аламыз, яғни

$$u(t+q\omega,\zeta)=u(t,\zeta)\in C_{t,\zeta}^{(e,\tilde{e})}\left(R^m\times B_\delta^2\right). \qquad (1.3.17)$$

(1.1.20), (1.3.17) шарттары және (1.3.6), (1.3.14) қасиеттері орындалғанда (1.3.5)-(1.3.15) есебінің (1.3.16) шешімі $\nu_0=1/\theta^0,\nu_1=\omega_1^{-1},...,\nu_m=\omega_m^{-1}$ жиіліктер базисінде τ-ға қатысты квазипериодты болады.

Шынында да, $\tilde{\tau}=(\tau_1,...,\tau_m)$, $\tilde{\tau}^0=(\tau_1^0,...,\tau_m^0)$ және $\tilde{h}(\tilde{\tau},\tilde{\tau}^0,t^0)=t^0+\tilde{\tau}-\tilde{\tau}^0$ деп алсақ, $\tilde{h}(\tilde{\tau},\tilde{\tau}^0,t^0)\Big|_{\tilde{\tau}=e\tau,\ \ \tilde{\tau}^0=e\tau^0}=h(\tau,\tau^0,t^0)$ теңдігін аламыз. Олай болса, (1.3.16) шешімін $\tilde{\tau}=e\tau$, $\tilde{\tau}^0=e\tau^0$ мәндерінде $(\tau,\tilde{\tau},t)$ бойынша (θ^0,ω,ω)-периодты

$$w\left(\tau^0,\tilde{\tau}^0,\tau,\tilde{\tau},t,\zeta\right)=u\left(\tilde{h}\left(\tilde{\tau}^0,\tilde{\tau},t\right),\mu\left(\tau^0,\tau,\zeta\right)\right)$$

функциясынан анықтаймыз, ал бұл (1.3.16) нөлінің τ-ға қатысты квазипериодты болатындығын білдіреді.

Дербес жағдайда, (1.3.17) бастапқы функциясы $(t,\zeta)\in\Pi_\rho^m\times\Pi_{\delta,\rho}^2$ болғанда нақты аналитикалық, яғни

$$u\,(t,\zeta)=\sum_{j\in Z^m,\,k\in N^2}u_{jk}\,\zeta^k\,e^{2\pi i\langle j,\nu t\rangle} \qquad (1.3.18)$$

түрінде жазылады, мұндағы $\Pi_{\delta,\rho}=\{\zeta\in C:|\operatorname{Re}\zeta|<\delta,|\operatorname{Im}\zeta|<\rho\}$, u_{jk} – Фурье коэффициенттері. Сонда (1.3.16), (1.3.18) өрнектерін және (1.3.14) қатысының 1° қасиетін ескерсек,

$$u\,(\tau^0,\tau,t,\zeta)=\sum_{k\in N^2,\,(j_0,j)\in Z\times Z^m}u_{(j_0,j)k}\zeta^k e^{2\pi i\left[j_0\nu^0+\left\langle j,\nu\,(t-e\tau+e\tau^0)\right\rangle\right]} \qquad (1.3.19)$$

түрдегі D_2 операторының нақты аналитикалық $u\,(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ нөлін анықтаймыз.

Сонымен келесі тұжырым дәлелденді.

1.3.1-теорема. *(1.1.20), (1.3.3), (1.3.4) және (1.3.18) шарттары орындалғанда (1.3.1) дифференциалдау операторының (1.3.16) өрнегімен анықталған нөлдері нақты аналитикалық және (1.3.19) жіктелуі арқылы анықталады, әрі олар* t*-ға қатысты* ω*-периодты және* τ *бойынша* (ν^0,ν) *жиіліктер базисінде квазипериодты болады.*

I. Біртекті сызықты жүйе

$$D_2x=Ax \qquad (1.3.20)$$

келесі бастапқы шартымен берілсін:

$$x\big|_{\tau=\tau^0} = u(t+q\omega,\zeta) = u(t,\zeta) \in C_{t,\zeta}^{(e,\tilde{e})}\left(\Pi_\rho^m \times \Pi_{\delta,\rho}^2\right). \qquad (1.3.21)$$

A матрицасын қалыпты түрге келтірілген болсын, яғни

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad (1.3.22)$$

мұндағы α және $\beta = 2\pi\nu_* > 0$ – тұрақтылар.

(1.3.20)-(1.3.21) есебінің жалғыз нақты аналитикалық шешімі

$$x(\tau^0,\tau,t,\zeta) = X(\tau-\tau^0)\, u\left(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\right) \qquad (1.3.23)$$

арқылы өрнектеледі. Ал (1.3.20) жүйесінің матриканты (1.1.23) матрицалық функциясы негізінде

$$X(\tau) = e^{\alpha\tau}\begin{pmatrix} \cos\beta\tau & \sin\beta\tau \\ -\sin\beta\tau & \cos\beta\tau \end{pmatrix},\ \beta > 0 \qquad (1.3.24)$$

арқылы анықталады.

Негізгі мәселені зерттеу кезінде (1.3.20) жүйесінің (θ,ω)-периодты тривиалды шешімдерінің болмауы маңызды. Осыған байланысты төменде екі түрлі мәселені қарастырамыз.

1°. $\zeta \in \Pi_{\delta,\rho}^2$ айнымалысынан ғана тәуелді болатын нақты аналитикалық $x = x(\zeta)$ шешімдерінің болуы.

2°. $(\tau,t,\zeta) \in \Pi_\rho \times \Pi_\rho^m \times \Pi_{\delta,\rho}^2$ айнымалылары бойынша t-ға қатысты ω-периодты, τ-ға қатысты θ-периодты және нақты аналитикалық нөлден өзге $x = x(\tau,t,\zeta)$ шешімдерінің табылуы.

1° мәселесін шешу үшін

$$D_{2(\zeta)}x = Ax \qquad (1.3.25)$$

жүйесін қарастырамыз, мұндағы $D_{2(\zeta)}$ – дифференциалдау операторы. Ол

$$D_{2(\zeta)} = \left\langle 2\pi\nu^0 I_2\zeta + \psi(\zeta), \frac{\partial}{\partial\zeta} \right\rangle \qquad (1.3.26)$$

қатысымен берілген және $x(\zeta)$ шешімін

$$x(\zeta) = \sum_{k\in N_0^2} x_k^0\, \zeta^k \qquad (1.3.27)$$

дәрежелік қатары түрінде іздейміз, ал x_k^0 тұрақтысы анықталмаған коэффициенттер әдісімен табылады.

A матрицасының меншікті мәндерінің комплекс сан болуына байланысты 1° мәселесінің жалғыз тривиалды шешімі бар, өйткені (1.3.25)-(1.3.26) есебіне (1.3.27) ауыстыруын жасағанда алынған теңдіктің ζ^k шамаларына қатысты сол жағында $B_0 = 0,\ B_k = \gamma_k I_2,\ |k| \neq 0$ матрицаларымен анықталған $B_k x_k^0$, ал оң жағында Ax_k^0 коэффициенттері пайда болады, яғни $\gamma_k = 2\pi\nu^0 k$ тұрақтылы $[B_k - A]x_k^0 = [\gamma_k I_2 - A]x_k^0 = 0$ жүйесін аламыз. $\det[B_k - A] \neq 0$ болғандықтан $x_k = 0,\ (k = 0,1,2,...)$ болады, ал бұдан $x^0 = 0$.

2° мәселесін зерттеу барысында уақыт айнымалылары бойынша жиіліктердің рационалды тәуелсіз болуы маңызды рөл атқарады, яғни

$$\omega_0 = \theta, \omega_1, ..., \omega_m,\ \omega_{m+2} = \theta_* = \nu_*^{-1};\ \frac{\omega_i}{\omega_j} \notin Q,\ i \neq j, \omega_{m+1} = \omega^0 = \theta^0(\varepsilon). \qquad (1.3.28)$$

(1.3.28) шарты орындалғанда 1.3.1-теоремасы бойынша D_2 операторының (θ,ω)-периодты нөлдері тек ζ айнымалысынан тәуелді $u = u(\zeta)$ түрінде немесе тұрақты болады. Сонда (1.3.20) жүйесінің τ-ға қатысты θ-периодты нөлімен анықталған $x = u(\zeta)$ шешімі (1.3.23) арқылы

$$x(\tau^0,\tau,t,\zeta) = X(\tau - \tau^0)\, u(\,\mu(\tau^0,\tau,\zeta)) \qquad (1.3.29)$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы $D_2 u(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)) = 0$, дербес жағдайда ол $u = u^0$ тұрақты векторы болуы мүмкін.

$\alpha \neq 0$ болғанда (1.3.29) өрнегінен (1.3.20) жүйесінің τ-ға қатысты θ-периодты жалғыз $x = 0$ шешімі болатындығы шығады. Егер $\alpha = 0$ болса, онда (1.3.28) шартынан θ-периодты тривиалды шешімі бар, әрі

$$\det[X(\theta) - E] \neq 0 \qquad (1.3.30)$$

шарты орынды болып қалады.

Енді зерттеулерді қорытып, келесі теореманы тұжырымдалық.

1.3.2-теорема. *(1.3.3), (1.3.4), (1.3.22) және (1.3.28) шарттары орындалғанда (1.3.20) жүйесінің нөлден өзге* (τ,t) *бойынша* (θ,ω)*-периодты шешімдері болмайды.*

Біртекті жүйенің нөлден өзге нақты аналитикалық көппериодты шешімдерінің табылатындығына қатысты келесі теореманы келтірелік.

1.3.3-теорема. *(1.3.3), (1.3.4), (1.3.22) шарттары орындалғанда (1.3.20)-(1.3.21) есебінің (1.3.23) түріндегі шешімі* $(\tau,t,\zeta) \in \Pi_\rho \times \Pi_\rho^m \times \Pi_{\delta,\rho}^2$ *болғанда* *нақты аналитикалық t-ға қатысты ω-периодты және τ бойынша $\alpha \neq 0$ болғанда (ν^0, ν) және $\alpha = 0$ болғанда (ν, ν_0, ν^0) жиіліктері базисінде квазипериодты болады.*

Бұл тұжырымның дәлелдемесі (1.3.20)-(1.3.21) бастапқы есебінің (1.3.23) шешімі құрылымын ескергенде 1.3.1 және 1.3.2-теоремаларынан шығады.

ε мәндеріне байланысты ν^0 жиілігі басқа $\nu_j, j = \overline{0, m+1}$ жиіліктерімен өлшемдес не бейөлшемдес болуы мүмкін екендігін байқауға болады.

II. Автономды сызықты жүйені

$$D_2 x = Ax + f^0(\zeta) \tag{1.3.31}$$

қарастыралық, мұнда $f^0(\zeta)$ вектор-функциясы $\zeta \in B_\delta^2$ мәндері бойынша нақты аналитикалық және

$$f^0(\zeta) = \sum_{k \in N^2} f_k^0 \zeta^k \tag{1.3.32}$$

Фурье қатарына жіктеледі.

(1.3.31) жүйеге сәйкес (1.3.5) біртекті жүйесінің нөлден өзге көппериодты шешімдері жоқ екені белгілі. Демек, (1.3.31) жүйесінің де тек жалғыз ғана шешімі бар. Тек ζ айнымалысынан тәуелді шешімнің табылатынын дәлелдеу үшін (1.3.25) біртекті жүйесіне сәйкес келетін біртекті емес

$$D_{2(\zeta)} x = Ax + f^0(\zeta) \tag{1.3.33}$$

жүйесін қарастырамыз. $\zeta = 0$ нүктесінің маңайында (1.3.33) жүйесінің аналитикалық шешімі бар және оны (1.3.27) түрінде іздейміз.

(1.3.32) және (1.3.27) жіктелулерін (1.3.33) жүйесіне қойып, x_k^0 коэффициенттерін анықтауышы $\det[\gamma_k I_2 - A] = \alpha^2 + (\gamma_k - \beta)^2 \geq \alpha^2 > 0$ болатын $[\gamma_k I_2 - A]\, x_k^0 = f_k^0,\ k \in N^2$ жүйелерінен анықтаймыз. Демек,

$$x^*(\zeta) = \sum_{k \in N^2} [\gamma_k I_2 - A]^{-1} f_k \zeta^k. \tag{1.3.34}$$

Сонымен (1.3.34) шешімі (1.3.33) жүйесінің де шешімі болатынын көреміз. Осымен (1.3.33) автономды жүйесінің жалғыз шешімінің табылатыны дәлелденді.

1.3.4-теорема. *(1.3.3), (1.3.4), (1.3.22) және (1.3.32) шарттары орындалсын. Сонда (1.3.33) автономды жүйесінің $\zeta \in \Pi_{\delta,\rho}^2$ айнымалысы бойынша аналитикалық болатын (1.3.34) түрінде жалғыз ғана нақты аналитикалық шешімі бар.*

(1.3.24) матрицалық функциясы негізінде (1.1.56) матрицасына ұқсас

$$G(\tau,s)=\begin{cases}[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)]^{-1}\,X^{-1}(s+\theta), & s^*(\tau)-\theta\le s<\tau,\\ [X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)]^{-1}\;X^{-1}(s), & \tau\le s\le s^*(\tau)\end{cases}\qquad(1.3.35)$$

матрицасын қарастыралық, мұндағы $s^*(\tau)$ – (1.1.58) шартымен 1.1 бөлімшесінде енгізілген сатылы функция.

(1.3.24) негізінде (1.3.35) матрицалық Грин функциясы қасиеттерін аламыз:

$$\begin{aligned}&1^0.\ \frac{\partial}{\partial\tau}G(\tau,s)=AG(\tau,s),\ \tau\ne s;\\ &2^0.\ G(\tau,\tau+0)-G(\tau,\tau-0)=E;\\ &3^0.\ G(\tau+\theta,s+\theta)=G(\tau,s).\end{aligned}\qquad(1.3.36)$$

(1.3.36) қасиетінің дәлелденуі А3 қосымшасында келтірілген.

Сонда (1.3.31) жүйесінің τ-ға қатысты θ-периодты жалғыз шешімі (1.1.59) қатысына ұқсас

$$x(\tau,\zeta)=\int\limits_{s^*(\tau)-\theta}^{s^*(\tau)}G(\tau,s)\,f^0(\mu(s,\tau,\zeta))ds\qquad(1.3.37)$$

интегралық өрнегімен анықталады.

Автономдылыққа байланысты $\mu=\mu(s,\tau,\zeta)$ сипаттаушы интегралын τ бойынша периодты $\mu=\mu^0(\tau-s,\zeta)$ арқылы өрнектеуге болады. Сонда (1.3.37) шешімін интегралдау кезінде кіші бөлгіштер пайда болмайды және нәтиже тек ζ айнымалысынан тәуелді.

(1.3.37) интегралық өрнегі негізінде 1.3.4-теоремасын басқаша түрде тұжырымдалық.

1.3.5-теорема. *1.3.4-теоремасы шарттары орындалғанда (1.3.31) жүйесінің θ-периодты x шешімі тек ζ айнымалысынан тәуелді (1.3.37) интегралдық өрнегі арқылы анықталады.*

III. (1.3.1) дифференциалдау операторлы

$$D_2x=Ax+f(\tau,t,\zeta)\qquad(1.3.38)$$

біртекті емес теңдеулер жүйесін қарастыралық, мұндағы A – тұрақты 2×2-матрица, $f(\tau,t,\zeta)=(f_1(\tau,t,\zeta),f_2(\tau,t,\zeta))$ – вектор-функция.

$f=f(\tau,t,\zeta)$ вектор-функциясы $(\tau,t,\zeta)\in\Pi_\rho\times\Pi_\rho^m\times B_\delta^2$ болғанда нақты аналитикалық (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты болсын деп ұйғаралық, яғни

$$f(\tau+\theta,t+q\omega,\zeta)=f(\tau,t,\zeta)\in Ab^{\theta,\omega}\left(\Pi_{\rho}\times\Pi_{\rho}^{m}\times B_{\delta}^{2}\right). \qquad (1.3.39)$$

Сонда (1.3.39) шарты негізінде оны Тейлор-Фурье қатары түрінде өрнектелік

$$f(\tau,t,\zeta)=\sum_{k\in N^2,\bar{j}\in Z^{1+m}} f_{k\,\bar{j}}\,\zeta^{k}\cdot e^{2\pi i(j_0\nu_0\tau+\langle j,\nu t\rangle)}, \qquad (1.3.40)$$

мұндағы $f_{k\,\bar{j}}$ – коэффициенттер және олар

$$\left|f_{k\,\bar{j}}\right|\le\left|\widetilde{f}\right|_{\delta}^{-2\pi\delta(|k|+|j|)} \qquad (1.3.41)$$

шарттарын қанағаттандырады, $\bar{j}=(j_0,j_1,...,j_m)$.

Векторлық өрістер бойынша дифференциалдау операторлы (1.3.38) жүйесінің (τ,t) бойынша көппериодты, ζ-ға қатысты аналитикалық болатын шешімінің бар және жалғыз болуы мәселесін зерттелік.

(1.3.38) жүйесінің $x=x(\tau,t,\zeta)$ шешімі (τ,t) көпөлшемді уақытта $\zeta=(\xi,\eta)$ жазықтығында $v=D_2x$ жылдамдығымен тербелетін қайсыбір процесті сипаттайды. Эйлер формулаларын қолданып (1.3.24) матрицасын

$$X(\tau)=\Gamma e^{(\alpha+2\pi i\nu_*)\tau}+\overline{\Gamma}e^{(\alpha-2\pi i\nu_*)\tau} \qquad (1.3.42)$$

түрінде жазалық, мұндағы $\Gamma=[\gamma_{ij}]_1^2$ – элементтері $\gamma_{11}=\gamma_{22}=1/2,\ -\gamma_{12}=\gamma_{21}=i/2$ болатын және

$$\Gamma+\overline{\Gamma}=E,\ \ \Gamma^2=\Gamma,\ \ \overline{\Gamma}^2=\overline{\Gamma},\ \ \Gamma\overline{\Gamma}=\overline{\Gamma}\Gamma=0,\ \left|\Gamma\right|=\left|\overline{\Gamma}\right|=1 \qquad (1.3.43)$$

қасиеттерін қанағаттандыратын екінші ретті матрица, i – жорымал бірлік, $\overline{\Gamma}$ – Γ матрицасына түйіндес матрица.

(1.3.14), (1.3.40), (1.3.42) шарттары және (1.3.43) қасиеті арқылы

$$X^{-1}(s)f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))=$$
$$=\sum_{k\in N^2,\ \bar{j}\in Z^{m+3}} f_{k\,\bar{j}}\,\zeta^{k}\,e^{2\pi i\left[j^0\nu^0\tau+\langle j,\nu(t-\tau)\rangle\right]}\cdot e^{2\pi i\left[j^0\nu^0+j_*\nu_*+j_0\nu_0+\langle j,\nu\rangle\right]s}\cdot e^{\alpha s} \qquad (1.3.44)$$

түріндегі Тейлор-Фурье қатарына жіктелуді аламыз, мұндағы $\bar{j}=(j^0,j_*,j_0,j)$, $j=(j_1,...,j_m)$, $|\zeta|\le e^{2\pi\delta}=r,\ \tau\in\Pi_{\delta},t\in\Pi_{\delta}^{m}$, $f_{k\,\bar{j}}$ – Тейлор-Фурье коэффициенттері, ол (1.3.41) бағалауын қанағаттандырады.

Әрі қарай бізге $\nu^0\in I^0$ болғанда бейөлшемдестіктің күшейтілген шарты

$$\left|\left\langle \bar{j},\bar{\nu}\right\rangle\right| \geq \frac{c_0}{2\pi}|\,\bar{j}\,|^{-\gamma},\ \bar{j}\in Z^{m+3} \tag{1.3.45}$$

қажет, мұндағы c_0 және γ – оң тұрақтылар, $\bar{j}=(j^0,j_*,j_0,j_1,...,j_m)$, $\bar{\nu}=(\nu^0,\nu_*,\nu_0,\nu_1,...,\nu_m)$ – жиіліктер. I^0 жиынын алғанда $\nu^0=\nu^0(\varepsilon)$ жиілігінің $\varepsilon\in O_\delta(0)$ тұрақтысынан аналитикалық тәуелділігін және $[\nu^0(0),\,\nu^0(\delta)]$ аралығы оның мәндері облысы болатынын ескеру керек. Мұнда (1.3.45) шартын қанағаттандыратын $\nu^0(\varepsilon)$ мәндері жиыны I^0 арқылы белгіленген.

$$x^*(\tau,t,\zeta)=\int\limits_{s^*(\tau)-\theta}^{s^*(\tau)} G(\tau,s)\,f\big(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\big)ds \tag{1.3.46}$$

интегралы бар деп ұйғарсақ, $x^*(\tau,t,\zeta)$ вектор-функциясының (1.3.1) дифференциалдау операторлы (1.3.38) жүйесін қанағаттандыратынын тексеру оңай. (1.3.35) матрицалық Грин функциясын қолданып және $X^{-1}(s+\theta)=X^{-1}(\theta)X^{-1}(s)$ теңдігін ескеріп, (1.3.46) шешімін

$$x^*(\tau,t,\zeta)=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left\{\int\limits_{s^*(\tau)-\theta}^{\tau} X^{-1}(\theta)X^{-1}(s)\,f\big(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\big)ds+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\tau}^{s^*(\tau)} X^{-1}(s)\,f\big(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\big)ds\right\} \tag{1.3.47}$$

түрінде жазамыз. Бұдан (1.3.44) вектор-функциясының s бойынша интегралданатындығынан (1.3.46) интегралының табылатыны шығады.

(1.3.44) жіктелуін пайдаланып (1.3.47) өрнегін интегралдау кезінде

$$f_{k\,\bar{j}}\left[\alpha+2\pi i\left\langle \bar{j},\bar{\nu}\right\rangle\right]^{-1},\ k\in N^2,\ \bar{j}\in Z^{m+3} \tag{1.3.48}$$

коэффициенттер қатарын аламыз.

$\alpha\neq 0$ жағдайда алынған қатарда *кіші бөлгіштердің мәселесі* пайда болмайтыны (1.3.48) қатарынан көрініп тұр, өйткені $\left|\alpha+2\pi i\left\langle \bar{j},\bar{\nu}\right\rangle\right|\geq|\alpha|>0$. Сонда $\tau\in\Pi_\delta, t\in\Pi_\delta^m, |\,\zeta\,|\leq e^{2\pi\delta}$ мәндерінде (1.3.47) интегралы, демек (1.3.46) шешімі бар. Егер $\alpha=0$ болса, онда кіші бөлгіштер пайда болады, бірақ (1.3.45) шартынан (1.3.47) интегралы табылады.

Сонымен ізделінді шешімінің (1.3.46) интегралдық өрнегі (1.3.3), (1.3.4), (1.3.22), (1.3.28), (1.3.39) және (1.3.40) қатыстарының негізінде (1.3.45) шарты мен (1.3.47), (1.3.48) өрнектерін ескергенде $\alpha\neq 0$ және $\alpha=0$ жағдайлары үшін алынды.

Шешімнің (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодтылығы тікелей тексеру арқылы дәлелденеді. (1.3.46) шешімінде t-ды ω-ға ығыстыру $h(s,\tau,t+\omega)=h(s,\tau,t)+\omega$ ығысуына әкеледі, бірақ мұнда f вектор-функциясы t-ға қатысты ω-периодты болғандықтан шешім өзгеріссіз қалады. Демек (1.3.46) шешімі t бойынша ω-периодты. τ-ды θ периодқа ығыстырғаннан кейін интеграл астында $s=\sigma+\theta$ ауыстыруын жасаймыз. Сонда h және μ сипаттауыштарының (s,τ) бойынша диагоналды периодтылығына байланысты (1.3.46) шешімі өзгеріссіз қалады. Осымен шешімнің көппериодтылығы негізделді.

(1.3.28) шарты орындалғанда (1.3.30) теңсіздігінен шешімнің жалғыздығын аламыз. Біртекті емес теңдеудің әртүрлі екі шешімдері бар деп кері жоруымыздан біртекті теңдеудің олардың айырмалары түрінде анықталатын нөлден өзге шешімінің табылатыны шығады, ал бұл (1.3.30) шартына қайшы.

Сонымен келесі теорема дәлелденді.

1.3.6-теорема. *(1.3.3), (1.3.4), (1.3.22), (1.3.28), (1.3.39) және (1.3.40) шарттары орындалсын. Онда 1) $\alpha\neq 0$ және 2) $\alpha=0$ үшін (1.3.45) шарты орындалғанда (1.3.38) жүйесінің (1.3.46) интегралдық өрнегімен анықталатын нақты аналитикалық t-ға қатысты ω-периодты, τ бойынша квазипериодты, $(\tau,t,\zeta)\in\left(\Pi_{\rho/2}\times\Pi^m_{\rho/2}\times\Pi^2_{\delta,\rho/2}\right)$ айнымалылы жалғыз шешімі бар.*

1.4 Бейсызықты D_3 дифференциалдау операторлы автономды сызықты жүйелердің жалпы түрінің көппериодты шешімдері

(τ,t) уақыт және $(\xi,\eta)=\zeta\in B_\delta^{2l+2}$ кеңістік айнымалылары бойынша

$$D_3=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle e,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle+\left\langle J\zeta+\psi(\zeta),\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle \tag{1.4.1}$$

түріндегі дифференциалдау операторын қарастыралық, мұндағы J – $(2l+2)$-өлшемді блок-диагоналды матрица, $\psi(\zeta)=(\psi_0(\zeta_0),\ldots,\psi_l(\zeta_l))$, $\psi_j(\zeta_j)=\left(-\frac{\partial g_j(\zeta_j)}{\partial\eta_j},\frac{\partial g_j(\zeta_j)}{\partial\xi_j}\right)$, $j=\overline{0,l}$, $g(\zeta)=(g_0(\zeta_0),\ldots,g_l(\zeta_l))$ – вектор-функциялар, $\frac{\partial}{\partial\zeta}=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_0},\ldots,\frac{\partial}{\partial\zeta_l}\right)$, $\frac{\partial}{\partial\zeta_j}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j},\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right)$, $j=\overline{0,l}$ – векторлық операторлар.

$t=(t_1,\ldots,t_m)$ уақыт айнымалылары бойынша векторлық өріс (1.1.2) арқылы анықталады, ал оның m өлшемі кеңістік айнымалыларының

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=J\zeta+\psi(\zeta) \tag{1.4.2}$$

векторлық өрісінен анықталады.

Келесі шарттар орындалсын деп ұйғаралық.

а) J матрицасы

$$J = diag\left[\nu_0 I_2,...,\nu_l I_2\right], \quad \langle q,\nu\rangle \neq 0 \tag{1.4.3}$$

түрінде анықталсын, мұндағы $\nu = (\nu_0,...,\nu_l)$ – тұрақты вектор, $q = (q_0,...,q_l) \in Z \times ... \times Z = Z^{l+1}$.

б) $g(\zeta) = g(\xi,\, \eta)$ функциялары $\zeta = 0$ нүктесінің $\mathrm{O}_\delta(0)$ δ-маңайында аналитикалық болсын және олардың дәрежелік қатарларға жіктелуі үшінші дәрежелі формадан басталсын, яғни

$$g(\zeta) = \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{j!}\left\langle \zeta,\, \frac{\partial}{\partial \zeta}\right\rangle^j g(0). \tag{1.4.4}$$

(1.4.4) шартынан $\zeta \in B_\delta^{2l+2}$ бойынша жіктелуі үшінші дәрежелі мүшелерден басталатын $\psi(\zeta)$ функциясының да аналитикалық болатындығы шығады. (1.1.2) теңдеуімен (τ,t) уақыт айнымалылары бойынша (1.4.1) операторының векторлық өрісі анықталады. (1.1.2) сипаттаушы жүйесі бойынша $t_0 = \tau,\, t = (t_1,\, ...,\, t_m)$ уақыт айнымалылары (1.1.3) қатысымен байланысады және бірінші интегралы (1.1.4) арқылы анықталады. (τ,t) уақыт айнымалылары бойынша (1.4.1) операторының базалық сипаттаушы интегралы (1.1.5) түрінде болатыны белгілі.

Еркін алынған дифференциалданатын $u_1(t) \in C_t^{(\hat{e})}\left(R^m\right)$ функциясымен анықталған

$$\Phi_1\left(\tau^0,\tau,t\right) = u_1\left(h(\tau^0,\tau,t)\right) \tag{1.4.5}$$

функциясы (1.4.1) операторының (τ,t) уақыт айнымалылары бойынша жалпы сипаттаушы интегралы болады.

(1.4.2) сипаттаушы жүйесін келесі түрде

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = -\nu\,\eta - \dfrac{\partial g(\xi,\eta)}{\partial \eta}, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = \nu\,\xi + \dfrac{\partial g(\xi,\eta)}{\partial \xi} \end{cases} \tag{1.4.6}$$

жазамыз және оның еркін алынған ε тұрақтылы интегралы

$$H(\xi,\eta)\equiv\xi^2+\eta^2+\frac{2}{\nu}g(\xi,\eta)=\varepsilon^2 \qquad (1.4.7)$$

түрінде болады. Сәйкес

$$\frac{d\xi}{d\tau}=-\nu\eta,\ \ \frac{d\eta}{d\tau}=\nu\,\xi \qquad (1.4.8)$$

біртекті жүйенің

$$Z(\tau)=\begin{pmatrix}\cos\nu\tau & -\sin\nu\tau\\ \sin\nu\tau & \cos\nu\tau\end{pmatrix} \qquad (1.4.9)$$

қатысымен анықталған $\theta^0=2\pi\nu^{-1}$-периодты матрицанты бар, әрі периодтары бейөлшемдес. (1.4.8) жүйесінің $\zeta=(\xi,\eta)$ жалпы шешімін өрнектеу үшін $Z(\tau)$ блоктары (1.4.9) арқылы анықталған $Z^*(\tau)=diag[Z(\tau),...,Z(\tau)]$ блок-диагоналды матрицасын енгіземіз. Сонда (1.4.8) жүйесінің жалпы шешімін

$$\zeta=Z^*(\tau)\zeta^0=\mu^0(\tau,\zeta^0) \qquad (1.4.10)$$

аламыз, мұндағы $\zeta^0=(\xi^0,\eta^0)$ – еркін алынған тұрақты вектор. $\psi(\zeta)=0$ болғанда (1.4.8) теңдеуі

$$D_3^{(0)}=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle e,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle+\left\langle J\zeta,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle \qquad (1.4.11)$$

дифференциалдау операторының кеңістік айнымалысы бойынша сипаттаушы теңдеуі болатындығын көреміз. Сонда (1.4.11) операторының (1.4.8) сипаттаушы жүйелерінің 1.1 бөлімшеде қарастырылған

$$\zeta^0=\mu^0(s-\tau,\,\zeta) \qquad (1.4.12)$$

түріндегі бірінші интегралдары табылады, мұндағы $s\in R$ – параметр.

Әрі қарай, Ляпунов әдісі бойынша [1, 240-254 б.; 2, 149-159 б.] (1.4.6) жүйесін (1.3.8) ауыстыруы арқылы

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{d\tau}=r^2\,u(r,\varphi),\\ \dfrac{d\varphi}{d\tau}=\nu+r\,v(r,\varphi)\end{cases} \qquad (1.4.13)$$

түріне келтіреміз, мұндағы $u(r,\varphi)$, $v(r,\varphi)$ – r-ге қатысты аналитикалық, φ бойынша 2π-периодты, коэффициенттері (1.4.4) негізінде $\cos\varphi$ және $\sin\varphi$ шамаларына қатысты көпмүшеліктер болатын функциялар.

r шамасын анықтау үшін (1.3.8) негізінде (1.4.7) интегралдық қатынасынан

$$r^2\left[1+r\,w(r,\varphi)\right]=\varepsilon^2 \qquad (1.4.14)$$

теңдігіне келеміз, мұндағы w – r-ге қатысты аналитикалық және коэффициенттері $\cos\varphi$ және $\sin\varphi$ шамаларына қатысты көпмүшеліктер болатын функция. (1.4.14) теңдеуі r шамасына қатысты шешілуі мүмкін. Ол үшін алдымен екі жағының квадрат түбірін табамыз, яғни

$$r\left[1+r\,w^*(r,\varphi)\right]=\pm\varepsilon,$$

мұндағы $w^*(r,\varphi)$ – $w(r,\varphi)$ функциясы сияқты анықталған. ε еркін алынған тұрақты болғандықтан жалпы жағдайда алынған теңдеуде оның оң таңбасын алуға болады. Енді соңғы теңдеуді r шамасына қатысты шешсек,

$$r=\frac{\varepsilon}{1+r\,w^*}=\varepsilon\left(1-r\,w^*+r^2\;w^{*2}-r^3\;w^{*3}+r^4\;w^{*4}-\ldots\right)=\varepsilon+\varepsilon^2\,h(\varphi,\varepsilon),$$

$$r=\varepsilon+\varepsilon^2\,h(\varphi,\varepsilon)=h^*(\varphi,\varepsilon) \qquad (1.4.15)$$

шамасын табамыз, мұндағы $h(\varphi,\varepsilon)$, $h^*(\varphi,\varepsilon)$ – φ бойынша 2π-периодты, ε-ға қатысты аналитикалық және коэффициенттері $\cos\varphi$ және $\sin\varphi$ шамаларына қатысты көпмүшеліктер болатын функциялар.

(1.4.13) жүйесі мен (1.4.15) өрнегі арқылы келесі $(k+1)$ теңдеуді

$$\frac{d\tau}{d\varphi}=\frac{1}{v+r\,v(r,\varphi)}=\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{1+v^{-1}r\,v(r,\varphi)}=\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{1+v^{-1}\left(\varepsilon+\varepsilon^2\,h(\varphi,\varepsilon)\right)v\left(\varepsilon+\varepsilon^2\;h(\varphi,\varepsilon),\varphi\right)}=$$
$$=\frac{1}{v}\frac{1}{1+h^*(\varphi,\varepsilon)v\left(h^*(\varphi,\varepsilon),\varphi\right)}=\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon\,\widetilde{h}(\varphi)}=\frac{1}{v}\left[1+\widetilde{h}^{(1)}(\varphi)\varepsilon+\widetilde{h}^{(2)}(\varphi_j)\varepsilon^2+\ldots\right]=$$
$$=v^{-1}\left[1+\varepsilon\,\Phi(\varphi,\varepsilon\,)\right]$$

аламыз, мұнда дәрежелік қатардағы $\widetilde{h}^{(i)}(\varphi)$ коэффициенттері φ бойынша 2π-периодты, ал $\Phi(\varphi,\varepsilon\,)$ функциясы $\varepsilon>0$ жеткілікті аз болғанда ε-ге қатысты аналитикалық және φ бойынша 2π-периодты, әрі $\Phi(\varphi,0)=0$. Сонымен $\tau=g(\varphi,\varepsilon)$ уақыт айнымалысын анықтау үшін

$$\frac{d\tau}{d\varphi}=\frac{1}{\nu}\left[1+\varepsilon\,\Phi(\varphi,\varepsilon\,)\right] \qquad (1.4.16)$$

теңдеуін алдық. (1.4.16) теңдеуін φ бойынша интегралдағанада $\varepsilon\in \mathrm{O}_{\delta}(0)$ бойынша аналитикалық және φ шамасына қатысты сызықты, 2π-периодты функциялардың қосындысы болатын

$$g(\varphi,\varepsilon)=\frac{1}{\nu}\int_{0}^{\varphi}\left[1+\varepsilon\,\Phi(\lambda,\varepsilon\,)\right]d\lambda \qquad (1.4.17)$$

функциялары шығады, сондай-ақ бұл функцияның бастапқы мәні $g(0,\varepsilon)=0$. Осылайша τ айнымалысы $l+1$ уақыт айнымалыларына жіктеледі, яғни $t_0=g(\varphi_0,\varepsilon_0),\ t_1=g(\varphi_1,\varepsilon_1),...,\ t_l=g(\varphi_l,\varepsilon_l)$. Сонымен t уақыт айнымалысының өлшемі анықталды, яғни $\varepsilon=0$ кезінде $\omega(\varepsilon)$ периодтардың рационал бейөлшемдестігінен $m=l$.

Олай болса, $\bar{t}=(t_0,t_1,...,t_l)=(g(\varphi_0,\varepsilon_0),\ g(\varphi_1,\varepsilon_1),...,g(\varphi_l,\varepsilon_l))$. Демек

$$g(\varphi+2\pi,\,\varepsilon)-g(\varphi,\,\varepsilon)=\frac{1}{\nu}\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\left[\,1+\varepsilon\,\Phi(s,\varepsilon)\,\right]ds=\frac{1}{\nu}\left[\int_{\varphi}^{0}\left[\,1+\varepsilon\,\Phi(s,\varepsilon)\,\right]ds+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{2\pi}\left[\,1+\varepsilon\,\Phi(s,\varepsilon)\,\right]ds+\int_{2\pi}^{\varphi+2\pi}\left[\,1+\varepsilon\,\Phi(s,\varepsilon)\,\right]ds\right]=\frac{1}{\nu}\int_{0}^{2\pi}\left[\,1+\varepsilon\,\Phi(s,\varepsilon)\,\right]ds=$$

$$=\frac{2\pi}{\nu}+\varepsilon\int_{0}^{2\pi}\Phi(s,\varepsilon)ds=\frac{2\pi}{\nu}+\varepsilon\,\widetilde{\Phi}(\varepsilon)=\omega(\,\varepsilon)$$

айырымы φ шамасынан тәуелді болмайды және $\varepsilon\in \mathrm{O}_{\delta}(0)$ бойынша аналитикалық, әрі $\omega(0)=2\pi/\nu$ рационал бейөлшемдес.

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\nu+h^{*}(\varphi,\varepsilon)\nu\left(h^{*}(\varphi,\varepsilon),\varphi\right)$$

қатысымен анықталған $\varphi=\varphi(\tau)$ кері функциясы

$$\frac{d}{d\tau}\left[\varphi(\tau+\omega)-\varphi(\tau)\right]=0\,,\ \varphi(\tau+\omega)-\varphi(\tau)=2\pi,\ \omega=\omega(\varepsilon)$$

шарттарына қанағаттандырады.

Сонымен қатар $\bar{t}=g(\varphi,\varepsilon)$ теңдеуі (1.4.17) өрнегі негізінде жеткілікті аз $\delta>0$ мәндері үшін $\varepsilon\in \mathrm{O}_{\delta}(0)$ болғанда φ шамасына қатысты шешілімді және

$$\varphi=\varphi(\bar{t},\varepsilon), \qquad (1.4.18)$$

мұндағы $\varphi(\bar{t},\varepsilon)$ – $\varepsilon \in \mathrm{O}_\delta(0)$ бойынша аналитикалық, $\bar{t}$-ға қатысты $\omega = \omega(\varepsilon)$-периодты функциялар, әрі $\varphi(0,\varepsilon) = 0$.

Әрі қарай (1.3.8), (1.4.15) және (1.4.18) өрнектерінен

$$r^0 = r\big|_{\bar{t}=0} = \varepsilon + \varepsilon^2 \ h(0,\varepsilon) = \widetilde{\varepsilon} \text{ және } \xi^0 = \xi\big|_{\bar{t}=0} = r^0 = \widetilde{\varepsilon},\ \eta^0 = \eta\big|_{\bar{t}=0} = 0$$

бастапқы мәндерімен $\varepsilon \in \mathrm{O}_\delta(0)$ бойынша аналитикалық $\bar{t}$-ға қатысты ω-периодты болатын (1.4.6) жүйесінің

$$\xi = \xi(\bar{t},\varepsilon),\ \eta = \eta(\bar{t},\varepsilon) \tag{1.4.19}$$

шешімін және

$$r = \varepsilon + \varepsilon^2 \ h(\varphi(\bar{t},\varepsilon),\varepsilon)$$

өрнегін анықтаймыз.

(1.4.19) қатынасы негізінде $t_0 = \tau,\ t = (t_1,\ ...,\ t_l)$ және $\varepsilon = (\widetilde{\varepsilon}_0, \widetilde{\varepsilon}_1,\ ...,\ \widetilde{\varepsilon}_l) = (\xi_0^0, \xi_1^0, ..., \xi_l^0) = \xi^0$ арқылы өрнектелген (1.4.2) векторлы-матрицалық теңдеуінің $\zeta = (\xi,\eta)$ шешімін табамыз. Ал $\widetilde{\varepsilon} = \chi(\varepsilon)$ және $\varepsilon = \chi^{-1}(\widetilde{\varepsilon})$ өзара кері аналитикалық функциялар болғандықтан одан $\varepsilon = \chi^{-1}(r^0) = \varphi^{-1}(\xi^0)$ шамасын анықтаймыз, мұндағы $\chi(\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 \ h(0,\varepsilon)$.

Осылайша табылған τ-ға қатысты $\omega = \omega(\xi^0)$-периодты болатын $\xi = \xi(\tau,\xi^0)$, $\eta = \eta(\tau,\xi^0)$ шешімі ξ^0-ге қатысты аналитикалық болады және $\xi^0 \to 0$ болғанда нөлге, ал периоды $\omega(0) = 2\pi/\nu$ шамасына ұмтылады.

(1.4.6) жүйесінің автономдылығы негізінде τ айнымалысын кез келген η^0 тұрақтысына ығыстыру арқылы жалпы шешім аламыз

$$\xi = \xi(\bar{t} + \eta^0, \xi^0),\ \eta = \eta(\bar{t} + \eta^0, \xi^0)\,. \tag{1.4.20}$$

Оның Коши формасы

$$\xi = \widetilde{\xi}(\tau - \tau^0, t - e\tau^0, \xi^0, \eta^0),\ \eta = \widetilde{\eta}(\tau - \tau^0, t - e\tau^0, \xi^0, \eta^0) \tag{1.4.21}$$

арқылы жазылады, егер бастапқы шарт

$$\zeta\Big|_{\tau = t_1 = ... = t_l = \tau^0} = (\xi_0^0,\ \eta_0^0, ..., \xi_l^0,\ \eta_l^0) = \zeta^0 \tag{1.4.22}$$

болса, мұндағы және $(\theta,\omega_1,...,\omega_l)$ – $(\tau,t_1,...,t_l)$ вектор-айнымалысы бойынша $\theta=\omega_0(\varepsilon_0)$, $\omega=(\omega_1(\varepsilon_1),...,\omega_l(\varepsilon_l))$ компоненттерімен берілген вектор-период.

(1.4.21), (1.4.22) шешімдерде векторлық белгілеулерге көшсек, (1.4.2) жүйесінің ζ шешімі

$$\zeta=\mu\left(\tau-\tau^0,t-e\tau^0,\zeta^0\right) \qquad (1.4.23)$$

арқылы өрнектеледі, әрі $\mu\left(0,\bar{0},\zeta^0\right)=\zeta^0$. Осылайша келесі тұжырым негізделді.

1°. (1.4.3) және (1.4.4) шарттары орындалсын. Сонда $t^0=e\tau^0$ шамасын бастапқы нүкте ретінде алғанда (1.4.1) операторы $x(\tau,t,\zeta)$ функциясын уақыт айнымалыларының $t=e\tau$ бас диагоналы бағытымен τ бойынша дифференциалдау операторы және кеңістік айнымалыларына қатысты (1.4.19) тұйық қисықтары бойында көппериодты болады.

Олай болса, (1.4.23) қатысымен берілген сипаттауыш бойында D_3x функциясы τ бойынша $x=x(\zeta)$ функциясының өзгеру жылдамдығын анықтайды: $D_3x\Big|_{\zeta=\mu}=\dfrac{d}{d\tau}\,x(\mu)$.

1° тұжырымды пайдаланып D_3 операторлы дифференциалдық теңдеулерден сипаттауыш бойында анықталған интегралдық теңдеулерге көшуге болады. (1.4.2) жүйесінің шешімінің жалғыз болуы қасиетінен (1.4.23) сипаттаушы теңдеулерден D_3 операторының бірінші интегралының

$$\zeta^0=\mu\left(\tau^0-\tau,e\tau^0-t,\zeta\right) \qquad (1.4.24)$$

өрнегін аламыз, мұнда $D_3\mu=0$.

Сонымен қатар осы қасиеттен сипаттауыштың бұдан басқа

$$\mu\left(\tau-s,t-es,h\left(s-\tau^0,es-e\tau^0,\zeta^0\right)\right)=\mu\left(\tau-\tau^0,t-e\tau^0,\zeta^0\right) \qquad (1.4.25)$$

қасиеті шығады. Сонда келесі тұжырым орынды.

2°. 1° пункттегі шарттар орындалғанда (1.1.2), (1.4.2) жүйелерінің $t_0=e\tau_0$ болғанда (1.1.3) және (1.4.24) қатыстарынан табылған $\tau^0=\tau$, $e\tau^0=t$, $\zeta^0=\mu\left(\tau^0-\tau,e\tau^0-t,\zeta\right)$ бірінші интегралдары негізінде алынған $s\in R$ параметрлі $\tau=s-\tau^0$, $t=es-e\tau^0$, $\zeta=\mu\left(s-\tau^0,es-e\tau^0,\zeta^0\right)$ сипаттауыштары бойында анықталған $x\left(s-\tau^0,t-e\tau^0,\mu\left(s-\tau^0,es-e\tau^0,\zeta^0\right)\right)$ функциясы (1.4.25) қасиеті арқылы $x\left(s-\tau,es-t,\mu\left(s-\tau,es-t,\zeta\right)\right)$ функциясына көшеді.

2° пунктте айтылған мәліметтерді қолдана отырып, D_3 операторының сипаттауыштары бойында анықталған өрнектерден (τ,t,ζ) айнымалылары кеңістігіне көшеміз. Сонда (1.4.6) және (1.4.2) сипаттаушы жүйелерінің

$$\zeta^0 = \mu(s-\tau, es-t, \zeta) \tag{1.4.26}$$

бірінші интегралдарын аламыз.

Әрі қарай, D_3 операторының (1.4.21) сипаттауыштарының $\theta = \omega_0(\varepsilon_0)$, $\omega = (\omega_1(\varepsilon_1),..., \omega_l(\varepsilon_l))$ периодтылығы негізінде (1.4.23) вектор-функциясының көппериодтылық қасиетін $\mu(\tau+\theta, t+q\omega, \zeta) = \mu(\tau, t, \zeta)$ арқылы өрнектеуге болады, мұнда ω_j, $j = \overline{0,l}$ периодтары D_3 операторының сипаттауыштарының $\zeta = \zeta^0$ бастапқы мәндерінен тәуелді.

$(\tau, t, \zeta) \in R \times R^l \times B_\delta^{2l+2}$ айнымалылары кеңістігінде көппериодтылық мәселесін қарастырған кезде (θ, ω) периодтарында ζ^0 бастапқы мәндерін сәйкес (1.4.24) мәндерімен ауыстырсақ, олардың (τ, t, ζ) айнымалыларының және $\tau_0 \in R$ параметрінің функциялары болатындығын көреміз, яғни $\theta = \theta(\tau_0, \tau, t, \zeta)$, $\omega = \omega(\tau_0, \tau, t, \zeta)$.

Кез келген дифференциалданатын $u_2(\zeta) \in C_\zeta^{(\tilde{e})}(B_\delta^{2l+2})$ функциясымен анықталған

$$\Phi_2(\tau, t, \zeta) = u_2(\mu(s-\tau, es-t, \zeta)) \tag{1.4.27}$$

функциясы (1.4.1) операторының жалпы сипаттаушы интегралы деп аталады.

I. Енді D_3 дифференциалдау операторлы

$$D_3 x(\tau, t, \zeta) = 0 \tag{1.4.28}$$

теңдеуін қарастыралық, мұндағы $x = x(\tau, t, \zeta)$ – n-вектор-функция.

$$D_3 h(\tau^0, \tau, t) = 0, \ D_3 \mu(\tau^0 - \tau, e\tau^0 - t, \zeta) = 0 \tag{1.4.29}$$

теңдіктерінің дәлелдеуі (1.1.14) теңдіктерінің дәлелдеуіне ұқсас, мұндағы h және μ – t уақыт айнымалысының өлшемі $m = l$ болғанда D_3 операторының сәйкесінше (1.1.5) және (1.4.24) арқылы анықталған уақыт және кеңістік айнымалылары бойынша сипаттаушы интегралдары.

(1.4.5) және (1.4.27) қатынастары арқылы анықталатын еркін алынған $u_1(t)$ және $u_2(\zeta)$ тегіс функциялары үшін (1.4.29) негізінде $D_3 H(\tau^0, \tau, t) = 0$, $D_3 \Phi(\tau^0, \tau, \zeta) = 0$ теңдіктері орынды. Олардың дәлелдеуі (1.1.15) теңдігі дәлелдеуіне ұқсас болғандықтан келтірмейміз.

(1.4.28) теңдеуінің көппериодты шешімдері жөніндегі сұрақты зерттелік. (1.4.26) бірінші интегралын қолдана отырып еркін алынған дифференциалданатын $H(t, \zeta)$ функциясын қолданып жалпы шешімді

$$x = H\left(h(s,\tau,t), \mu(s-\tau, es-t,\zeta)\right) \qquad (1.4.30)$$

анықтаймыз. (1.4.30) шешімі екінші аргументке қатысты (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты, ал бірінші аргумент бойынша периодтылығы $H\left(t^0, \mu\right)$ функциясының периодтылығынан тәуелді. $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = ... = \varepsilon_l = 0$ болғанда $\theta = \omega_0(\varepsilon_0)$ және $\omega_j = \omega_j\left(\varepsilon_j\right), j = \overline{1,l}$ бейөлшемдес болғандықтан (1.4.30) өрнегі бірінші аргументке қатысты (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты бола алмайды. Олай болса, (1.4.30) шешімі көппериодты, егер $H(t,\zeta)$ функциясы бірінші t аргументінен тәуелді болмаса.

Сонымен (1.4.28) теңдеуінің (θ,ω)-периодты шешімі кез келген дифференциалданатын $H^*(\zeta)$ функциясы арқылы былай

$$x = H^*\left(\mu(s-\tau,\ es-t,\ \zeta)\right) \qquad (1.4.31)$$

өрнектеледі. Сондай ақ $D_3^{(0)}x(\tau,t,\zeta) = 0$ теңдеуінің (θ,ω)-периодты шешімі (1.4.12) бірінші интегралы негізінде кез келген дифференциалданатын $H_*(\zeta)$ функциясымен

$$x = H_*\left(\mu^0(s-\tau,\ \zeta)\right) \qquad (1.4.32)$$

арқылы өрнектеледі. (1.4.29) шарттары орындалғанда (1.4.11) операторының $\zeta \in B_\delta^{2l+2}$ мәндерінде $H_*(\zeta)$ функциясы арқылы анықталған (1.4.32) түріндегі (θ,ω)-периодты нөлдері сансыз көп.

Алынған нәтижелерді төмендегі теоремада қорытындылаймыз.

1.4.1-теорема. *(1.4.3), (1.4.4) және (1.4.7) шарттары орындалғанда* D_3 *операторының* $\zeta \in B_\delta^{2l+2}$ *үшін кез келген дифференциалданатын* $H^*(\zeta)$ *функциясымен (1.4.31) түрінде анықталған* θ*-периодты нөлдерінің сансыз көп* $(l+1)$*-үйірлері болады.*

II. (1.4.1) дифференциалдау операторлы біртекті жүйені қарастыралық

$$D_3x = Ax, \qquad (1.4.33)$$

мұндағы A –тұрақты $n \times n$ матрица.

A матрицасының барлық $\lambda = \lambda(A)$ меншікті мәндерінің нақты бөліктері нөлден өзге болсын, яғни

$$\operatorname{Re}\lambda(A) \neq 0. \qquad (1.4.34)$$

(1.1.23) формуласынан (1.4.33) жүйесінің матриcанты

$$X(\tau)=\exp(A\tau) \qquad (1.4.35)$$

болатындығы белгілі және ол (1.4.34) шарты негізінде жалпы жағдайда (1.4.33) жүйесінің $X_-(\tau)$ және $X_+(\tau)$ екі матрицалық шешімдерінің қосындысына жіктеледі [47, 68-69 б.]:

$$X(\tau)=X_-(\tau)+X_+(\tau), \qquad (1.4.36)$$

мұндағы $X_-(\tau)$, $X_+(\tau)$ матрицалық шешімдері

$$|X_-(\tau-s)|\le\tilde{\alpha}\,e^{-\kappa(\tau-s)},\ \tau\ge s; \quad |X_+(\tau-s)|\le\tilde{\alpha}\,e^{\kappa(\tau-s)},\ \tau<s \qquad (1.4.37)$$

бағалауларын қанағаттанырады, $\tilde{\alpha}\ge 1$, $\kappa>0$ – тұрақтылар.

Сонда матрицалық Грин функциясы

$$G(\tau-s)=\begin{cases}X_-(\tau-s), & \tau\ge s,\\ -X_+(\tau-s), & \tau<s\end{cases} \qquad (1.4.38)$$

арқылы анықталады және ол (1.4.35) матрицантының (1.4.36) және (1.4.37) қасиеттері негізінде төмендегі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned}&1^0.\ D_3G(\tau-s)=AG(\tau-s),\ \tau\ne s,\\ &2^0.\ G(0+)-G(0-)=E,\\ &3^0.\ |G(\tau-s)|\le\tilde{\alpha}\,e^{-\kappa|\tau-s|}.\end{aligned} \qquad (1.4.39)$$

(1.4.39) қасиетінің дәлелдеуі А4 қосымшасында келтірілген.

(1.4.33) жүйесінің x жалпы шешімі (1.4.35) матрицантын (1.4.28) теңдеудің (1.4.30) жалпы шешіміне көбейту арқылы анықталады, яғни

$$x=X(\tau)H\left(h(s,\tau,t),\mu(s-\tau,es-t,\zeta)\right). \qquad (1.4.40)$$

(1.4.33) жүйесінің шешімі

$$x\Big|_{\tau=\tau^0}=u(t,\zeta)\in C_{t,\zeta}^{(\hat{e},\tilde{e})}\left(R^l\times B_\delta^{2l+2}\right) \qquad (1.4.41)$$

бастапқы шарты бойынша

$$x=X(\tau-\tau^0)\,u\left(h(\tau^0,\tau,t),\mu(\tau^0-\tau,e\tau^0-t,\zeta)\right) \qquad (1.4.42)$$

арқылы анықталатынын, ал (1.4.40) шешімі (1.4.33) жүйесін қанағаттандыратынын тікелей тексеруге болады, мұндағы $\hat{e}=(1,...,1)$ – l-вектор, $\widetilde{e}=(1,...,1)$ – $(2l+2)$-вектор.

Егер $t\in R^l$ және бекітілген $\zeta\in B_\delta^{2l+2}$ үшін $u(t,\,\zeta)$ бастапқы функциясы шенелген болса, онда (1.4.37) шарты негізінде (1.4.42) шешімі $(\tau,t)\in R\times R^m$ үшін шенелмеген болады. Бұдан (1.4.33) жүйесінің нөлден өзге (θ,ω)-периодты шешімдері болмайтындығы шығады.

Жоғарыда айтылғандарға ұқсас, (1.4.11) дифференциалдау операторлы

$$D_3^{(0)}x=Ax \tag{1.4.43}$$

теңдеуінің (1.4.41) бастапқы шартын қанағаттандыратын $x=X\left(\tau-\tau^0\right)u\left(h(\tau^0,\tau,t),\mu^0\left(\tau^0-\tau,\zeta\right)\right)$ шешімін және оның да нөлден өзге (θ,ω)-периодты шешімдері болмайтындығын аламыз.

III. Енді келесі автономды сызықты жүйені қарастыралық:

$$D_3x=Ax+f(\zeta), \tag{1.4.44}$$

мұндағы $f(\zeta)$ вектор-функциясы үзіліссіз дифференциалданатын және голоморфты болсын, яғни

$$f(\zeta)\in C_\zeta^{(\widetilde{e})}\left(B_\delta^{2l+2}\right),\ f(\zeta)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left\langle\zeta,\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle^j f(0)\,. \tag{1.4.45}$$

(1.4.44) жүйесінің x шешімін $u(t,\,\zeta)$ бастапқы функциясын қолданып

$$x(\tau,t,\zeta)=X(\tau)\,u(t-e\tau,\,\mu(-\tau,\,-t,\,\zeta))+\int_0^\tau X(\tau-s)f(\mu(s-\tau,es-t,\zeta))ds \tag{1.4.46}$$

арқылы жазамыз. Егер u бастапқы функциясын

$$\begin{gathered}u(t-e\tau,\mu(-\tau,-t,\,\zeta))=X^{-1}(\tau)\int_{-\infty}^{0}X_{-}(\tau-s)f(\mu(s-\tau,es-t,\zeta))ds-\\-X^{-1}(\tau)\int_{0}^{+\infty}X_{+}(\tau-s)f(\mu(s-\tau,es-t,\zeta))ds\end{gathered} \tag{1.4.47}$$

шартына қанағаттандыратындай етіп таңдап алсақ, онда (1.4.46) өрнегін (1.4.38) Грин функциясы арқылы келесі түрде жазамыз:

$$x^*(\tau,t,\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\tau-s)f(\mu(s-\tau,es-t,\zeta))ds. \qquad (1.4.48)$$

(1.4.37) бағалауынан және (1.4.39) қатысындағы 3^0 қасиетінен (1.4.47), (1.4.48) меншіксіз интегралдарының жинақты болатынын көреміз.

Сонымен қатар τ және t айнымалыларының арасындағы (1.1.3) байланысынан τ-ды θ-ға ығыстыру t айнымалысының $e\theta$ шамасына ығысуын туындататынын атап өтелік. (1.4.48) қатынасындағы интеграл астындағы функция (s,τ) бойынша диагоналды θ-периодты және t-ға қатысты ω-периодты, әрі $\varepsilon_0=\varepsilon_1=...=\varepsilon_l=0$ үшін (1.4.26) сипаттауышының $\theta=\omega_0(\varepsilon_0)$ және $\omega=\omega(\varepsilon)$ периодтары рационалды бейөлшемдес. Грин функциясының (1.4.39) қасиетінен $x^*(\tau,t,\zeta)$ шешімі (1.4.44) теңдеуін қанағаттандырады және (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты.

Жоғарыда айтылғандарды қорытындылай келе (1.4.11) дифференциалдау операторлы

$$D_3^{(0)}x=Ax+f(\zeta) \qquad (1.4.49)$$

сызықты біртекті емес жүйесінің (θ,ω)-периодты

$$x_*(\tau,t,\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\tau-s)f(\mu^0(s-\tau,\,\zeta))ds \qquad (1.4.50)$$

шешімін аламыз, мұндағы $\mu^0(s-\tau,\,\zeta)$ – (1.4.12) бірінші интегралы.

Сонымен келесі теорема дәлелденді.

1.4.2-теорема. *(1.4.3), (1.4.4), (1.4.7), (1.4.34) және (1.4.45) шарттары орындалған жағдайда (1.4.33) біртекті теңдеуінің тек нөлдік көппериодты шешімі, ал біртекті емес (1.4.44) теңдеуінің жалғыз ғана (1.4.48) түріндегі (θ,ω)-периодты шешімі болады.*

IV. Ізделінді $x=(x_1,\,...,\,x_n)$ вектор-функциясына қатысты сызықты жүйені қарастыралық:

$$D_3x=P(\zeta)x, \qquad (1.4.51)$$

мұндағы $P(\zeta)=[p_{ij}(\zeta)]_1^n$ – матрица, әрі ол $\zeta\in B_\delta^{2l+2}$ болғанда үзіліссіз дифференциалданады және $\zeta=0$ нүктесі маңайында голоморфты, яғни

$$P(\zeta)\in C_\zeta^{(\widetilde{e})}(B_\delta^{2l+2}), \quad P(\zeta)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left\langle\zeta,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle^jP(0). \qquad (1.4.52)$$

(1.4.51) жүйесі (1.4.23) сипаттауыштарының бойында (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты $P(\mu(\tau-s,t-es,\zeta_0))$ көппериодты матрицасымен берілген жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесін анықтайды. Сондықтан (1.4.51) сызықты жүйесінің

$$X(\tau^0,\tau,t,\zeta)=E+\int_{\tau_0}^{\tau}P(\mu(s-\tau,es-t,\zeta))X(\tau_0,s,es,\zeta)ds \tag{1.4.53}$$

интегралдық теңдеуінен X матрицантын анықтауға болады, мұнда $X(\tau^0,\tau^0,e\tau^0,\zeta)=E$.

$X(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ матриканты (1.4.52) негізінде ζ айнымалысына қатысты голоморфты және (τ,τ^0) бойынша диагоналды θ-периодты.

Шынында да, τ-ды θ-ға ығыстыру (1.1.3) теңдігінен t айнымалысының $e\theta$-ға ығысуын тудырады. Олай болса, $X(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ матрицасымен қатар $X(\tau^0+\theta,\tau+\theta,t+e\theta,\zeta)$ матрицасы да (1.4.53) интегралдық теңдеуін қанағаттандырады. Шешімнің жалғыздығынан олардың тепе-теңдігі шығады:

$$X(\tau^0+\theta,\tau+\theta,t+e\theta,\zeta)=X(\tau_0,\tau,t,\zeta). \tag{1.4.54}$$

$\mu(\tau,t,\zeta)$ интегралының t бойынша ω-периодтылығын тікелей тексеріп, $X(\tau^0,\tau,t+\omega,\zeta)=X(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ орындалатындығына көз жеткізуге болады.

Әрі қарай $P(\zeta)$ матрицасы (1.4.51) жүйесінің экспоненциалды орнықтылық қасиетін қамтамасыз етеді деп ұйғаралық, яғни

$$\left|X(\tau^0,\tau,t,\zeta)\right|\le\tilde{\alpha}e^{-\kappa(\tau-\tau^0)},\ \tau\ge\tau^0, \tag{1.4.55}$$

мұндағы $\tilde{\alpha}\ge 1,\ \kappa>0$ – тұрақтылар. Егер (1.4.51) жүйесінің $x=x(\tau^0,\tau,t,\zeta)$ шешімі $\tau=\tau^0$ болғанда $u(\zeta)$ бастапқы тегіс функциясына айналатынын білдіретін

$$x\Big|_{\tau=\tau^0}=u(\zeta)\in C_{\zeta}^{(1)}\left(B_{\delta}^{2l+2}\right)$$

бастапқы шарты арқылы

$$x(\tau^0,\tau,t,\zeta)=X(\tau^0,\tau,t,\zeta)\ u(\mu(\tau^0-\tau,e\tau^0-t,\zeta)) \tag{1.4.56}$$

түріде өрнектелетінін ескерсек, онда (1.4.55) шартынан (1.4.51) жүйесінің нөлден өзге көппериодты шешімі болмайтындығы шығады.

1.4.1-лемма. *(1.4.3), (1.4.4), (1.4.7), (1.4.52) және (1.4.55) шарттары орындалсын. Онда (1.4.51) сызықты біртекті жүйенің нөлден өзге көппериодты шешімі болмайды.*

Дәлелдеуі. Шынында да, (1.4.56) шешімінің өрнегі мен (1.4.55) шартынан бекітілген ζ мәнінде $u \neq 0$, яғни нөлден өзге бастапқы функциялы кез келген шешім шенелмеген болатындығы шығады. Олай болса, мұндай шешім көппериодты бола алмайды. Бұдан (1.4.51) жүйесінің жалғыз көппериодты шешімі $u = 0$ болатындығы шығады.

V. Енді бос мүшесі (1.4.45) арқылы анықталған

$$D_3 x = P(\zeta)x + f(\zeta) \qquad (1.4.57)$$

автономды біртекті емес жүйені қарастырамыз.

1.4.3-теорема. *(1.4.3), (1.4.4), (1.4.7), (1.4.45), (1.4.52) және (1.4.55) шарттары орындалсын. Онда (1.4.57) жүйесінің жалғыз ғана $\zeta \in B_\delta^{2l+2}$ бойынша голоморфты, (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі*

$$x^*(\tau,t,\zeta) = \int_{-\infty}^{\tau} X(s,\tau,t,\zeta) f(\mu(s-\tau,es-t,\zeta))ds \qquad (1.4.58)$$

өрнегімен анықталады.

Дәлелдеуі. Сындық емес жағдайда жүйелердің көппериодты шешімдерін зерттеу әдісі осы теорияның негізін салушылардың еңбектері бойынша жалпыға мәлім. Бұл жерде біздің зерттеуіміз барлық бұрынғы қажетті шарттарды қанағаттандыратын Ляпунов жүйесімен анықталған μ сипаттауышымен ерекшеленеді. Осы негізде (1.4.58) түріндегі көппериодты шешімнің өрнегі келтірілді.

Тікелей тексеру арқылы (1.4.55) шарты негізінде меншіксіз интеграл түрінде анықталған (1.4.58) функциясы (1.4.57) жүйесінің шешімі болатындығына көз жеткіземіз. Бұл кезде X матриցанты (1.4.53) матрицалық теңдеуін қанағаттандыратындығын, ал μ интегралы (1.4.29) қасиетіне ие болатындығын ескеру қажет. (1.4.58) шешімінің τ бойынша θ-периодтылығы матрицанттың (1.4.54) қасиеті арқылы тексеріледі, ал t-ға қатысты ω-периодтылығы μ интегралының ω-периодтылығынан шығады.

Шешімнің голоморфтылығы [2, 15 б.] Ляпунов зерттеуіне сәйкес f функциясы мен P матрицасындағы μ интегралының голоморфтылығынан шығады. Теорема толығымен дәлелденді.

$\zeta \in B_\delta^{2l+2}$ үшін $\det[P(\zeta)] \neq 0$ болғанда $P(\zeta)x + f(\zeta) = 0$ теңдігінен $x = P^{-1}(\zeta) f(\zeta) \equiv x^0(\zeta)$ шешімін аламыз. Сонда ζ айнымалысын $\mu(\tau^0 - \tau, e\tau^0 - t, \zeta)$ шамасымен ауыстырсақ, $\mu(\tau,t,\zeta)$ интегралының (θ,ω)-периодтылығынан (1.4.57) жүйесінің $x^*(\tau,t,\zeta) = x^0(\mu(\tau^0 - \tau, e\tau^0 - t, \zeta))$ шешімін аламыз, өйткені $D_3x^* = \dfrac{\partial x^*}{\partial \mu} \cdot D_3\mu \equiv 0$ тепе-теңдігі орындалады. Бұл тұжырым екінші ретті жүйе үшін 1.2 бөлімшесінде дәлелдеуімен келтірілген, әрі бұл шешім ерекше (θ,ω)-периодты шешім болады.

Енді қосымша f бос мүшесі $\zeta \in B_\delta^{2l+2}$ айнымалысынан басқа, $(\tau,t) \in R \times R^l$ уақыт айнымалыларынан да тәуелді болатын жағдайды қарастыралық. Сонда

$$D_3x = P(\zeta)x + f(\tau,t,\zeta) \tag{1.4.59}$$

автономды емес теңдеулер жүйесін аламыз, мұнда $f(\tau,t,\zeta)$ вектор-функциясы

$$f(\tau+\theta,t+q\omega,\zeta) = f(\tau,t,\zeta) \in C_{\tau,t,\zeta}^{(1,\hat{e},\widetilde{e})}\left(R \times R^l \times B_\delta^{2l+2}\right) \tag{1.4.60}$$

шартын қанағаттандырады, $\hat{e} = (1,...,1)$ – l-вектор, $\widetilde{e} = (1,...,1)$ – $(2l+2)$-вектор.

1.4.4-теорема. *(1.4.3), (1.4.4), (1.4.7), (1.4.52), (1.4.55) және (1.4.60) шарттары орындалсын. Онда (1.4.59) жүйесінің жалғыз ғана* (τ,t) *бойынша* (θ,ω)*-периодты шешімі бар және ол*

$$x^*(\tau,t,\zeta) = \int_{-\infty}^{\tau} X(s,\tau,t,\zeta) f(s,h(s,\tau,t),\mu(s-\tau,es-t,\zeta))ds \tag{1.4.61}$$

интегралдық өрнегімен анықталады.

Бұл теореманың дәлелдеуі 1.4.3-теоремасының дәлелдеуіне ұқсас болғандықтан келтірілмеді. Ал f бос мүшесі (τ,t) бойынша $\mu(\tau,t,\zeta)$ интегралымен бірдей (θ,ω)-периодты болғандықтан (1.4.59) жүйесімен сипатталатын тербелісте басқалай өзгерістер болмайды.

Осы бөлімшедегі зерттеулер негізінде кеңістік айнымалысы бойынша сипаттаушы теңдеудің еркіндік дәрежесі екіге тең біртекті сызықты Ляпунов жүйесі арқылы анықталған жағдайға Б қосымшасында 2-мысал келтірілген.

1.5 Уақыт айнымалысынан тәуелді қоздыртқылы D_4 дифференциалдау операторлы сызықты жүйелердің көппериодты шешімдері

Функцияларды $(\tau,t) \in R^{1+m}$ уақыт және $\zeta = (\xi,\eta) \in B_\delta^{2l}$ кеңістік айнымалылары бойынша

$$D_4 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a(\tau,t), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle J\zeta + g(\tau), \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\rangle \tag{1.5.1}$$

дифференциалдау операторын қарастыралық, мұндағы $a(\tau,t)=\left(a_1(\tau,t),...,\ a_m(\tau,t)\right)$ – вектор-функция, $\dfrac{\partial}{\partial t}=\left(\dfrac{\partial}{\partial t_1},...,\dfrac{\partial}{\partial t_m}\right)$ – векторлық дифференциалдау операторы; J – $2l$-өлшемді блок-диагоналды матрица, $g(\tau)=\left(g_1(\tau),...,g_l(\tau)\right)$ – вектор-функция, $\dfrac{\partial}{\partial \zeta}=\left(\dfrac{\partial}{\partial \zeta_1},...,\dfrac{\partial}{\partial \zeta_l}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \zeta_j}=\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi_j},\dfrac{\partial}{\partial \eta_j}\right)$, $j=\overline{1,l}$ – кеңістік айнымалысы бойынша векторлық дифференциалдау операторлары.

(1.5.1) дифференциалдау операторлы

$$D_4 x=0 \tag{1.5.2}$$

теңдеуінің

$$x\big|_{\tau=\tau^0}=u(t)\in C_t^{(e)}(R^m) \tag{1.5.3}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімінің көппериодтылығы мәселесін қарастыралық.

D_4 операторымен дифференциалдау уақыт және кеңістік айнымалыларының τ айнымалысымен байланысқан келесі векторлық өрістері бағыттарымен жүргізіледі:

$$\frac{dt}{d\tau}=a(\tau,t) \tag{1.5.4}$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=J\zeta+g(\tau). \tag{1.5.5}$$

Келесі шарттар орындалсын деп ұйғаралық.

1) $a(\tau,t)$ вектор-функциясы келесі шартты қанағаттандырады:

$$a(\tau+\theta,t+q\omega)=a(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R\times R^m). \tag{1.5.6}$$

2) Блок-диагоналды J матрицасы

$$J=diag\left[\nu_0 I_2,...,\nu_l I_2\right],\qquad \langle q,\nu\rangle\neq 0 \tag{1.5.7}$$

түрінде беріледі, мұндағы $\nu=\left(\nu_0,...,\nu_l\right)$ – тұрақты вектор, $q=\left(q_0,...,q_l\right)\in Z\times...\times Z=Z^{l+1}$ және $2\pi\nu_j^{-1}=\alpha_j$ $(j=\overline{1,l})$ сандары бейөлшемдес, I_2 – екінші ретті симплектикалық бірлік.

3) $g(\tau)=(g_1(\tau),...,g_l(\tau))$ және $g_j(\tau)=(\varphi_j(\tau),\psi_j(\tau)), j=\overline{1,l}$ вектор-функциялары үзіліссіз және β_j-периодты:

$$g_j(\tau+\beta_j)=g_j(\tau)\in C_\tau^{(0)}(R),\ j=\overline{1,l}, \tag{1.5.8}$$

мұндағы $2\pi\nu_j^{-1}=\alpha_k,\ k=\overline{1,l}$ және $\beta_j,\ j=\overline{1,l}$ – рационалды бейөлшемдес оң тұрақтылар.

(1.5.8) шарты орындалғанда кез келген $(\tau^0,t^0)\in R\times R^m$ бастапқы нүктесінен шығатын (1.5.4) векторлық өрісінің сипаттауышы

$$t=\lambda(\tau,\tau^0,t^0) \tag{1.5.9}$$

келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned}&1^0.\ t^0=\lambda(\tau^0,\tau,t),\\ &2^0.\ \lambda(\tau',\tau'',\lambda(\tau'',\tau,t))=\lambda(\tau',\tau,t),\ \tau',\tau''\in R,\\ &3^0.\ \lambda(\tau^0+\theta,\tau+\theta,t+q\omega)=\lambda(\tau^0,\tau,t)+q\omega,\\ &4^0.\ D_4u(\lambda(\tau^0,\tau,t))=0,\ u(t)\in C_t^{(e)}(R^m).\end{aligned} \tag{1.5.10}$$

(1.5.4) векторлық өрісінің (1.5.9) сипаттауышының қасиеттері [47, 21-26 б.] жұмысынан белгілі. $x=u(\lambda(\tau^0,\tau,t))$ шешімі (1.5.3) бастапқы шартын қанағаттандыратындықтан D_4 операторының нөлі, яғни (1.5.2)-(1.5.3) есебінің шешімі:

$$x(\tau^0,\tau,t)=u(\lambda(\tau^0,\tau,t)). \tag{1.5.11}$$

1.5.1-лемма. *(1.5.6) шарты орындалсын. Онда*

$$u(t+q\omega)=u(t)\in C_t^{(e)}(R^m) \tag{1.5.12}$$

шарты орындалғанда D_4 *операторының (1.5.3) бастапқы функциясымен анықталған (1.5.11) нөлдері*

$$x(\tau^0+\theta,\tau+\theta,t+q\omega)\neq x(\tau^0,\tau,t) \tag{1.5.13}$$

түріндегі көппериодтылық шартын қанағаттандырады.

(1.5.13) теңдігінің дәлелдеуі (1.5.11) нөлінің құрылымынан, (1.5.6) шартының салдары болып табылатын (1.5.10) қатысының 3° қасиетінен және (1.5.12) шартынан шығады. (1.5.13) қасиетінен $x(\tau^0,\tau,t)$ шешімінің t

айнымалысына қатысты ω-периодты, (τ^0,τ) бойынша диагоналды θ-периодты болатынын көреміз. Дербес жағдайда, $\lambda(\tau^0,\tau,t)$ τ немесе τ^0 айнымалысына қатысты θ-периодты функция болса, онда лемма шарттары негізінде D_4 операторының (1.5.11) нөлдері (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты.

(1.5.5) векторлық өрісін дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде

$$\frac{d\zeta_j}{d\tau}=\nu_j I_2\zeta_j+g_j(\tau),\ j=\overline{1,l} \tag{1.5.14}$$

қарастырып, оны

$$\frac{d\xi_j}{d\tau}=-\nu_j\eta_j+\varphi_j(\tau),\ \frac{d\eta_j}{d\tau}=\nu_j\xi_j+\psi_j(\tau),\ \ j=\overline{1,l} \tag{1.5.15}$$

скаляр түрде жазалық.

(1.5.15) жүйесінің және сол сияқты (1.5.14) жүйесінің матрицанттары

$$Z_j(\tau)=\begin{pmatrix}\cos\nu_j\tau & -\sin\nu_j\tau\\ \sin\nu_j\tau & \cos\nu_j\tau\end{pmatrix}$$

$\alpha_j=2\pi\nu_j^{-1}$-периодты, әрі α_k және β_j сандарының бейөлшемдестігі негізінде $\det\lfloor Z_j(\beta_j)-Z_j(0)\rfloor\neq 0$ шарты орындалады мұндағы $j=\overline{1,l}$.

Шынында да, $\beta_j-q_j\alpha_j\neq 0,\ j=\overline{1,l}$ болғандықтан $\det\lfloor Z_j(\beta_j)-Z_j(0)\rfloor=2(1-\cos\nu_j\beta_j)\neq 0$ аламыз. Онда (1.5.14) жүйелерінің β_j-периодты шешімдері бар:

$$z_j(\tau)=\left[Z_j^{-1}(\tau+\beta_j)-Z_j^{-1}(\tau)\right]^{-1}\int\limits_{\tau}^{\tau+\beta_j}Z_j^{-1}(s)\,g_j(s)ds,\ j=\overline{1,l}. \tag{1.5.16}$$

Олай болса, (1.5.14) жүйенің ζ_j жалпы шешімдері

$$\zeta_j=Z_j\left(\tau-\tau^0\right)\left[\zeta_j^0-z_j\left(\tau^0\right)\right]+z_j(\tau) \tag{1.5.17}$$

арқылы анықталады, мұндағы $Z_j(\tau)$ матрицанттары мен $z_j(\tau)$ шешімдері үшін

$$Z_j\left(\tau+\alpha_j\right)=Z_j(\tau), \tag{1.5.18}$$

$$z_j\left(\tau+\beta_j\right)=z_j(\tau) \tag{1.5.19}$$

қасиеттері орынды, әрі $j=\overline{1,l}$. (1.5.17) шешімін α_j, β_j бейөлшемдес периодтары арқылы периодты функциялардың көмегімен өрнектеу үшін

$$\bar{\zeta}_j\left(\bar{s}_j-\bar{s}_j^0, \bar{\sigma}_j, \zeta_j^0-z_j^0\right)=Z_j\left(\bar{s}_j-\bar{s}_j^0\right)\left[\zeta_j^0-z_j^0\right]+z_j\left(\bar{\sigma}_j\right) \qquad (1.5.20)$$

қатыстарымен байланысқан $\bar{s}_j, \bar{\sigma}_j$ жаңа уақыт және $\bar{\zeta}_j$ кеңістік айнымалыларын енгізу қажет, мұндағы $z_j^0=z_j\left(\bar{s}_j^0\right)$, $\bar{s}_j^0$ – $\bar{s}_j$ айнымалыларының бастапқы мәндері, $j=\overline{1,l}$.

(1.5.20) көппериодты функциялары $\bar{\sigma}_j=\bar{s}_j=\tau$, $\bar{s}_j^0=\tau^0$ болғанда (1.5.17) шешіміне айналады және

$$\frac{\partial\bar{\zeta}_j}{\partial\bar{s}_j}+\frac{\partial\bar{\zeta}_j}{\partial\bar{\sigma}_j}=\nu_j I_2\bar{\zeta}_j+g_j(\bar{\sigma}_j) \;\; j=\overline{1,l} \qquad (1.5.21)$$

теңдеуінің

$$\bar{\zeta}_j\Big|_{\bar{\sigma}_j=\bar{s}_j=\bar{s}_j^0}=\zeta_j^0, \;\; j=\overline{1,l}. \qquad (1.5.22)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімдері болады.

$Z_j(\tau)$ матрицанттары мен $z_j(\tau)$ шешімдерінің (1.5.18) және (1.5.19) қасиеттері негізінде (1.5.20) функциялары

$$\bar{\zeta}_j\left(\bar{s}_j+\alpha_j, \bar{\sigma}_j, \zeta_j^0\right)=\bar{\zeta}_j\left(\bar{s}_j, \bar{\sigma}_j+\beta_j, \zeta_j^0\right)=\bar{\zeta}_j\left(\bar{s}_j, \bar{\sigma}_j, \zeta_j^0\right), \; j=\overline{1,l} \qquad (1.5.23)$$

көппериодтылық қасиеттерін қанағаттандырады.

Осылайша енгізілген жаңа уақыт айнымалыларын арқылы (1.5.14) теңдеулер жүйесінен (1.5.22) бастапқы шартты (1.5.21) теңдеулер жүйесін алдық.

Керісінше $\bar{\sigma}_j=\bar{s}_j=\tau$, $\bar{s}_j^0=\tau^0$ мәндерін қойсақ, (1.5.21)-(1.5.22) есебінен (1.5.14) теңдеуін және олардың (1.5.17) шешімдерін аламыз.

$\zeta_j=\zeta_j(\tau)$ және $\bar{\zeta}_j=\bar{\zeta}_j\left(\bar{s}_j, \bar{\sigma}_j\right)$ функцияларының арасындағы $\bar{\sigma}_j=\bar{s}_j=\tau$ болғанда

$$\zeta_j(\tau)=\bar{\zeta}_j(\tau,\tau), \;\; \frac{d\zeta_j}{d\tau}=\frac{d\bar{\zeta}_j(\tau,\tau)}{d\tau}=\frac{\partial\bar{\zeta}_j\left(\bar{s}_j, \bar{\sigma}_j\right)}{\partial\bar{s}_j}+\frac{\partial\bar{\zeta}_j\left(\bar{s}_j, \bar{\sigma}_j\right)}{\partial\bar{\sigma}_j}$$

түріндегі орнатылған тығыз байланыс D_4 дифференциалдау операторын

$$\begin{aligned}\overline{D}_4 = \frac{\partial}{\partial\tau} + \left\langle a(\tau,t),\, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle + \left\langle e,\, \frac{\partial}{\partial\bar{s}}\right\rangle + \left\langle e,\, \frac{\partial}{\partial\bar{\sigma}}\right\rangle + \\ + \left\langle \nu\, I_2\, \bar{\zeta} + g(\bar{\sigma}),\, \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{s}} + \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{\sigma}},\, \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right\rangle\end{aligned} \qquad (1.5.24)$$

операторына көшіреді, мұндағы $e = (1,...,1)$ – l-вектор, $\bar{s} = (\bar{s}_1,...,\bar{s}_l)$, $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1,...,\bar{\sigma}_l)$ – уақыт айнымалылары, $\bar{\zeta} = (\bar{\zeta}_1,...,\bar{\zeta}_l)$, $\bar{\zeta}_j = \bar{\zeta}_j(\bar{s}_j,\bar{\sigma}_j)$, $j = \overline{1,l}$ – кеңістік айнымалылары, $\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{s}} = \left(\frac{\partial\bar{\zeta}_1}{\partial\bar{s}_1},...,\frac{\partial\bar{\zeta}_l}{\partial\bar{s}_l}\right)$, $\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{\sigma}} = \left(\frac{\partial\bar{\zeta}_1}{\partial\bar{\sigma}_1},...,\frac{\partial\bar{\zeta}_l}{\partial\bar{\sigma}_l}\right)$ – векторлық дифференциалдау операторлары. Әрі қарай (1.5.14) - (1.5.19) координаттық мәліметтерінен (1.5.5) векторлы-матрицалық теңдеуінің

$$\zeta = Z\left(\tau - \tau^0\right)\left[\zeta^0 - z\left(\tau^0\right)\right] + z(\tau) \qquad (1.5.25)$$

сипаттауышын аламыз, мұндағы $Z(\tau) = diag\ \left[Z_1(\tau),..., Z_l(\tau)\right]$, $z(\tau) = \left(z_1(\tau),...,z_l(\tau)\right)$, $\zeta^0 = \left(\zeta_1^0,...,\zeta_l^0\right)$.

(1.5.25) өрнегі (1.5.2) теңдеуінің де кеңістік айнымалысы бойынша сипаттауышы болатынын байқаймыз. (1.5.25) сипаттаушы теңдеуінен (1.5.5) теңдеуінің бірінші интегралы

$$\zeta^0 = Z\left(\tau^0 - \tau\right)\left[\zeta - z(\tau)\right] + z\left(\tau^0\right) \equiv \mu\left(\tau^0,\tau,\zeta\right) \qquad (1.5.26)$$

арқылы анықталады. Олай болса,

$$D_4\mu\left(\tau^0,\tau,\zeta\right) = 0, \quad \mu\left(\tau^0,\tau^0,\zeta\right) = \zeta \qquad (1.5.27)$$

теңдігі орындалады. Сонда кез келген дифференциалданатын $w(\zeta) \in C_\zeta^{(e)}\left(B_\delta^{2l}\right)$ функциясы үшін (1.5.2) теңдеуінің шешімі

$$x\left(\tau^0,\tau,\zeta\right) = w\left(\mu(\tau^0,\tau,\zeta)\right) \qquad (1.5.28)$$

болады, әрі ол келесі бастапқы шартты қанағаттандырады:

$$x\big|_{\tau=\tau^0} = w(\zeta) \in C_\zeta^{(e)}\left(B_\delta^{2l}\right). \qquad (1.5.29)$$

Шынында да, $D_4 x = \frac{\partial w}{\partial\zeta}\cdot D_4\mu$ болғандықтан (1.5.27) негізінде $D_4 x = 0$ теңдігін аламыз. Олай болса, (1.5.28) шешімі (1.5.29) бастапқы шартымен анықталған D_4 операторының нөлі.

Әрі қарай, (1.5.26) сипаттауышының көппериодты құрылымын зерттеуде (1.5.20)-(1.5.23) қатыстарына қатысты жүргізілген талдаудан

$$\bar{\zeta}\left(\bar{s}-\bar{s}^0, z(\bar{\sigma}), \zeta^0 - z^0\right) = Z\left(\bar{s}-\bar{s}^0\right)\left[\zeta^0 - z\left(\bar{s}^0\right)\right] + z\left(\bar{\sigma}\right) \qquad (1.5.30)$$

вектор-функциясын аламыз, ол $\overline{D}_4$ операторының $\bar{\zeta}\,\big|_{\bar{\sigma}=\bar{s}=\bar{s}^0} = \zeta^0$ бастапқы шартымен берілген келесі сипаттаушы теңдеуін

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{s}} + \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{\sigma}} = \nu\, I_2\, \bar{\zeta} + g(\bar{\sigma}) \qquad (1.5.31)$$

қанағаттандырады мұндағы $\bar{\zeta}_j = \bar{\zeta}_j\left(\bar{s}_j - \bar{s}_j^0, z(\bar{\sigma}_j^0), \zeta_j^0 - z(\bar{s}^0)\right)$, $j = \overline{1,l}$, $g(\bar{\sigma}) = \left(g_1(\bar{\sigma}_1),..., g_l(\bar{\sigma}_l)\right)$, $z(\bar{\sigma}) = \left(z_1(\bar{\sigma}_1),..., z_l(\bar{\sigma}_l)\right)$, $Z\left(\bar{s}\right) = diag\left[Z_1\left(\bar{s}_1\right),..., Z_l\left(\bar{s}_l\right)\right]$.

(1.5.18), (1.5.19) және (1.5.23) қасиеттері негізінде $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_l)$ және $\beta = (\beta_1,...,\beta_l)$ периодтарына сәйкес $Z\left(s\right)$ матрицанты α-периодты, ал $z\left(\bar{\sigma}\right)$ шешімі β-периодты болады.

(1.5.31) теңдеуінің бірінші интегралы (1.5.30) сипаттаушы теңдеуінен

$$\zeta^0 = \bar{\zeta}\left(\bar{s}^0 - \bar{s}, z(\bar{s}^0), \zeta - z(\bar{\sigma})\right)$$

қатысымен анықталады. Бұдан

$$\overline{D}_4\bar{\zeta}\left(\bar{s}^0 - \bar{s}, z(\bar{s}^0), \zeta - z(\bar{\sigma})\right) = 0, \quad \bar{\zeta}\,\big|_{\bar{\sigma}=\bar{s}=\bar{s}^0} = \zeta\,. \qquad (1.5.32)$$

Сол сияқты (1.5.32) негізінде кез келген $w(\zeta)$ дифференциалданатын функциясы үшін

$$\overline{D}_4 w\left(\bar{\zeta}\left(\bar{s}^0 - \bar{s}, z(\bar{s}^0), \zeta - z(\bar{\sigma})\right)\right) = \frac{\partial w\left(\zeta\right)}{\partial\zeta}\cdot\overline{D}_4\bar{\zeta}\left(\bar{s}^0 - \bar{s}, z(\bar{s}^0), \zeta - z(\bar{\sigma})\right) = 0$$

теңдігі орынды, әрі $w\left(\bar{\zeta}\left(\bar{s}^0 - \bar{s}, z(\bar{s}^0), \zeta - z(\bar{\sigma})\right)\right)\Big|_{\bar{\sigma}=\bar{s}=\bar{s}^0} = w\left(\zeta\right)$. Осылайша,

$$\bar{x}\left(\bar{s}^0, \bar{s}, \bar{\sigma}, \zeta\right) = w\left(\bar{\zeta}\left(\bar{s}^0 - \bar{s}, z(\bar{s}^0), \zeta - z(\bar{\sigma})\right)\right) \qquad (1.5.33)$$

өрнегі $\overline{D}_4$ операторының нөлі болады, ал $\bar{\sigma} = \bar{s} = \tau\tilde{e}, \bar{s}^0 = \tau^0\tilde{e}$ мәндерінде $\bar{x}\left(\bar{s}^0, \bar{s}, \sigma, \zeta\right)$ вектор-функциясы D_4 операторының $x\left(\tau^0, \tau, \zeta\right)$ нөліне айналады, мұндағы $\tilde{e} = (1,...,1)$ – l-вектор.

1.5.2-лемма. *(1.5.7) және (1.5.8) шарттары орындалсын. Онда* D_4 *операторының (1.5.29) бастапқы шартты (1.5.28) нөлдерінің (1.5.30) вектор-функциясы бойынша (1.5.33) түріндегі көппериодты құрылымы бар, әрі*

$$\begin{gathered}\bar{x}\left(\bar{s}^0,\bar{s},\bar{\sigma},\zeta\right)\Big|_{\substack{\bar{\sigma}=\bar{s}=\tau\tilde{e}\\ \bar{s}^0=\tau^0\tilde{e}}}=x\left(\tau^0,\tau,\zeta\right),\\ \bar{\zeta}\left(\tilde{e}\tau^0-\tilde{e}\tau,z(\tilde{e}\tau^0),\zeta-z(\tilde{e}\tau)\right)=\mu\left(\tau^0,\tau,\zeta\right).\end{gathered} \tag{1.5.34}$$

1.5.1-теорема. *(1.5.6)-(1.5.8) шарттары орындалсын. Онда (1.5.2) теңдеуінің* $x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)$ *шешімі*

$$x\Big|_{\tau=\tau^0}=u^0\left(t,\zeta\right)\in C_{t,\zeta}^{(\hat{e},\tilde{e})}\left(R^m\times B_\delta^{2l}\right) \tag{1.5.35}$$

бастапқы шартымен

$$x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right)=u^0\left(\lambda\left(\tau^0,\tau,t\right),\mu\left(\tau^0,\tau,\zeta\right)\right) \tag{1.5.36}$$

қатысы арқылы анықталады, оның

$$\lambda\left(\tau^0,\tau+\theta,t\right)=\lambda\left(\tau^0,\tau,t\right), \tag{1.5.37}$$

$$u^0\left(t+q\omega,\zeta\right)=u^0\left(t,\zeta\right) \tag{1.5.38}$$

шарттары орындалғанда $\left(\tau,t,\bar{s},\bar{\sigma}\right)$ *бойынша* $\left(\theta,\omega,\alpha,\beta\right)$*-периодты құрылымы*

$$\bar{x}\left(\tau^0,\tau,t;\bar{s}^0,\bar{s},\bar{\sigma},\zeta\right)=u^0\left(\lambda\left(\tau^0,\tau,t\right),\bar{\zeta}\left(\bar{s}^0-\bar{s},z\left(\bar{s}^0\right),\zeta-z\left(\bar{\sigma}\right)\right)\right) \tag{1.5.39}$$

арқылы анықталады, мұндағы $\bar{\zeta}\left(\bar{s},z,\zeta\right)$ *– (1.5.30) түрінде вектор-функция,* $\hat{e}=(1,...,1)-m$ *- вектор,* $\tilde{e}=(1,...,1)-l$*-вектор, әрі*

$$\bar{x}\Big|_{\substack{\bar{\sigma}=\bar{s}=\tilde{e}\tau\\ \bar{s}^0=\tilde{e}\tau^0}}=x\left(\tau^0,\tau,t,\zeta\right). \tag{1.5.40}$$

Дәлелдеуі. (1.5.2)-(1.5.35) бастапқы есебінің (1.5.36) шешімінің түрі бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясынан шығады [36, 40-43 б.]. Оның дербес жағдайлары 1.5.1 және 1.5.2-леммаларында келтірілген.

(1.5.36) шешімінің (1.5.39) көппериодты құрылымы да көрсетілген леммаларда келтірілген, көппериодтылығы (1.5.23), (1.5.37) және (1.5.38) қосымша шарттарын пайдаланып тексеріледі, яғни

$$\begin{aligned}&\overline{x}\left(\tau^{0},\tau+\theta,t+q\omega;\overline{s}^{0},\overline{s}+\alpha,\overline{\sigma}+\beta,\zeta\right)=\\&=u^{0}\left(\lambda\left(\tau^{0},\tau+\theta,t+q\omega\right),\overline{\zeta}\left(\overline{s}^{0}-\overline{s}+\alpha,z\left(\overline{s}^{0}\right),\zeta-z\left(\overline{\sigma}+\beta\right)\right)\right)=\\&==u^{0}\left(\lambda\left(\tau^{0},\tau,t\right)+q\omega,\overline{\zeta}\left(\overline{s}^{0}-\overline{s},z\left(\overline{s}^{0}\right),\zeta-z\left(\overline{\sigma}\right)\right)\right)=\overline{x}\left(\tau^{0},\tau,t;\overline{s}^{0},\overline{s},\overline{\sigma},\zeta\right).\end{aligned}$$

(1.5.40) теңдігі (1.5.34) шарты негізінде (1.5.39) вектор-функциясынан шығады. Тікелей тексеру арқылы $\overline{x}=\overline{x}\left(\tau^{0},\tau,t,\overline{s}^{0},\overline{s},\overline{\sigma},\zeta\right)$ вектор-функциясы $\overline{D}_{4}\overline{x}=0$ теңдеуінің шешімі болатындығына көз жеткізуге болады.

Дәлелденген теорема D_4 дифференциалдау операторының нөлдерінің көппериодты құрылымын анықтайды.

I. Тұрақты $n\times n$-өлшемді A матрицасымен берілген (1.5.1) дифференциалдау операторлы біртекті сызықты

$$D_4 x = Ax \tag{1.5.41}$$

жүйесін қарастыралық. Оның

$$x\Big|_{\tau=\tau^{0}}=u\left(t,\zeta\right)\in C_{t,\zeta}^{(\hat{e},\tilde{e})}\left(R^{m}\times B_{\delta}^{2l}\right) \tag{1.5.42}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын x шешімдерінің көппериодты құрылымын зерттейміз.

Осы мақсатта қойылған есептің шешімін [43, 274-282 б.; 46, 62-66 б.] жұмыстарының әдістерін қолдана отырып, (1.5.41) жүйесінің (1.1.23) формуласына ұқсас

$$X(\tau)=\exp[A\tau] \tag{1.5.43}$$

түріндегі матрицантының көппериодты құрылымын зерттеуден бастаймыз. Ол үшін келесі леммалар қажет.

1.5.3-лемма. *Егер* $f_j\left(\tau+\theta_j\right)=f_j(\tau),\ j=\overline{1,r}$ *функциялары қандай да бір рационалды өлшемдес* $\theta_j/\theta_k=r_{jk}$ *периодтарымен берілген периоды функциялардың жиынтығы болса, онда бұл функциялар үшін* θ *ортақ периоды табылады және* $f_j(\tau+\theta)=f_j(\tau),\ j=\overline{1,r}$ *теңдігі орындалады, мұндағы* r_{jk} *– рационал сандар,* $j,k=\overline{1,r}$.

Шынында да, рационалды өлшемдестік негізінде $q_1,\ldots,q_r$ натурал сандары табылып $q_1\theta_1=\ldots=q_r\theta_r=\theta$ орындалады, әрі ол ізделінді период болады [49, 11-12 б.].

1.5.4-лемма. *Егер тұрақты* I *матрицасының барлық меншікті мәндерінің нақты бөліктері нөлге тең және барлығының элементар* *бөлгіштері жәй болса, онда* $Y(\tau) = \exp[I\tau]$ *матрицантының элементтері периодты функциялар болады.*

Дәлелдеуі. 1.5.4-леммасы шарттары бойынша $\lambda_j(I) = ib_j$, $j = \overline{1,r}$, меншікті мәндеріндегі b_j тұрақтылары не нөлге тең, не нөлден өзге болады, мұндағы i – жорымал бірлік. Егер ол нөлден өзге болса, онда әрбір $\lambda_j(I) = ib_j$ меншікті мәніне бір не бірнеше $J_j = [s_{ik}]_1^2$, $s_{11} = s_{22} = 0$, $-s_{12} = s_{21} = b_j$, $j = \overline{1,r}$ жордан клеткалары сәйкес келеді. Онда $Y(\tau)$ матрицанты

$$Y(\tau) = K\, diag\left[e^{I_1\tau},...,e^{I_r\tau}\right]K^{-1} \tag{1.5.44}$$

матрицасы арқылы анықталады, мұнда $b_j = 0$ болса, $I_j = 0$, ал $b_j \neq 0$ болса, $I_j = J_j$ болады. Сонымен қатар

$$Y_j(\tau) = e^{J_j\tau} = \begin{pmatrix} \cos b_j\tau & -\sin b_j\tau \\ \sin b_j\tau & \cos b_j\tau \end{pmatrix}, \ (b_j \neq 0), \tag{1.5.45}$$

K – I матрицасын $I = K\, diag\,[I_1,...,I_r]K^{-1}$ канондық түріне келтіру матрицасы. (1.5.44) және (1.5.45) қатыстарынан 1.5.4-леммасының толық дәлелдеуін аламыз, әрі $Y(\tau)$ матрицасының элементтерінің периодтары $2\pi b_j^{-1}$, $j = \overline{1,r}$, $\hat{r} \leq r$ периодтарының бейөлшемдестігін ескергенде 1.5.3-леммасы бойынша $\hat{\gamma}_1 = 2\pi b_{j_1}^{-1},...,\hat{\gamma}_{\hat{r}} = 2\pi b_{j_{\hat{r}}}^{-1}$ түрінде анықталады, мұндағы $\hat{\gamma}_1,...,\hat{\gamma}_{\hat{r}}$ – рационалды бейөлшемдес тұрақтылар.

γ_k периодты (1.5.45) түріндегі $Y_{j_k}(\tau)$, $j_k = \overline{1,r_k}$ торкөздерін $\tau = \tau_k$ айнымалыларынан тәуелді торкөздер ретінде қарастыралық:

$$Y_{j_k}(\tau_k + \hat{\gamma}_k) = Y_{j_k}(\tau_k), \ j_k = \overline{1,r_k}. \tag{1.5.46}$$

Әрбір (1.5.45) торкөзін (1.5.46) шартына сәйкес жаңа $\tau_1,...,\tau_{\hat{r}}$ айнымалылары арқылы өрнектеп (1.5.44) матрицантынан периоды $\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_\rho)$ болатын $T(\hat{\tau}) = T(\tau_1,...,\tau_{\hat{r}})$ көппериодты матрицасын аламыз. $\dfrac{\partial}{\partial\tau_k}Y_{j_k}(\tau_k) = J_j Y_{j_k}(\tau_k)$ болғандықтан $T(\hat{\tau})$ матрицасы

$$\hat{D}_4 T(\hat{\tau}) = I\,T(\hat{\tau}) \tag{1.5.47}$$

теңдеуін қанағаттандырады, мұндағы $\hat{D}_4$ операторы

$$\widehat{D}_4 = \left\langle \widehat{e},\ \frac{\partial}{\partial \widehat{\tau}} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial \tau_{\widehat{r}}} \qquad (1.5.48)$$

арқылы анықталған, $\widehat{e} = (1,\ldots,1)$ – $\widehat{r}$-вектор. $\widehat{\tau} = \widehat{e}\,\tau$ мәнінде $T(\widehat{e}\,\tau) = Y(\tau)$ теңдігін аламыз және

$$\frac{d}{d\tau} Y(\tau) = \frac{d}{d\tau} T(\widehat{e}\,\tau) = I\,T(\widehat{e}\,\tau) = I\,Y(\tau) \qquad (1.5.49)$$

орындалады. Осылайша $T(\widehat{\tau})$ көппериодты матрицасы $Y(\tau)$ матрицантының көппериодты құрылымын анықтайды:

$$Y(\tau) = T(\tau_1,\ldots,\tau_{\widehat{r}})\big|_{\tau_1 = \ldots = \tau_{\widehat{r}} = \tau}\,. \qquad (1.5.50)$$

1.5.5-лемма. *1.5.4-леммасы шарттары орындалғанда (1.5.49) жүйесінің $Y(\tau)$ матрицантының (1.5.48) дифференциалдау операторлы (1.5.47) жүйесін қанағаттандыратын $T(\widehat{\tau})$ матрица түріндегі көппериодты құрылымы бар және ол $\widehat{D}_4$ операторының $\widehat{\tau} = \widehat{e}\,\tau$ сипаттауышы бойында $Y(\tau)$ матрицасына тең болады, басқаша айтқанда бұл матрицалар (1.5.50) қатысы арқылы байланысады.*

Сызықты алгебра курсынан A матрицасы

$$A = K\,J(\lambda)K^{-1} = K\,J(a+ib)K^{-1} = K\,J(a)K^{-1} + K\,E(ib)K^{-1} = L + I$$

түрінде берілетіні белгілі, мұндағы K – A матрицасын $\lambda_j = a_j + ib_j,\ j = \overline{1,r}$ меншікті мәндеріне сәйкес келетін n_j-торкөзді $J_j(\lambda_j)$ жордандық $J(\lambda) = diag[J_1(\lambda_1),\ldots,J_r(\lambda_r)]$ қалыпты түріне келтіретін қайсыбір ерекше емес матрица; $L = K\,J(a)K^{-1}$ – матрица, $J(a)$ – $J(\lambda)$ жордандық түрінен λ_j меншікті мәндерін сәйкес $a_j = \mathrm{Re}\,\lambda_j,\ j = \overline{1,r}$ нақты бөліктерімен ауыстыру арқылы алынған матрица, $I = K\,E(ib)K^{-1}$ – матрица, $E(ib) = diag[ib_1E_1,\ldots,ib_rE_r]$, $b_j = \mathrm{Im}\,\lambda_j,\ j = \overline{1,r}$, E_j – бірлік n_j-торкөздер, әрі L және I матрицалары коммутативті, яғни $LI = IL$. Олай болса, $e^{A\tau} = e^{I\tau + L\tau} = e^{I\tau}\cdot e^{L\tau}$ орындалады және (1.5.43) матрицантын

$$X(\tau) = Y(\tau)\cdot Z(\tau) \qquad (1.5.51)$$

арқылы өрнектейміз, мұндағы $Y(\tau) = \exp[I\tau]$, $Z(\tau) = \exp[L\tau]$. Сонымен қатар $Y(\tau)$ матрицанты (1.5.49) қасиетімен қатар

$$\frac{d}{d\tau}Y(\tau) = AY(\tau) - Y(\tau)L \tag{1.5.52}$$

теңдеуін де қанағаттандырады.

Шынында да,

$$\dot{X} = AX \tag{1.5.53}$$

теңдеуінде $X = Y(\tau)Z$ ауыстыруын жасасақ,

$$\dot{Z} = Y^{-1}(\tau)\left[AY(\tau) - \frac{d}{d\tau}Y(\tau)\right]Z$$

теңдеуін аламыз. Мұнда $\dot{Z} = LZ$ теңдігін ескерсек, (1.5.51) теңдігін аламыз.

(1.5.49) және (1.5.52) теңдіктері $Y(\tau) = \exp[I\tau]$ матрицантының A, L, I матрицалар үштігімен байланысын анықтайды, әрі I матрицасы 1.5.4-лемманың шарттарын қанағаттандырады. Олай болса, 1.5.5-леммасынан (1.5.51) теңдігі негізінде (1.5.43) матрицантының көппериодты құрылымы

$$\widehat{X}(\tau, \widehat{\tau}) = X(\tau, \tau_1, ..., \tau_{\widehat{r}}) = T(\tau_1, ..., \tau_{\widehat{r}})e^{L\tau} \tag{1.5.54}$$

түріндегі $\widehat{X}(\tau, \widehat{\tau})$ матрицасымен анықталады, ал ол $X(\tau)$ матрицасымен

$$\widehat{X}(\tau, \widehat{\tau})\Big|_{\widehat{\tau} = \widehat{e}\tau} = X(\tau) \tag{1.5.55}$$

қатысы арқылы байланысады.

Осылайша, келесі теорема дәлелденді.

1.5.2-теорема. *A матрицасының комплекс меншікті мәндері болған кезде (1.5.53) жүйесінің (1.5.43) матрицантының (1.5.54) матрицасымен және (1.5.47) - (1.5.50) қатыстарымен анықталған көппериодты құрылымы бар, әрі ол $\widehat{D}_4$ операторының $\widehat{\tau} = \widehat{e}\tau$ сипаттауышы бойында (1.5.55) шартын қанағаттандырады. Комплекс меншікті мәндері болмаған жағдайда $T(\widehat{\tau})$ матрицасы тұрақты матрицаға айналады.*

Енді қойылған есептің шешімін келесі теорема түрінде тұжырымдалық.

1.5.3-теорема. *(1.5.6)-(1.5.8) шарттары орындалсын. Онда (1.5.41)-(1.5.42) есебінің*

$$x(\tau^0, \tau, t, \zeta) = X(\tau)u(\lambda(\tau^0, \tau, t), \mu((\tau^0, \tau, \zeta))) \tag{1.5.56}$$

қатысымен анықталатын $x(\tau^0, \tau, t, \zeta)$ шешімінің көппериодты құрылымы

$$\widehat{x}\left(\tau^0,\tau,\widehat{\tau},t,\ \overline{s}^0,\overline{s},\overline{\sigma},\zeta\right)=\widehat{X}(\tau,\widehat{\tau})\ \overline{u}\left(\lambda\left(\tau^0,\tau,t\right),\overline{\zeta}\left(\overline{s}^0-\overline{s},z\left(\overline{s}^0\right),\zeta-z(\overline{\sigma})\right)\right) \quad (1.5.57)$$

вектор-функциясы түріндегі болады және

$$\overline{\overline{D}}_4\widehat{x}=A\widehat{x} \quad (1.5.58)$$

теңдеуіне қанағаттандырады, мұнда $\overline{\overline{D}}_4$ дифференциалдау операторы (1.5.24) және (1.5.48) қатыстарымен анықталған

$$\overline{\overline{D}}_4=\overline{D}_4+\widehat{D}_4. \quad (1.5.59)$$

Дәлелдеуі. (1.5.56) өрнегі [47, 35-37 б.] жұмысынан белгілі, ал (1.5.57) шешімінің түрі дәлелденген 1.5.1 және 1.5.2-теоремаларынан шығады. (1.5.32), (1.5.54) орындалатынын ескеріп (1.5.58) теңдігінің дұрыстығын көрсетелік:

$$\begin{aligned}
&\overline{\overline{D}}_4\widehat{x}\left(\tau^0,\tau,\widehat{\tau},t,\ \overline{s}^0,\overline{s},\overline{\sigma},\zeta\right)=\overline{\overline{D}}_4\widehat{X}(\tau,\widehat{\tau})\ \overline{u}\left(\lambda\left(\tau^0,\tau,t\right),\overline{\zeta}\left(\overline{s}^0-\overline{s},z\left(\overline{s}^0\right),\zeta-z(\overline{\sigma})\right)\right)+\\
&+\widehat{X}(\tau,\widehat{\tau})\overline{\overline{D}}_4\ \overline{u}\left(\lambda\left(\tau^0,\tau,t\right),\overline{\zeta}\left(\overline{s}^0-\overline{s},z\left(\overline{s}^0\right),\zeta-z(\overline{\sigma})\right)\right)=\\
&=\left(\overline{D}_4\widehat{X}(\tau,\widehat{\tau})+\widehat{D}_4\widehat{X}(\tau,\widehat{\tau})\right)\overline{u}\left(\lambda\left(\tau^0,\tau,t\right),\overline{\zeta}\left(\overline{s}^0-\overline{s},z\left(\overline{s}^0\right),\zeta-z(\overline{\sigma})\right)\right)=\\
&=\left(LT(\widehat{\tau})e^{L\tau}+IT(\widehat{\tau})e^{L\tau}\right)\overline{u}\left(\lambda\left(\tau^0,\tau,t\right),\overline{\zeta}\left(\overline{s}^0-\overline{s},z\left(\overline{s}^0\right),\zeta-z(\overline{\sigma})\right)\right)=\\
&=A\widehat{X}(\tau,\widehat{\tau})\overline{u}\left(\lambda\left(\tau^0,\tau,t\right),\overline{\zeta}\left(\overline{s}^0-\overline{s},z\left(\overline{s}^0\right),\zeta-z(\overline{\sigma})\right)\right)=A\widehat{x}\left(\tau^0,\tau,\widehat{\tau},t,\ \overline{s}^0,\overline{s},\overline{\sigma},\zeta\right).
\end{aligned}$$

Енді (1.5.41) теңдеулер жүйесінің нөлдік емес көппериодты шешімдерінің бар болуы жөніндегі мәселені зерттейміз. Зерттеуді қарапайым жағдайлардан басталық. Ол үшін векторлы-матрицалық түрде

$$\frac{dx}{d\tau}=E_*x \quad (1.5.60)$$

арқылы жазылатын жалғыз нөлдік меншікті мәні бар

$$\frac{dx_1}{d\tau}=0,\ \frac{dx_2}{d\tau}=x_1,\ldots,\frac{dx_n}{d\tau}=x_{n-1}$$

канондық жүйені қарастыралық, мұндағы E_* –диагонал асты қиғаш бірлік қатарымен анықталған n-ші ретті матрица, $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

(1.5.60) жүйесінің x жалпы шешімін өрнектеу үшін [43, 276 б.] жұмысында қарастырылған матрицада $\lambda=0$ деп, t мәнін τ арқылы ауыстырып элементтері дәрежелік функция түріндегі $X_0(\tau)$ үшбұрышты матрицасын анықтаймыз. Сонда (1.5.60) жүйесінің жалпы шешімі кез келген $c=(c_1,...,c_n)$ тұрақты векторы арқылы $x=X_0(\tau)c$ түрінде жазылады.

Жалпы шешімнің құрылымынан (1.5.60) жүйесінің

$$x^*(\tau)=X_0(\tau)c^* \tag{1.5.61}$$

түріндегі бір параметрлі x^* периодты шешімдердің үйірі бар болатындығын көреміз, мұндағы $c^*=(0,...,0,c_n^*)$, c_n^* – кез келген параметр.

Әрі қарай, $x_j=\left(x'_j,x''_j\right)$ векторы арқылы

$$\frac{dx_1}{d\tau}=bI_2x_1,\ \frac{dx_j}{d\tau}=E_2x_j+bI_2x_j,\ \ j=\overline{1,l}$$

түрінде жазуға болатын

$$\frac{dx'_1}{d\tau}=-bx''_1,\ \ \frac{dx''_1}{d\tau}=bx'_1,\ \ \frac{dx'_j}{d\tau}=x'_{j-1}-bx''_j,\ \ \frac{dx''_j}{d\tau}=x''_{j-1}+bx'_j,\ \ j=\overline{1,l}$$

$\left(x'_j,x''_j\right)$ жұптарының теңдеулер жүйесін аламыз, мұндағы E_2 – екінші ретті бірлік матрица, b.– нөлден өзге тұрақты.

Егер

$$J(b)=diag\left[J_1(b),...,J_r(b)\right],\ \ J_i(b)=\begin{pmatrix} bI_2 & O \\ E_2 & bI_2 \end{pmatrix},\ i=\overline{1,r}$$

тұрақты блок-матрицасын I_2, E_2 блоктарымен және O екінші ретті нөлдік блоктары арқылы енгізсек, онда $x=(x_1,...,x_l)$ векторы арқылы қарастырылатын жүйені меншікті мәндері $\lambda=(ib,-ib)$ жалғыз таза жорамал түйіндес комплекс сандар болатын канондық жүйе арқылы

$$\frac{dx}{d\tau}=J(b)x \tag{1.5.62}$$

жазамыз. (1.5.62) жүйесінің x жалпы шешімін анықтау үшін

$$T_2^*(\tau)=\begin{pmatrix} \cos b\tau & -\sin b\tau \\ \sin b\tau & \cos b\tau \end{pmatrix}$$

блокты $T^*(\tau)=diag\left[T_2(\tau),...,T_2(\tau)\right]$ блок-диагоналды матрицасын және

$$Y^*(\tau)=\begin{pmatrix} E_2 & O & \dots & O \\ \tau\, E_2 & E_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\tau^{l-1}}{(l-1)!}E_2 & \dfrac{\tau^{l-2}}{(l-2)!}E_2 & \dots & E_2 \end{pmatrix}$$

дәрежелік функция түріндегі элементтерімен берілген үшбұрышты-блокты матрицасын енгіземіз. Сонда (1.5.62) жүйесінің $X^*(\tau)$ матрицантын $X^*(\tau)=T^*(\tau)Y^*(\tau)$ теңдігі арқылы өрнектеп, $x(\tau)$ жалпы шешімін кез келген $c=(c_1,...,c_l),\ c_j=(c_j', c_j''),\ j=\overline{1,l}$ тұрақты векторы арқылы $x(\tau)=X^*(\tau)c$ қатысымен анықтаймыз. Жалпы шешімнің құрылымынан c_l' және c_l'' параметрлерімен берілген $\theta=2\pi b^{-1}$-периодты $x^*(\tau)$ шешімдер үйірі

$$x^*(\tau)=X^*(\tau)c^* \qquad (1.5.63)$$

түрінде оңай табылады, мұндағы $c^*=(0,...,0,c_l),\ c_l=(c_l', c_l'')$ – тұрақты вектор.

Енді ерекше емес тұрақты K матрицасы арқылы $x=Kz$ ауыстыруын жасап, (1.5.41) жүйесін A матрицасының жордандық торкөздеріне сәйкес

$$D_4 z=J(A)z,\ J(A)=K^{-1}AK \qquad (1.5.64)$$

ішкі жүйелерінен тұратын канондық түрге келтіреміз. (1.5.41) және (1.5.64) жүйелері τ-ға қатысты көппериодты шешімнің бар болуына байланысты өзара эквивалентті.

Сонымен қатар нөлдік немесе таза жорамал меншікті мәндер бар болғанда (1.5.64) жүйесінің (1.5.60), (1.5.62) жүйелері матрицаларына ұқсас

$$D_4 z_1=E_* z_1, \qquad (1.5.65)$$

$$D_4 z_2=J(b)z_2 \qquad (1.5.66)$$

түріндегі ішкі жүйелері бар. Олай болса, (1.5.61), (1.5.63) нөлдік емес шешімдері сәйкесінше (1.5.65) және (1.5.66) жүйелерін қанағаттандырады.

Сондықтан қарастырылып отырған жағдайларда (1.5.64) жүйесінің нөлдік емес $z^*(\tau)$ периодты шешімдері табылады. Онда $Kz^*(\tau)=x^*(\tau)$ (1.5.41) жүйесінің периодты шешімі болады. Сонымен келесі теорема дәлелденді.

1.5.4-теорема. *1.5.3-теоремасының шарттары орындалғанда (1.5.41) жүйесінің нөлдік емес көппериодты шешімдері бар болуы үшін A матрицасының нақты бөлігі нөлге тең, яғни* $\operatorname{Re}\lambda(A)=0$ *болатын ең болмағанда бір* $\lambda=\lambda(A)$ *меншікті мәні болуы жеткілікті.*

1.5.4-теоремасына салдар ретінде келесі теореманы аламыз.

1.5.5-теорема. *1.5.4-теоремасы шарттары орындалғанда (1.5.41) жүйесінің нөлден өзге көппериодты шешімі болмауы үшін A матрицасының барлық меншікті мәндерінің нақты бөліктері нөлден өзге болуы жеткілікті.*

Сондай-ақ (1.5.41) жүйесі (θ,ω)-периодты болғандықтан оның дәл осындай периодтты нөлдік емес шешімдерінің бар болуы жөніндегі мәселе ерекше назар аудартады.

(1.5.41) жүйесінің x жалпы шешімін

$$x(\tau,t,\zeta)=X(\tau)u(\tau,t,\zeta) \tag{1.5.67}$$

арқылы жазалық, мұндағы $u=u(\tau,t,\zeta)$ – D_4 операторының нөлі және ол $\tau=0$ мәнінде жалпы бастапқы шартымен $x(0,t,\zeta)=u(0,t,\zeta)=u_0(t,\zeta)$ анықталған, $X(\tau)$ – (1.5.43) арқылы анықталған матрицант.

1.5.1-теоремасы бойынша D_4 операторының нөлдерінің арасында көппериодтылары, дербес жағдайда тұрақтылар да бар.

1.5.6-теорема. *(1.5.6)-(1.5.8) шарттары орындалғанда D_4 операторының (θ,ω)-периодты нөлдеріне сәйкес (1.5.41) жүйесінің (1.5.67) түріндегі (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі болуы үшін $X(\theta)$ монодромия матрицасы*

$$\det\left[X(\theta)-E\right]=0 \tag{1.5.68}$$

шартын қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Теорема шарттарында (1.5.68) шартының орындалуы D_4 операторының (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты $u=u(\tau,t,\zeta)$ нөлдері кеңістігінде

$$X(\tau+\theta)u=X(\tau)u \tag{1.5.69}$$

теңдеуінің шешімділігімен эквивалентті. Матрицантың $X(\tau+\theta)=X(\tau)X(\theta)$ қасиетін ескерсек, (1.5.69) жүйесінен (1.5.68) шартына эквивалентті болатын $\left[X(\theta)-E\right]u=0$ теңдеулер жүйесінің шешімділігіне келеміз. Сонымен

$$\det\left[X(\theta)-E\right]\neq 0 \tag{1.5.70}$$

шартының орындалуынан осындай шешімдердің болмайтындығы шығады. Демек, (1.5.68) шарты (1.5.41) жүйесінің нөлден өзге көппериодты шешімдерінің бар болуының жеткілікті шарты.

1.5.7-теорема. *(1.5.6)-(1.5.8) және (1.5.70) шарттары орындалсын. Онда (1.5.41) жүйенің (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты нөлден өзге (1.5.67) түріндегі шешімі табылуы үшін*

$$u(\tau,t,\zeta)=\left[E-X(\theta)\right]^{-1}X(\theta)\left[u(\tau+\theta,t+q\omega,\zeta)-u(\tau,t,\zeta)\right] \tag{1.5.71}$$

функционал-айырымдық теңдеуі D_4 операторының нөлдері кеңістігінде шешілімді болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. (1.5.70) шарты орындалғанда (1.5.41) жүйесінің (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты (1.5.67) шешімінің анықтамасынан

$$X(\theta)u(\tau+\theta,t+\omega,\zeta)=u(\tau,t,\zeta),$$

$$X(\theta)u(\tau+\theta,t+\omega,\zeta)-X(\theta)u(\tau,t,\zeta)=u(\tau,t,\zeta)-X(\theta)u(\tau,t,\zeta)$$

орындалатынын және бұл теңдіктен (1.5.71) өрнегін аламыз. Дәлелдеуді аяқтау үшін $u(\tau,t,\zeta)$ вектор-функциясы D_4 операторының нөлі болуы қажет екендігін көрсету керек. Егер (1.5.71) теңдеуінің тек қана нөлдік шешімдері бар болса, онда (1.5.70) шарты орындалғанда (1.5.41) жүйесінің нөлдік емес көппериодты шешімдері болмайды.

Сонымен қатар A матрицасының барлық $\lambda_j(A)$ меншікті мәндерінің $\operatorname{Re}\lambda_j(A)$ нақты бөліктері нөлден өзге болуы жөніндегі (1.4.34) шартының орындалуы (1.5.70) шартының орындалуын қамтамасыз ететіндігін көреміз.

Сол сияқты $X(\tau)$ матрицантының, $\mu(\tau^0,\tau,\zeta)$ сипаттауышының (1.5.34) және (1.5.54) көппериодты құрылымдарынан және жоғарыда дәлелденген теоремалардан (1.5.41) жүйесінің $\tau,\widetilde{\tau},\bar{s},\widetilde{\sigma},t,\zeta$ айнымалылары арқылы өрнектелген (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімдерін алуға болады.

II. (1.5.1) біртекті теңдеуіне сәйкес

$$D_4x=Ax+f(\tau,t,\zeta) \qquad (1.5.72)$$

біртекті емес сызықты теңдеуін қарастыралық, мұндағы $f(\tau,t,\zeta)$ n-вектор-функциясы

$$f(\tau+\theta,t+q\omega,\zeta)=f(\tau,t,\zeta)\in C_{\tau,t,\zeta}^{(0,\hat{e},\widetilde{e})}\left(R\times R^m\times B_\delta^{2l}\right) \qquad (1.5.73)$$

шартын қанағаттандырады.

(1.5.70) шарты орындалсын деп ұйғарамыз және (1.5.72) жүйесінің D_4 операторының (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты болатын $u(\tau,t,\zeta)$ нөліне сәйкес (θ,ω)-периодты $x(\tau,t,\zeta)$ шешімін іздейміз.

Олай болса, D_4 операторының $u(\tau+\theta,t+q\omega,\zeta)=u(\tau,t,\zeta)$ нөліне сәйкес

$$x(\tau+\theta,t+q\omega,\zeta)=x(\tau,t,\zeta)$$

қасиетін қанағаттандыратын

$$x(\tau,t,\zeta)=X(\tau)u(\tau,t,\zeta)+X(\tau)\int_0^{\tau}X^{-1}(s)f(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds \qquad (1.5.74)$$

шешімін аламыз. Сонда (1.5.74) шешімінің басқа түрдегі келесі

$$x(\tau,t,\zeta)=X(\tau+\theta)u(\tau,t,\zeta)+X(\tau+\theta)\int_0^{\tau+\theta}X^{-1}(s)f(s,\lambda(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta))ds. \qquad (1.5.75)$$

өрнектелуі болатынын көреміз. Әрі қарай, (1.5.74) және (1.5.75) теңдіктерінен D_4 операторының $u(\tau,t,\zeta)$ белгісіз жоятын болсақ,

$$\begin{gathered}x(\tau,t,\zeta)=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left[\int_0^{\tau+\theta}X^{-1}(s)f(s,\lambda(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta))ds+\right.\\ \left.+\int_{\tau}^{0}X^{-1}(s)f(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds\right]\end{gathered} \qquad (1.5.76)$$

аламыз, мұнда $\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]$ матрицасының keріленетіндігі (1.5.70) шартынан шығады. Егер

$$f_{\theta}(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))=\begin{cases}f(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)), & \tau\le s\le 0,\\ f(s,\lambda(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta)), & 0<s\le\tau+\theta\end{cases} \qquad (1.5.77)$$

белгілеуін енгізсек, (1.5.76) формуласын шағын түрде жазамыз:

$$x(\tau,t,\zeta)=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}\int_{\tau}^{\tau+\theta}X^{-1}(s)f_{\theta}(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds. \qquad (1.5.78)$$

Егер (1.5.41) жүйесінің нөлден өзге көппериодты шешімдері болмаса, онда (1.5.72) жүйенің (1.5.78) шешімі жалғыз көппериодты шешім болады.

Әрі қарай, (1.5.78) өрнегінен $X(\tau)$ және $\mu(s,\tau,\zeta)$ шамаларының (1.5.34) және (1.5.54) көппериодты құрылымдарынан

$$\begin{gathered}\hat{x}(\bar{s},\bar{\sigma},\hat{\tau},\tau,t,\zeta)=\left[\hat{X}^{-1}(\tau+\theta,\hat{\tau}+\hat{e}\theta)-\hat{X}^{-1}(\tau,\hat{\tau})\right]^{-1}\times\\ \times\int_{\tau}^{\tau+\theta}X^{-1}(p)f_{\theta}(p,\lambda(p,\tau,t),\bar{\zeta}(p-\bar{s},z(p),\zeta-z(\bar{\sigma})))dp\end{gathered} \qquad (1.5.79)$$

шешімін аламыз, ал бұл (1.5.59) дифференциалдау операторлы

$$\overline{\overline{D}}_4\hat{x}=A\hat{x}+f(\tau,t,\zeta) \qquad (1.5.80)$$

теңдеуінің шешімі. Осылайша келесі теорема дәлелденеді.

1.5.8-теорема. *(1.5.6)-(1.5.8), (1.5.70), (1.5.73) шарттары орындалсын. Сонда (1.5.72) жүйенің жалғыз* (τ,t) *бойынша* (θ,ω)*-периодты шешімі (1.5.78) өрнегімен беріліп, оның* $(s,\sigma,\hat{\tau},\tau,t)$ *бойынша* $(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\omega)$*-периодты құрылымы (1.5.79) өрнегімен анықталып, ол (1.5.59) дифференциалдау операторлы (1.5.80) теңдеуін қанағаттандырады.*

1.6 Уақыт айнымалылары диагоналы бойынша D_5 дифференциалдау операторлы сындық жағдайдағы жүйелердің көппериодты шешімдері

$(\tau,t)\in R^{1+m}$ уақыт айнымалылары кеңістігінде $t=e\tau$ бас диагоналы бағыты бойынша келесі

$$D_5=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle e,\ \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle \tag{1.6.1}$$

дифференциалдау операторын қарастыралық. (1.6.1) операторының сипаттаушы теңдеуі (1.1.3) арқылы анықталатындығынан базалық бірінші интегралы (1.1.5) түрінде болатыны белгілі. Олай болса,

$$D_5x=0 \tag{1.6.2}$$

жүйесінің

$$x\big|_{\tau=\tau^0}=u(t)\in Ab\left(\Pi_\rho^m\right) \tag{1.6.3}$$

бастапқы шартымен анықталған шешімі

$$x=u\left(h(\tau^0,\tau,t)\right) \tag{1.6.4}$$

түрінде болады, мұндағы $x=x(\tau,t)\in Ab^{\theta,\omega}\left(\Pi_\rho\times\Pi_\rho^m\right)$.

(1.6.2)-(1.6.3) есебінің (1.6.4) шешімі D_5 дифференциалдау операторының $u(t)$ бастапқы мәнімен анықталған нөлі болады.

(τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты $x(\tau,t)$ қозғалысы $\tau=\tau^0$ мәнінде t-ға қатысты ω-периодты $x(\tau^0,t)=u(t)$ бастапқы функция мәніне тең болатыны көрініп тұр. Олай болса, (θ,ω)-периодты қозғалыстарды іздеу есептерінде (1.6.1) операторының $x(\tau,t)$ нөлінің $u(t)$ бастапқы функциясының ω-периодты болуы маңызды рөл атқарады. Осыған орай, әрі қарай

$$u(t+\omega)=u(t)\in Ab^{\omega}\left(\Pi_{\rho}^{m}\right) \qquad (1.6.5)$$

шарты орындалғанда (1.6.1) операторының (1.6.4) қатысымен анықталатын t-ға қатысты ω-периодты $x(\tau,t)$ нөлдерін қарастыратын боламыз.

Олай болса, (1.6.5) шарты орындалғанда (1.6.4) шешімі (1.6.2) теңдеуінің t-ға қатысты ω-периодты шешімі болады. Бұл шешім $(\nu_0,\nu_1,...,\nu_m)$, $\nu_j=\omega_j^{-1}$, $j=\overline{0,m}$ жиіліктер базисінде τ бойынша квазипериодты болуы мүмкін. Бұдан

$$u=const \qquad (1.6.6)$$

түріндегі шешім ғана (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты болатындығы шығады.

Жоғарыда қарастырылғандарды келесі лемма түрінде қорытындылаймыз.

1.6.1-лемма. *(1.6.1) операторлы тыныштық күйдегі (1.6.2) теңдеуінің (1.1.5) базалық интегралы негізінде (1.6.5) және (1.6.6) шарттары орындалғанда (1.6.2)-(1.6.3) бастапқы есебі арқылы сәйкесінше: 1) t-ға қатысты ω-периодты және 2) (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты болатын көпөлшемді уақыт бойынша тыныштық күйдегі $x(\tau,t)$ қозғалысы анықталады.*

I. Енді сындық жағдайындағы бір жүйенің көпөлшемді уақыт бойынша еркін тербелісін қарастыралық. (τ,t) көпөлшемді уақыт бойынша жүйенің бірқалыпты түзусызықты қозғалысты сипаттайтын ізделінді $x=(x_1,...,x_n)$ функциясына қатысты

$$D_5x=Ax \qquad (1.6.7)$$

сызықты векторлы- матрицалық теңдеуін қарастыралық, мұндағы A – тұрақты $n\times n$-матрица.

Төменде келтірілген шарттар орындалсын деп ұйғаралық.

а) Тұрақты A матрицасының меншікті мәндерінің ішінде таза жорымал $\lambda_{1,2}=\pm 2\pi\nu^0$ бір жұбы бар болсын, ал қалғандарының нақты бөліктері нөлден өзге болсын, яғни

$$\operatorname{Im}\lambda_{1,2}=\pm 2\pi\nu^0\neq 0,\ \operatorname{Re}\lambda_{1,2}=0,\ \operatorname{Re}\lambda_j\neq 0,\ \ j=\overline{3,m}. \qquad (1.6.8)$$

б) Еркін тербелістердің τ бойынша ν^0 және еріксіз тербелістердің τ-ға қатысты $\nu_0=\theta^{-1}$, t-ға қатысты $\nu=(\nu_1,...,\nu_m)$, $\nu_j=\omega_j^{-1}$, $j=\overline{1,m}$ жиіліктері рационалды бейөлшемдес болсын және

$$\left|\nu^0+k_0\nu_0+k_1\nu_1+...+k_m\nu_m\right|\geq c^{-1}\,|\,\hat{k}\,|^{-\gamma},\ |\,\hat{k}\,|\neq 0 \qquad (1.6.9)$$

түріндегі бейөлшемдестіктің күшейтілген шартын қанағаттандырсын, мұндағы $\hat{k} = (k_0, k_1, ..., k_m), |\hat{k}| = \sum_{j=0}^{m} |k_j|, k_j \in Z$.

(1.6.8) шарты негізінде

$$x = B\widetilde{x} \tag{1.6.10}$$

түрлендіруін жасасақ, (1.6.7) жүйесі

$$D_5 y = 2\pi\nu^0 I_2 y, \qquad D_5 z = \widetilde{A} z \tag{1.6.11}$$

ішкі жүйелерге жіктеледі, мұндағы B – ерекше емес тұрақты $n \times n$-матрица, $\widetilde{x} = (y, z),\ y = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2),\ z = (\widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n),$ $\widetilde{A}$ – тұрақты $(n-2)\times(n-2)$-өлшемді матрица және $\mathrm{Re}\,\lambda_j(\widetilde{A}) \neq 0,\ j = \overline{3, n}$.

(1.6.11) ішкі жүйелерінің $Y(\tau)$ және $Z(\tau)$ матрицантары

$$\begin{array}{ll} Y(\tau) = \exp\left[2\pi\nu^0 I_2 \tau\right] = \Gamma e^{2\pi i \nu^0 \tau} + \overline{\Gamma} e^{-2\pi i \nu^0 \tau}; & Z(\tau) = \exp\left[\widetilde{A}\tau\right]; \\ D_5 Y(\tau) = 2\pi\nu^0 I_2 Y(\tau),\ Y(0) = E_1; & D_5 Z(\tau) = \widetilde{A} Z(\tau),\ Z(0) = E_2 \end{array} \tag{1.6.12}$$

арқылы анықталады, мұндағы E_1 және E_2 – сәйкесінше екінші және $(n-2)$-ші ретті бірлік матрицалар, $\Gamma, \overline{\Gamma}$ – (1.3.43) қасиеттерімен берілген екінші ретті матрицалар.

(1.6.8) шарты орындалғанда (1.6.12) негізінде (1.6.11) ішкі жүйелерінің $\widetilde{Y}(\tau) = \left[Y^{-1}(\tau + \theta) - Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}$ және $Z_-(\tau),\ Z_+(\tau)$ матрицалық шешімдері бар және олар келесі

$$\begin{array}{ll} D_5 \widetilde{Y}(\tau) = 2\pi\nu^0 I_2 \widetilde{Y}(\tau); & D_5 Z_{\mp}(\tau) = \widetilde{A} Z_{\mp}(\tau), \\ \det\left[\widetilde{Y}(\tau) - E_1\right] \neq 0,\ \tau \in R; & \\ \left|Z_-(\tau - s)\right| \leq a e^{-\kappa(\tau - s)},\ \tau \geq s; & \left|Z_+(\tau - s)\right| \leq a e^{\kappa(\tau - s)},\ \tau \leq s \end{array} \tag{1.6.13}$$

қасиеттерді қанағаттандырады, мұндағы $a \geq 1$ және $\kappa > 0$ – тұрақтылар.

(1.6.13) қасиетінен (1.6.11) ішкі жүйесінің нөлден өзге θ-периодты шешімдері болмайтындығы шығады.

Әрі қарай, (1.6.11) ішкі жүйесінің $Y(\tau)$ және $Z(\tau)$ матрицанттарының (1.6.12) және (1.6.13) қасиеттері негізінде матрицалық Грин функцияларын енгізелік:

$$G_{11}(\tau,s)=\begin{cases}\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s+\theta), & s^*(\tau)\le s\le\tau,\\ \widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s), & \tau<s\le s^*(\tau+\theta-0),\end{cases} \qquad (1.6.14)$$

$$G_{22}(\tau,s)=\begin{cases}Z_-(\tau-s), & -\infty<s\le\tau,\\ -Z_+(\tau-s), & \tau<s<+\infty,\end{cases} \qquad (1.6.15)$$

мұндағы $s^*(\tau)$ $-$ (1.1.58) қасиетімен берілген кемімейтін сатылы функция.

(1.6.14) және (1.6.15) матрицалық Грин функциялары келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$1^0.\ \frac{\partial}{\partial\tau}G_{11}(\tau,s)=2\pi\nu^0 I_2 G_{11}(\tau,s),\ \tau\ne s;\quad \frac{\partial}{\partial\tau}G_{22}(\tau,s)=\widetilde{A}G_{22}(\tau,s),\ \tau\ne s;$$

$$2^0.\ G_{11}(\tau+0,\tau)-G_{11}(\tau-0,\tau)=E_1;\qquad G_{22}(\tau+0,\tau)-G_{22}(\tau-0,\tau)=E_2;$$

$$3^0.\ G_{11}(\tau+\theta,s+\theta)=G_{11}(\tau,s);\qquad G_{22}(\tau+\theta,s+\theta)=G_{22}(\tau,s); \qquad (1.6.16)$$

$$G_{11}(\tau+\theta^0,s)=G_{11}(\tau,s+\theta^0)=G_{11}(\tau,s),\theta^0=\frac{1}{\nu^0};$$

$$4^0.\ \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)}\left|G_{11}(\tau,s)\right|ds\le a_0=const>0;\qquad \left|G_{22}(\tau-s)\right|\le ae^{-\alpha|\tau-s|}.$$

(1.6.16) қасиетінің дәлелдемесі А5 қосымшасында келтірілген.

(1.6.7) жүйесімен берілген бірқалыпты түзусызықты қозғалыс (1.6.2) тыныштық күйіндегі қозғалысқа әсер ететін сызықты оператормен анықталады. Бұдан мұндай оператор (1.6.7) жүйесінің матрицалық шешімімен анықталатынын көреміз. Сонда (1.6.11) ішкі жүйесінен келесі

$$y(\tau,t)=Y(\tau-\tau^0)u(\tau,t),\ z(\tau,t)=Z(\tau-\tau^0)v(\tau,t) \qquad (1.6.17)$$

бірқалыпты түзусызықты күйдің қозғалысын аламыз, мұндағы $u=u(\tau,t), v=v(\tau,t)$ $-$ ішкі жүйелерге сәйкес D_5 операторының нөлдері, яғни

$$D_5u(\tau,t)=0,\ D_5v(\tau,t)=0,\ (\tau,t)\in\Pi_\rho\times\Pi_\rho^m.$$

$Y(\tau)$ және $Z(\tau)$ матрицанттарын туындататын $A^*=2\pi\nu^0 I_2$ және $\widetilde{A}$ матрицалары нөлге ұмтылғанда матрицанттар тепе-теңдік операторларына айналатындығын және $|A^*|\to 0$ және $|\widetilde{A}|\to 0$ үшін $y\to u$ және $z\to v$ шектік қатыстары орындалатындығын аламыз. Басқаша айтқанда, бірқалыпты түзу сызықты күйден тыныштық күйге өтеді. Бұл y,z бірқалыпты түзу сызықты қозғалыстың тербелмелі сипаты оларды тудыратын u,v тыныштық қозғалысының ұқсас қасиеттерімен анықталатындығын білдіреді.

Сонда 1.6.1-лемма бойынша y,z вектор-функциялары t-ға қатысты ω-периодты болуы үшін u,v вектор-функцияларының t-ға қатысты ω-периодты болуы қажет. Y, Z матрицанттары t айнымалысынан тәуелді болмағандықтан бұл шарт жеткілікті болады. Олай болса, бірқалыпты түзусызықты y,z қозғалыстары t бойынша ω-периодты болуы үшін, яғни

$$y(\tau,t+\omega)=y(\tau,t),\ \ z(\tau,t+\omega)=z(\tau,t) \tag{1.6.18}$$

теңдігі орындалуы үшін u,v вектор-функциялары

$$u(\tau,t+\omega)=u(\tau,t),\ \ v(\tau,t+\omega)=v(\tau,t) \tag{1.6.19}$$

қасиеттерін қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті. Осылайша y,z вектор-функцияларының τ-ға қатысты θ-периодты болуы үшін, яғни

$$y(\tau+\theta,t)=y(\tau,t),\ \ z(\tau+\theta,t)=z(\tau,t) \tag{1.6.20}$$

орындалуы үшін

$$u(\tau+\theta,t)=u(\tau,t),\ \ v(\tau+\theta,t)=v(\tau,t) \tag{1.6.21}$$

шартының орындалуы қажет. Егер $u(\tau^0,t)=u^0(t),\ \ v(\tau^0,t)=v^0(t)$ деп алсақ, онда 1.6.1-лемма бойынша (1.6.19) шарты

$$u^0(t+\omega)=u^0(t),\ \ v^0(t+\omega)=v^0(t) \tag{1.6.22}$$

шартымен ауыстырылады, ал (1.6.22) шарты орындалса (1.6.21) шартының орындалуы керек болады. Сонда осы леммаға сәйкес

$$u^0=c_1=const,\ \ v^0=c_2=const \tag{1.6.23}$$

болатынын көреміз. Сонымен (1.6.23) орындалуы (1.6.18) шартының орындалуын қамтамасыз етеді және (1.6.20) шартының орындалуы үшін қажетті болып табылады.

Әрі қарай, (1.6.22) мәндерін (1.6.17) шешімдеріне қойсақ, t бойынша ω-периодты

$$y(\tau,t)=Y(\tau-\tau^0)u^0\big(h(\tau^0,\tau,t)\big),\ z(\tau,t)=Z(\tau-\tau^0)v^0\big(h(\tau^0,\tau,t)\big) \tag{1.6.24}$$

шешімін, ал (1.6.23) тұрақтыларын (1.6.17) шешімдеріне қою арқылы

$$y(\tau) = Y(\tau - \tau^0)c_1, \;\; z(\tau) = Z(\tau - \tau^0)c_2 \qquad (1.6.25)$$

шешімін аламыз, ол t-ға қатысты ω-периодты болуымен қатар τ бойынша θ-периодты болады. (1.6.25) шешімі τ-ға қатысты θ-периодты болуы үшін $\tau = \tau^0 + \theta$ және $\tau = \tau^0$ мәндерінде

$$[Y(\theta) - E_1]c_1 = 0, \;\; [Z(\theta) - E_2]c_2 = 0 \qquad (1.6.26)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті, мұндағы c_1 және c_2 – тұрақты векторлар. $Y(\tau)$ матрицантының θ^0-периодтылығы, $Z(\tau)$-тің дихотомиялығы негізінде $\det[Y(\theta) - E_1] \neq 0, \det[Z(\theta) - E_2] \neq 0$ орындалатындықтан (1.6.9) шарты бойынша (1.6.26) қатысы тек қана $c_1 = 0, c_2 = 0$ болғанда орынды.

Осылайша, (1.6.7) жүйесінің және (1.6.11) біртекті ішкі жүйесінің нөлден өзге шешімінің болмауы дәлелденді.

Енді (1.6.10), (1.6.14) - (1.6.16) негізінде (1.6.7) жүйесі үшін Грин матрицасын құрамыз. Ол үшін

$$\widetilde{G}(\tau,s) = diag[G_{11}(\tau,s), G_{22}(\tau,s)] = \begin{pmatrix} G_{11}(\tau,s) & O_{12} \\ O_{21} & G_{22}(\tau,s) \end{pmatrix} \qquad (1.6.27)$$

матрицасының блоктарына сәйкес (1.6.10) B түрлендіру матрицасын және оның B^{-1} кері матрицасын

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{B}_{11}^{1} & \overline{B}_{12}^{1} \\ \overline{B}_{21}^{1} & \overline{B}_{22}^{1} \end{pmatrix} \qquad (1.6.28)$$

блоктары арқылы анықтаймыз, мұндағы G_{jj}, $G_{ij} = O_{ij}$, B_{ij}, $\overline{B}_{ij}^{1}$ – бірдей индексты блоктар және өлшемдері бірдей; O_{ij} – нөлдік блоктар, $i, j = 1,2$.

Сонда (1.6.27) және (1.6.28) негізінде

$$G(\tau,s) = B\widetilde{G}(\tau,s)B^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}(\tau,s) & O_{12} \\ O_{21} & G_{22}(\tau,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{B}_{11}^{1} & \overline{B}_{12}^{1} \\ \overline{B}_{21}^{1} & \overline{B}_{22}^{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11}G_{11}(\tau,s)\overline{B}_{11}^{1} & B_{11}G_{11}(\tau,s)\overline{B}_{12}^{1} \\ B_{21}G_{11}(\tau,s)\overline{B}_{11}^{1} & B_{21}G_{11}(\tau,s)\overline{B}_{12}^{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{12}G_{22}(\tau,s)\overline{B}_{21}^{1} & B_{12}G_{22}(\tau,s)\overline{B}_{22}^{1} \\ B_{22}G_{22}(\tau,s)\overline{B}_{21}^{1} & B_{22}G_{22}(\tau,s)\overline{B}_{22}^{1} \end{pmatrix}$$

немесе

$$G(\tau,s)=G_1(\tau,s)+G_2(\tau,s) \qquad (1.6.29)$$

аламыз, мұндағы

$$G_j(\tau,s)=\begin{pmatrix} B_{1j}G_{jj}(\tau,s)B_{j1}^{-1} & B_{1j}G_{jj}(\tau,s)B_{j2}^{-1} \\ B_{2j}G_{jj}(\tau,s)B_{j1}^{-1} & B_{2j}G_{jj}(\tau,s)B_{j2}^{-1} \end{pmatrix},\ j=1,2. \qquad (1.6.30)$$

Сонымен (1.6.29) матрицасының (1.6.30) түріндегі екі матрицаның қосындысына жіктеледі, әрі ол (1.6.16) қасиеті негізінде

$$\begin{aligned} &1^0.\ D_5G(\tau,s)=AG(\tau,s),\ \tau\neq s;\\ &2^0.\ G(\tau+0,\tau)-G(\tau-0,\tau)=E;\\ &3^0.\ G(\tau+\theta,s+\theta)=G(\tau,s);\\ &4^0.\ G_1(\tau,s)=G_1(\tau+\theta^0,s)=G_1(\tau,s+\theta^0),\\ &\quad |G_1(\tau,s)|\le a_1,\ |G_2(\tau,s)|\le a_2e^{-\kappa|\tau-s|} \end{aligned} \qquad (1.6.31)$$

қасиетін қанағаттандырады, мұндағы $a_1>0$ және $a_2>0$ – тұрақтылар. (1.6.31) қасиетінің дәлелдеуі А5 қосымшасында келтірілген және ол (1.6.16) қасиетінің дәлелдеуімен ұқсас түрде жүргізіледі.

Шынында да, (1.6.16) және (1.6.27) негізінде $D_5\widetilde{G}(\tau,s)=J\widetilde{G}(\tau,s)$ орындатындығын көреміз, мұндағы $J=diag\left[2\pi\nu^0 I_2,\ \widetilde{A}\right]$, әрі $BJB^{-1}=A$.

Олай болса, (1.6.29) өрнегінен 1) қасиетін аламыз:

$$D_5G=B\ D_5\widetilde{G}\ B^{-1}=B\ J\widetilde{G}\ B^{-1}=BJB^{-1}B\widetilde{G}B^{-1}=AG,\ \tau\neq s.$$

(1.6.16) қатысының 2° және 3° қасиеттерінен $\widetilde{G}(\tau,s)$ матрицасы (1.6.31) қасиетінің 2°, 3° теңдіктерін қанағаттандыратындығы шығады. Бұдан $G(\tau,s)=B\widetilde{G}(\tau,s)B^{-1}$ матрицасын ескерсек, $G(\tau,s)$ үшін де осы қасиеттері орындалатындығының дәлелдеулерін аламыз. Ал (1.6.16) қатысының 3° және 4° қасиеттерінен және (1.6.30) өрнегінен (1.6.31) қасиетінің 4° теңдігі шығады.

Осылайша, (1.6.31) қасиетімен (1.6.29)-(1.6.30) матрицалық функциясы (1.6.7) жүйесіне сәйкес келетін матрицалық Грин функциясын анықтайды.

(1.6.31) қасиетінде келтірілген 1°, 2° және 3° қасиеттерін $G(\tau,s)$ матрицасының $G_1(\tau,s)$ және $G_2(\tau,s)$ қосылғыштары көмегімен

$$\begin{aligned} &1)\ D_5G_1(\tau,s)+D_5G_2(\tau,s)=AG_1(\tau,s)+AG_2(\tau,s),\\ &2)\ G_1(\tau+0,\tau)-G_1(\tau-0,\tau)+G_2(\tau+0,\tau)-G_2(\tau-0,\tau)=E,\\ &3)\ G_1(\tau+\theta,s+\theta)+G_2(\tau+\theta,s+\theta)=G_1(\tau,s)+G_2(\tau,s) \end{aligned} \qquad (1.6.32)$$

түріндегі жазамыз. Ал (1.6.31) қатысының 4° қасиеті $G(\tau,s)$ матрицасы үшін өзгеріссіз қалады:

$$\begin{aligned} &G_1(\tau+\theta^0,s)=G_1(\tau,s+\theta^0)=G_1(\tau,s), \\ &\left|G_1(\tau,s)\right|\le a_1, \quad \left|G_2(\tau,s)\right|\le a_2e^{-\kappa|\tau-s|}, \end{aligned} \tag{1.6.33}$$

мұндағы a_1,a_2,κ – оң тұрақтылар.

Осылайша алған нәтижелерді келесі лемма түрінде тұжырымдалық.

1.6.2-лемма. *(1.6.8) және (1.6.9) шарттары орындалғанда (1.6.7) жүйесінің периоды θ болатын нөлден өзге шешімі болмайды және оның (1.6.31) - (1.6.33) қасиеттерімен анықталған (1.6.29)-(1.6.30) түріндегі $G(\tau,s)=G_1(\tau,s)+G_2(\tau,s)$ матрицалық Грин функциясы бар.*

II. Сызықты еріксіз тербелісті қарастыралық:

$$D_5x=Ax+\varepsilon^0 f(\tau,t), \tag{1.6.34}$$

мұндағы $f(\tau,t)$ – n-вектор-функция, $\varepsilon^0>0$ – (1.6.34) жүйелерде еркін және еріксіз қозғалыстарды сипаттайтын параметр.

$f(\tau,t)$ вектор-функциясы $(\tau,t)\in\Pi_\rho\times\Pi_\rho^m$ айнымалыларына қатысты нақты аналитикалық және (θ,ω)-периодты, нормасы бойынша Δ_0 санымен шенелген, яғни

$$f(\tau,t)\in Ab_{\Delta_0}^{\theta,\omega}\left(\Pi_\rho\times\Pi_\rho^m\right) \tag{1.6.35}$$

түрінде анықталады деп ұйғаралық.

(1.6.8), (1.6.9), (1.6.35) шарттарының орындалуынан (1.6.34) жүйесі (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты тербелісті бір мәнді сипаттайтынын негіздеу қажет.

Шынында да, 1.6.2-леммасында көрсетілген шарттарда осы есептің (1.6.29)-(1.6.30) матрицалық Грин функцияларының бар болуы дәлелденді. Сонымен

$$x^0(\tau,t)=\varepsilon^0\int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)}G_1(\tau,s)f(s,h(s,\tau,t))ds+\varepsilon^0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G_2(\tau,s)f(s,h(s,\tau,t))ds \tag{1.6.36}$$

вектор-функциясын қарастырамыз.

Егер $\Pi_{\rho-\delta}\times\Pi_{\rho-\delta}^m$ көп өлшемді жолағында (1.6.36) вектор-функциясы аналитикалық болсын десек, онда әрбір интегралды $s=\tau$ нүктесімен бөліп, содан кейін (1.6.32) қатысындағы 1) және 2) қасиеттерін, D_5 дифференциалдау операторын қолданып (1.6.36) өрнегі (1.6.34) жүйесінің шешімі болатындығына көз жеткіземіз.

$x^0(\tau,t)$ функциясының t бойынша ω-периодтылығы $h(s,\tau,t+\omega)=h(s,\tau,t)+\omega$ теңдігінен және $f(\tau,t)$ функциясының t-ға қатысты ω-периодтылығынан шығады.

τ-ға қатысты θ периодтылығы τ айнымалысын θ периодына ығыстыру арқылы, содан кейін $s^*(\tau+\theta)=s^*(\tau)+\theta$ теңдігін, (1.6.32) қатысының 3) қасиетін және f функциясының τ бойынша θ-периодтылығын ескере отырып, s-ты $s+\theta$ шамасымен ауыстыру арқылы тікелей тексеріледі.

(1.6.36) меншіксіз интегралы жинақтылығы (1.6.33) бағалауынан шығады.

$\Pi_{\rho-\delta}\times\Pi_{\rho-\delta}^m$ көп өлшемді жолағында $x^0(\tau,t)$ функциясының нақты аналитикалық болуы (1.6.9) және (1.6.35) қасиеттерінің салдары болып табылады. Оған толығырақ тоқталамыз.

$s^*(\tau)\le s\le\tau$ мәндерінде (1.6.12), (1.6.14) және (1.6.30) бойынша

$$
\begin{aligned}
G_1(\tau,s)&=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{11} \\ B_{21} & B_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_{11}(\tau,s) & O \\ O & G_{11}(\tau,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11}^{\overline{-1}} & O \\ O & B_{12}^{\overline{-1}}\end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{11} \\ B_{21} & B_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(\theta)\Gamma & O \\ O & \widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(\theta)\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11}^{\overline{-1}} & O \\ O & B_{12}^{\overline{-1}}\end{pmatrix}e^{-2\pi i\nu^0 s}+\\
&+\begin{pmatrix} B_{11} & B_{11} \\ B_{21} & B_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(\theta)\overline{\Gamma} & O \\ O & \widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(\theta)\overline{\Gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11}^{\overline{-1}} & O \\ O & B_{12}^{\overline{-1}}\end{pmatrix}e^{2\pi i\nu^0 s}=\\
&=\widetilde{G}_1(\tau)e^{-2\pi i\nu^0 s}+\widetilde{\widetilde{G}}_1(\tau)e^{2\pi i\nu^0 s}
\end{aligned}
\tag{1.6.37}
$$

аламыз, мұндағы $\widetilde{G}_1(\tau)$ және $\widetilde{\widetilde{G}}_1(\tau)$ –матрицалық функциялар.

Сол сияқты, осыған ұқсас $\tau<s\le s^*(\tau+\theta-0)$ үшін де $G_1(\tau,s)$ функциясын

$$
\overline{G}_1(\tau)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{11} \\ B_{21} & B_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{Y}(\tau)\Gamma & O \\ O & \widetilde{Y}(\tau)\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11}^{\overline{-1}} & O \\ O & B_{12}^{\overline{-1}}\end{pmatrix},
$$

$$
\overline{\overline{G}}_1(\tau)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{11} \\ B_{21} & B_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{Y}(\tau)\overline{\Gamma} & O \\ O & \widetilde{Y}(\tau)\overline{\Gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11}^{\overline{-1}} & O \\ O & B_{12}^{\overline{-1}}\end{pmatrix}
$$

матрицалық коэффициенттері арқылы

$$
G_1(\tau,s)=\overline{G}_1(\tau)e^{-2\pi i\nu^0 s}+\overline{\overline{G}}_1(\tau)e^{2\pi i\nu^0 s}
\tag{1.6.38}
$$

түрінде жазамыз. Әрі қарай, $f\big(s,h(s,\tau,t)\big)=f\big(s,t-e\tau+es\big)$ үшін (1.6.35) қасиетінен Фурье қатарын

$$f\big(s,h(s,\tau,t)\big)=\sum_{(k_0,k)} f_{k_0k}\, e^{2\pi i\langle k,\nu(t-e\tau)\rangle}\cdot e^{2\pi i(k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle)s} \tag{1.6.39}$$

аламыз, мұндағы f_{k_0k} – Фурье коэффициенттері, әрі ол

$$\left|f_{k_0k}\right|\le\left|f\right|_{\rho}\, e^{-\rho(|k_0|+|k|)} \tag{1.6.40}$$

шартын қанағаттандырады, $|k|=|k_1|+...+|k_m|$, $(k_0,k)\in Z\times Z^m$. (1.6.37), (1.6.38) және (1.6.39) негізінде мүшелеп интегралдай отырып формальды түрде алғашқы функциясын

$$F_1(s,\tau,t)=\int G_1(\tau,s)\,f(s,h(s,\tau,t))ds \tag{1.6.41}$$

анықтаймыз. Ол $s^*(\tau)\le s\le\tau$ үшін

$$\begin{gathered}\widetilde{F}_1(s,\tau,t)=\sum_{(k_0,k)}\widetilde{G}_1(\tau)\frac{f_{k_0k}}{2\pi i(-\nu^0+k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle)}e^{2\pi i\langle k,\nu(t-e\tau)\rangle}\cdot e^{2\pi i(-\nu^0+k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle)s}+\\ +\sum_{(k_0,k)}\widetilde{\widetilde{G}}_1(\tau)\frac{f_{k_0k}}{2\pi i(\nu^0+k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle)}e^{2\pi i\langle k,\nu(t-e\tau)\rangle}\cdot e^{2\pi i(\nu^0+k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle)s};\ (k_0,k)\in Z\times Z^m\end{gathered} \tag{1.6.42}$$

түрінде болады, ал $\tau<s\le s^*(\tau+\theta-0)$ кезінде

$$\begin{gathered}\overline{F}_1(s,\tau,t)=\sum_{(k_0,k)}\overline{G}_1(\tau)\frac{f_{k_0k}}{2\pi i(-\nu^0+k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle)}e^{2\pi i\langle k,\nu(t-e\tau)\rangle}\cdot e^{2\pi i(-\nu^0+k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle)s}+\\ +\sum_{(k_0,k)}\overline{\overline{G}}_1(\tau)\frac{f_{k_0k}}{2\pi i(\nu^0+k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle)}e^{2\pi i\langle k,\nu(t-e\tau)\rangle}\cdot e^{2\pi i(\nu^0+k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle)s};\ (k_0,k)\in Z\times Z^m\end{gathered} \tag{1.6.43}$$

арқылы анықталады.

$$\widetilde{Y}(\tau)=\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]^{-1}=\left[E-Y(\theta)\right]^{-1}\left\{\Gamma e^{-2\pi i\nu^0\tau}+\overline{\Gamma}e^{2\pi i\nu^0\tau}\right\}Y(\theta)$$

болғандықтан $\tau\in\Pi_{\rho}$ үшін $\widetilde{G}_1(\tau),\widetilde{\widetilde{G}}_1(\tau),\overline{G}_1(\tau)$ және $\overline{\overline{G}}_1(\tau)$ матрицалық функциялар нақты аналитикалық, әрі абсолютті және бірқалыпты жинақталатындығынан (1.6.42) және (1.6.43) функциялары да аналитикалық болады.

$s \in \Pi_{\rho-2\delta}$, $(\tau, t) \in \Pi_{\rho-2\delta} \times \Pi^m_{\rho-2\delta}$ үшін (1.6.9) және (1.6.40) шарттары орындалғанда (1.6.42) және (1.6.43) қатарларының жинақтылығы келесі теңсіздіктер тізбегінен шығады:

$$\sum_{(k_0,k)} \frac{\left|f_{k_0 k}\right|}{\left|2\pi i(\nu^0 + k_0\nu_0 + \langle k, \nu\rangle)\right|} e^{\left|2\pi i(\nu^0 s + k_0\nu_0 s + \langle k, \nu(t - e\tau + es)\rangle)\right|} \le \frac{\left|f_{00}\right|}{2\pi\nu^0} e^{2\pi\nu^0|s|} +$$

$$+ \sum_{\hat{k}=(k_0,k)\ne 0} c\left|\hat{k}\right|^{\gamma} \left|f\right|_{\rho} e^{-\rho|\hat{k}|} \cdot e^{(\rho-2\delta)|\hat{k}|} e^{2\pi\nu^0|s|} \le \frac{e^{\rho}}{2\pi\nu^0}\left|f\right|_{\rho} + \sum_{\hat{k}=(k_0,k)\ne 0} \left|\hat{k}\right|^{\gamma} e^{-2\delta|\hat{k}|} c\, e^{\rho}\left|f\right|_{\rho} \le$$

$$\frac{e^{\rho}}{2\pi\nu^0}\left|f\right|_{\rho} + 2^{2+m} c \sum_{l=1}^{+\infty} l^{m+\gamma} e^{-2\delta l}\, e^{\rho}\left|f\right|_{\rho} \le \frac{e^{\rho}}{2\pi\nu^0}\left|f\right|_{\rho} + c \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{|\hat{k}|=l} l^{\gamma} e^{-2\delta l}\, e^{\rho}\left|f\right|_{\rho} \le$$

$$\le \frac{e^{\rho}}{2\pi\nu^0}\left|f\right|_{\rho} + 2^{2+m} c\left(\frac{m+\gamma}{e}\right)^{m+\gamma} \cdot \delta^{-(m+\gamma)} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta l}\, e^{\rho}\left|f\right|_{\rho} \le a_0 \delta^{-(m+\gamma)} \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-\delta l}\left|f\right|_{\rho} \le$$

$$\le a_0 \delta^{-(1+m+\gamma)}\left|f\right|_{\rho} = a_0 \delta^{-\alpha}\left|f\right|_{\rho}$$

немесе

$$\sum_{(k_0,k)} \frac{\left|f_{k_0 k}\right|}{\left|2\pi i(\nu^0 + k_0\nu_0 + \langle k, \nu\rangle)\right|} e^{\left|2\pi i(\nu^0 s + k_0\nu_0 s + \langle k, \nu(t - e\tau + es)\rangle)\right|} \le a_0 \delta^{-\alpha}\left|f\right|_{\rho}, \qquad (1.6.44)$$

мұндағы $a_0 = 2e^{\rho} \max\left\{\frac{1}{2\pi\nu^0}, 2^{2+m} c\left(\frac{m+\gamma}{e}\right)^{m+\gamma}\right\}$, $\alpha = 1 + m + \gamma$, сонымен қатар бұл бағалауларды алу кезінде $0 < \delta < \rho < 1$, $1 - e^{-\delta} > \frac{\delta}{2}$, $l^{m+\gamma} e^{-\delta l} \le \left(\frac{m+\gamma}{e}\right)^{m+\gamma} \delta^{-(m+\gamma)}$ теңсіздіктері ескерілді.

(1.6.44) бағалауынан (1.6.42) және (1.6.43) қатыстарындағы барлық қатарлардың бірқалыпты және абсолютті жинақталатыны шығады.

$$\widetilde{F}\left(s^*(\tau), \tau, t\right) = \overline{F}\left(s^*(\tau + \theta - 0), \tau, t\right) \qquad (1.6.45)$$

теңдігі орындалатындықтан

$$Q_1 f(\tau, t) = \int_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau, s) f(s, h(s, \tau, t))\, ds = \widetilde{F}(\tau, \tau, t) - \overline{F}(\tau, \tau, t) \qquad (1.6.46)$$

орынды. $\max\left\{\widetilde{a}_1, \widetilde{\widetilde{a}}_1, \overline{a}_1, \overline{\overline{a}}_1\right\} = a_1$ десек, (1.6.37) және (1.6.38) негізінде

$$\left|\tilde{G}_1\right|_\rho \le \tilde{a}_1,\ \left|\tilde{\tilde{G}}_1\right|_\rho \le \tilde{\tilde{a}}_1,\ \left|\bar{G}_1\right|_\rho \le \bar{a}_1,\ \left|\bar{\bar{G}}_1\right|_\rho \le \bar{\bar{a}}_1$$

болады. Сонда (1.6.42), (1.6.43) және (1.6.44) қатыстарынан

$$\left|\tilde{F}\right|_{\rho-2\delta} \le \frac{a_*}{2}\delta^{-\alpha}\left|f\right|_\rho,\ \left|\bar{F}\right|_{\rho-2\delta} \le \frac{a_*}{2}\delta^{-\alpha}\left|f\right|_\rho$$

теңсіздігі орындалатындығы шығады, мұндағы $a_* = 4a_0a_1$. Олай болса, (1.6.45), (1.6.46) негізінде

$$\left|Q_1 f\right|_{\rho-2\delta} \le a_*\delta^{-\alpha}\left|f\right|_\rho \qquad (1.6.47)$$

бағалауын аламыз, мұндағы $a_* > 0$ $-\delta$ параметрінен тәуелсіз тұрақты,

$$\xi = \delta^{-\alpha} \qquad (1.6.48)$$

параметрлік көбейткіш, оны f күші әсерінен болатын еріксіз тербелістерге *кіші бөлгіштердің әсері* деп атаймыз.

(1.6.9), (1.6.12), (1.6.15), (1.6.16), (1.6.30), (1.6.33) және (1.6.35) сәйкес, $s \in \Pi_\rho$, $(\tau,t) \in \Pi_\rho \times \Pi_\rho^m$ үшін $G_2(\tau,s)\, f\big(s, h(s,\tau,t)\big)$ функциясының нақты аналитикалық болатындығын және

$$Q_2 f(\tau,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s) f(s, h(s,\tau,t))\, ds \qquad (1.6.49)$$

меншіксіз интегралының бірқалыпты жинақтылығын оңай дәлелдеуге болады. Бұдан $(\tau,t) \in \Pi_\rho \times \Pi_\rho^m$ болғанда (1.6.49) нақты аналитикалық болатындығы шығады, әрі

$$\left|Q_2 f\right|_\rho \le a^*\left|f\right|_\rho \qquad (1.6.50)$$

бағалауы орынды, мұндағы $a^* = \dfrac{a_2}{\kappa}$.

Осылайша, (1.6.36) шешімінің нақты аналитикалық болатыны дәлелденді. Ол (1.6.47) және (1.6.50) бағалаулары негізінде

$$\left|x^0\right|_{\rho-2\delta} \le \varepsilon^0 a\xi\left|f\right|_\rho = \Delta_0 \qquad (1.6.51)$$

теңсіздігін қанағаттандырады, мұндағы $a = a_* + a^*$, ξ – (1.6.48) арқылы анықталатын параметр. (1.6.34) жүйесінің (1.6.36) шешімі (τ, t) бойынша (θ, ω) -периодты функциялар кеңістігінде жалғыз болады, өйткені 1.6.2-леммасына сәйкес (1.6.7) жүйесінің нөлден өзге мұндай шешімдері жоқ.

1.6.1-теорема. *(1.6.8), (1.6.9) және (1.6.35) шарттары орындалғанда (1.6.1) уақыт айнымалылар кеңістігінің бас диагоналы бағытында дифференциалдау операторлы (1.6.34) жүйенің жалғыз* (θ, ω)*-периодты және* $\Pi_{\rho-2\delta} \times \Pi^m_{\rho-2\delta}$ *жолағында нақты аналитикалық* $x^0(\tau, t)$ *шешімі (1.6.36) түрінде болады, әрі ол (1.6.51) бағалауына бағынады.*

$\varepsilon^0 > 0$ – кез келген параметр болғандықтан оны дербес жағдайда, $\mu^0 > 0$ кіші параметрі арқылы

$$\varepsilon^0 = \eta \mu^0 \qquad (1.6.52)$$

түрінде өрнектеп, еріксіз тербелістердің амплитудасын ξ әсерінен

$$\eta = \xi^{-1} \qquad (1.6.53)$$

әсерді басу параметрі арқылы босатамыз. Осы параметрлердің өзгерістерінің шамалары мен жылдамдықтары жөнінде мәлімет алу үшін $\pi/4$ мәнінен 0-ге дейін, яғни $\eta = \xi$ диагоналынан $\eta = 0$ осіне дейін өзгеретін Ω бұрышымен берілген еркін алынған $\overset{\frown}{AOP}$ гиперболалық секторының және $[1, \xi]$ табанымен, $\overset{\smile}{AP}$ қисығымен шенелген $S_{[1,\xi]}$ гиперболалық трапециясының аудандарын сипаттайтын S параметрін енгіземіз. Олар 1.6 суретінде $\xi_0 = \xi$ болғанда сипатталған. Олай болса,

$$S = S_{\overset{\frown}{AOP}} = S_{[1,\xi]} \qquad (1.6.54)$$

теңдігін аламыз, әрі кіші бөлгіштердің әсер етуі және әсерді басуы параметрлері

$$\xi = e^S, \;\; \eta = e^{-S} \qquad (1.6.55)$$

қатысы арқылы S параметрімен байланысады.

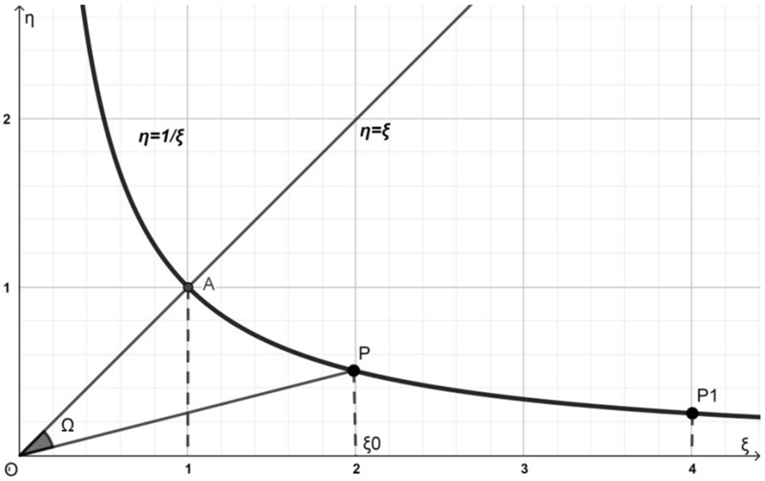
Осылайша (1.6.54) және (1.6.55) қатыстарына сәйкес ξ және η параметрлері $S \to +\infty$ болғанда экспоненциалды-гиперболалық жылдамдықпен өзгереді. Кез келген $a > 0$ тұрақтысы үшін $S = S_{[1,\xi]}$ трапециясының ауданы $S_{[1,\xi]} = S_{[a, a\xi]}$ қасиетіне ие болатындығын көреміз.

Шынында да, $u = av$ ауыстыруын жасасақ,

$$S_{[1,\xi]} = \int_1^{\xi} \frac{du}{u} = \int_a^{a\xi} \frac{dv}{v} = S_{[a,a\xi]}. \tag{1.6.56}$$

Сонда (1.6.56) қасиетінің салдары ретінде келесі қатысты аламыз:

$$S = S_{[1,\xi]} = S_{[\xi,\xi^2]} = ... = S_{[\xi^{j-1},\xi^j]} = ... \tag{1.6.57}$$



Сурет 1.6 – $\xi_0 = 2$ үшін параметрдің экспоненциалды-гиперболалық өзгеруінің геометриялық интерпретациясы

Бұл заңдылықты квазисызықты есептердің шешімдерінің біртіндеп жуықтау әдісі арқылы тұрғызу кезінде қолданамыз. Осылайша, $\varepsilon^0 > 0, \delta = \delta_0 > 0$ және $S = S_0$ параметрлері және (1.6.48), (1.6.52) - (1.6.55) қатыстары арасындағы

$$\varepsilon^0 = \mu^0 \delta_0^{\alpha} = \mu^0 e^{-S_0} \tag{1.6.58}$$

түріндегі байланысын орнатып, біріншіден, параметрлердің өзгеру заңдылығын анықтаймыз, екіншіден есепті зерттеу кезінде кедергі болатын, кіші бөлгіштердің әсерлерін басу мүмкіндігін аламыз. 1.6 суретінен $\xi_0 = 2$ кезінде $S = S_{\overset{\frown}{AOP}} = S_{[1,\xi_0]} = \ln 2$ болатындығын аламыз.

(1.6.58) шарты кезінде берілген сызықты жағдайда (1.6.51) бағалауынан еріксіз тербелістер үшін кіші бөлгіштердің әсерінсіз

$$\left|x^0\right|_{\rho-2\delta} \le \mu^0 a |f|_{\rho} \tag{1.6.59}$$

бағалауын аламыз.

2 ВЕКТОРЛЫҚ ӨРІС БАҒЫТТАРЫ БОЙЫНША ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЛЫ КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ КӨППЕРИОДТЫ ШЕШІМДЕРІ

2.1 D_3 дифференциалдау операторлы автономды квазисызықты жүйелердің көппериодты шешімдері

I. Дифференциалдау операторы (1.4.1) болып келетін квазисызықты жүйені қарастыралық

$$D_3 x = Ax + f(\zeta, x), \tag{2.1.1}$$

мұндағы A – тұрақты $n\times n$-матрица, $f(\zeta, x)$ – n өлшемді вектор-функция. Мұнда жұмыстың 1.4 бөлімшесінде қарастырылған сызықты жағдай нәтижелері жалпыланады және барлық белгілеулер сол бөлімшеге сәйкес алынады.

$f(\zeta,x)$ вектор-функциясы центрі $(\zeta, x) = (0,0)$ болатын $B_\delta^{2l+2}\times B_\Delta^n$ ашық шарда

$$f(\zeta, x)\in C_{\zeta,x}^{(\tilde{e},\tilde{\tilde{e}})}\left(B_\delta^{2l+2}\times B_\Delta^n\right),\quad f(\zeta,x) = f(\bar{y}) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left\langle \bar{y},\ \frac{\partial}{\partial\bar{y}}\right\rangle^j f(0{,}0) \tag{2.1.2}$$

шартын қанағаттандыратын болсын, мұндағы $\tilde{e} = (1,...,1)$ – $(2l+2)$-вектор, $\tilde{\tilde{e}} = (1,...,1)$ – n-вектор, $\delta,\ \Delta$ – оң тұрақтылар, $\bar{y} = (\zeta, x)$, $\dfrac{\partial}{\partial\bar{y}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\zeta}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$.

Квазисызықты жүйенің көппериодты шешімдерін зерттеу үшін $(\tau, t)\in R\times R^l$ бойынша үзіліссіз және (θ,ω)-периодты, $\zeta\in\overline{B}_\delta^{2l+2}$ болғанда

$$\|x\| = \max_j \sup_{R\times R^l\times\overline{B}_\delta^{2l+2}}\left|x_j(\tau, t, \zeta)\right| \le \tilde{\gamma} \tag{2.1.3}$$

нормасы бойынша шенелген $x(\tau, t, \zeta)$ вектор-функциялардың $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігінде

$$(Fx)(\tau, t, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau - s) f\left(\mu(s-\tau, es - t, \zeta), x(s, es - t,\ \mu(s-\tau,\ es-t,\ \zeta))\right)ds \tag{2.1.4}$$

сызықты емес операторын қарастыралық, мұндағы $\theta = \omega_0(\varepsilon_0)$, $\omega = (\omega_1(\varepsilon_1),...,\omega_l(\varepsilon_l))$, $\varepsilon_j\in \mathrm{O}_\delta(0), j=\overline{0,l}$, ε_j– еркін тұрақтылар, $\varepsilon_j\in\mathrm{O}_\delta(0), j = \overline{0,l}$; $\overline{B}_\delta^{2l+2}$ – B_δ^{2l+2} шарының тұйықталуы, $\tilde{\gamma}$ – оң тұрақтылар.

F операторы $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігін өзіне бейнелейтінін және қайсыбір қосымша шарттар орындалғанда қысушы оператор болатынын көрсетелік, әрі осы шарттарды анықталық.

(2.1.2) шарты негізінде $f(\zeta, x)$ вектор -функциясына қатысты

$$\left|f(\zeta, x) - f(\zeta, y)\right| \le c|x - y| \qquad (2.1.5)$$

теңсіздігін аламыз, мұндағы $x, y \in B^n_{\widetilde{\gamma}}$, $\|x\| = \max\limits_j |x_j|$, c – оң тұрақты. Демек,

$$\left|f(\zeta, x)\right| \le d + c|x| \qquad (2.1.6)$$

орынды, мұндағы $d = \|f_0\|$, $f_0 = f(\zeta, 0)$.

Енді $\widetilde{\alpha}, \kappa, c, d$ және $\widetilde{\gamma}$ оң тұрақтылары

$$(\kappa - \widetilde{\alpha}c)\widetilde{\gamma} > \widetilde{\alpha}d \qquad (2.1.7)$$

қатысымен байланысқан деп ұйғаралық. Сонда (2.1.7) қатысынан

$$\frac{\widetilde{\alpha}}{\kappa}(d + c\widetilde{\gamma}) < \widetilde{\gamma}, \ \beta = \frac{\widetilde{\alpha}\, c}{\kappa} < 1 \qquad (2.1.8)$$

орындалатынын көреміз. Демек, (1.4.39) қатысындағы 3° қасиет және (2.1.3), (2.1.6) теңсіздіктерінен

$$\|Fx\| \le \frac{\widetilde{\alpha}}{\kappa}(d + c\widetilde{\gamma}) < \widetilde{\gamma} \qquad (2.1.9)$$

бағалауын аламыз.

Интеграл астындағы $G(\tau)$, $f(\zeta, x)$ және $\mu(\tau, t, \zeta)$, $x(\tau, t, \zeta)$ функцияларының барлық аргументтері бойынша үзіліссіздігін, τ, t бойынша үзіліссіз дифференциалданатынын, ζ, x бойынша аналитикалық болатынын және (2.1.4) меншіксіз интегралының бірқалыпты жинақтылығын ескергенде, $Fx = (Fx)(\tau, t, \zeta)$ функциясының сәйкес аргументтері бойынша тегістігіне қатысты осыған ұқсас қасиеттер шығады. Дербес жағдайда, $x \in S^{\theta,\omega}_{\delta,\widetilde{\gamma}}$ болғанда Fx функциясының барлық аргументтері бойынша үзіліссіздігін аламыз.

Fx функциясының t-ға қатысты ω-периодтылығы $\mu(\tau, t, \zeta)$ және $x(\tau, t, \zeta)$ функцияларының осы аргумент бойынша ω-периодтылығынан шығады. Сол сияқты Fx функциясының τ-ға қатысты θ-периодтылығы τ аргументін θ-ға ығыстырғаннан кейін (2.1.4) интегралында $s = s' + \theta$ ауыстыруын жасау арқылы алынады.

Сонымен F операторы $S^{\theta,\omega}_{\delta,\widetilde{\gamma}}$ кеңістігін өзіне бейнелейтінін көреміз.

$x, y \in S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ үшін (1.4.39) қатысының 3° қасиеті мен (2.1.5) теңсіздігін қолдансақ, келесі бағалау

$$|Fx - Fy| \le c \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\tau - s)|\, ds \, \|x - y\| \le \frac{\tilde{\alpha}\, c}{\kappa} \|x - y\| \tag{2.1.10}$$

алынады. Олай болса, (2.1.8) орындалғанда

$$|Fx - Fy| \le \beta \, \|x - y\| \tag{2.1.11}$$

теңсіздігін аламыз, мұндағы $\beta = \dfrac{\tilde{\alpha}\, c}{\kappa} < 1$. Бұл F қысушы оператор болатындығын көрсетеді.

Ені $\delta > 0$ болатын жолақта анықталған, нормасы бойынша $\tilde{\gamma}$ санымен шенелген (θ, ω)-периодты аналитикалық функциялардың нормалары бойынша жинақты тізбегінің шектік функциясы тізбек мүшелерімен бірдей қасиетке ие болатындығынан $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігінің толықтығы шығатыны белгілі. Олай болса, F операторының $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігінде анықталған жалғыз қозғалмайтын нүктесі $x^*(\tau, t, \zeta)$ осы кеңістікте жатады, яғни

$$(Fx^*)(\tau, t, \zeta) = x^*(\tau, t, \zeta) \in S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}.$$

Енді осылай анықталған қозғалмайтын $x^*(\tau, t, \zeta)$ нүктесінің

$$x^*(\tau, t, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau - s) f\big(\mu(s - \tau, es - t, \zeta), x^*(s, es - t,\ \mu(s - \tau,\ es - t,\ \zeta))\big) ds \tag{2.1.12}$$

дифференциалданатындығын көрсетелік.

Шынында да, (2.1.12) шешімі (1.1.3), (1.4.23) қатыстарында $\tau^0 = 0,\ t^0 = 0,\ m = l$ болғанда $t = e\tau$ және $\zeta = \mu(\tau, e\tau, \zeta^0)$ арқылы анықталған (1.4.1) операторының сипаттауыштары бойында келесі

$$x^*(\tau, e\tau, \mu(\tau, e\tau, \zeta^0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau - s) f\big(\mu(s, es, \zeta^0), x^*(s, es,\ \mu(s,\ es,\ \zeta^0))\big) ds$$

түрде болады, әрі ол

$$\frac{d\tilde{x}^*}{d\tau} = A\tilde{x}^* + f\big(\mu(\tau, e\tau, \zeta^0), \tilde{x}^*\big) \tag{2.1.13}$$

жәй дифференциалдық теңдеуінің шешімі болады. Олай болса, жәй дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің параметрлер бойынша дифференциалданатындығы туралы теорема негізінде [27, 118 б.] $\widetilde{x}^* = x^*\left(\tau, e\tau, \mu\left(\tau, e\tau, \zeta^0\right)\right)$ шешімі τ және ζ^0 векторының компоненттері бойынша дифференциалданады.

Сонда сипаттауыштың (1.4.25) қасиеті негізінде $t = e\tau$ және $\zeta^0 = \mu(-\tau, -e\tau, \zeta)$ болғанда $x^*\left(\tau, e\tau, \mu\left(\tau, e\tau, \zeta^0\right)\right)$ шешімінен алынған

$$x^*\left(\tau, t, \mu\left(\tau, t, \mu\left(-\tau, -e\tau, \zeta\right)\right)\right) = x^*\left(\tau, t, \zeta\right)$$

күрделі функциясы τ, t, ζ бойынша дифференциалданады. Сонымен F операторының $x^*\left(\tau, t, \zeta\right)$ қозғалмайтын нүктесінің дифференциалданатындығы дәлелденді.

(2.1.13) теңдеуі $\zeta^0 \in B_\delta^{2l+2}$, ал $\mu\left(-\tau, -e\tau, \zeta\right)$ шамасы ζ-ға қатысты аналитикалық болғандықтан шешімдердің параметрлерден аналитикалық тәуелділігі туралы теорема негізінде [43, 185-186 б.] $x^*\left(\tau, t, \zeta\right)$ шешімі $\zeta \in B_\delta^{2l+2}$ бойынша аналитикалық болады.

Тікелей тексеру арқылы (2.1.12) функциясы (2.1.1) теңдеуінің шешімі болатындығына көз жеткізуге болады.

Енді осы шешімнің жалғыздығын дәлелделік.

$x_*\left(\tau, t, \zeta\right)$ вектор-функциясы (2.1.1) жүйесінің (τ, t) бойынша (θ, ω)-периодты, ζ-ға қатысты аналитикалық қайсыбір шешімі болсын. Сонда келесі теңдік орындалады:

$$D_3 x_*\left(\tau, t, \zeta\right) = A x_*\left(\tau, t, \zeta\right) + f\left(\zeta, x_*\left(\tau, t, \zeta\right)\right). \tag{2.1.14}$$

Енді келесі

$$D_3 y = A y + f\left(\zeta, x_*\left(\tau, t, \zeta\right)\right) \tag{2.1.15}$$

сызықты теңдеуді қарастыралық. Бұл теңдеудің (1.4.34) шарты орындалғанда жалғыз ғана (θ, ω)-периодты шешімі табылады, ол

$$y_*\left(\tau, t, \zeta\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau - s) f\left(\mu\left(s - \tau, es - t, \zeta\right), x_*\left(s, es - t, \mu\left(s - \tau, es - t, \zeta\right)\right)\right) ds \tag{2.1.16}$$

арқылы анықталады. Бірақ (τ, t) бойынша (θ, ω)-периодты (2.1.16) шешімімен қатар (2.1.14) теңдігі негізінде $x_*\left(\tau, t, \zeta\right)$ функциясы да осындай шешім болады. Сонда (2.1.15) жүйесінің жалғыз ғана (θ, ω)-периодты шешімі табылатындығынан бұл шешімдердің барлық жерде беттесетіндігі шығады, яғни $x_*(\tau,t,\zeta)\equiv y_*(\tau,t,\zeta)$. Олай болса, F операторының $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігіндегі қозғалмайтын нүктесі (2.1.1) жүйесінің (τ,t)-ға қатысты (θ,ω)-периодты шешімі болатындығын дәлелдейтін

$$x_*(\tau,t,\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\tau-s)f(h(s-\tau,es-t,\zeta),x_*(s,es-t,\,\mu(s-\tau,es-t,\zeta)))ds$$

теңдігін аламыз.

F операторының бұл кеңістікте жалғыз ғана $x^*(\tau,t,\zeta)$ қозғалмайтын нүктесі табылатындығынан (2.1.1) жүйесінің жалғыз ғана (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты шешімі бар, әрі $x^*(\tau,t,\zeta)=x_*(\tau,t,\zeta)$ болады.

Сонымен келесі теорема дәлелденді.

2.1.1-теорема. *(1.4.3), (1.4.4), (1.4.7), (1.4.34), (2.1.2) және (2.1.7) шарттары орындалсын. Онда (2.1.1) жүйесінің (τ,t) бойынша жалғыз (θ,ω)-периодты шешімі бар.*

II. Келесі квазисызықты жүйенің

$$D_3x=P(\zeta)x+f(\zeta,x) \tag{2.1.17}$$

көппериодты шешімінің бар болуы туралы мәселені қарастыралық, мұнда $P(\zeta)$ – $n\times n$-матрица, $f(\zeta,x)$ – n-вектор -функция.

$P(\zeta)$ матрицасы мен $f(\zeta,x)$ вектор -функциясы сәйкесінше (1.4.52), (2.1.2) шарттарын қанағаттандырсын. Сонда (2.1.5) теңсіздігі орындалады.

$\tilde{\alpha},\kappa,c,d$ және $\tilde{\gamma}$ тұрақтылары (2.1.7) қатысы арқылы байланысқан. $x(\tau,t,\zeta)$ вектор-функциялардың $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігі мағынасы бұрынғыша және (2.1.3) нормасы бойынша $\tilde{\gamma}>0$ санымен шенелген.

Осы кеңістікте

$$\left(\tilde{F}x\right)(\tau,t,\zeta)=\int_{-\infty}^{\tau}X(s,\tau,t,\zeta)f(\mu(s-\tau,es-t,\zeta),x(s,es,\,\mu(s-\tau,es-t,\zeta)))ds \tag{2.1.18}$$

операторын анықталық.

2.1.1-лемма. *(1.4.3), (1.4.4), (1.4.7), (1.4.52), (1.4.55), (2.1.2) және (2.1.7) шарттары орындалсын, онда $\delta>0$ жеткілікті аз болғанда $\tilde{F}$ операторының $S_{\delta,\tilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігінде жалғыз ғана қозғалмайтын нүктесі бар.*

(2.1.6) және (1.4.55) шарттары негізінде (2.1.18) меншіксіз интегралы бірқалыпты жинақты. Олай болса, (2.1.2) қасиеті негізінде $\left(\tilde{F}x\right)(\tau,t,\zeta)$ функциясы барлық аргументтері бойынша үзіліссіз.

$x(\tau,t,\zeta)$ вектор-функциясының τ-ға қатысты периодтылығынан және X матрицантының (1.4.54) қасиетінен, τ айнымалысын θ периодына ығыстырып

τ-ды $\tau+\theta$ шамасымен ауыстырсақ, (2.1.18) функциясының τ бойынша θ-периодты болатынын көреміз. Fx функциясының t-ға қатысты ω-периодтылығы (1.4.54) қасиетінде келтірілген X матрицантының және μ базалық сипаттаушы интегралының t бойынша ω-периодтылығынан шығады.

(2.1.6), (2.1.7) және (1.4.55) теңсіздіктерін қолдансақ, (2.1.18) өрнегінен $\widetilde{F}x$ операторы үшін (2.1.9) бағалауы

$$\left\|\widetilde{F}x\right\| \le \frac{\widetilde{\alpha}}{\kappa}\left(d + c\widetilde{\gamma}\right) < \widetilde{\gamma}$$

орынды. Олай болса, $\widetilde{F}x$ функциясы $\widetilde{\gamma}>0$ санымен шенелген. Сонымен $\widetilde{F}$ операторы $S_{\delta,\widetilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігін өзіне бейнелейтініне көз жеткіздік.

Әрі қарай (1.4.55) және (2.1.5) негізінде $\widetilde{F}$ операторының (2.1.18) анықталуынан $\left|\widetilde{F}x-\widetilde{F}y\right| \le \frac{\widetilde{\alpha}\,c}{\kappa}\left\|x-y\right\|$ теңсіздігін аламыз. Бұдан (2.1.8) негізінде $\widetilde{F}$ операторы үшін (2.1.11) теңсіздігіне ұқсас

$$\left|\widetilde{F}x-\widetilde{F}y\right| \le \beta\left\|x-y\right\|$$

бағалауын аламыз, ал бұл $\widetilde{F}$ қысушы оператор екендігін көрсетеді.

Жоғарыда келтірілгендей $S_{\delta,\widetilde{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігі толық болады. Сонда $\widetilde{F}$ операторының бұл кеңістікте жалғыз ғана қозғалмайтын нүктесі бар және ол келесі теңдеудің шешімі болады:

$$x_*(\tau,t,\zeta)=\int_{-\infty}^{\tau} X(s,\tau,t,\zeta)f\left(\mu(s-\tau,es-t,\zeta),x_*\left(s,es,\ \mu(s-\tau,es-t,\zeta)\right)\right)ds. \quad (2.1.19)$$

2.1.2-теорема. *2.1.1-лемма шарттары орындалғанда (2.1.17) жүйесінің* $\delta>0$ *жеткілікті аз болғанда* (τ,t) *бойынша жалғыз* (θ,ω)*-периодты шешімі бар.*

Дәлелдеу үшін (2.1.17) жүйесінің (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты $x_*(\tau,t,\zeta)$ шешімі интегралдық теңдеуді

$$x(\tau,t,\zeta)=\left(\widetilde{F}x\right)(\tau,t,\zeta) \quad (2.1.20)$$

қанағаттандыратынын көрсетелік.

Шынында да, $x_*(\tau,t,\zeta)$ шешімі көмегімен (1.4.59) теңдеуіне ұқсас келесі сызықты жүйені

$$D_3x = P(\zeta)x + f\left(\zeta,x_*(\tau,t,\zeta)\right) \quad (2.1.21)$$

қарастыралық. Демек, 1.4.4-теоремаға сәйкес, (1.4.61) формуласынан (2.1.21) жүйесінің

$$x = \left(\widetilde{F}x_*\right)\!(\tau,t,\zeta) \qquad (2.1.22)$$

операторлы өрнегімен анықталған жалғыз ғана (θ,ω)-периодты x шешімі бар.

$x_*(\tau,t,\zeta)$ шешімі (2.1.17) жүйесін қанағаттандыратындықтан (2.1.21) теңдеуінің шешімі болады. Демек, (θ,ω)-периодты шешімнің жалғыз болуына байланысты (2.1.22) өрнегінен

$$x_*(\tau,t,\zeta) = \left(\widetilde{F}x_*\right)\!(\tau,t,\zeta) \qquad (2.1.23)$$

теңдігін аламыз, яғни $x_*(\tau,t,\zeta)$ функциясы (2.1.20) интегралдық теңдеуінің шешімі болатындығын көреміз. Бірақ 2.1.1-леммада көрсеткеніміздей оның көппериодты шешімі жалғыз болады. Сондықтан (2.1.19) және (2.1.23) теңдіктерінен $x_*(\tau,t,\zeta) = x^*(\tau,t,\zeta)$ аламыз.

Олай болса, $x^*(\tau,t,\zeta)$ шешімі барлық аргументтері бойынша тегістік қасиетіне ие және (2.1.20) интегралдық теңдеуі арқылы анықталады. Теорема толығымен дәлелденді.

2.2 D_4 дифференциалдау операторлы квазисызықты жүйелердің көппериодты шешімдері

Сызықты жағдайда 1.5 бөлімшесінде алынған нәтижелерді жалпылау мақсатында (1.5.1) дифференциалдау операторлы

$$D_4 x = Ax + f(\tau,t,\zeta,x) \qquad (2.2.1)$$

жүйесін қарастыралық, мұндағы A – тұрақты $n \times n$-матрица, $f(\tau,t,\zeta,x)$ – n-вектор-функция.

Байқағанымыздай барлық белгілеулер және олардың мағыналары 1.5 бөлімшесінде келтірілген сызықты жағдаймен сәйкес келеді.

Келесі шарттар орындалсын делік.

1^0. (2.2.1) жүйесінің сызықты бөлігін анықтайтын параметрлерге қатысты жасалған ұйғарымдар орындалсын.

2^0. Сызықты емес $f(\tau,t,\zeta,x)$ вектор-функциясы $(\tau,t) \in R \times R^m$ үшін (θ,ω)-периодты, τ-ға қатысты үзіліссіз, $(t,\zeta,x) \in R^m \times B_\delta^{2l} \times B_\Delta^n$ бойынша екі рет үзіліссіз дифференциалданады және $R \times R^m \times \overline{B}_\delta^{2l} \times \overline{B}_\Delta^n$ тұйықталуында барлық туындыларымен бірге үзіліссіз. $f = f(\tau,t,\zeta,x)$ вектор-функциясының бұл қасиеттерін

$$f(\tau+\theta, t+q\omega, \zeta, x) = f(\tau, t, \zeta, x) \in C^{(0,2e,2\tilde{e},2\hat{e})}_{\tau,t,\zeta,x}\left(R \times R^m \times \overline{B}^{2l}_{\delta} \times \overline{B}^{n}_{\Delta}\right), \quad (2.2.2)$$

түрінде жазалық, мұндағы $e, \tilde{e}, \hat{e}$ векторлары сәйкесінше $m, 2l, n$ өлшемді бірлік компонентті векторлар.

3^0. (1.5.41) біртекті жүйенің нөлден өзге (θ,ω)-периодты шешімі болмайды.

(τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты, $(\tau,t,\zeta) \in R \times R^m \times B^{2l}_{\delta}$ бойынша үзіліссіз дифференциалданатын және дербес туындыларымен бірге $R \times R^m \times \overline{B}^{2l}_{\delta}$ тұйықталуында үзіліссіз, $\bar{\gamma} > 0$ тұрақты санымен $\|x\| < \bar{\gamma}$ нормасы бойынша шенелген вектор-функциялардың $S^{\theta,\omega}_{\delta,\bar{\gamma}}$ кеңістігін енгізелік, мұнда

$$\|x\| = \|x\|_{\circ} + \sum_{j=0}^{m} \left\| \frac{\partial x}{\partial t_j} \right\|_{\circ} + \sum_{k=1}^{l} \left(\left\| \frac{\partial x}{\partial \xi_k} \right\|_{\circ} + \left\| \frac{\partial x}{\partial \eta_k} \right\|_{\circ} \right)$$

$\tau = t_0$, $t = (t_1, \dots, t_m)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_l) = ((\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_l, \eta_l))$ айнымалылары бойынша $x(\tau,t,\zeta)$ n-вектор-функциясының нормасы, $(\tau,t,\zeta) \in R \times R^m \times \overline{B}^{2l}_{\delta}$ болғанда $\| x \|_{\circ} = \sup | x(\tau,t,\zeta) |$, $| \cdot | -$ R^n кеңістігіндегі евклид нормасы.

$S^{\theta,\omega}_{\delta,\bar{\gamma}}$ кеңістігінде $K = K(\tau,s)$ ядросы

$$K(\tau,s) = \left[X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X^{-1}(s) \quad (2.2.3)$$

болатын T, P'_k, P''_k, Q_j, R интегралдық операторларын қарастыралық:

$$(Tx)(\tau,t,\zeta) = \int_{\tau}^{\tau+\theta} K(\tau,s) f_{\theta}(s, \lambda(s,\tau,t), \mu(s,\tau,\zeta), x(s, \lambda(s,\tau,t), \mu(s,\tau,\zeta)))ds, \quad (2.2.4)$$

$$(P'_k x)(\tau,t,\zeta) = \int_{\tau}^{\tau+\theta} K(\tau,s) \left[\frac{\partial f_{\theta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_{\theta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_k} \cdot \frac{\partial \mu_k(s,\tau,\zeta_k)}{\partial \xi_k} ds, \quad (2.2.5)$$

$$(P''_k x)(\tau,t,\zeta) = \int_{\tau}^{\tau+\theta} K(\tau,s) \left[\frac{\partial f_{\theta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_{\theta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_k} \cdot \frac{\partial \mu_k(s,\tau,\zeta_k)}{\partial \eta_k} ds, \quad (2.2.6)$$

$$(Q_j x)(\tau,t,\zeta) = \int_{\tau}^{\tau+\theta} K(\tau,s) \left[\frac{\partial f_{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial f_{\theta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \right] \frac{\partial \lambda(s,\tau,t)}{\partial t_j} ds, \quad (2.2.7)$$

$$(Rx)(\tau,t,\zeta)=f(\tau,t,\zeta,x)+A(Tx)(\tau,t,\zeta)+\int\limits_{\tau}^{\tau+\theta}K(\tau,s)\left[\frac{\partial f_\theta}{\partial\zeta}+\frac{\partial f_\theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right]\frac{\partial\mu(s,\tau,\zeta)}{\partial\tau}ds+$$
$$+\int\limits_{\tau}^{\tau+\theta}K(\tau,s)\left[\frac{\partial f_\theta}{\partial t}+\frac{\partial f_\theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right]\frac{\partial\lambda(s,\tau,t)}{\partial\tau}ds, \qquad (2.2.8)$$

мұндағы $\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial x}{\partial\sigma},\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_k},\frac{\partial f_\theta}{\partial x}$ – Якоби матрицасы және тік жақша ішіндегі $\frac{\partial f_\theta}{\partial\xi_k}$, $\frac{\partial f_\theta}{\partial\eta_k},\frac{\partial f_\theta}{\partial t_j}$ дербес туындыларында τ,t,ζ айнымалылары сәйкесінше s, $\lambda(s,\tau,t)$, $\mu(s,\tau,\zeta)=(\mu_1,...,\mu_l)$ шамаларымен алмастырылған, $\mu_k=\mu_k(s,\tau,\sigma_k)$, $\sigma_k=(\xi_k,\eta_k)$, $k=\overline{1,l}$ – векторлар; f_θ вектор-функциясы берілген f вектор-функциясынан (1.5.77) формуласына ұқсас анықталады:

$$f_\theta(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta),x(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)))=$$
$$=\begin{cases} f(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta),x(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))), & \tau\le s\le 0,\\ f(s,\lambda(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta),x(s,\lambda(s,\tau+\theta,t),\mu(s,\tau+\theta,\zeta))), & 0<s\le\tau+\theta.\end{cases}$$

$P_k'x$, $P_k''x$, Q_jx және Rx операторлары Tx операторын сәйкесінше ξ_k,η_k,t_j және τ бойынша дифференциалдау арқылы алынды.

(2.2.4)-(2.2.8) интегралдық операторлары τ скаляр аргументінен және $\zeta_k=(\xi_k,\eta_k)$, $\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_l)=((\xi_1,\eta_1),...,(\xi_l,\eta_l))$, $t=(t_1,...,t_m)$, $x=(x_1,...,x_n)$, $p=(p_1,...,p_k)$, $p_k=\partial x/\partial\xi_k$, $q=(q_1,...,q_k)$, $q_k=\partial x/\partial\eta_k$, $r=(r_1,...,r_j)$, $r_j=\partial x/\partial t_j$, $k=\overline{1,l}$, $j=\overline{1,m}$ векторлық аргументтерден тәуелді, әрі олардың p,q,r бойынша тәуелділігі сызықты.

(1.5.1) түрінде анықталған D_4 операторының (1.5.9) сипаттаушы теңдеуінен бастапқы берілгендер бойынша дифференциалдау туралы теорема [47, 17-23 б.] негізінде $\lambda(s,\tau,t)$, $\frac{\partial\lambda(s,\tau,t)}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\lambda(s,\tau,t)}{\partial t_j}$ үшін келесі бағалауларды аламыз:

$$\begin{aligned}&|\lambda(s,\tau,t)-t|\le\|a\|_{\circ}|\tau-s|,\\ &\left|\frac{\partial\lambda(s,\tau,t)}{\partial\tau}\right|\le\|a\|_{\circ}\exp\left[\left\|\frac{\partial a}{\partial t}\right\|_{\circ}|\tau-s|\right],\\ &\left|\frac{\partial\lambda(s,\tau,t)}{\partial t_j}\right|\le\exp\left[\left\|\frac{\partial a}{\partial t}\right\|_{\circ}|\tau-s|\right],\ j=\overline{1,m}.\end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

Салыстырмалы түрде (1.5.26) арқылы анықталған $\mu_k(s,\tau,\zeta_k)$ үшін де келесі бағалауларды аламыз:

$$
\begin{aligned}
&\left|\mu_k(s,\tau,\zeta_k)-z_k(s)\right|\le\left|Z_k(s-\tau)\right|\cdot\left|\zeta_k-z_k(\tau)\right|,\\
&\left|\frac{\partial\mu_k(s,\tau,\zeta_k)}{\partial\tau}\right|\le\left|Z_k(s-\tau)\right|\cdot\left|-\nu_k I_2\zeta_k-g_k(\tau)\right|,\\
&\left|\frac{\partial\mu_k(s,\tau,\zeta_k)}{\partial\xi_k}\right|\le\left|Z_k(s-\tau)\right|\cdot\left|e'\right|,\\
&\left|\frac{\partial\mu_k(s,\tau,\zeta_k)}{\partial\eta_k}\right|\le\left|Z_k(s-\tau)\right|\cdot\left|e''\right|,
\end{aligned}
\tag{2.2.10}
$$

мұндағы $e'=(1,0),\ e''=(0,1)$.

$\mu(s,\tau,\zeta)=(\mu_1(s,\tau,\zeta_1),\ldots,\mu_l(s,\tau,\zeta_l))$ болсын. Бағалау үшін $\mu_k=(\mu_k',\mu_k'')$ және $z_k=(z_k',z_k'')$ шамаларын координаттық түрде жазамыз:

$$
\begin{pmatrix}\mu_k'(s,\tau,\xi_k,\eta_k)-z_k'(s)\\ \mu_k''(s,\tau,\xi_k,\eta_k)-z_k''(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[\xi_k-z_k'(\tau)]\cos\nu_k(s-\tau)-[\eta_k-z_k''(\tau)]\sin\nu_k(s-\tau)\\ [\xi_k-z_k'(\tau)]\sin\nu_k(s-\tau)+[\eta_k-z_k''(\tau)]\cos\nu_k(s-\tau)\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mu_k'(s,\tau,\xi_k,\eta_k)\\ \dfrac{\partial}{\partial\tau}\mu_k''(s,\tau,\xi_k,\eta_k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[\nu_k\eta_k-\varphi_k(\tau)]\cos\nu_k(s-\tau)+[\nu_k\xi_k+\psi_k(\tau)]\sin\nu_k(s-\tau)\\ [\nu_k\eta_k-\varphi_k(\tau)]\sin\nu_k(s-\tau)-[\nu_k\xi_k+\psi_k(\tau)]\cos\nu_k(s-\tau)\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\xi_k}\mu_k'(s,\tau,\xi_k,\eta_k)\\ \dfrac{\partial}{\partial\xi_k}\mu_k''(s,\tau,\xi_k,\eta_k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\nu_k(s-\tau)\\ \sin\nu_k(s-\tau)\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\eta_k}\mu_k'(s,\tau,\xi_k,\eta_k)\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta_k}\mu_k''(s,\tau,\xi_k,\eta_k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\nu_k(s-\tau)\\ \cos\nu_k(s-\tau)\end{pmatrix}.
$$

Әрі қарай $\dfrac{\partial x}{\partial\zeta}=\left[\dfrac{\partial x_j}{\partial\xi_k},\ \dfrac{\partial x_j}{\partial\eta_k}\right]_{\substack{j=\overline{1,n}\\ k=1,l}}=\left[\dfrac{\partial x}{\partial\xi_k},\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta_k}\right]_{k=\overline{1,l}}$ матрицасы бағандары $p_k=\dfrac{\partial x}{\partial\xi_k},q_k=\dfrac{\partial x}{\partial\eta_k},\ k=\overline{1,l}$ векторлары болатын матрица екендігін ескерсек,

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right| \leq \sum_{k=1}^{l}\left(\left|\frac{\partial x}{\partial \xi_k}\right| + \left|\frac{\partial x}{\partial \eta_k}\right|\right) = \sum_{k=1}^{l}\left(|p_k| + |q_k|\right)$$

бағалауын аламыз. Сол сияқты

$$\left|\frac{\partial x}{\partial t}\right| \leq \sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial x}{\partial t_j}\right| = \sum_{j=1}^{m}|r_j|$$

бағалауы орынды.

$\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_k} = \left[\frac{\partial \zeta_j}{\partial \xi_k}, \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_k}\right]_{j=\overline{1,l}}$ матрицасы $\zeta_j = (\xi_j, \eta_j)$, $j = \overline{1,l}$ болғандықтан k-шы жолы бірліктерден, ал қалған элементтері нөлдерден тұратын $(l \times 2)$-өлшемді матрица болсын. Бұдан $\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_k}\right| \leq \sqrt{2}$ орындалатынын аламыз.

Жоғарыдағы мәліметтер және (2.2.10) теңсіздігі бойынша келесі

$$\left|\frac{\partial \mu_k(s,\tau,\zeta_k)}{\partial \xi_k}\right| \leq \sqrt{2}, \quad \left|\frac{\partial \mu_k(s,\tau,\zeta_k)}{\partial \eta_k}\right| \leq \sqrt{2}, \quad \left|\frac{\partial \mu(s,\tau,\zeta)}{\partial \tau}\right| \leq \sqrt{2l}, k = \overline{1,l} \qquad (2.2.11)$$

бағалау орындалады.

Енді екі рет үзіліссіз дифференциалданатындығы туралы (2.2.2) шартын қолданып, келесі айырмалардың бағалауларын аламыз:

1) $\left|f_\theta(\tau,t,\zeta,x) - f_\theta(\tau,t,\zeta,y)\right| \leq c_1|x-y|$,

2) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial \zeta}\right| \leq c_2|x-y|$,

3) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial t_j} - \frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial t_j}\right| \leq c_3|x-y|$, $j = \overline{1,m}$,

4) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial x} - \frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial x}\right| \leq c_4|x-y|$,

5) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right| \leq \left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial x} - \frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial x}\right| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right| +$

$+\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial x}\right| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta}\right|$,

6) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right| \leq \left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial x} - \frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial x}\right| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial t}\right| +$

$$+\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial x}\right|\cdot\left|\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t}\right|,$$

7) $\left|f_\theta(\tau,t,\zeta,x)\right|\le\left|f_\theta(\tau,t,\zeta,0)\right|+\left|f_\theta(\tau,t,\zeta,x)-f_\theta(\tau,t,\zeta,0)\right|\le\chi_1+c_1|x|,$

8) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial\zeta}\right|\le\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,0)}{\partial\zeta}\right|+\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial\zeta}-\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,0)}{\partial\zeta}\right|\le\chi_2+c_2|x|,$

9) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial t_j}\right|\le\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,0)}{\partial t_j}\right|+\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial t_j}-\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,0)}{\partial t_j}\right|\le\chi_3+c_3|x|,\ j=\overline{1,m},$

10) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial x}\right|\le\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,0)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial x}-\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,0)}{\partial x}\right|\le\chi_4+c_4|x|,$

11) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\zeta}-\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\zeta}\right|\le c_4|x-y|\sum_{k=1}^{l}\left(|p_k|+|q_k|\right)+$

$+(\chi_4+c_4\gamma)\sum_{k=1}^{l}\left(|p_k-\tilde{p}_k|+|q_k-\tilde{q}_k|\right)$, мұндағы $\tilde{p}_k=\frac{\partial y}{\partial\xi_k}$, $\tilde{q}_k=\frac{\partial y}{\partial\eta_k}$, $k=\overline{1,l}$,

12) $\left|\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial f_\theta(\tau,t,\zeta,y)}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right|\le c_4|x-y|\sum_{j=1}^{m}|r_j|+(\chi_4+c_4\gamma)\sum_{j=1}^{m}|r_j-\tilde{r}_j|,$

мұндағы $\tilde{r}_j=\frac{\partial y}{\partial t_j}, j=\overline{1,m}$. Мұнда c_1,c_2,c_3,c_4 оң тұрақтылары f_θ, $\frac{\partial f_\theta}{\partial\zeta}$, $\frac{\partial f_\theta}{\partial t_j}$, $j=\overline{1,m}$, $\frac{\partial f_\theta}{\partial x}$ векторлық және матрицалық функциялардың Липшиц тұрақтылары, ал $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4$ оң тұрақтылары $|f_\theta|$, $\left|\frac{\partial f_\theta}{\partial\zeta}\right|$, $\left|\frac{\partial f_\theta}{\partial t_j}\right|$, $j=\overline{1,m}$, $\left|\frac{\partial f_\theta}{\partial x}\right|$ вектор-функцияларын $(\tau,t,\zeta,0)$ нүктесінде жоғарыдан шенейді.

Ядросы (2.2.3) арқылы анықталған $T_\circ$ интегралдық операторы

$$(T_\circ x)(\tau,t,\zeta)=\int_{\tau}^{\tau+\theta}K(\tau,s)x(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))ds \tag{2.2.12}$$

сызықты және $S_{\delta,\bar{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігін өзіне бейнелейді, $\kappa>0$ санымен шенелген

$$\|T_\circ x\|_\circ\le\kappa\|x\|_\circ \tag{2.2.13}$$

мұндағы $\kappa=\sup_{0\le\tau\le\theta}\int_{\tau}^{\tau+\theta}|K(\tau,s)|ds$.

$x\in S_{\delta,\bar{\gamma}}^{\theta,\omega}$ үшін 1)-12) және (2.2.3)-(2.2.8) теңсіздіктерін қолданып (2.2.9)-

(2.2.13) операторларын бағалайық:

$$
\begin{aligned}
&\left|(Tx)(\tau,t,\zeta)\right| \le \kappa\left(\chi_1 + c_1\|x\|_{\circ}\right),\\
&\left|(P_k'x)(\tau,t,\zeta)\right| \le \kappa\left[\chi_2 + c_2\|x\|_{\circ} + \left(\chi_4 + c_4\|x\|_{\circ}\right)\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k\|_{\circ} + \|q_k\|_{\circ}\right)\right]\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2},\\
&\left|(P_k''x)(\tau,t,\zeta)\right| \le \kappa\left[\chi_2 + c_2\|x\|_{\circ} + \left(\chi_4 + c_4\|x\|_{\circ}\right)\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k\|_{\circ} + \|q_k\|_{\circ}\right)\right]\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2},\\
&\left|(Q_jx)(\tau,t,\zeta)\right| \le \kappa\left[\chi_3 + c_3\|x\|_{\circ} + \left(\chi_4 + c_4\|x\|_{\circ}\right)\sum_{j=1}^{m}\|r_j\|_{\circ}\right]\cdot e^{2\left\|\frac{\partial a}{\partial t}\right\|_{\circ}\theta},\\
&\left|(Rx)(\tau,t,\zeta)\right| \le \kappa\left[\chi_2 + c_2\|x\|_{\circ} + \left(\chi_4 + c_4\|x\|_{\circ}\right)\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k\|_{\circ} + \|q_k\|_{\circ}\right)\right]\cdot\sqrt{2l}\\
&+\kappa\left[\chi_3 + c_3\|x\|_{\circ} + \left(\chi_4 + c_4\|x\|_{\circ}\right)\sum_{j=1}^{m}\|r_j\|_{\circ}\right]\cdot e^{2\left\|\frac{\partial a}{\partial t}\right\|_{\circ}\theta} + |A|\kappa\left(\chi_1 + c_1\|x\|_{\circ}\right) + \left(\chi_1 + c_1\|x\|_{\circ}\right),
\end{aligned}
$$

мұнда $|s| \le \theta,\ |\tau| \le \theta.$

$\max\ \{\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4\} = \chi,\ \max\ \{c_1,c_2,c_3,c_4\} = c$ деп алсақ, $\bar{\gamma}$ бойынша келесі бағалауларды аламыз:

$$
\begin{aligned}
&\|(Tx)\|_{\circ} \le \kappa\left(\chi + c\bar{\gamma}\right)\left(1+\bar{\gamma}\right);\\
&\|P_k'x\|_{\circ} \le 4l\,\kappa\left(\chi + c\bar{\gamma}\right)\left(1+\bar{\gamma}\right),\ k=\overline{1,l};\\
&\|P_k''x\|_{\circ} \le 4l\,\kappa\left(\chi + c\bar{\gamma}\right)\left(1+\bar{\gamma}\right),\ k=\overline{1,l};\\
&\|Q_j\,x\|_{\circ} \le m\varepsilon\,\kappa\left(\chi + c\bar{\gamma}\right)\left(1+\bar{\gamma}\right),\ j=\overline{1,m},\ \varepsilon = \exp\left[2\left\|\frac{\partial a}{\partial t}\right\|_{\circ}\theta\right];\\
&\|Rx\|_{\circ} \le \left[1 + \kappa|A| + m\varepsilon\,\kappa\left(1+\bar{\gamma}\right) + (2l)^{3/2}\kappa\left(1+\bar{\gamma}\right)\right]\left(\chi + c\bar{\gamma}\right) \le \left(1 + \kappa|A| + m\varepsilon\kappa +\right.\\
&\left.+(2l)^{3/2}\kappa\right)\left(\chi + c\bar{\gamma}\right)\left(1+\bar{\gamma}\right).
\end{aligned}
$$

Сонда жеткілікті аз χ және c үшін

$$
\begin{aligned}
&\|Tx\| = \|Tx\|_{\circ} + \sum_{k=1}^{l}\left(\|P_k'\,x\|_{\circ} + \|P_k''x\|_{\circ}\right) + \sum_{j=1}^{m}\|Q_j\,x\|_{\circ} + \|Rx\|_{\circ} \le \left(\kappa + 8l^2\kappa +\right.\\
&\left.+m^2\varepsilon\kappa + 1 + \kappa|A| + m\varepsilon\,\kappa + (2l)^{3/2}\kappa\right)\left(1+\bar{\gamma}\right)\left(\chi + c\bar{\gamma}\right) = c_*\left(\chi + c\bar{\gamma}\right) \le \bar{\gamma}
\end{aligned}
\tag{2.2.14}
$$

болады, мұндағы $c_* = \left(\kappa + 8l^2\kappa + m^2\varepsilon\,\kappa + 1 + \kappa|A| + m\varepsilon\,\kappa + (2l)^{3/2}\kappa\right)\left(1+\bar{\gamma}\right)$. Осыдан Tx операторы $S_{\delta,\bar{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігін өзіне бейнелейтіндігі шығады.

Ал (2.2.4)-(2.2.8) операторларының әртүрлі $x, y \in S_{\delta,\bar{\gamma}}^{\theta,\omega}$ нүктелеріндегі мәнедерінің айырмасын бағалау үшін келесі теңсіздіктерді қолдансақ,

$$\left|(Tx)(\tau,t,\zeta)-(Ty)(\tau,t,\zeta)\right|\le\kappa\, c_1\|x-y\|_{\circ},$$

$$\left|(P_k'x)(\tau,t,\zeta)-(P_k'y)(\tau,t,\zeta)\right|\le\kappa\Bigg[c_2\|x-y\|_{\circ}+c_4\|x-y\|_{\circ}\cdot\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k\|_{\circ}+\|q_k\|_{\circ}\right)+$$

$$+\left(\chi_4+c_4\|y\|_{\circ}\right)\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k-\widetilde{p}_k\|_{\circ}+\|q_k-\widetilde{q}_k\|_{\circ}\right)\Bigg]\sqrt{2}\cdot\sqrt{2},$$

$$\left|(P_k''x)(\tau,t,\zeta)-(P_k''y)(\tau,t,\zeta)\right|\le\kappa\Bigg[c_2\|x-y\|_{\circ}+c_4\|x-y\|_{\circ}\cdot\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k\|_{\circ}+\|q_k\|_{\circ}\right)+$$

$$+\left(\chi_4+c_4\|y\|_{\circ}\right)\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k-\widetilde{p}_k\|_{\circ}+\|q_k-\widetilde{q}_k\|_{\circ}\right)\Bigg]\sqrt{2}\cdot\sqrt{2},$$

$$\left|(Q_jx)(\tau,t,\zeta)-(Q_jy)(\tau,t,\zeta)\right|\le\kappa\Bigg[c_3\|x-y\|_{\circ}+c_4\|x-y\|_{\circ}\sum_{j=1}^{m}\|r_j\|_{\circ}+$$

$$+\left(\chi_4+c_4\|y\|_{\circ}\right)\sum_{j=1}^{m}\|r_j-\widetilde{r}_j\|_{\circ}\Bigg]\cdot e^{2\left\|\frac{\partial a}{\partial t}\right\|_{\circ}\theta},$$

$$\left|(Rx)(\tau,t,\zeta)-(Ry)(\tau,t,\zeta)\right|\le c_1\|x-y\|_{\circ}+\kappa|A|\cdot c_1\|x-y\|_{\circ}+\kappa\Big[c_2\|x-y\|_{\circ}+$$

$$+c_4\|x-y\|_{\circ}\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k\|_{\circ}+\|q_k\|_{\circ}\right)+\left(\chi_4+c_4\|y\|_{\circ}\right)\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k-\widetilde{p}_k\|_{\circ}+\|q_k-\widetilde{q}_k\|_{\circ}\right)\Bigg]\sqrt{2l}+$$

$$+\kappa\Bigg[c_3\|x-y\|_{\circ}+c_4\|x-y\|_{\circ}\sum_{j=1}^{m}\|r_j\|_{\circ}+\left(\chi_4+c_4\|y\|_{\circ}\right)\sum_{j=1}^{m}\|r_j-\widetilde{r}_j\|_{\circ}\Bigg]\|a\|_{\circ}e^{2\left\|\frac{\partial a}{\partial t}\right\|_{\circ}\theta}.$$

Норма бойынша бағаласақ,

$$\|Tx-Ty\|_{\circ}\le\kappa\, c\|x-y\|_{\circ};$$

$$\|P_k'x-P_k'y\|_{\circ}\le 2\kappa\Bigg[\left(c+c2l\overline{\gamma}\right)\|x-y\|_{\circ}+\left(\chi+c\overline{\gamma}\right)\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k-\widetilde{p}_k\|_{\circ}+\|q_k-\widetilde{q}_k\|_{\circ}\right)\Bigg],\ k=\overline{1,l};$$

$$\|P_k''x-P_k''y\|_{\circ}\le 2\kappa\Bigg[\left(c+c2l\overline{\gamma}\right)\|x-y\|_{\circ}+\left(\chi+c\overline{\gamma}\right)\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k-\widetilde{p}_k\|_{\circ}+\|q_k-\widetilde{q}_k\|_{\circ}\right)\Bigg],\ k=\overline{1,l};$$

$$\|Q_jx-Q_jy\|_{\circ}\le\kappa\,\varepsilon\Bigg[\left(c+c\,m\overline{\gamma}\right)\|x-y\|_{\circ}+\left(\chi+c\overline{\gamma}\right)\sum_{j=1}^{m}\|r_j-\widetilde{r}_j\|_{\circ}\Bigg],\ j=\overline{1,m};$$

$$\|Rx-Ry\|_{\circ}\le\left[c+\kappa\, c|A|+\kappa\, c\sqrt{2l}+\kappa\, c(2l)^{3/2}\,\overline{\gamma}\right]\|x-y\|_{\circ}+\kappa\sqrt{2l}\left(\chi+c\overline{\gamma}\right)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k-\widetilde{p}_k\|_{\circ}+\|q_k-\widetilde{q}_k\|_{\circ}\right)+\kappa\|a\|_{\circ}\varepsilon\left(c+c\,m\overline{\gamma}\right)\|x-y\|_{\circ}+\kappa\|a\|_{\circ}\varepsilon\left(\chi+c\overline{\gamma}\right)\sum_{j=1}^{m}\|r_j-\widetilde{r}_j\|_{\circ}$$

теңсіздіктерін аламыз. Әрі қарай бұл теңсіздіктерді қосындыласақ,

$$\|Tx-Ty\|_{\circ}+\sum_{k=1}^{l}\|P_k'\,x-P_k'\,y\|_{\circ}+\sum_{k=1}^{l}\|P_k''\,x-P_k''\,y\|_{\circ}+\sum_{j=1}^{m}\|Q_j\,x-Q_j\,y\|_{\circ}+\|Rx-Ry\|_{\circ}\le$$

$$\le c\Big\lfloor\kappa+8l\kappa\left(1+2l\overline{\gamma}\right)+\kappa\,\varepsilon\left(1+m\overline{\gamma}\right)+\left(1+\kappa|A|+\kappa\sqrt{2l}+\kappa(2l)^{3/2}\,\overline{\gamma}\right)+$$

$$+\kappa\|a\|_\circ\,\varepsilon\left(1+m\bar{\gamma}\right)\Big]\|x-y\|_\circ+\left(\chi+c\bar{\gamma}\right)\Big[8l\kappa+\sqrt{2l}\,\kappa\Big]\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k-\widetilde{p}_k\|_\circ+\|q_k-\widetilde{q}_k\|_\circ\right)+$$

$$+\left(\chi+c\bar{\gamma}\right)\Big[\kappa\,\varepsilon\,m+\kappa\,m\varepsilon\|a\|_\circ\Big]\sum_{j=1}^{m}\|r_j-\widetilde{r}_j\|_\circ$$

аламыз, мұндағы $p_k=\dfrac{\partial x}{\partial \xi_k},\widetilde{p}_k=\dfrac{\partial y}{\partial \xi_k},\ q_k=\dfrac{\partial x}{\partial \eta_k},\ \widetilde{q}_k=\dfrac{\partial y}{\partial \eta_k},\ r_j=\dfrac{\partial x}{\partial t_j},\widetilde{r}_j=\dfrac{\partial y}{\partial t_j}$.

Бұдан жеткілікті аз χ және c мәндерінде

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\|&=\|Tx-Ty\|_\circ+\sum_{k=1}^{l}\|P'_k x-P'_k y\|_\circ+\sum_{k=1}^{l}\|P''_k x-P''_k y\|_\circ+\\&+\sum_{j=1}^{m}\|Q_j x-Q_j y\|_\circ+\|Rx-Ry\|_\circ\le\left(\chi+c\bar{\gamma}\right)c_0\Big[\|x-y\|_\circ+\\&+\sum_{k=1}^{l}\left(\|p_k-\widetilde{p}_k\|_\circ+\|q_k-\widetilde{q}_k\|_\circ\right)+\sum_{j=1}^{m}\|r_j-\widetilde{r}_j\|_\circ\Big]\le\left(\chi+c\bar{\gamma}\right)c_0\|x-y\|.\end{aligned}\tag{2.2.15}$$

мұндағы $c_0=\max\Big\{\Big[\kappa+8l\kappa\left(1+2l\bar{\gamma}\right)+\kappa\,\varepsilon\left(1+m\bar{\gamma}\right)+\left(1+\kappa|A|+\kappa\sqrt{2l}+\kappa(2l)^{3/2}\bar{\gamma}\right)+$ $+\kappa\|a\|_\circ\,\varepsilon\left(1+m\bar{\gamma}\right)\Big];\ \Big[8l\kappa+\sqrt{2l}\,\kappa\Big];\Big[\kappa\,\varepsilon\,m+\kappa\,m\varepsilon\|a\|_\circ\Big]\Big\}$.

$$c_*\left(\chi+c\bar{\gamma}\right)\le\bar{\gamma},\ c_0\left(\chi+c\bar{\gamma}\right)<1\tag{2.2.16}$$

шарты орындалғанда (2.2.14) және (2.2.15) бағалаулары негізінде (2.2.4) операторының $S_{\delta,\bar{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігін өзіне бейнелейтінін және қысушы оператор болатынын көреміз. 2.1 бөлімшеде келтірілген мәліметтер бойынша $S_{\delta,\bar{\gamma}}^{\theta,\omega}$ кеңістігі толық болады. Олай болса, $\left(Tx^*\right)\!\left(\tau,t,\zeta\right)=x^*\left(\tau,t,\zeta\right)$ операторының жалғыз ғана $x^*\left(\tau,t,\zeta\right)\in S_{\delta,\bar{\gamma}}^{\theta,\omega}$ қозғалмайтын нүктесі бар және ол

$$x^*\left(\tau,t,\zeta\right)=\int_{\tau}^{\tau+\theta}K\left(\tau,s\right)f_\theta\left(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta),x^*\left(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)\right)\right)ds\tag{2.2.17}$$

теңдеуінің шешімі болады. 3^0 қасиет бойынша ол (2.2.1) жүйесінің $\left(\tau,t\right)$ бойынша $\left(\theta,\omega\right)$-периодты жалғыз шешімі болады.

Сонымен келесі теорема дәлелденді.

2.2.1-теорема. *1) D_4 операторы (1.5.6)-(1.5.8) шарттарына, 2) A матрицасы (1.5.70) теңсіздігіне, 3) f вектор-функциясы (2.2.2) қасиетіне бағынса және 4) T интегралдық операторы (2.2.16) шарттарды қанағаттадырса, онда (2.2.1) квазисызықты жүйесінің жалғыз ғана $\left(\tau,t\right)$ бойынша $\left(\theta,\omega\right)$-периодты шешімі болады.*

2.3 D_5 дифференциалдау операторлы, экспоненциал-гиперболалық өзгермелі параметрлі квазисызықты жүйелердің көппериодты шешімдері

Тербелмелі процесті сипаттайтын

$$D_5 x = Ax + \varepsilon^0 f(\tau, t) + \varepsilon\varphi(x) \tag{2.3.1}$$

теңдеулер жүйесін қарастыралық, мұндағы $x = (x_1, ..., x_n)$ – ізделінді вектор-функция, $\varphi = \varphi(x)$ сызықты емес вектор-функция және ол тұрақты коэффициентті, x белгісізіне қатысты l дәрежелі форма

$$\varphi(\eta\, x) = \eta^l \varphi(x), \tag{2.3.2}$$

η – скаляр шама, $l > 1$ – бүтін сан; $\varepsilon > 0$ – (2.3.1) жүйесіндегі еріксіз және сызықты емес қозғалыстарды байланыстыратын параметр.

Бұл бөлімшедегі зерттеу сызықтық жағдай қарастырылған 1.6 бөлімшесінің жалғасы. Сондықтан мұндағы барлық белгілеулер мен олардың мағыналары сол күйінде сақталады.

Алдағы уақытта зерттеу барысында (1.6.8), (1.6.9), (1.6.35), (2.3.2) шарттары орындалсын деп ұйғарамыз.

Негізгі мақсатымыз (2.3.1) жүйесінің $Ab^{\theta,\omega}_{\rho*,\Delta} = Ab^{\theta,\omega}_{\Delta}\left(\Pi_{\rho_*} \times \Pi^m_{\rho_*}\right), 0 < \rho_* \le \rho$ кеңістігінде жататын x^* жалғыз шешімінің табылатындығын анықтау. Сондықтан $x(\tau, t) \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ үшін анықталған

$$\begin{gathered} x(\tau,t) = x^0(\tau,t) + \varepsilon \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds + \\ + \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds \end{gathered} \tag{2.3.3}$$

операторлық теңдеуін қарастырамыз, мұндағы $x^0(\tau,t)$ – (1.6.35) шартымен берілген (1.6.34) сызықты жүйесінің (1.6.36) арқылы анықталған шешімі; $\varphi(x)$ – (2.3.2) шартын қанағаттандыратын вектор-форма; қалған белгілеулер мағынасы бұрынғыша қалады.

Егер негізгі есеп $Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ кеңістігінде шешілетін болса, онда

$$D_5 x^*(\tau,t) = Ax^*(\tau,t) + \varepsilon^0 f(\tau,t) + \varepsilon\varphi\,(x^*(\tau,t)) \tag{2.3.4}$$

теңдігінің жалғыз болатындығы шығады.

Мәжбүрлейтін күш ретінде $\varepsilon^0 f(\tau,t) + \varepsilon\varphi(x^*(\tau,t))$ қосындысын алсақ, онда 1.6.1-теоремасы негізінде $Ab^{\theta,\omega}_{\rho_2,\Delta} \supset Ab^{\theta,\omega}_{\rho_1,\Delta}$ кеңістігінде

$$\begin{aligned} x^*(\tau,t) = & \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s)\left[\varepsilon^0 f\big(s,h(s,\tau,t)\big) + \varepsilon\varphi\big(x^*(s,h(s,\tau,t))\big)\right]ds + \\ & + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s)\left[\varepsilon^0 f\big(s,h(s,\tau,t)\big) + \varepsilon\varphi\big(x^*(s,h(s,\tau,t))\big)\right]ds \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

теңдігін аламыз. (1.6.36) шешімін ескерсек (2.3.5) қатысынан

$$\begin{aligned} x^*(\tau,t) = x^0(\tau,t) + \varepsilon & \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s)\varphi\big(x^*(s,h(s,\tau,t))\big)ds + \\ & + \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s)\varphi\big(x^*(s,h(s,\tau,t))\big)ds \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

орындалады. (2.3.6) өрнегінен негізгі есептің $Ab^{\theta,\omega}_{\rho_2,\Delta}$ кеңістігіндегі шешімі (2.3.3) есебінің де шешімі болатындығын көреміз. Керісінше, егер (2.3.6) теңдігі орындалса, онда оған мүшелеп (1.6.1) түріндегі D_5 операторын қолдансақ $Ab^{\theta,\omega}_{\rho_2,\Delta}$ кеңістігінде де, сол сияқты $Ab^{\theta,\omega}_{\rho_1,\Delta}$ кеңістігінде де (2.3.4) теңдігі шығатынын көреміз.

Сонымен келесі лемма дәлелденді.

2.3.1-лемма. *(1.6.8), (1.6.9), (1.6.35) және (2.3.2) шарттары орындалғанда $x^* \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ жалғыз шешімінің бар болуы туралы негізгі есептің шешілімділігі (2.3.3) операторлық теңдеуінің осы $Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ кеңістігінде бірмәнді шешілімділіне эквивалентті болады.*

Енді келесі операторлық теңдеуді қарастыралық:

$$\begin{aligned} x(\tau,t) = \varepsilon^0 & \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s) f\big(s,h(s,\tau,t)\big)ds + \varepsilon^0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s) f\big(s,h(s,\tau,t)\big)ds + \\ + \varepsilon & \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds + \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds, \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

мұндағы $x(\tau,t) \in Ab^{\theta,\omega}_{\Delta}\big(\Pi_\rho \times \Pi^m_\rho\big)$.

$$\begin{aligned} Q_0 x(\tau,t) &= \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s) x(s,h(s,\tau,t))\,ds + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s) x(s,h(s,\tau,t))\,ds, \\ Qx(\tau,t) &= \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s)\varphi\big(x(s,h(s,\tau,t))\big)ds \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

деп белгілесек, онда (2.3.7) операторлық теңдеуін

$$x(\tau,t) = \varepsilon^0 Q_0 f(\tau,t) + \varepsilon\, Qx(\tau,t) \tag{2.3.9}$$

түрінде жазамыз.

Зерттеліп отырған тербелісте кіші бөлгіштер әсерін басу мақсатында ε^0, ε параметрлері

$$\varepsilon^0 = \mu^0 e^{-S_0}, \;\; \varepsilon = \mu\, e^{-lS} \tag{2.3.10}$$

қатыстары арқылы өзгереді деп ұйғаралық, мұндағы $\mu > 0$ – кіші параметр, l – $\varphi(x)$ формасының дәрежесі, $S_0 = S_{[1,\xi_0]}$ – келесі шарттарды

$$e^{-S_0} < \left(\frac{\rho_0}{4+\rho_0} \right)^{\alpha}, \tag{2.3.11}$$

$$\delta_0 = e^{-\frac{1}{\alpha}S_0}, \;\; \xi_0 = \delta_0^{-\alpha} = e^{S_0}, \eta_0 = e^{-S_0}, \rho_0 = \rho - 2\delta_0 \tag{2.3.12}$$

қанағаттандыратын 1.6 бөлімшесінде анықталған гиперболалық сектордың бекітілген ауданы, α – (1.6.48) кіші бөлгіштердің әсер етуі көрсеткіші, δ_0 – ені ρ болатын Π_ρ жолағының алғашқы тарылымы, $0 < \delta_0 < \rho < 1$.

(2.3.10) шарты орындалғанда $x^{(0)} = \varepsilon^0 Q_0 f = \varepsilon^0 x^0$ шамасы (1.6.36), (1.6.59) негізінде

$$\left| x^{(0)} \right|_{\rho_0} \le \Delta_0 \tag{2.3.13}$$

бағалауын қанағаттандырады, мұндағы $\Delta_0 = \mu^0 a |f|_\rho$. Олай болса, $x^{(0)} \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho_0,\Delta_0}$.

$\Delta - \Delta_0 = r$ болсын, мұндағы r – оң тұрақты.

$x = (x_1,...,x_n)$ және $\varphi(x) = (\varphi_1(x),...,\varphi_n(x))$ үшін сәйкесінше $|x| = \max\limits_j |x_j|$, $|\varphi(x)| = \max\limits_j |\varphi_j(x)|$ белгілеулерін енгізсек, $|x| \le \Delta$, $|y| \le \Delta$ болғанда

$$\begin{gathered} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right| \le b|x|^{\,l-1} \le b\Delta^{l-1} = q, \\ |\varphi(x)| \le b|x|^{\,l} \le q|x| \le q\Delta, \\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x-y| \end{gathered} \tag{2.3.14}$$

бағалауларын аламыз, мұндағы b – қайсыбір оң тұрақты, $q = b\Delta^{l-1} > 0$ – $\varphi(x)$ функциясының Липшиц тұрақтысы.

Көппериодты аналитикалық $x = x(\tau, t)$ функциясының Фурье қатарына жіктелуі

$$x(\tau, t) = \sum_{(k_0, k)} x_{k_0 k} e^{2\pi i \left(k_0 \nu_0 \tau + \langle k, \nu t\rangle\right)}$$

$x_{k_0 k}$ коэффициенттерімен және жиіліктердің $d_{k_0 k} = 2\pi i \left(k_0 \nu_0 + \langle k, \nu\rangle\right)$ көрсеткіштермен сипатталады.

x функциясына, еріксіз тербелістердің $(\nu_0, \nu) = (\nu_0, \nu_1, ..., \nu_m)$ жиіліктеріне Q интегралдық операторын қолданған кезде меншікті тербелістің ν^0 жиілігі қосылады және жиіліктер көрсеткіштері

$$\tilde{d}_{k_0 k} = 2\pi i \left(\nu^0 + k_0 \nu_0 + \langle k, \nu\rangle\right)$$

түрінде болады, ал Qx функциясының Фурье қатарының $\tilde{x}_{k_0 k}$ коэффициенттері кейбір шенелген $\left|a_{k_0 k}\right| \le a$ тұрақтыларымен $\tilde{x}_{k_0 k} = a_{k_0 k} x_{k_0 k} \tilde{d}_{k_0 k}^{-1}$ арқылы анықталады. Жиіліктер диофантты болғанда Фурье қатарының абсолютті жинақтылығы мен Qx функциясының бағалауы коэффициенттердің

$$\left|\tilde{x}_{k_0 k}\right| \le a \frac{\left|x_{k_0 k}\right|}{\left|\tilde{d}_{k_0 k}\right|},\ (k_0, k) \in Z \times Z^m$$

бағалауымен анықталады.

Осындай бағалауды сәйкесінше коэффициенттері $x'_{k_0' k'}$, $x''_{k_0'' k''}$, көрсеткіштері $d_{k_0' k'}$, $d_{k_0'' k''}$ болатын x' және x'' функцияларының $x = c_1 x' + c_2 x''$ сызықтық комбинациясы үшін де аламыз:

$$\left|\tilde{x}_{k_0' k', k_0'' k''}\right| \le \left|c_1\right| \frac{\left|x'_{k_0' k'}\right|}{\left|d_{k_0' k'}\right|} + \left|c_2\right| \frac{\left|x''_{k_0'' k''}\right|}{\left|d_{k_0'' k''}\right|}\ ,$$

мұндағы $(k_0', k'), (k_0'', k'') \in Z \times Z^m$. Ал олардың $x = x' x''$ көбейтіндісінің бағалауын коэффициенттері $\tilde{x}_{k_0' k', k_0'' k''}$ болатын Qx қатарына

$$x_{k_0' k', k_0'' k''} = a_{k_0' k', k_0'' k''} \frac{x'_{k_0' k'} \cdot x''_{k_0'' k''}}{\nu^0 + d_{k_0' k'} + d_{k_0'' k''}}$$

арифметикалық және геометриялық орталар арасындағы байланысты қолдану арқылы

$$\left|x_{k_0'k',k_0''k''}\right| \leq a\,\frac{\left|x'_{k_0'k'}\right|}{\left|\widetilde{d}_{2k_0'\,2k'}\right|^{1/2}} \cdot \frac{\left|x''_{k_0''k''}\right|}{\left|\widetilde{d}_{2k_0''\,2k''}\right|^{1/2}};\ (k_0',k'),(k_0'',k'') \in Z \times Z^m$$

түрінде анықтаймыз. Сонда $x, x', x'' \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ үшін жасалған бағалаулар мен (1.6.48), (1.6.51) арқылы (2.3.8) қатысындағы $Q_0x(\tau,t)$ функциясы үшін δ кіші параметрінен тәуелсіз a, a' оң тұрақтылы

$$\begin{aligned}
&\left|Q_0x\right|_{\rho-2\delta} \leq a\,\delta^{-\alpha}\left|x\right|_\rho,\\
&\left|Q_0\left(c_1x' + c_2x''\right)\right|_{\rho-2\delta} \leq a\,\delta^{-\alpha}\left|c_1\right|\left|x'\right|_\rho + a\,\delta^{-\alpha}\left|c_2\right|\left|x''\right|_\rho, \qquad (2.3.15)\\
&\left|Q_0\left(x'x''\right)\right|_{\rho-2\delta} \leq a'\,\delta^{-\alpha}\left|x'\right|_\rho \cdot \delta^{-\alpha}\left|x''\right|_\rho
\end{aligned}$$

бағалауларын аламыз, мұндағы $\delta \in \left(0, \dfrac{\rho}{2}\right)$, $0 < \rho < 1$, α – тұрақты және $\alpha \geq 1 + m$.

Сонымен қатар $\varphi(x)$ функциясы $x \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ шамасына қатысты l дәрежелі форма болғандықтан жиіліктердің диофанттығын және (2.3.8) қатыстарын қолданып $Qx = Q_0\varphi(x)$ үшін δ кіші параметрінен тәуелсіз a оңтұрақтылы келесі бағалауын аламыз:

$$\left|Qx\right|_{\rho-2\delta} = \left|Q_0\varphi(x)\right|_{\rho-2\delta} \leq ab\delta^{-l\alpha}\left|x\right|_\rho^l. \qquad (2.3.16)$$

$\varphi(x)$ формасының $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$ Якоби матрицасы $l-1$ дәрежелі форма болғандықтан (2.3.16) бағалауының салдары ретінде $x \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$ үшін

$$\left|Q'x\right|_{\rho-2\delta} = \left|Q_0\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|_{\rho-2\delta} \leq ab\delta^{-(l-1)\alpha}\left|x\right|_\rho^{l-1}$$

теңсіздігі орындалатындығын аламыз, мұндағы $Q'x = Q_0\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$.

(2.3.2) және (2.3.10) шарттары негізінде (2.3.9) операторлық теңдеуі

$$x = x^{(0)} + \mu\,Q(\eta\,x) \qquad (2.3.17)$$

түрінде жазылады, оның сызықты емес бөлігі x белгісізі мен $d=\nu^0+k_0\nu_0+\langle k,\nu\rangle$ кіші бөлгіштерінің $\xi=e^S$ әсерін басу параметрінің

$$\eta=e^{-S} \qquad (2.3.18)$$

көбейтіндісінен тұрады және (2.3.13) бағалауын қанағаттандырады, мұндағы $(k_0,k)\in Z\times Z^m$, $x\in Ab^{\theta,\omega}_{\rho,\Delta}$, $x^{(0)}\in Ab^{\theta,\omega}_{\rho_0,\Delta_0}$.

$x^{(0)}$ шамасын нөлдік жуықтау ретінде алып, (2.3.17) теңдеуін біртіндеп жуықтау әдісі арқылы шешеміз. Сондықтан оны келесі түрде жазалық:

$$x^{(j)}=x^{(0)}+\mu Q\left(\eta\, x^{(j-1)}\right),\ j=1,2,..., \qquad (2.3.19)$$

мұндағы η параметрі кіші бөлгіштердің әсерін басушы және оның мәндері (2.3.18) өзгеру заңдылығына сәйкес таңдап алынады.

$x^{(1)}=x^{(1)}(\tau,t)$ бірінші жуықтауы $Ab^{\theta,\omega}_{\rho_1,\Delta}\supset Ab^{\theta,\omega}_{\rho_0,\Delta}$ кеңістігінде жататындай етіп анықталады, мұндағы $\rho_1=\rho_0-2\delta_0$, $\delta_0>0$, ξ_0 мен η_0 мәндері (2.3.12) қатысынан табылады, S_0 (2.3.11) шартын қанағаттандырады, ал η шамасы (2.3.18) шартына сәйкес таңдап алынады.

Бұл жуықтауды бағалау үшін оны (2.3.19) арқылы

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\mu Q\left(\eta_0 x^{(0)}\right) \qquad (2.3.20)$$

түрінде жазалық. Сонда (2.3.14), (2.3.16) негізінде

$$\left|x^{(1)}-x^{(0)}\right|_{\rho_1}=\mu\left|Q\left(\eta_0 x^{(0)}\right)\right|_{\rho_0-2\delta_0}\le \mu\, a\,\delta^{-l\alpha}\left|\eta_0 x^{(0)}\right|^{\,l}_{\rho_0}\le$$
$$\le \mu\, a\, b e^{lS_0}e^{-lS_0}\left|x^{(0)}\right|^{l}_{\rho_0}\le \mu\, a\, b\Delta^{l-1}\left|x^{(0)}\right|_{\rho_0}\le \mu q a\Delta$$

бағалауын аламыз, мұндағы $q=a\,\Delta^{l-1}$. Әрі қарай,

$$\mu\, q\, a\Delta<r \qquad (2.3.21)$$

шарты орындалсын деп ұйғаралық. Сонда (2.3.21) шарты негізінде

$$\left|x^{(1)}-x^{(0)}\right|_{\rho_1}<r$$

теңсіздігін, ал одан

$$\left|x^{(1)}\right|_{\rho_1}<\Delta_0+r=\Delta \qquad (2.3.22)$$

теңсіздігін аламыз. Сонымен (2.3.12) және (2.3.22) негізінде (2.3.21) шарты орындалғанда (2.3.20) жуықтауы $Ab^{\theta,\omega}_{\rho_1,\Delta}$ кеңістігіне жататынын көреміз.

Енді $x^{(2)}$ екінші жуықтауын қарастыралық, ол $\rho_2 = \rho_1 - 2\delta_1$ және

$$\delta_1 = \delta_0^2 = e^{-\frac{2}{\alpha}S_0}, \ \xi_1 = \delta_1^{-\alpha} = e^{2S_0}, \eta_1 = e^{-2S_0} \tag{2.3.23}$$

шарттары орындалғанда (2.3.19) арқылы

$$x^{(2)} = x^{(0)} + \mu Q\left(\eta_1 x^{(1)}\right) \tag{2.3.24}$$

теңдігімен анықталады, себебі, екінші жуықтауда $S_1 = S_{[1,\xi_1]}$ мәнін $\xi_1 = \xi_0^2$ және (1.6.57) негізінде

$$S_1 = S_{[1,\xi_0^2]} = S_{[1,\xi_0]} + S_{[\xi_0,\xi_0^2]} = 2S_0$$

орындалатындай етіп таңдап алынады.

(2.3.21) және (2.3.23) орындалғанда (2.3.14) және (2.3.16) теңсіздіктері арқылы

$$\begin{aligned}\left|x^{(2)} - x^{(0)}\right|_{\rho_2} = \mu\left|Q\left(\eta_1 x^{(1)}\right)\right|_{\rho_2} \le \mu\, a\, b \xi_1^l \eta_1^l \left|x^{(1)}\right|_{\rho_1}^l \le \\ \le \mu\, a\, b \Delta^{l-1}\left|x^{(1)}\right|_{\rho_1} \le \mu q a \Delta < r\end{aligned}$$

бағалауын аламыз. Бұдан

$$\left|x^{(2)}\right|_{\rho_2} < \Delta_0 + r = \Delta \tag{2.3.25}$$

теңсіздігі шығады. Олай болса, $x^{(2)} \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho_2,\Delta} \supset Ab^{\theta,\omega}_{\rho_1,\Delta}$ орындалатынын көреміз.

Әрі қарай математикалық индукция әдісін пайдаланып, осы процесті жалғастырсақ, $\rho_j = \rho_{j-1} - 2\delta_{j-1}$ және

$$\delta_{j-1} = \delta_0^j = e^{-\frac{j}{\alpha}S_0}, \ \xi_{j-1} = e^{jS_0}, \eta_{j-1} = e^{-jS_0} \tag{2.3.26}$$

шарттары орындалғанда (2.3.19) арқылы $x^{(j)}$ j-ші жуықтауын

$$x^{(j)} = x^{(0)} + \mu Q\left(\eta_{j-1} x^{(j-1)}\right) \tag{2.3.27}$$

түрінде жазамыз, мұндағы $x^{(j-1)} \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho_{j-1},\Delta}$, j-ші жауықтауда $S_{j-1} = S_{[1,\xi_{j-1}]}$ мәні $\xi_{j-1} = \xi_0 \cdot \xi_{j-2}$, $j = 2,3...$ теңдігі және (1.6.57) негізінде

$$S_{j-1} = S_{[1,\xi_0^j]} = S_{[1,\xi_0]} + S_{[\xi_0,\xi_0^2]} + ... + S_{[\xi_0^{j-1},\xi_0^j]} = jS_0$$

орындалатындай етіп таңдалған. Сонда (2.3.26) қатысын ескере отырып, (2.3.14), (2.3.16) теңсіздіктерінен және μ параметрінің (2.3.21) шартын қанағаттандыратындығынан

$$\left|x^{(j)} - x^{(0)}\right|_{\rho_j} = \mu \left|Q\left(\eta_{j-1} x^{(j-1)}\right)\right|_{\rho_j} \le \mu\, ab\, \xi^{l}_{j-1}\, \eta^{l}_{j-1} \left|x^{(j-1)}\right|^{l}_{\rho_{j-1}} \le$$
$$\le \mu\, a\, b \Delta^{l-1} \left|x^{(j-1)}\right|_{\rho_{j-1}} \le \mu q a \Delta < r$$

бағалауы шығады. Бұдан

$$\left|x^{(j)}\right|_{\rho_j} < \Delta_0 + r = \Delta \tag{2.3.28}$$

және $x^{(j)} \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho_j,\Delta} \supset Ab^{\theta,\omega}_{\rho_{j-1},\Delta}$ орындалатындығын көреміз. Сонымен $j \to +\infty$ ұмтылғанда (2.3.26), (2.3.27) және (2.3.28) бағалаулары өзгеріссіз қалатыны дәлелденді.

(2.3.11) және (2.3.26) шарттары негізінде $\rho_j = \rho_{j-1} - 2\delta_{j-1}$, $j = 1,2,...$ орындалады. Сонда келесі қатыстар орынды:

$\rho_1 = \rho_0 - 2\delta_0$,

$\rho_2 = \rho_1 - 2\delta_1 = \rho_0 - 2(\delta_0 + \delta_1)$,

………………………………………,

$$\rho_j = \rho_0 - 2\left(\delta_0 + \delta_1 + ... + \delta_{j-1}\right) = \rho_0 - 2\left(e^{-\frac{1}{\alpha}S_0} + e^{-\frac{2}{\alpha}S_0} + ... + e^{-\frac{j}{\alpha}S_0}\right) =$$

$$= \rho_0 - 2 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}S_0} - e^{-\frac{j+1}{\alpha}S_0}}{1 - e^{-\frac{1}{\alpha}S_0}} > \rho_0 - 2 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}S_0}}{1 - e^{-\frac{1}{\alpha}S_0}} > \rho_0 - 2 \cdot \frac{\frac{\rho_0}{4+\rho_0}}{1 - \frac{\rho_0}{4+\rho_0}} = \rho_0 - 2 \cdot \frac{\rho_0}{4} = \frac{1}{2}\rho_0 = \rho_*.$$

Бұдан $Ab^{\theta,\omega}_{\rho_j,\Delta}$ функциялар класына қатысты

$$Ab^{\theta,\omega}_{\rho_0,\Delta} \subset Ab^{\theta,\omega}_{\rho_1,\Delta} \subset ... \subset Ab^{\theta,\omega}_{\rho_j,\Delta} \subset ... \subset Ab^{\theta,\omega}_{\rho_*,\Delta}$$

іштестірілген тізбек шығады. Демек, барлық $\eta_{j-1}x^{(j)}$, $j=1,2,...$ жуықтаулары $Ab^{\theta,\omega}_{\rho*,\Delta}$ класында жатады, яғни

$$\eta_{j-1}x^{(j)} \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho*,\Delta}, \; j=1,2,... . \qquad (2.3.29)$$

Енді (2.3.29) жуықтаулар тізбегі бірқалыпты жинақты болатынын көрсетелік.

(2.3.29) жуықтауының аналитикалық болатындығын ескеріп (2.3.20), (2.3.24) және (2.3.27) жуықтауларын Фурье коэффициенттері арқылы жазалық

$$x^{(j)}\left[x_k^{(j)}\right] = x^{(0)}\left[x_k^{(0)}\right] + \mu\, Q\left(x^{(j-1)}\left[\eta\, x_k^{(j-1)}\right]\right), \; j=1,2,...,$$

мұнда $x^{(j)}\left[x_k^{(j)}\right]$ арқылы Фурье қатарының x_{k_0k} коэффициенттері және $2\pi i\left(k_0\nu_0\tau + \langle k,\nu t\rangle\right)$ көрсеткіштері белгіленген.

Әрі қарай (2.3.14) және (2.3.16) теңсіздіктері пайдаланып $Ab^{\theta,\omega}_{\rho_{j+1},\Delta}$ кеңістігінде жуықтаулардың $x^{(j+1)}\left[x_k^{(j+1)}\right] - x^{(j)}\left[x_k^{(j)}\right]$ айырмасын бағаласақ, келесі теңсіздіктер тізбесін аламыз:

$$\left|x^{(j+1)}\left[x_k^{(j+1)}\right] - x^{(j)}\left[x_k^{(j)}\right]\right\|_{\rho_{j+1}-2\delta_{j+1}} \le \mu\left[Q\left(x^{(j)}\left[\eta\, x_k^{(j)}\right]\right) - Q\left(x^{(j-1)}\left[\eta\, x_k^{(j-1)}\right]\right)\right]\Big|_{\rho_{j+1}-2\delta_{j+1}} \le$$
$$\le \mu\, q\left|Q_0\left(x^{(j)}\left[\eta\, x_k^{(j)}\right] - x^{(j-1)}\left[\eta\, x_k^{(j-1)}\right]\right)\right|_{\rho_{j+1}-2\delta_{j+1}} \le \mu\, qa\delta^{-\alpha}\left|x^{(j)}\left[\eta\, x_k^{(j)}\right] - x^{(j-1)}\left[\eta\, x_k^{(j-1)}\right]\right\|_{\rho_{j+1}} =$$
$$= \mu\, qa\xi\,\eta\left|\, x^{(j)}\left[x_k^{(j)}\right] - x^{(j-1)}\left[x_k^{(j-1)}\right]\right\|_{\rho_{j+1}} = \mu\, qa\left|\, x^{(j)}\left[x_k^{(j)}\right] - x^{(j-1)}\left[x_k^{(j-1)}\right]\right\|_{\rho_{j+1}}, \; j=1,2,...$$

немесе

$$\left|x^{(j+1)}\left[x_k^{(j+1)}\right] - x^{(j)}\left[x_k^{(j)}\right]\right\|_{\rho_{j+1}-2\delta_{j+1}} \le \mu\, qa\left|\, x^{(j)}\left[x_k^{(j)}\right] - x^{(j-1)}\left[x_k^{(j-1)}\right]\right\|_{\rho_{j+1}}, \; j=1,2,..., \qquad (2.3.30)$$

мұндағы $a = a(Q_0)\; - \;\delta_{j+1}\;(j=1,2,...)$ оң параметрінен тәуелсіз тұрақты.

(2.3.30) бағалауынан (2.3.29) тізбегінің одан (2.3.22), (2.3.25) және (2.3.28) тізбектерінің

$$\mu\, qa < 1 \qquad (2.3.31)$$

шарты орындалғанда бірқалыпты жинақты болатындығы шығады. Олай болса,

$$\lim_{j\to+\infty} x^{(j)}(\tau,t) = x^*(\tau,t) \subset Ab^{\theta,\omega}_{\rho*,\Delta} \qquad (2.3.32)$$

теңдігін аламыз. Демек, (2.3.32) шектік функциясы (2.3.7) теңдеуінің шешімі болады. Сондықтан, 2.3.1-лемма бойынша ол (2.3.1) теңдеуін де қанағаттандырады.

(2.3.32) шешімінің жалғыз болатындығын оңай көрсетуге болады.

Шынында да, әртүрлі екі $x_1(\tau,t), x_2(\tau,t) \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho_*,\Delta}$ шешімдері бар деп ұйғарсақ, $x_1(\tau,t), x_2(\tau,t) \in Ab^{\theta,\omega}_{\rho_*-2\delta,\Delta}$ болатындығын аламыз, мұндағы $\delta > 0$ және $\rho_* - 2\delta > 0$. Сонда (2.3.30) теңсіздігіне сәйкес

$$\left|x_1 - x_2\right|_{\rho_*-2\delta} \leq \mu\, qa \left|x_1 - x_2\right|$$

бағалауын аламыз, әрі бұдан (2.3.31) шартына орай $x_1 \equiv x_2$ орындалатындығын көреміз. Алынған қайшылық (2.3.32) шешімінің жалғыз екендігін білдіреді.

Сонымен келесі теорема дәлелденді.

2.3.1-теорема. *Егер (1.6.8), (1.6.9), (1.6.35), (2.3.2) шарттары орындалып, ал* $\varepsilon > 0$ *параметрі (2.3.10) заңдылығына сәйкес, (2.3.31) қасиетімен анықталған* $\mu > 0$ *коэффициентімен өзгерсе, онда (2.3.1) жүйесінің жалғыз ғана нақты аналитикалық* (θ,ω)*-периодты шешімі бар және оны біртіндеп жуықтау әдісімен анықтауға болады.*

Осы және 1.6 бөлімшелерде жүргізілген зерттеулерге сәйкес Б қосымшасында дербес жағдайға 3-мысал келтірілген.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық зерттеу нәтижелері бойынша қысқаша қорытындылар. Ляпуновтың әдістерін дамыту негізінде векторлық өрістер бағыттары бойынша дифференциалдау операторының бес түрі бойынша қарастырылған жүйелердің көппериодты тербелістерін зерттеу барысында келесі нәтижелер алынды.

- Векторлық өрістердің бағыттары бойынша дифференциалдау операторларының көппериодты нөлдерінің бар болуының жеткілікті шарттары орнатылды.

- Тұрақты коэффициентті сызықты біртекті жүйелердің шешімдерінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Сондай-ақ, бес түрлі дифференциалдау операторлары бойынша бұл жүйелердің а) сындық емес және сындық, б) автономды емес және автономды жағдайларында нөлден өзге шешімдерінің болмауы шарттары анықталды.

- Бес түрлі дифференциалдау операторлары бойынша тұрақты коэффициентті сызықты біртекті емес жүйелердің а) және б) жағдайларында көппериодты шешімдерінің бар және жалғыз болуы шарттары алынды.

- Айнымалы коэффициентті сызықты біртекті емес жүйелер экспоненциалды дихотомиялық қасиетті қанағаттандырғанда көппериодты шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары айқындалды.

- Сындық жағдайда сызықты жүйелердің көппериодты шешімдері есебінің Грин функциясының бар болуының жеткілікті шарттарының табылуы негізінде жалғыз көппериодты шешімнің интегралдық өрнегі ұсынылды. Жүйенің Грин функциясын құру әдістемесі сындық та, сындық емес те жағдайларда қолданылатындығы көрсетілді. Сәйкес біртекті жүйенің нөлден өзге көппериодты шешімдері болмағанда Грин функциясын құру әдістемесі ұсынылды.

- Сындық емес жағдайда шешімдердің Ляпунов бойынша интегралдық өрнектелуі формуласы негізінде D_3 дифференциалдау операторлы тұрақты және айнымалы коэффициентті квазисызықты жүйелердің көппериодты шешімдерінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары орнатылды.

- Диссертациялық жұмыста ұсынылған шешімнің интегралдық өрнектелуін қолдана отырып, сәйкес біртекті жүйенің нөлден өзге көппериодты шешімдері болмаған жағдайда D_4 дифференциалдау операторлы квазисызықты жүйелерді зерттеу барысында көппериодты шешімнің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары көрсетілді.

- Белгісіз функцияға қатысты біртектес форма түрінде қоздыртқы алған кезде экспоненциал-гиперболалық заңдылықпен өзгеретін кіші параметрлі, D_5 дифференциалдау операторлы квазисызықты жүйенің көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары айқындалды.

Векторлық өрістер бағыты бойынша дифференциалдау операторлы жүйелердегі көппериодты тербелістердің шарттарын анықтау барысында зерттеу әдісінің алгоритмі жасақталды:

1) алдымен, Ляпунов әдісі арқылы дифференциалдау операторының нөлдерінің көппериодтылығы зерттелді;

2) одан кейін, көппериодты нөлдерге сәйкес келетін біртекті жүйенің көппериодты шешімдерінің бар болуы туралы мәселе қарастырылды;

3) әрі қарай, біртекті жүйе үшін тривиалды шешімнен басқа көппериодты шешімдердің болмауының шарттары анықталды;

4) содан кейін еріксіз көппериодты тербелістер есебінің Грин функциясының бар болуы мен құрылуы туралы мәселе шешілді;

5) соңында, еріксіз тербелістердің интегралдық өрнегі квазисызықты жүйелерді зерттеу кезінде қолданылды.

Осы Ляпунов әдісімен диссертацияның негізгі мәселесін зерттеу болып табылады. Есепті шешуде экспоненциал-гиперболалық өзгермелі кіші параметр қолданылады.

Диссертацияның зерттеуінде алғаш рет бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сындық жағдайда нақты аналитикалық көппериодты шешімдері зерттелді.

Сонымен қатар диссертациялық жұмыста зерттеу барысында бірінші рет бірінші ретті дербес дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің автономды жағдайында көппериодты тербелістер зерттеліп, сызықты жағдайда тепе-теңдік күйдегі көппериодты шешімдердің бар болуы көрсетілді, олар осы жұмыста ерекше деп аталды.

Қойылған міндеттерді шешу толықтығын бағалау. Бес дифференциалдау операторы бойынша сызықты және квазисызықты жүйелердегі көппериодты тербелістердің болуы мәселелері Ляпунов әдісі негізінде зерттелді. Бұл мәселелер бірінші рет сындық және автономды жағдайларда қарастырылды. Экспоненциал-гиперболалық өзгермелі кіші параметрлі жүйелердің көппероидты шешімдері мәселесі шешілді.

Нәтижелерін нақты қолдану бойынша ұсыныстар мен бағдарларын дамыту. Зерттеу нәтижелері теориялық сипатта және олар физика-механикалық және техникалық тербелмелі процестерді сипаттайтын дифференциалдық жүйелердегі көп жиілікті тербелістерді анықтауда, сондай-ақ физика-математика, инженер мамандықтарының студенттері, магистранттары мен докторанттары үшін элективті курстар ұйымдастыруда қолданылуы мүмкін.

Осы саладағы ең жақсы жетістіктермен салыстырғанда орындалған жұмыстың ғылыми деңгейін бағалау. Орындалған ғылыми жұмыстың нәтижелері ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған журналдарда, халықаралық конференциялар материалдарында және Scopus мәліметтер базасында индекстелген журналдарда жарияланды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М.: Гостехиздат, 1950. - 472 с.

2 Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / изд. 2-е, испр. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 248 с.

3 Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. - М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 248 с.

4 Пуанкаре А. Избранные труды. - Т.I. - М.: Наука, 1974. - 772 с.

5 Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / пер. с франц. Е. Леонтович, А. Майер; под. ред. и примечаниями А.А. Андронова. – М. - Л.: ОГИЗ, 1947. – 392 с.

6 Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

7 Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

8 Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. - Киев: Вид-во ВУАН,1934.-109 с.

9 Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматлит, 1963. - 407 с.

10 Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. - Киев: Наукова думка, 1969. - 248 с.

11 Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. - М.: Наука, 1987. – 304 с.

12 Колмогоров А.Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. - 1954. - Т.96, вып.4. - С. 527-530.

13 Арнольд В.И. Малые знаменатели I: Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1961. - Т. 25, вып.1. - С. 21-86.

14 Арнольд В.И. Малые знаменатели II. Доказательство теоремы А.Н.Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи математических наук. - 1963. - Т.18, вып. 5 (113). - С. 13-40.

15 Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи математических наук. - 1963. - Т. 18, вып.6. - С. 91-192.

16 Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах / пер. с англ. Ю.Осипова, Л. Пустыльникова; под. ред. В.М. Алексеева. - М.: Мир, 1973. - 168 с.

17 Мозер Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости / пер. с анг. Д.В. Трещёва. - Ижевск: НИЦ «Регуляр. и хаотич. динамика», 2001. – 448 с.

18 Мозер Ю. О кривых, инвариантных при отображениях кольца сохраняющих площадь // Математика. - 1962. - Т.6, №5. - С.51-68.

19 Мозер Ю. Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений // Математика. - 1962. – Т.6, №4. - С.3-10.

20 Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. – 304 с.

21 Арнольд В.И. Математические методы классической механики. - М.: Наука, 1974. - 432 с.

22 Арнольд В.И. Геометрические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.-400с.

23 Де ла Яве Р. Введение в КАМ-теорию. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 176 с.

24 Джакалья Г.Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. - М.: Наука, 1979. – 320 с.

25 Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. - М.: ИИЛ, 1959. - 301 с.

26 Sigel C.L., Moser J.K. Lectures on Celestial Mechanics / trans. from the German edition by C.I. Kalme. – Springer-Verlag, New York. – 1971. – 292 p.

27 Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / 2е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, Гл. ред. ФМЛ, 1985. – 448 с.

28 Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / пер. с англ. А.И. Плиса; под ред. С.И. Похожаева. - М.: Мир, 1985. - 383 с.

29 Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.

30 Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 496 с.

31 Otto Vejvoda, Herrmann L., Lovicar V., Sova M., Straskaba I. Partial differential equations: Time-periodic solutions. – Springer Netherlands, 1982. -358 p.

32 Štědrý M., Vejvoda O. Time periodic solutions of a one-dimensional two-phase Stefan problem // Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1981. - Vol. 127.- P.67-78.

33 Бор Г. Почти-периодические функции. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1934. - 128 с.

34 Д.тер Хаар Д. Основы гамилтоновой механики / пер. с англ. В.А.Угарова. – М.: Наука, Гл. ред. ФМЛ, 1974. – 224 с.

35 Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журнал эксперим. и теоретической физики. – 1934. - Т.4, №9. – С. 234-238.

36 Курант Р. Уравнения с частными производными.- М.: Мир, 1964.-830с.

37 Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1968. - 464 с.

38 Назимов П.С. Об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными. Физико-математические наследие. - М.: ЛЕНАНД, 2016. - 216 с.

39 Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. - М.: Наука, 1968. - 592 с.

40 Urabe M. Existence theorems of quasiperiodic solutions to nonlinear differential systems // Funkcialaj Ekvacioj. - 1972. - Vol. 15. - P. 75-100.

41 Sibuja Y. Some global properties of matrices of functions of one variable //Mathematische Annalen. - 1965. – Vol. 161, №1 - P.67-77.

42 Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - М.: Наука, 1972.-720 с.

43 Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / изд. 3-е, перераб. и доп. - Минск: «Наука и техника», 1979.-744 с.

44 Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: ГИ ФМЛ, 1958, - 470 с.

45 Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967.–472 с.

46 Харасахал В.Х. Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - Алма-Ата: Наука, 1970. – 200 с.

47 Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. - Алма-Ата: Наука КазССР, 1979. - 211 с.

48 Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1990. – 184 с.

49 Сартабанов Ж.А. Периодты функциялар және қарапайым дифференциалдық теңдеулердің периодты шешімдері. – Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 2001. – 108 б.

50 Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. - Актобе: Принт А, 2007. – 168 с.

51 Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. – Уральск: Ред. изд. центр ЗКГУ, 2013. – 167 с.

52 Умбетжанов Д.У., Сартабанов Ж.А. О необходимом и достаточном условии многопериодичности решения одной системы уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // В книге: Математика и Механика. - Алма-Ата: КазГУ. - 1972. - №7, часть 2. - С.22-27.

53 Сартабанов Ж.А. Об одной счетной системе квазилинейных уравнений с частными производными // Изв.АН КазССР. Серия физ.-мат. - 1973. - №5. - С. 53-58.

54 Сартабанов Ж.А. Об одном способе изучения периодических решений уравнений в частных производных специального вида // Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат. - 1989. - №1.- С. 42-48.

55 Сартабанов Ж.А.,Кулик А.И. О решениях краевой задачи для систем D-уравнений // Известия НАН РК. Сер.физ-мат. - 1995. - №1. - С. 31-36.

56 Сартабанов Ж.А. К методам изучения многопериодических решений систем D-уравнений //Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И.Н.Векуа, ТГУ.-1990. - Т.5, №3. - С.175-178.

57 Сартабанов Ж.А. Многопериодические колебания в некоторых дифференциальных и функционально-разностных системах: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат.наук: 01.01.02. – Алматы, Инс.теор. и прикл.матем. НАН РК, 1996.- 31 с.

58 Бержанов А.Б. Исследование многопериодических по части переменных решений некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат.наук: 01.01.02. - Астана, ЕНУ, 2010.- 34 с.

59 Иванов А.С. Основы теории колебаний: Колебания динамических систем. Методы решения задач. - Пермь: ПГНИУ, 2017 - 115 с.

60 Бекшаев С.Я., Фомин В.М. Основы теории колебании. - Одесса: ОГАСиА, 2013. - 103 с.

61 Gustavo L.V. Partial differential equations of first order and their applications to Physics / 2nd edition.- Mexico: University of Guadalajara, 2012.-200p.

62 Kerimbekov A., Abdyldaeva E. On the solvability of a nonlinear tracking problem under boundary control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations // IFIP Advances in Information and Communication Technology. - 2016. - Vol. 494. - P. 312-321.

63 Bergamasco A.P., Dattori da Silva P.L., Gonzalez R.B. Existence and regularity of periodic solutions to certain first-order partial differential equations // Journal of Fourier Analysis and Applications. - 2017.- Vol. 23, №1. – P. 65-90.

64 Bergamasco A.P., Cavalcanti M.M., Gonzalez R.B. Existence and regularity of periodic solutions for a class of partial differential equations // Journal of Fourier Analysis and Applications. - 2021.- Vol. 27, №3. - Article number 52.

65 Joyal P. Invariance of Poincaré-Lyapunov polynomials under the group of rotations // Electronic Journal of Differential Equations. - 1998. - Vol. 1998. - P. 1-8.

66 Fonda A.; Sfecci A. Multiple periodic solutions of Hamiltonian systems confined in a box // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A. - 2017. - Vol. 37, №3. - P. 1425-1436.

67 Calogero F., Leyvraz F. How to extend any dynamical system so that it becomes isochronous, asymptotically isochronous or multi-periodic // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. - 2009. - Vol. 16, №3. - 311-338.

68 Akram S., Nawaz A., Kalsoon H., Idreea M., Chu Yu-M. Existence of multiple periodic solutions for cubic nonautonomous differential equation // Mathematical Problems in Engineering. - 2020. - Vol. 2020. - Article ID 7618097, 14 pages.

69 Su J., Xhao L. Multiple periodic solutions of ordinary equations with double resonance // Nonlinear Analysis: Theory, Methods, and Applications. - 2009. - Vol. 70, №4. - 1520-1527.

70 Jebelean P., Mawhin J., Serban C. Multiple critical orbits to partial periodic perturbations of the p-relativistic operator // Applied Mathematical Letters. - 2020. - Vol. 104. - 106-220.

71 Amores P.M. Critical case for periodic solutions of a class of neutral equations with a small parameter // Publications de la Seccio de Matematiques. –

1979. - Vol. 13. - P. 61-78

72 Boichuk A.A., Zhuravlev V.F., Chuiko S.M. Periodic solution of nonlinear autonomous systems in critical cases // Ukrainian Mathematical Journal. - 1990. - Vol. 42, №9. - P. 1049-1054.

73 Boichuk A.A., Chuiko S.M. Periodic solution of autonomous systems with pulse influence in critical cases // Ukrainian Mathematical Journal. - 1995. - Vol.47, №11. - P. 1478-1484.

74 Suleimenov Zh. On the existence of a conditionally periodic solution of one quasilinear differential system in the critical case // Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science. - 2018. - Vol. 100, №4. - P. 8-17.

75 Pelyukh G.P. On periodic solution of systems of linear finite-difference equations in the critical case // Differential equations. - 2008. - Vol. 44, №3.-P.442-445.

76 Asanova A.T. Almost periodic solution of a semilinear parabolic equation // Differential Equations. - 1998. - Vol. 34, №12. - P. 1705-1707.

77 Asanova A.T. On a bounded almost periodic solution of a semilinear parabolic equation // Ukrainian Mathematical Journal. - 2000. - Vol. 52, №6. - P. 950-952.

78 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // Ukrainian Mathematical Journal. - 2004. - Vol. 56, №4. - P. 682-694.

79 Orumbaeva, N.T. On Solvability of Non-Linear Semi-Periodic Boundary-Value Problem for System of Hyperbolic Equations // Russian Mathematics. - 2016. - Vol. 60, №9. - P. 23-37.

80 Kmit I., Recke L., Tkachenko V. Classical bounded and almost periodic solutions to quasilinear first-order hyperbolic systems in a strip // Journal of Differential Equations. – 2020. – Vol. 269, №3. - P.2532-2579.

81 Klyuchnyk R., Kmit I., Recke L., Exponential dichotomy for hyperbolic systems with periodic boundary conditions. Journal of Differential Equations. – 2017. Vol. 262, №3. - P. 2493–2520.

82 Kmit I., Recke L. Solution regularity and smooth dependence for abstract equations and applications to hyperbolic PDEs // Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 259, №11. - P.6287-6337.

83 Qu P. Time-periodic solutions to quasilinear hyperbolic systems with time-periodic boundary conditions // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. – 2020. – Vol. 139. – P. 356–382.

84 Ohnawa M., Suzuki M. Time-periodic solutions of symmetric hyperbolic systems // Journal of Hyperbolic Differential Equations. – 2020. – Vol. 17, №4. – P. 707-726.

85 Zhang L., Pang H., Ge W. Multiple periodic solution of differential delay systems with 2k lags // AIMS Mathematics. – 2021. – Vol. 6, №7. – P. 6815-6832.

86 Slyusarchuk V.Yu. Almost periodic solutions of differential equations // Journal of Mathematics Science. – 2021. – Vol. 254, №2. – P. 287-304.

87 Terekhin M.T. Nonzero periodic solutions of a special system of nonlinear differential equations // Journal of Mathematics Science. – 2020. – Vol. 248, №4. – P. 467-475.

88 Wang Sh., Yang J. Period functions and critical periods of piecewise linear system // Electronic Journal of Differential Equations. – 2020. - Vol. 2020, №79. – P. 1-12.

89 Li M. Time periodic solutions for the non-isentropic compressible quantum hydrodynamic equations with viscosity in R^3 // Electronic Journal of Differential Equations. – 2020. - Vol. 2020, №103. – P. 1-34.

90 Kadry S, Alferov G.V., Ivanov G.G., and Korolev V.S. On estimation for numbers of periodic and almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings. - 2020. - Vol. 2293, №1. - P. 060003.

91 Houshy A. The problem of quasiperiodic photonic structures solved by considering the cut of 2d periodic structures // Journal of Applied Mathematics and Physics. – 2021. – Vol. 9, №5. – P. 864-888.

92 Сартабанов Ж.А. Условия периодичности решений дифференциальных систем с многомерным временем // Известия НАН МОН РК. Сер. физ.-мат. - 2004, №3. - С. 44-48.

93 Сартабанов Ж.А. Экспоненциальная дихотомичность решений многопериодических линейных однородных систем *D-a*-уравнений // Известия НАН МОН РК. Сер. физ.-мат. - 2001, №5. - С. 38-44.

94 Sartabanov Z.A. The multi-period solution of a linear system of equations with the operator of differentiation along the main diagonal of the space of independent variables and delayed arguments // AIP Conference Proceedings. - 2017. - Vol. 1880. - 040020.

95 Kulzhumiyeva A.A.; Sartabanov Z.A. On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal, 2017. - Vol. 8, №1. - P. 67-75.

96 Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Z.A. Integration of a Linear Equation with Differential Operator, Corresponding to the Main Diagonal in the Space of Independent Variables, and Coefficients, Constant on the Diagonal // Russian Mathematics. - 2019. - Vol. 63, №6. - P. 29-41.

97 Abdikalikova G., Berzhanov A. On multiperiodicity and almost periodicity of solutions of boundary value problem for system of parabolic type equation // AIP Conference Proceedings. - 2014. - Vol. 1611 - P. 58-62.

98 Berzhanov A.B., Kurmangaliev E.K. Solution of a countable system of quasilinear partial differential equations multiperiodic in a part of variables // Ukrainian Mathematical Journal. - 2009. - Vol. 61, №2. P. 336-345.

99 Bekbauova A., Baibaktina A. et.al. Periodic solution of a single system of differential equations in partial derivatives // International journal of Advanced and Applied Sciences. - 2018. - Vol. 5, №6. - P. 61-63.

100 Omarova B.Zh., Sartabanov Zh.A. On multiperiodic solutions of perturbed nonlinear autonomous systems with the differentiation operator on a vector field //

Eurasian Mathematical Journal. - 2021. - Vol. 12, №1. - P.68-81.

101 Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. On multi-periodic solutions of quasilinear autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunov's vector field // Вестник Карагандинского университета. Серия Математика. - 2019. - №2 (94). - С. 70-83.

102 Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh., Kerimbekov A. Research of multiperiodic solutions of perturbed linear autonomous systems with differentiation operator on the vector field // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. - 2019. - №6(328). - С.63-79.

103 Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. Integral representation of multiperiodic solutions of a linear system in one critical case // Kazakh Mathematical Journal. - 2020. - Vol. 19, №4. - P.55-70.

104 Омарова Б.Ж. Многопериодические решения систем второго порядка с оператором дифференцирования по векторному полю Ляпунова // Вестник КазНПУ имени Абая. Серия «Физико-математические науки». - 2020. - №1(69). – С.155-163.

105 Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. Multiperiodic solutions of the one autonomous system of equations with the operator of differentiation with respect to spatial and time variables // Вест.АРГУ им.К.Жубанова.- 2018.- №1(51).- С.60-64.

106 Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. Multiperiodic solutions of autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunov’s vector field // AIP Conference Proceedings. - 2018. - Vol. 1997, 020041-1–020041-4.

107 Сартабанов Ж.А., Омарова Б.Ж. Метод Ляпунова в исследовании многопериодических решений одной линейной системы уравнений с оператором дифференцирования // Труды международной научно-практической конференции “Таймановские чтения – 2017”. - Уральск. - 2017. - С.67-72.

108 Сартабанов Ж.А., Омарова Б.Ж. Многопериодические решения линейных систем с оператором дифференцирования по диагонали и постоянными коэффициентами // Труды международной научной конференции «Проблемы прикладной математики. - Актобе. - 2017. - С.85-88.

109 Сартабанов Ж.А., Омарова Б.Ж. Многопериодические по временным переменным решения линейных автономных систем с оператором дифференцирования по нелинейному векторному полю пространственных переменных // Известия МКТУ им. Х.А. Ясави, Серия математика, физика, информатика. Спец. выпуск по материалам конф. математиков Казахстана «Актуальные проблемы математики».- Туркестан.- 2018.- Т.I, №1(4). -С.89-93.

110 Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. On forced multiperiodic oscillations in the system with differentiation operator with respect to directions // Традиционная международная апрельская математическая конференция. Тезисы докладов. - Алматы. - 2021. - С.100-101.

ҚОСЫМША А

Грин функцияларының қасиеттерінің дәлелдемелері

А1 1.1 бөлімшесіндегі Грин функцияларының қасиеттерінің дәлелдемелері

Осы бөлімшеде (1.1.49), (1.1.56), (1.1.72) Грин функцияларының сәйкесінше (1.1.51), (1.1.60), (1.1.73) қасиеттері дәлелденеді.

(1.1.51) қасиетінің дәлелденуі.

$$1^\circ.\ D_1G(\tau-s)=D_1X_-(\tau,s)=AX_-(\tau,s)=AG(\tau-s),\ \tau>s;$$
$$D_1G(\tau-s)=-D_1X_+(\tau,s)=-AX_+(\tau,s)=A(-X_+(\tau,s))=AG(\tau-s),\ \tau<s.$$

Бұдан (1.1.49) функциясы (1.1.22) жүйесін қанағаттандыратынын көреміз.

$$2^\circ.\ G(\tau+0)-G(\tau-0)=X_-(\tau,\tau)+X_+(\tau,\tau)=X(\tau,\tau)=E.$$

3°. (1.1.24), (1.1.25) қасиеттері негізінде

$$|G(\tau-s)|=|X_-(\tau,s)|\le\Omega e^{-\kappa(\tau-s)},\tau\ge s;$$
$$|G(\tau-s)|=|-X_+(\tau,s)|\le\Omega e^{\kappa(\tau-s)},\tau<s$$

теңсіздіктерін аламыз. Сонда $|G(\tau-s)|\le\Omega e^{-\kappa|\tau-s|}$ бағалауы орынды.

(1.1.60) қасиетінің дәлелденуі.

$$1^\circ.\ D_1G(\tau,s)=D_1\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(s+\theta)=$$
$$=D_1\left[X^{-1}(\theta)X^{-1}(\tau)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}\cdot X^{-1}(s+\theta)=D_1X(\tau)\left[X^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}\cdot X^{-1}(s+\theta)=$$
$$=AX(\tau)\left[X^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}X^{-1}(s+\theta)=AG(\tau,s),\ -\theta\le s<\tau;$$

$$D_1G(\tau,s)=D_1\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\theta)\right]^{-1}X^{-1}(s)=D_1X(\tau)\left[X^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}X^{-1}(s)=$$
$$=AX(\tau)\left[X^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}X^{-1}(s)=AG(\tau,s),\ \tau<s\le 0.$$

Олай болса, сындық жағдайда (1.1.56) функциясы (1.1.22) жүйесін қанағаттандыратыны анықталды.

$$2^\circ.\ G(\tau,\tau+0)-G(\tau,\tau-0)=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(\tau+\theta)-$$
$$-\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(\tau)=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]=E.$$

$$3^\circ.\ G(\tau+\theta,s+\theta)=\left[X^{-1}(\tau+\theta+\theta)-X^{-1}(\tau+\theta)\right]^{-1}\cdot X^{-1}(s+\theta+\theta)=$$

$$=\left[X^{-1}(\theta)X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\theta)\cdot X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(\theta)X^{-1}(s+\theta)$$
$$=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X(\theta)X^{-1}(\theta)X^{-1}(s+\theta)=G(\tau,s),\ -\theta\le s\le\tau;$$
$$G(\tau+\theta,s+\theta)=\left[X^{-1}(\tau+\theta+\theta)-X^{-1}(\tau+\theta)\right]^{-1}\cdot X^{-1}(s+\theta)=$$
$$=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X(\theta)X^{-1}(\theta)X^{-1}(s)=G(\tau,s),\ \tau<s\le 0.$$

4°. (1.1.27) матрицантының $X(\theta_2)=X^{-1}(\theta_2)=E$ мәнін қолдансақ,

$$G(\tau+\theta_2,s)=\left[X^{-1}(\tau+\theta+\theta_2)-X^{-1}(\tau+\theta_2)\right]^{-1}X^{-1}(s+\theta)=$$
$$=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X(\theta_2)X^{-1}(s+\theta)=G(\tau,s),\ -\theta\le s\le\tau;$$
$$G(\tau,s+\theta_2)=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}\cdot X^{-1}(s+\theta_2+\theta)=$$
$$=\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(\theta_2)X^{-1}(s+\theta)=G(\tau,s),\ \tau<s\le 0.$$

5°. $s,\tau\in[-\theta,0]$ болғанда (1.1.23) матрицантының

$$\left|X(\tau)\right|=\left|e^{A\tau}\right|\le e^{|A||\tau|}\le e^{|A|\theta}$$

бағалауын қолдансақ, $\left|\left[E-X(\theta)\right]^{-1}\right|\le\overline{\Omega}$ орындалғанда

$$\left|G(\tau,s)\right|=\left|\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(s+\theta)\right|=\left|\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X(\theta)\cdot X^{-1}(\tau+\theta)\right]^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times X^{-1}(\theta)X^{-1}(s)\right|=\left|\left[E-X(\theta)\right]^{-1}X(\tau+\theta)X^{-1}(\theta)X^{-1}(s)\right|=\left|\left[E-X(\theta)\right]^{-1}X(\tau)X(s)\right|\le$$
$$\le\left|\left[E-X(\theta)\right]^{-1}\right|\cdot\left|X(\tau)\right|\cdot\left|X^{-1}(s)\right|\le\left|\left[E-X(\theta)\right]^{-1}\right|\cdot\left|X(\tau)\right|\cdot\left|X(-s)\right|\le$$
$$\le\overline{\Omega}e^{|\mathrm{A}||\tau|}e^{|\mathrm{A}||S|}\le\Omega e^{|\mathrm{A}|\theta}e^{|\mathrm{A}|\theta}=\overline{\Omega}e^{2|\mathrm{A}|\theta},-\theta\le s\le\tau;$$
$$\left|G(\tau,s)\right|=\left|\left[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)\right]^{-1}X^{-1}(s)\right|=\left|\left[X^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}X(\tau)X^{-1}(s)\right|\le$$
$$\le\left|\left[X^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}\right|\cdot\left|X(\tau)\right|\cdot\left|X^{-1}(s)\right|=\left|\left[X^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}\right|\cdot e^{2|A|\theta}\le\overline{\Omega}e^{2|A|\theta},\ \tau<s\le 0$$

бағалаулары орындалатынын көреміз. Сонымен $\left|G(\tau,s)\right|\le\overline{\Omega}e^{2|A|\theta}=\overline{\Delta}_0$ бағалауының дұрыстығы дәлелденді.

(1.1.73) қасиетінің дәлелденуі.

1°. $D_1G(\tau-s,t-e\tau)=D_1G(\tau-s,t-e\tau)=D_1X_{-}(\tau,s,t-e\tau)=$
$$=X(t-e\tau)X_{-}(\tau,s,t-e\tau)=A(t-e\tau)G(\tau-s,t-e\tau),\ \tau>s;$$
$$D_1G(\tau-s,t-e\tau)=D_1(-X_{+}(\tau,s,t-e\tau))=-A(t-e\tau)X_{+}(\tau,s,t-e\tau)=$$
$$=A(t-e\tau)(-X_{+}(\tau,s,t-e\tau))=A(t-e\tau)G(\tau-s,t-e\tau),\ \tau<s.$$

Демек, (1.1.72) функциясы (1.1.68) жүйесінің шешімі болады екен.

2°. $G(\tau+0,t-e\tau)-G(\tau-0,t-e\tau)=X_{-}(\tau,\tau,t-e\tau)+X_{+}(\tau,\tau,t-e\tau)=$
$=X(\tau,\tau,t-e\tau)=E.$

3°. $A=A(t-e\tau)$ матрицасы үшін (1.1.24), (1.1.25) қасиеттері бойынша

$$|G(\tau-s,t-e\tau)|=|X_{-}(\tau,s,t-e\tau)|\le\Omega e^{-\kappa(t-e\tau)(\tau-s)},\ \tau\ge s;$$
$$|G(\tau-s,t-e\tau)|=|-X_{+}(\tau,s,t-e\tau)|\le\Omega e^{\kappa(t-e\tau)(\tau-s)},\ \tau<s$$

бағалауларын анықтаймыз. Бұдан $|G(\tau-s,\sigma)|\le\Omega e^{-\kappa(\sigma)|\tau-s|}$ бағалауы орынды болатынын көреміз, мұндағы $\kappa(\sigma+\omega)=\kappa(\sigma)\in C_{\sigma}^{(e)}(R^m)$, $\sigma=t-e\tau,\kappa(\sigma)>0,\ \kappa\in R^m.$

А2 1.2 бөлімшесіндегі Грин функцияларының қасиеттерінің дәлелдемелері

Осы бөлімшеде (1.2.18), (1.2.34) Грин функцияларының сәйкесінше (1.2.19), (1.2.35) қасиеттері, сондай-ақ (1.2.39) функциясы үшін (1.2.35) қатысындағы 1°-4° қасиеттер мен (1.2.41) бағалауы орындалатындығы дәлелденеді.

(1.2.19) қасиетінің дәлелденуі.

1°. $D_1G(s,\tau,t)=D_1\left(\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right)=$
$=D_1X_0(\tau,t)\left[X^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))-E\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))=$
$=P(\tau,t)\cdot X_0(\tau,t)\left[X^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))-E\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))=$
$=P(\tau,t)G(s,\tau,t),\ s^*(\tau-\theta+0)\le s<\tau;$
$D_1G(s,\tau,t)=D_1\left(\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}\cdot X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right)=$
$=D_1X_0(\tau,t)\left[X^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))-E\right]^{-1}\cdot X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))=$
$=P(\tau,t)X_0(\tau,t)\left[X^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))-E\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))=P(\tau,t)G(s,\tau,t),\ \tau<s\le s^*(\tau).$

Бұл теңдіктерден (1.2.18) функциясының (1.2.3) жүйесін қанағаттандыратындығы шығады.

2°. $G(\tau-0,\tau,t)-G(\tau+0,\tau,t)=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}\times$

$$\times X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))\cdot X_0^{-1}(\tau,h(\tau,\tau,t))-\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(\tau,h(\tau,\tau,t))=$$
$$=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]=E.$$

3°. $G(s+\theta,\tau+\theta,t)=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau+\theta,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau+\theta,t))\times$
$$\times X_0^{-1}(s+\theta,h(s+\theta,\tau+\theta,t))=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0(\theta,h(0,\tau,t))\times$$
$$\times X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))=G(s,\tau,t),\ s^*(\tau-\theta+0)\le s\le\tau;$$
$$G(s+\theta,\tau+\theta,t)=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]X_0^{-1}(s+\theta,h(s+\theta,\tau+\theta,t))=$$
$$=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))=$$
$$=G(s,\tau,t),\ \tau<s\le s^*(\tau).$$

4°. Дәлелдеу кезінде (1.2.6) қасиет негізінде

$$X_0^{-1}(\tau,t+\omega)=X^{-1}(0,\tau,t+\omega)=X(\tau,0,h(0,\tau,t)+\omega)=$$
$$=X(\tau,0,h(0,\tau,t))=X^{-1}(0,\tau,t)=X_0^{-1}(\tau,t)$$

теңдіктер тізбесін қолданамыз.

$$G(s,\tau,t+\omega)=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t+\omega)\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t+\omega))\times$$
$$\times X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t+\omega))=G(s,\tau,t),\ s^*(\tau-\theta+0)\le s\le\tau;$$
$$G(s,\tau,t+\omega)=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t+\omega)-X_0^{-1}(\tau,t+\omega)\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t+\omega))=$$
$$=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t)+\omega)=G(s,\tau,t),\ \tau<s\le s^*(\tau).$$

5°. Мұнда (1.2.2) шарты орындалғанда [47, 39-45 б.] жұмысынан белгілі $\left|X_0(\tau,t)\right|\le e^{\mathrm{P}_0|\tau|}\le e^{\mathrm{P}_0\theta|}$, бағалауы мен $X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))=X(s,0,h(s,\tau,t))$ теңдігін қолданамыз, $\left|P(\tau,t)\right|\le P_0$. Сонда $\left|\left[E-X_0(\theta,h(0,\tau,t))\right]^{-1}\right|\le\Omega$ орындалған жағдайда

$$\left|G(s,\tau,t)\right|=\left|\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right|=$$
$$=\left|\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0(\theta,h(0,\tau,t))X^{-1}(\tau+\theta,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right|=$$
$$=\left|X_0(\tau+\theta,t)\left[E-X_0(\theta,h(0,\tau,t))\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right|\le$$
$$\le\left|\left[E-X_0(\theta,h(0,\tau,t))\right]^{-1}\right|\cdot\left|X_0(\tau,t)\right|\cdot\left|X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right|\le\Omega e^{2P_0\theta},s^*(\tau-\theta+0)\le s\le\tau;$$
$$\left|G(s,\tau,t)\right|=\left|\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right|=$$

$$=\left|\left[X_0^1(\theta,h(0,\tau,t))X_0^{-1}(\tau,t)-X_0^{-1}(\tau,t)\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right|=$$

$$=\left|X_0(\tau,t)\left[X_0^1(\theta,h(0,\tau,t))-E\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right|=$$

$$\leq\left|\left[X_0^1(\theta,h(0,\tau,t))-E\right]\cdot\left|X_0(\tau,t)\right|\cdot\left|X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t))\right|\leq\Omega e^{2P_0\theta},\tau<s\leq s^*(\tau)$$

бағалаулары орынды және бұдан

$$\left|G(s,\tau,t)\right|\leq\Omega e^{2P_0\theta}=\frac{1}{\theta}\cdot\theta\Omega e^{2P_0\theta}=\frac{\Delta_0}{\theta}$$

орындалатындығын көреміз, мұндағы $\Delta_0=\theta\Omega e^{2P_0\theta}$.

(1.2.35) қасиетінің дәлелденуі.

1°. $D_1G(s,\tau,t,\zeta)=D_1\left(\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\times\right.$
$\left.\times X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right)=D_1X_0(\tau,t,\zeta)\left[X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))-E\right]^{-1}\times$
$\times X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))=$
$=P(\tau,t,\zeta)\cdot X_0(\tau,t,\zeta)\left[X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))-E\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\times$
$\times X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))=P(\tau,t,\zeta)G(s,\tau,t,\zeta),\ s^*(\tau-\theta+0)\leq s<\tau;$

$$D_1G(s,\tau,t,\zeta)=D_1\left(\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right)=$$
$$=D_1X_0(\tau,t,\zeta)\left[X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))-E\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))=$$
$$=P(\tau,t,\zeta)X_0(\tau,t,\zeta)\left[X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))-E\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))=$$
$$=P(\tau,t,\zeta)G(s,\tau,t),\ \tau<s\leq s^*(\tau).$$

Бұл теңдіктерден (1.2.34) функциясының (1.2.23) жүйесінің шешімі болатындығын аламыз.

2°. $G(\tau-0,\tau,t,\zeta)-G(\tau+0,\tau,t,\zeta)=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1}\times$
$\times X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\cdot X_0^{-1}(\tau,h(\tau,\tau,t),\mu(\tau,\tau,\zeta))-$
$-\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1}X_0^{-1}(\tau,h(\tau,\tau,t),\mu(\tau,\tau,\zeta))=$
$=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1^{-1}}\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]=E.$

3°. $G(s+\theta,\tau+\theta,t,\zeta)=\left[X_0^{-1}(\tau+\theta+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)\right]^{-1}\times$
$\times X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))X_0^{-1}(s+\theta,h(s+\theta,\tau+\theta,t),\mu(s+\theta,\tau+\theta,\zeta))=$

$$
\begin{aligned}
&= \left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta) - X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1} X_0(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\times \\
&\times X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)) = \\
&= G(s,\tau,t,\zeta),\ s^*(\tau-\theta+0) \le s \le \tau;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G(s+\theta,\tau+\theta,t,\zeta) = \left[X_0^{-1}(\tau+\theta+\theta,t,\zeta) - X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]\times \\
&\times X_0^{-1}(s+\theta,h(s+\theta,\tau+\theta,t),\mu(s+\theta,\tau+\theta,\zeta)) = \\
&= \left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta) - X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1} X_0(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\times \\
&\times X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)) = G(s,\tau,t,\zeta),\ \tau < s \le s^*(\tau).
\end{aligned}
$$

4°. Дәлелдеу барысында $X(s,\tau,t,\zeta)$ матрицантының t бойынша ω-периодтылығын және

$$
\begin{aligned}
&X_0^{-1}(0,\tau,t+\omega,\zeta) = X_0^{-1}(\tau,0,h(s,\tau,t)+\omega,\mu(s,\tau,t)\zeta) = \\
&= X_0^{-1}(\tau,0,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,t)) = X_0^{-1}(0,\tau,t,\zeta)
\end{aligned}
$$

теңдіктер тізбесін ескереміз.

$$
\begin{aligned}
&G(s,\tau,t+\omega,\zeta) = \left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t+\omega,\zeta)\right]^{-1} X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t+\omega),\mu(0,\tau,\zeta))\times \\
&\times X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t+\omega),\mu(s,\tau,\zeta)) = \left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)\right]^{-1} X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t)+\omega,\mu(0,\tau,\zeta))\times \\
&\times X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t)+\omega,\mu(s,\tau,\zeta)) = G(s,\tau,t,\zeta),\ s^*(\tau-\theta+0) \le s \le \tau;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G(s,\tau,t+\omega) = \left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t+\omega,\zeta) - X_0^{-1}(\tau,t+\omega,\zeta)\right]^{-1} X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t+\omega),\mu(s,\tau,\zeta)) = \\
&= \left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta) - X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1} X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t)+\omega,\mu(s,\tau,\zeta)) = \\
&= G(s,\tau,t,\zeta),\ \tau < s \le s^*(\tau).
\end{aligned}
$$

5°. Алдымен (1.2.26) қасиетін, (1.2.25) шарты орындалғанда [47, 41, 45 б.] жұмысынан белгілі $|X(s,\tau,t,\zeta)| \le e^{p(\zeta)|\tau-s|} \le e^{p(\zeta)\theta}$ бағалауын және $X^{-1}(s,\tau,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta)) = X(\tau,s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))$ теңдігін пайдаланып Грин функциясын бағалайық. Сонда $\left|\left[X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta)) - E\right]^{-1}\right| \le \widetilde{\Omega}$ орындалғанда

$$
\begin{aligned}
&|G(s,\tau,t,\zeta)| = \left|\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta) - X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1} X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\times\right. \\
&\left.\times X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right| = \left|\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta) - X_0(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\times\right.\right. \\
&\left.\left.\times X^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)\right]^{-1} X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right| =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left|X_0(\tau+\theta,t,\zeta)\left[E-X_0(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\right]^{-1}X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\times\right.\\
&\left.\times X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right|\le\left|\left[E-X_0(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))\right]^{-1}\right|\times\\
&\times\left|X_0(\tau,t,\zeta)\right|\cdot\left|X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right|\le\widetilde{\Omega}e^{2p(\zeta)\theta},s^*(\tau-\theta+0)\le s\le\tau;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|G(s,\tau,t,\zeta)\right|=\left|\left[X_0^{-1}(\tau+\theta,t,\zeta)-X_0^{-1}(\tau,t,\zeta)\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right|=\\
&=\left|X_0(\tau,t,\zeta)\left[X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))-E\right]^{-1}X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right|\le\\
&\le\left|\left[X_0^{-1}(\theta,h(0,\tau,t),\mu(0,\tau,\zeta))-E\right]^{-1}\right|\cdot\left|X_0(\tau,t,\zeta)\right|\cdot\left|X_0^{-1}(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\right|\le\\
&\le\widetilde{\Omega}e^{2p(\zeta)\theta},\tau<s\le s^*(\tau)
\end{aligned}
$$

бағалауын аламыз, ал бұдан

$$
\left|G(s,\tau,t,\zeta)\right|\le\widetilde{\Omega}e^{2p(\zeta)\theta}=\theta^{-1}\cdot\theta\widetilde{\Omega}e^{2p(\zeta)\theta}=\theta^{-1}\widetilde{\Delta}_0(\zeta)
$$

орындалатынын көреміз, мұндағы $\widetilde{\Delta}_0(\zeta)=\theta\widetilde{\Omega}e^{2p(\zeta)\theta}$.

Енді Грин функциясының интегралын бағалайық:

$$
\int_{s^*(\tau-\theta+0)}^{s^*(\tau)}\left|G(s,\tau,t,\zeta)\right|ds\le\theta^{-1}\widetilde{\Delta}_0(\zeta)\cdot\theta=\widetilde{\Delta}_0(\zeta),
$$

мұндағы $|\tau-s|\le\theta,0\le t_j\le\omega_j,\ j=\overline{1,m},\zeta\in B_\delta^2$.

(1.2.39) функциясы үшін (1.2.35) қатысындағы 1°-4° қасиеттер мен (1.2.41) бағалауы орындалатындығының дәлелденуі.

1°. $D_1G(s,\tau,t,\zeta)=D_1X_-(s,\tau,t,\zeta)=P(\tau,t,\zeta)X_-(s,\tau,t,\zeta)=P(\tau,t,\zeta)G(s,\tau,t,\zeta),\ s<\tau;$
$D_1G(s,\tau,t,\zeta)=-D_1X_+(s,\tau,t,\zeta)=-P(\tau,t,\zeta)X_+(s,\tau,t,\zeta)=P(\tau,t,\zeta)G(s,\tau,t,\zeta),\ s>\tau.$

Сонда (1.2.39) функциясы (1.2.23) жүйесінің шешімі болады.

2°. $G(\tau-0,\tau,t,\zeta)-G(\tau+0,\tau,t,\zeta)=X_-(\tau,\tau,t,\zeta)+X_+(\tau,\tau,t,\zeta)=X(\tau,\tau,t,\zeta)=E.$

3°. $G(s+\theta,\tau+\theta,t,\zeta)=X_-(s+\theta,\tau+\theta,t,\zeta)=X_-(s,\tau,t,\zeta)=G(s,\tau,t,\zeta),s\le\tau;$
$G(s+\theta,\tau+\theta,t,\zeta)=-X_+(s+\theta,\tau+\theta,t,\zeta)=-X_+(s,\tau,t,\zeta)=G(s,\tau,t,\zeta),s>\tau.$

4°. $G(s,\tau,t+\omega,\zeta)=X_-(s,\tau,t+\omega,\zeta)=X_-(s,\tau,t,\zeta)=G(s,\tau,t,\zeta),s\le\tau;$
$G(s,\tau,t+\omega,\zeta)=-X_+(s,\tau,t+\omega,\zeta)=-X_+(s,\tau,t,\zeta)=G(s,\tau,t,\zeta),s>\tau.$

Енді (1.2.41) бағалауын дәлелдейік. (1.2.38) арқылы

$$\left|G(s,\tau,t,\zeta)\right| = \left|X_{-}(s,\tau,t,\zeta)\right| \leq \widetilde{\Omega}_0 e^{-\kappa(\tau - s)},\ s \leq \tau;$$
$$\left|G(s,\tau,t,\zeta)\right| = \left|-X_{+}(s,\tau,t,\zeta)\right| \leq \widetilde{\Omega}_0 e^{\kappa(\tau - s)},\ s > \tau$$

бағалауларын аламыз, ал бұл (1.2.41) теңсіздігінің дәлелденгендігін білдіреді.

А3 1.3 бөлімшесіндегі Грин функциясының қасиетінің дәлелдемесі

Мұнда (1.3.34) Грин функциясының сәйкесінше (1.3.36) қасиеті дәлелденеді.

$$1^{\circ}.\ \frac{\partial}{\partial t}G(\tau,s) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left([X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)]^{-1} X^{-1}(s+\theta)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left[X^{-1}(\tau+\theta) - X(\theta)X^{-1}(\tau+\theta)\right]^{-1} X^{-1}(\theta)X^{-1}(s)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left[E - X(\theta)\right]^{-1} X(\tau+\theta)X^{-1}(\theta)X^{-1}(s)\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}X(\tau)\left[E - X(\theta)\right]^{-1} X^{-1}(s) =$$
$$= AX(\tau)\left[E - X(\theta)\right]^{-1} X^{-1}(s) = AG(\tau,s),\ s^{*}(\tau) - \theta \leq s < \tau;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G(\tau,s) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left([X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)]^{-1}\ X^{-1}(s)\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}X(\tau)[X^{-1}(\theta) - E]^{-1}\ X^{-1}(s) =$$
$$= AX(\tau)[X^{-1}(\theta) - E]^{-1}\ X^{-1}(s) = AG(\tau,s),\ \tau < s \leq s^{*}(\tau).$$

$$2^{\circ}.\ G(\tau,\tau+0) - G(\tau,\tau-0) = \left[X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X^{-1}(\tau+\theta) -$$
$$- \left[X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X^{-1}(\tau) = \left[X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1}\left[X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)\right] = E.$$

$$3^{\circ}.\ G(\tau+\theta, s+\theta) = \left[X^{-1}(\tau+\theta+\theta) - X^{-1}(\tau+\theta)\right]^{-1} X^{-1}(s+\theta+\theta) =$$
$$= \left[X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X(\theta)X^{-1}(\theta)X^{-1}(s+\theta) = G(\tau,s),\ s^{*}(\tau) - \theta \leq s < \tau;$$
$$G(\tau+\theta, s+\theta) = \left[X^{-1}(\tau+\theta+\theta) - X^{-1}(\tau+\theta)\right]^{-1} X^{-1}(s+\theta) =$$
$$= \left[X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X(\theta)X^{-1}(\theta)X^{-1}(s) = G(\tau,s),\ \tau \leq s \leq s^{*}(\tau).$$

А4 1.4 бөлімшесіндегі Грин функциясының қасиетінің дәлелдемесі

Мұнда (1.4.39) Грин функциясының сәйкесінше (1.4.38) қасиеті дәлелденеді.

$$1^{\circ}.\ D_3 G(\tau - s) = D_3 X_{-}(\tau - s) = AX_{-}(\tau - s) = AG(\tau - s),\ \tau > s;$$

$$D_3G(\tau - s) = D_3(-X_+(\tau - s)) = -D_3X_+(\tau - s) = -AX_+(\tau - s) = AG(\tau - s), \ \tau < s.$$

$2°.\ G(0+) - G(0-) = X_-(0) + X_+(0) = X(0) = E.$

3°. (1.4.37) қасиеті арқылы

$$\begin{gathered}|G(\tau - s)| = |X_-(\tau - s)| \le \tilde{\alpha} e^{-\kappa(\tau - s)}, \ \tau \ge s; \\ |G(\tau - s)| = |-X_+(\tau - s)| \le \tilde{\alpha} e^{\kappa(\tau - s)}, \ \tau < s\end{gathered}$$

теңсіздіктерін аламыз және $|G(\tau - s)| \le \tilde{\alpha} e^{-\kappa|\tau - s|}$ орындалатындығын көреміз, мұндағы $\tilde{\alpha} \ge 1, \ \kappa > 0$.

А5 1.6 бөлімшесіндегі Грин функцияларының қасиетінің дәлелдемесі

Мұнда (1.6.14) және (1.6.15) Грин функцияларының (1.6.16) қасиеті дәлелденеді.

$$1°.\ \frac{\partial}{\partial\tau} G_{11}(\tau, s) = \frac{\partial}{\partial\tau} \tilde{Y}(\tau) Y^{-1}(s + \theta) = 2\pi\nu^0 I_2 \tilde{Y}(\tau) Y^{-1}(s + \theta) = \\ = 2\pi\nu^0 I_2 G_{11}(\tau, s), \ s^*(\tau) \le s < \tau;$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} G_{11}(\tau, s) = \frac{\partial}{\partial\tau} \tilde{Y}(\tau) Y^{-1}(s) = 2\pi\nu^0 I_2 \tilde{Y}(\tau) \mathrm{Y}^{-1}(s) = 2\pi\nu^0 I_2 G_{11}(\tau, s), \\ \tau < s \le s^*(\tau + \theta - 0).$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} G_{22}(\tau, s) = \frac{\partial}{\partial\tau} Z_-(\tau - s) = \tilde{A} Z_-(\tau - s) = \tilde{A} G_{22}(\tau, s), \ -\infty < s < \tau;$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} G_{22}(\tau, s) = \frac{\partial}{\partial\tau}(-Z_+(\tau - s)) = -\tilde{A} Z_+(\tau - s) = \tilde{A} G_{22}(\tau, s), \ \tau < s < +\infty.$$

$$2°.\ G_{11}(\tau + 0, \tau) - G_{11}(\tau - 0, \tau) = \tilde{Y}(\tau) Y^{-1}(\tau + \theta) - \tilde{Y}(\tau) Y^{-1}(\tau) = \\ = \tilde{Y}(\tau)\left[Y^{-1}(\tau + \theta) - Y^{-1}(\tau)\right] = \tilde{Y}(\tau) Y^{-1}(\tau) = E_1, \\ G_{22}(\tau + 0, \tau) - G_{22}(\tau - 0, \tau) = Z_-(0) + Z_+(0) = Z(0) = E_2,$$

мұндағы E_1 және E_2 – 2-ші және $(n-2)$-ші ретті бірлік матрицалар.

$$3°.\ G_{11}(\tau + \theta, s + \theta) = \tilde{Y}(\tau + \theta) Y^{-1}(s + \theta + \theta) = Y(\tau + \theta)\left[Y^{-1}(\theta) - \mathrm{E}\right]^{-1} Y^{-1}(\theta) Y^{-1}(s + \theta) =$$

$$=\left[Y^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}Y(\tau)Y^{-1}(s+\theta)=\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s+\theta)=G(\tau,s),\ s^{*}(\tau)\le s\le\tau;$$

$$G_{11}(\tau+\theta,s+\theta)=\widetilde{Y}(\tau+\theta)Y^{-1}(s+\theta)=\left[Y^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}Y(\tau)Y(\theta)Y^{-1}(\theta)Y^{-1}(s)=$$
$$=Y(\tau)\left[Y^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}Y^{-1}(s)=\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s)=G_{11}(\tau,s),\ \tau<s\le s^{*}(\tau+\theta-0).$$

Әрі қарай, келесі дәлелдеулерді аламыз: $s^{*}(\tau)\le s\le\tau$ болған жағдайда

$$G_{11}(\tau+\theta^{\circ},s)=\widetilde{Y}(\tau+\theta^{\circ})Y^{-1}(s+\theta)=Y(\tau+\theta^{\circ})\left[Y^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}Y^{-1}(s+\theta)=$$
$$=Y(\tau)\left[Y^{-1}(\theta)-E\right]^{-1}Y^{-1}(s+\theta)=G(\tau,s),$$

$$G_{11}(\tau,s+\theta^{\circ})=\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s+\theta+\theta^{\circ})=\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(\theta)Y^{-1}(s+\theta^{\circ})=$$
$$=\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(\theta)Y^{-1}(s)=\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s+\theta)=G(\tau,s),$$

ал $\tau<s\le s^{*}(\tau+\theta-0)$ болғанда

$$G_{11}(\tau+\theta^{\circ},s)=\widetilde{Y}(\tau+\theta^{\circ})Y^{-1}(s)=\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s)=G_{11}(\tau,s),$$
$$G_{11}(\tau,s+\theta^{\circ})=\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s+\theta^{\circ})=\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s)=G_{11}(\tau,s),$$

орындалатындығын көреміз, мұндағы $\theta^{0}=\nu_{0}^{-1}$.

Енді $G_{22}(\tau+\theta,s+\theta)=G_{22}(\tau,s)$ қасиетін дәлелдейік. Сонда

$$G_{22}(\tau+\theta,s+\theta)=Z_{-}(\tau+\theta-(s+\theta))=Z_{-}(\tau-s)=G_{22}(\tau,s),\ -\infty<s\le\tau;$$
$$G_{22}(\tau+\theta,s+\theta)=-Z_{+}(\tau+\theta-(s+\theta))=-Z_{+}(\tau-s)=G_{22}(\tau,s),\ \tau<s<+\infty$$

теңдіктерін аламыз.

4°. $$\int\limits_{s^{*}(\tau)}^{s^{*}(\tau+\theta-0)}G_{11}(\tau,s)ds=\int\limits_{s^{*}(\tau)}^{\tau}\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s+\theta)ds+\int\limits_{\tau}^{s^{*}(\tau+\theta-0)}\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s)ds=$$
$$=\int\limits_{s^{*}(\tau)}^{\tau}\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(\theta)Y^{-1}(s)ds+\int\limits_{\tau}^{s^{*}(\tau+\theta-0)}\widetilde{Y}(\tau)Y^{-1}(s)ds=\widetilde{Y}(\tau)\left[Y^{-1}(\theta)\int\limits_{s^{*}(\tau)}^{\tau}Y^{-1}(s)ds+\int\limits_{\tau}^{s^{*}(\tau+\theta-0)}Y^{-1}(s)ds\right]=$$
$$=\widetilde{Y}(\tau)\left[Y^{-1}(\theta)\widetilde{F}(s)\Big|_{s^{*}(\tau)}^{\tau}+\widetilde{F}(s)\Big|_{\tau}^{s^{*}(\tau+\theta-0)}\right].$$

$Y(\tau)$ үшін (1,6,12) матрицантын қарастырсақ, $Y^{-1}(\tau)=Y(-\tau)=\Gamma e^{-2\pi i\nu^{0}\tau}+\overline{\Gamma}e^{2\pi i\nu^{0}\tau}$ теңдігін аламыз. Енді Γ және $\overline{\Gamma}$ матрицаларының (1.3.43) қасиетін ескеріп $\widetilde{F}(s)=\int Y^{-1}(s)ds$ алғашқы функциясын анықталық.

$$\widetilde{F}(s)=\int Y^{-1}(s)ds=\int\left(\Gamma e^{-2\pi i\nu^{0}s}+\overline{\Gamma}e^{2\pi i\nu^{0}s}\right)ds=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}e^{2\pi i\nu^{\circ}s}-\Gamma e^{-2\pi i\nu^{\circ}s}\right]=$$

$$\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma}e^{2\pi i\nu^{\circ}s}--\Gamma\Gamma e^{-2\pi i\nu^{\circ}s}+\Gamma\overline{\Gamma}e^{-2\pi i\nu^{\circ}s}-\Gamma\overline{\Gamma}e^{2\pi i\nu^{\circ}s}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}\left(\Gamma e^{-2\pi i\nu^{\circ}s}+\overline{\Gamma}e^{2\pi i\nu^{\circ}s}\right)-\Gamma\left(\Gamma e^{-2\pi i\nu^{\circ}s}+\overline{\Gamma}e^{2\pi i\nu^{\circ}s}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}Y^{-1}(s)-\Gamma Y^{-1}(s)\right]=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}-\Gamma\right]Y^{-1}(s).$$

$\widetilde{F}(s)=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}-\Gamma\right]Y^{-1}(s)$ негізінде

$$\int\limits_{s^{*}(\tau)}^{s^{*}(\tau+\theta-0)}G_{11}(\tau,s)ds=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}-\Gamma\right]\widetilde{Y}(\tau)\left[Y^{-1}(\theta)Y^{-1}(s)\Big|_{s^{*}(\tau)}^{\tau}+Y^{-1}(s)\Big|_{\tau}^{s^{*}(\tau+\theta-0)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}-\Gamma\right]\widetilde{Y}(\tau)\left[Y^{-1}(s+\theta)\Big|_{s^{*}(\tau)}^{\tau}+Y^{-1}(s)\Big|_{\tau}^{s^{*}(\tau+\theta-0)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}-\Gamma\right]\widetilde{Y}(\tau)\lim_{b\to0}\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(s^{*}(\tau)+\theta)+Y^{-1}(s^{*}(\tau+\theta-b))-Y^{-1}(\tau)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}-\Gamma\right]\widetilde{Y}(\tau)\lim_{b\to0}\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(s^{*}(\tau)+\theta)+Y^{-1}(s^{*}(\tau-b)+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}-\Gamma\right]\widetilde{Y}(\tau)\left[Y^{-1}(\tau+\theta)-Y^{-1}(\tau)\right]=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}-\Gamma\right]\widetilde{Y}(\tau)\widetilde{Y}^{-1}(\tau)=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left[\overline{\Gamma}-\Gamma\right]$$

орындалады. Сонымен келесі бағалау алынды:

$$\int\limits_{s^{*}(\tau)}^{s^{*}(\tau+\theta-0)}\left|G_{11}(\tau,s)\right|ds=\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left|\overline{\Gamma}-\Gamma\right|\le\frac{1}{2\pi\nu^{0}}\left(\left|\overline{\Gamma}\right|+\left|\Gamma\right|\right)=\frac{1}{\pi\nu^{0}}=a_{0}=const>0.$$

(1.6.13) орындалғанда $\left|G_{22}(\tau-s)\right|\le ae^{-\alpha|\tau-s|}$ қасиетінің орындалатындығын дәлелдейік. Сонда

$$\left|G_{22}(\tau,s)\right|=\left|Z_{-}(\tau-s)\right|\le ae^{-\kappa(\tau-s)},\ -\infty<s\le\tau;$$
$$\left|G_{22}(\tau,s)\right|=\left|-\mathrm{Z}_{+}(\tau-s)\right|\le ae^{\kappa(\tau-s)},\tau<s<+\infty$$

болады және бұдан $\left|G_{22}(\tau,s)\right|\le ae^{-\kappa(\tau-s)}$ бағалауы шығады.

ҚОСЫМША Б

Көппериодты шешімдерді анықтауға мысалдар

Мысал 1. Келесі теңдеулер жүйесінің

$$\begin{cases} \widetilde{D}_1 x_1 = \pi x_2 + a\sin\sqrt{2}\,t + b\xi, \\ \widetilde{D}_1 x_2 = -\pi x_1 + a\sin\sqrt{3}\,\tau + b\eta \end{cases} \tag{Б1}$$

көппериодты шешімін табыңыздар, мұндағы $\widetilde{D}_1$ дифференциалдау операторы

$$\widetilde{D}_1 = \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial t} - \eta\frac{\partial}{\partial\xi} + \xi\frac{\partial}{\partial\eta}$$

түрінде берілген, $\zeta = (\xi,\eta) \in B_\delta^2$ – кеңістік айнымалысы, $f(\tau,t,\zeta) = (f_1(\tau,t,\zeta), f_2(\tau,t,\zeta))$ – вектор-функциясы (τ,t) бойынша $\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\pi\right)$-периодты және $f_1(\tau,t,\xi,\eta) = a\sin\sqrt{2}t + b\xi$, $f_2(\tau,t,\xi,\eta) = a\sin\sqrt{3}\tau + b\eta$.

Шешуі. 1) Уақыт айнымалысы бойынша сипаттаушы теңдеу $\frac{dt}{d\tau} = 1$, сонда $t = t^0 + \tau - s \equiv h(\tau,s,t^0)$ – сипаттауыш болса,

$$t^0 = t - \tau + s \equiv h(s,\tau,t) \tag{Б2}$$

өрнегі сипаттаушы интеграл болады.

2) Кеңістік айнымалысы бойынша $\frac{d\xi}{d\tau} = -\eta,\ \frac{d\eta}{d\tau} = \xi$ жүйесінің сипаттауышы $\zeta = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\tau & \sin\tau\\ -\sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^0\\ \eta^0\end{pmatrix} = Z(\tau)\zeta^0$, ал интегралы

$$\zeta^0 = \begin{pmatrix}\xi^0\\ \eta^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\tau & -\sin\tau\\ \sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = Z^{-1}(\tau)\zeta$$

түрінде болады. Бұл анықталған шамалардан сәйкесінше сипаттауышты $\mu(\tau,\zeta^0) = Z(\tau)\zeta^0$, ал сипаттаушы интегралды

$$\mu(s-\tau,\zeta) = Z^{-1}(s-\tau)\zeta\ , \tag{Б3}$$

арқылы жазамыз, әрі τ бойынша $\theta_1 = 2\pi$ -периодты.

3) Сызықты біртекті

$$\begin{cases} \widetilde{D}_1 x_1 = \pi x_2, \\ \widetilde{D}_1 x_2 = -\pi x_1 \end{cases}$$

жүйесінің меншікті мәндері $\lambda_{1,2} = \pm \pi i$ болғандықтан бұл *сындық жағдай* және жүйенің матрицанты мен оған кері матрица

$$X(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \pi\tau & \sin \pi\tau \\ -\sin \pi\tau & \cos \pi\tau \end{pmatrix}, X^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \pi\tau & -\sin \pi\tau \\ \sin \pi\tau & \cos \pi\tau \end{pmatrix} \qquad (Б4)$$

болады, әрі екеуі де τ бойынша $\theta_2 = 2$ -периодты.

$\theta_1 = 2\pi$, $\theta_2 = 2$, $\theta = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$, $\omega = \sqrt{2}\pi$ периодтары бейөлшемдес. Олай болса, берілген теңдеудің t-ға қатысты $\sqrt{2}\pi$-периодты, τ бойынша $\widetilde{\nu}_1 = \dfrac{1}{2\pi}$, $\widetilde{\nu}_2 = \dfrac{1}{2}$, $\nu_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$, $\nu = \sqrt{2}$ жиіліктерімен квазипериодты шешімін анықтау керек. $\cos\dfrac{2}{\sqrt{3}}\pi^2 \neq 1$ болғандықтан $\det[X(\theta) - E] = 2\left(1 - \cos\dfrac{2}{\sqrt{3}}\pi^2\right) \neq 0$ шарты орындалады. Олай болса, $\left[X^{-1}(\tau + \theta) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1}$ матрицасы бар және келесі түрдегі Грин функциясын құрамыз:

$$G(\tau, s) = \begin{cases} \left[X^{-1}\left(\tau + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X^{-1}\left(s + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right), & s^*(\tau) \le s \le \tau, \\ \left[X^{-1}\left(\tau + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X^{-1}(s), & \tau < s \le s^*\left(\tau + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} - 0\right). \end{cases} \qquad (Б5)$$

Сонда (Б1) жүйесінің көппериодты шешімі

$$x(\tau, t, \zeta) = \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau + \theta - 0)} G(\tau, s) f(s, h(s, \tau, t), \mu(s, \tau, \zeta))\, ds \qquad (Б6)$$

өрнегі арқылы анықталады. (Б4) матрицасын пайдаланып $s^*(\tau) \le s \le \tau$ болғанда (Б5) Грин функциясын

$$G(\tau,s)=-\frac{1}{2\sin\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}}\begin{pmatrix}\sin\left(\pi(\tau-s)-\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}\right) & -\cos\left(\pi(\tau-s)-\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}\right)\\ \cos\left(\pi(\tau-s)-\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}\right) & \sin\left(\pi(\tau-s)-\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}\right)\end{pmatrix},$$

ал $\tau < s \le s^*\left(\tau+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-0\right)$ болғанда

$$G(\tau,s)=-\frac{1}{\sin\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}}\begin{pmatrix}\sin\left(\pi(\tau-s)+\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}\right) & -\cos\left(\pi(\tau-s)+\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}\right)\\ \cos\left(\pi(\tau-s)+\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}\right) & \sin\left(\pi(\tau-s)+\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}\right)\end{pmatrix}$$

түрінде болатынын көреміз. Ал $f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))$ функциясын (Б2), (Б3) сипаттаушы интегралдары

$$f(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))=\begin{pmatrix}f_1(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\\ f_2(s,h(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\zeta))\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\cos\sqrt{2}(t-\tau+s)\\ \sin\sqrt{3}s\end{pmatrix}+$$

$$+b\begin{pmatrix}\xi\cos(s-\tau)-\eta\sin(s-\tau)\\ \xi\sin(s-\tau)+\eta\cos(s-\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\sqrt{2}(t-\tau+s)+b\xi\cos(s-\tau)-b\eta\sin(s-\tau)\\ a\sin\sqrt{3}s+b\xi\sin(s-\tau)+b\eta\cos(s-\tau)\end{pmatrix}$$

арқылы жазалық. Осы анықталған шамаларды қолданып (Б6) интегралдық өрнегінен (Б1) жүйесінің t-ға қатысты $\sqrt{2}\pi$-периодты, τ бойынша $\tilde{\nu}_1=\frac{1}{2\pi}$, $\tilde{\nu}_2=\frac{1}{2}$, $\nu_0=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$, $\nu=\sqrt{2}$ жиіліктерімен квазипериодты шешімін табамыз:

$$x_1^*(\tau,t,\xi,\eta)=a\left[\frac{\pi}{\pi^2-3}\sin\sqrt{3}\tau-\frac{\sqrt{2}}{\pi^2-2}\sin\sqrt{2}t\right]+$$

$$+\frac{a}{2\sin\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}}\left[\sin\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\pi-\sqrt{2}}\sin\left(\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)+\sqrt{2}\left(t-\tau+s^*(\tau)\right)-\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\pi+\sqrt{2}}\sin\left(\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)-\sqrt{2}\left(t-\tau+s^*(\tau)\right)-\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\right)\right)\right]-$$

$$-\frac{b}{(\pi+1)\sin\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}}\left[\xi\sin\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)+\left(\tau-s^*(\tau)\right)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)-\right.$$

$$\left.-\eta\left(\sin\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cos\left(\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)+\left(\tau-s^*(\tau)\right)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\right)\right],$$

$$x_2^*(\tau,t,\xi,\eta)=a\left[\frac{\sqrt{3}}{\pi^2-3}\cos\sqrt{3}\tau-\frac{\pi}{\pi^2-2}\cos\sqrt{2}t\right]+$$

$$+\frac{a}{2\sin\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}}\left[\sin\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\pi-\sqrt{2}}\cos\left(\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)+\sqrt{2}\left(t-\tau+s^*(\tau)\right)-\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\pi+\sqrt{2}}\cos\left(\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)-\sqrt{2}\left(t-\tau+s^*(\tau)\right)-\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\right)\right)\right]-$$

$$-\frac{b}{(\pi+1)\sin\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}}\left[\xi\left(\sin\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cos\left(\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)+\left(\tau-s^*(\tau)\right)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\eta\sin\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)+\left(\tau-s^*(\tau)\right)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

Мысал 2. Кеңістік айнымалысы бойынша сипаттаушы теңдеуі еркіндік дәрежесі екіге тең біртекті сызықты Ляпунов жүйесі арқылы анықталған

$$\widetilde{D}_3=\frac{\partial}{\partial\tau}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t_j}+\left(\nu_1\eta_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\nu_1\xi_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)+\left(\nu_2\eta_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}-\nu_2\xi_2\frac{\partial}{\partial\eta_2}\right)$$

дифференциалдау операторлы

$$\begin{cases}\widetilde{D}_3x_1=-2x_1+a_1\left[\cos\tau+\cos\sqrt{2}t\right](\xi_1+\xi_2),\\ \widetilde{D}_3x_2=3x_2+a_2\left[\sin\tau+\sin\sqrt{2}t\right](\eta_1+\eta_2)\end{cases}\tag{Б7}$$

теңдеулер жүйесінің көппериодты шешімін анықтау керек, мұндағы m – әзірге анықталмаған натурал сан, ν_1, ν_2 – өзара бейөлшемдес оң тұрақтылар, $(\xi_1,\eta_1)=\zeta_1$, $(\xi_2,\eta_2)=\zeta_2$, a_1, a_2 – кез келген тұрақтылар.

Шешуі. $\nu_1=\sqrt{3}$, $\nu_2=\sqrt{5}$ болсын. (Б7) жүйе бойынша мәжбүрлеуші күш (τ,t) бойынша $(2\pi,\sqrt{2}\pi)$-периодты. $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)=(\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2)$ кеңістік айнымалысы бойынша сипаттаушы теңдеулер жүйесі түрінде анықталады:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{d\tau} = \sqrt{3}\eta_1 , \\ \dfrac{d\eta_1}{d\tau} = -\sqrt{3}\,\xi_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_2}{d\tau} = \sqrt{5}\eta_2 , \\ \dfrac{d\eta_2}{d\tau} = -\sqrt{5}\,\xi_2 \end{cases}$$

Ал сипаттауыштар $\zeta_1 = Z_1(\tau)c_1$, $\zeta_2 = Z_2(\tau)c_2$, сипаттаушы интеграл

$$Z_1^{-1}(\tau)\zeta_1 = \zeta_1^0 \ , \quad Z_2^{-1}(\tau)\zeta_2 = \zeta_2^0 \tag{Б8}$$

болады және олар τ бойынша периодты және периодтары сәйкесінше $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$, $\omega_3 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}$, мұндағы

$$Z_1(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{3}\,\tau & \sin\sqrt{3}\,\tau \\ -\sin\sqrt{3}\,\tau & \cos\sqrt{3}\,\tau \end{pmatrix}, \quad Z_2(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{5}\,\tau & \sin\sqrt{5}\,\tau \\ -\sin\sqrt{5}\,\tau & \cos\sqrt{5}\,\tau \end{pmatrix}$$

матриցанттар, $c_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix}$ – еркін алынған векторлар.

Сызықты біртекті

$$\begin{cases} \widetilde{D}_3 x_1 = -2x_1, \\ \widetilde{D}_3 x_2 = 3x_2 \end{cases}$$

жүйесінің нөлден өзге периодты шешімі жоқ. Біртекті жүйемен жүйенің бос күйі анықталады. Бұл жүйенің матриցанты $X(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-2\tau} & o \\ o & e^{3\tau} \end{pmatrix}$.

$\widetilde{D}_3$ операторының сипаттауыштары ω_2 және ω_3 екі тәуелсіз периодтарымен тербелетіндіктен, осы периодтармен өзгеретін t_2 және t_3 екі уақыт айнымалысын енгіземіз. Сонда (Б7) жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_3} + \nu_1\eta_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - \nu_1\xi_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta_1} + \nu_2\eta_2 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \nu_2\xi_2 \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta_2} = \\ \qquad = -2x_1 + a_1\left[\cos\tau + \cos\sqrt{2}t_1\right](\xi_1 + \xi_2), \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \tau} + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dfrac{\partial x_2}{\partial t_3} + \nu_1\eta_1 \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - \nu_1\xi_1 \dfrac{\partial x_2}{\partial \eta_1} + \nu_2\eta_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \nu_2\xi_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial \eta_2} = \\ \qquad = 3x_2 + a_2\left[\sin\tau + \sin\sqrt{2}t_1\right](\eta_1 + \eta_2), \end{cases} \tag{Б9}$$

мұндағы $x=(x_1,x_2)$. (Б8) интегралы бойынша (Б9) операторының кеңістік айнымалысы бойынша сипаттауышы $\zeta_1 = Z_1(t_2)\zeta_1^0,\ \zeta_2 = Z_2(t_3)\zeta_2^0$, ал сипаттаушы интегралы $\mu_1(t_2,\zeta_1)=Z_1^{-1}(t_2)\zeta_1=\zeta_1^0,\quad \mu_2(t_3,\zeta_2)=Z_2^{-1}(t_3)\zeta_2=\zeta_2^0$ болады. Уақыт айнымалысы бойынша сипаттаушы интегралы $h(\tau^0,\tau,t)=t-e(\tau-\tau^0)$, мұндағы $t=(t_1,t_2,t_3),\ e=(1,1,1)$. (Б9) жүйесінің $(\tau,t)=(\tau,t_1,t_2,t_3)$ бойынша $\left(2\pi,\sqrt{2}\pi,\frac{2\pi}{\sqrt{3}},\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\right)$-периодты шешімі

$$\tilde{x}(\tau,t,\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}X(\tau-s)F(s,t_1-\tau+s)\left[Y_1^{-1}(t_2-\tau+s)\zeta_1+Y_2^{-1}(t_3-\tau+s)\zeta_2\right]ds$$

интегралдық өрнегі арқылы анықталады:

$$x_1(\tau,t,\zeta)=\frac{a_1}{2}\left[|\zeta_1|\left(\frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{3}}}\sin\left(\sqrt{3}t_2-\tau+\varphi_1\right)+\frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}\sin\left(\sqrt{3}t_2+\tau+\varphi_2\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{9-2\sqrt{6}}}\sin\left(\sqrt{2}t_1-\sqrt{3}t_2+\varphi_3\right)+\frac{1}{\sqrt{9+2\sqrt{6}}}\sin\left(\sqrt{2}t_1+\sqrt{3}t_2+\varphi_4\right)\right)+$$
$$+|\zeta_2|\left(\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\sin\left(\sqrt{5}t_3-\tau+\varphi_5\right)+\frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\sin\left(\sqrt{5}t_3+\tau+\varphi_6\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{10}}}\sin\left(\sqrt{2}t_1-\sqrt{5}t_3+\varphi_7\right)+\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{10}}}\sin\left(\sqrt{2}t_1+\sqrt{5}t_3+\varphi_8\right)\right)\right];$$

$$x_2(\tau,t,\zeta)=\frac{a_2}{2}\left[|\zeta_1|\left(\frac{1}{\sqrt{13-2\sqrt{3}}}\sin\left(\sqrt{3}t_2-\tau-\tilde{\varphi}_1\right)-\frac{1}{\sqrt{13+2\sqrt{3}}}\sin\left(\sqrt{3}t_2+\tau-\tilde{\varphi}_2\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{14-2\sqrt{6}}}\sin\left(\sqrt{2}t_1-\sqrt{3}t_2-\tilde{\varphi}_3\right)-\frac{1}{\sqrt{14+2\sqrt{6}}}\sin\left(\sqrt{2}t_1+\sqrt{3}t_2-\tilde{\varphi}_4\right)\right)+$$
$$+|\zeta_2|\left(\frac{1}{\sqrt{15-2\sqrt{5}}}\sin\left(\sqrt{5}t_3-\tau-\tilde{\varphi}_5\right)-\frac{1}{\sqrt{15+2\sqrt{5}}}\sin\left(\sqrt{5}t_3+\tau-\tilde{\varphi}_6\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{16-2\sqrt{10}}}\sin\left(\sqrt{2}t_1-\sqrt{5}t_3-\tilde{\varphi}_7\right)-\frac{1}{\sqrt{16+2\sqrt{10}}}\sin\left(\sqrt{2}t_1+\sqrt{5}t_3-\tilde{\varphi}_8\right)\right)\right],$$

мұндағы $|\zeta_1|=\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2},\quad |\zeta_2|=\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2},\quad tg\varphi_1=\dfrac{2\xi_1+\left(\sqrt{3}-1\right)\eta_1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\xi_1-2\eta_1},$

$$tg\varphi_2 = \frac{2\xi_1 + \left(\sqrt{3}+1\right)\eta_1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\xi_1 - 2\eta_1}, \qquad tg\varphi_3 = \frac{2\xi_1 - \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\eta_1}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\xi_1 + 2\eta_1}, \qquad tg\varphi_4 = \frac{2\xi_1 + \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\eta_1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\xi_1 - 2\eta_1},$$

$$tg\varphi_5 = \frac{2\xi_2 - \left(\sqrt{5}-1\right)\eta_2}{\left(\sqrt{5}-1\right)\xi_2 - 2\eta_2}, \qquad tg\varphi_6 = \frac{2\xi_2 + \left(\sqrt{5}+1\right)\eta_2}{\left(\sqrt{5}+1\right)\xi_2 - 2\eta_2}, \qquad tg\varphi_7 = \frac{2\xi_2 - \left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\eta_2}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\xi_2 + 2\eta_2},$$

$$tg\varphi_8 = \frac{2\xi_2 + \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\eta_2}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\xi_2 - 2\eta_2}; \qquad tg\tilde{\varphi}_1 = \frac{3\xi_1 - \left(\sqrt{3}-1\right)\eta_1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\xi_1 + 3\eta_1}, \qquad tg\tilde{\varphi}_2 = \frac{3\xi_1 - \left(\sqrt{3}+1\right)\eta_1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\xi_1 + 3\eta_1},$$

$$tg\tilde{\varphi}_3 = \frac{3\xi_1 - \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\eta_1}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\xi_1 + 3\eta_1}, \qquad tg\tilde{\varphi}_4 = \frac{3\xi_1 - \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\eta_1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\xi_1 + 3\eta_1}, \qquad tg\tilde{\varphi}_5 = \frac{3\xi_2 - \left(\sqrt{5}-1\right)\eta_2}{\left(\sqrt{5}-1\right)\xi_2 + 3\eta_2},$$

$$tg\tilde{\varphi}_6 = \frac{3\xi_2 - \left(\sqrt{5}+1\right)\eta_2}{\left(\sqrt{5}+1\right)\xi_2 + 3\eta_2}, \; tg\tilde{\varphi}_7 = \frac{3\xi_2 - \left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\eta_2}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\xi_2 + 3\eta_2}, \; tg\tilde{\varphi}_8 = \frac{3\xi_2 - \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\eta_2}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\xi_2 + 3\eta_2}.$$

Мысал 3. $\nu^0 = 1$, ν_0 және ν_1 – рационал бейөлшемдес және бейөлшемдестіктің күшейтілген шартын қанағаттандырсын:

$$\left|1 + k_0\nu_0 + k_1\nu_1\right| \geq a\left(\left|k_0\right| + \left|k_1\right|\right)^{-\alpha}, \tag{Б10}$$

мұндағы $a = const > 0$, $\alpha = const > 2$. Келесі $\tilde{D}_5 = \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial t}$ дифференциалдау операторлы

$$\begin{cases} \tilde{D}_5 x_1 = 2\pi x_2, \\ \tilde{D}_5 x_2 = -2\pi x_1 + \varepsilon_0 \cos\nu_0\tau + \varepsilon_0 \cos\nu_1 t + \varepsilon\, x_1^3, \\ \tilde{D}_5 x_3 = x_3 + \varepsilon_0 \sin\nu_0\tau + \varepsilon\, x_1 x_2^2 \end{cases} \tag{Б11}$$

квазисызықты жүйесінің көппериодты шешімін анықтау керек.

Шешуі. $\tilde{D}_5$ операторының сипаттаушы интегралы $h\left(\tau^0, \tau, t\right) = t - \tau + \tau^0$. (Б11) жүйеде бос мүше:

$$f = \left(f_1, f_2, f_3\right),\ f_1 = 0,\ f_2 = \cos\nu_0\tau + \cos\nu_1 t,\ f_3 = \sin\nu_0\tau\ ,$$

ал $l = 3$ дәрежелі $\varphi(x)$ формасы:

$$\varphi = \left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\right), \varphi_1 = 0, \varphi_2 = x_1^3,\ \varphi_3 = x_1 x_2^2.$$

Сонда $\theta^0 = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{\nu_0}$, $\omega = \frac{2\pi}{\nu_1}$ болғандықтан t-ға қатысты $\frac{2\pi}{\nu_1}$-периодты τ

бойынша 1, $\frac{\nu_0}{2\pi}, \frac{\nu_1}{2\pi}$ жиіліктерімен квазипериодты шешімді анықтау керек. 1.6 бөлімшеде келтірілген теориялық мәліметтер бойынша (Б11) жүйесіне сәйкес

$$\begin{cases} \widetilde{D}_5 x_1 = 2\pi x_2, \\ \widetilde{D}_5 x_2 = -2\pi x_1 + \varepsilon_0 \cos \nu_0 \tau + \varepsilon_0 \cos \nu_1 t, \\ \widetilde{D}_5 x_3 = x_3 + \varepsilon_0 \sin \nu_0 \tau \end{cases} \tag{Б12}$$

сызықты жүйенің Грин функциясы $\widetilde{G}(\tau,s) = diag\left[G_1(\tau,s), G_2(\tau,s)\right]$ арқылы анықталады, мұндағы

$$G_1(\tau,s) = \begin{cases} \left[X^{-1}\left(\tau + \frac{2\pi}{\nu_0}\right) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X^{-1}\left(s + \frac{2\pi}{\nu_0}\right), s^*(\tau \le s \le \tau), \\ \left[X^{-1}\left(\tau + \frac{2\pi}{\nu_0}\right) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X^{-1}(s), \tau < s \le s^*\left(\tau + \frac{2\pi}{\nu_0} - 0\right) \end{cases}$$

және $G_2(\tau,s) = \begin{cases} e^{-(\tau-s)}, -\infty < s \le \tau, \\ 0, \quad \tau < s < +\infty, \end{cases}$ $X(\tau) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\tau & \sin 2\pi\tau \\ -\sin 2\pi\tau & \cos 2\pi\tau \end{pmatrix}.$

Сызықты (Б12) жүйесінің (τ, t) бойынша $\left(\frac{2\pi}{\nu_0}, \frac{2\pi}{\nu_1}\right)$-периодты шешімі

$$x^0(\tau,t) = \varepsilon^0 \int_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau,s) f(s, h(s,\tau,t))\, ds + \varepsilon^0 \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau,s) f(s, h(s,\tau,t))\, ds$$

интегралдық өрнегімен анықталады.

$X(\tau)$ матрицантын пайдаланып $s^*(\tau) \le s \le \tau$ болғанда Грин функциясын

$$G_1(\tau,s) = \frac{1}{2\sin\frac{2\pi^2}{\nu_0}} \begin{pmatrix} \sin\left(2\pi(\tau - s) - \frac{2\pi^2}{\nu_0}\right) & -\cos\left(2\pi(\tau - s) - \frac{2\pi^2}{\nu_0}\right) \\ \cos\left(2\pi(\tau - s) - \frac{2\pi^2}{\nu_0}\right) & \sin\left(2\pi(\tau - s) - \frac{2\pi^2}{\nu_0}\right) \end{pmatrix},$$

ал $\tau < s \le s^*\left(\tau + \frac{2\pi}{\nu_0} - 0\right)$ болғанда

$$G_1(\tau,s)=\frac{1}{2\sin\frac{2\pi^2}{\nu_0}}\begin{pmatrix}\sin\left(2\pi(\tau-s)+\frac{2\pi^2}{\nu_0}\right) & -\cos\left(2\pi(\tau-s)+\frac{2\pi^2}{\nu_0}\right)\\ \cos\left(2\pi(\tau-s)+\frac{2\pi^2}{\nu_0}\right) & \sin\left(2\pi(\tau-s)+\frac{2\pi^2}{\nu_0}\right)\end{pmatrix}$$

түрінде болатынын аламыз. Ал $f(s,h(s,\tau,t))$ функциясын сипаттаушы интеграл арқылы

$$f(s,h(s,\tau,t))=f(s,t-\tau+s)=\left(0,\ \cos\nu_0 s+\cos\nu_1(t-\tau+s),\ \sin\nu_0 s\right)$$

жазамыз. Сонда осы анықталғандарды қолданып (Б12) сызықты жүйенің t-ға қатысты $\frac{2\pi}{\nu_1}$-периодты τ бойынша $1,\frac{\nu_0}{2\pi},\frac{\nu_1}{2\pi}$ жиіліктерімен квазипериодты шешімін табамыз:

$$x_1^0(\tau,t)=\frac{\varepsilon_0}{2\sin\frac{2\pi^2}{\nu_0}}\left\{-4\pi\sin\frac{2\pi^2}{\nu_0}\left[\frac{1}{4\pi^2-\nu_0^2}\cos\nu_0\tau+\frac{1}{4\pi^2-\nu_1^2}\cos\nu_1 t\right]+\right.$$
$$+\sin\frac{\pi\nu_1}{\nu_0}\left[\frac{1}{2\pi-\nu_1}\cos\left(2\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)+\nu_1\left(t-\tau+s^*(\tau)\right)-\frac{2\pi^2}{\nu_0}+\frac{\pi\nu_1}{\nu_0}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2\pi+\nu_1}\cos\left(2\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)-\nu_1\left(t-\tau+s^*(\tau)\right)-\frac{2\pi^2}{\nu_0}-\frac{\pi\nu_1}{\nu_0}\right)\right]\right\};$$

$$x_2^0(\tau,t)=\frac{\varepsilon_0}{2\sin\frac{2\pi^2}{\nu_0}}\left\{2\sin\frac{2\pi^2}{\nu_0}\left[\frac{\nu_0}{4\pi^2-\nu_0^2}\sin\nu_0\tau+\frac{\nu_1}{4\pi^2-\nu_1^2}\sin\nu_1 t\right]+\right.$$
$$+\sin\frac{\pi\nu_1}{\nu_0}\left[\frac{1}{2\pi-\nu_1}\sin\left(2\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)+\nu_1\left(t-\tau+s^*(\tau)\right)-\frac{2\pi^2}{\nu_0}+\frac{\pi\nu_1}{\nu_0}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2\pi+\nu_1}\sin\left(2\pi\left(\tau-s^*(\tau)\right)-\nu_1\left(t-\tau+s^*(\tau)\right)-\frac{2\pi^2}{\nu_0}-\frac{\pi\nu_1}{\nu_0}\right)\right]\right\},$$

$$x_3^0(\tau,t)=\frac{\varepsilon_0\nu_0}{\nu_0^2+1}\left[\sin\nu_0\tau-\cos\nu_0\tau\right].$$

Олай болса, 2.3 бөлімшеде келтірілген теориялық мәліметтер бойынша

$\varepsilon = \mu e^{-3S}$ және $\mu > 0$ параметрі жеткілікті аз болғанда, (Б10) шарты орындалғанда (Б11) квазисызықты жүйе

$$x(\tau,t) = x^0(\tau,t) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2\sin\frac{2\pi^2}{\nu_0}}\int\limits_{s^*(\tau)}^{\tau}\left(\sin\left(2\pi(\tau-s)-\frac{2\pi^2}{\nu_0}\right)-\cos\left(2\pi(\tau-s)-\frac{2\pi^2}{\nu_0}\right)\right)x_1^3(s,\,t-\tau+s)ds+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2\sin\frac{2\pi^2}{\nu_0}}\int\limits_{\tau}^{s^*\left(\tau+\frac{2\pi}{\nu_0}-0\right)}\left(\sin\left(2\pi(\tau-s)+\frac{2\pi^2}{\nu_0}\right)-\cos\left(2\pi(\tau-s)+\frac{2\pi^2}{\nu_0}\right)\right)x_1^3(s,\,t-\tau+s)ds+$$

$$+\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-(\tau-s)}x_1(s,\,t-\tau+s)x_2^2(s,\,t-\tau+s)ds$$

операторлық теңдеуінің шешілімділігімен эквивалентті, әрі ізделінді нақты аналитикалық көппериодты жалғыз ғана $x(\tau,t)=(x_1(\tau,t),\, x_2(\tau,t),\, x_3(\tau,t))$ шешімін біртіндеп жуықтау әдісімен тұрғызуға болады, мұндағы S – табаны $[1,\xi]$ болатын $\eta=\xi^{-1}$ гиперболалық трапециясының ауданы, $\xi=e^S$ – кіші бөлгіштердің әсер ету параметрі, $\eta=e^{-S}$ – кіші бөлгіштердің әсерін басушы параметр, $x^0(\tau,t)=(x_1^0(\tau,t),\, x_2^0(\tau,t),\, x_3^0(\tau,t))$сызықты (Б12) жүйесі шешімі.