

**Омарова Бибигул Жарболовнаның 6D060100-Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған «Векторлық өріс бағыттары бойынша дифференциалдау операторлы жүйелеріндегі көппериодты тербелістердің Ляпунов әдісі» атты диссертациялық жұмысына  
ШҚІР**

Диссертациялық жұмыс

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^m a(\tau, t, \zeta) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^l b_k(\tau, t, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_k}$$

дифференциалдау операторымен берілген

$$Dx = f(\tau, t, \zeta, x) \quad (1)$$

бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің  $(\tau, t)$  бойынша көппериодты тербелістерін зерттеуге арналған, мұндағы  $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$  және  $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$  – уақыт айнымалылары,  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_l)$  – кеңістік векторлық айнымалысы,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – ізделінді вектор-функция,  $a = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_l)$  және  $f = (f_1, \dots, f_n)$  вектор-функциялары  $(\tau, t)$  бойынша  $(\theta, \omega)$  - периодты,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$  – вектор-период,  $\omega_0 = \theta$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_m$  – рационал тәуелсіз оң тұрақтылар.

Р. Курант құрған сипаттауыштар теориясына сәйкес жеткілікті ортақ шарттарда

$$F(\tau, t, \zeta, x, p, q) = 0 \quad (2)$$

бірінші ретті дербес туындылы теңдеуінен  $D$  операторлы (1) жүйесіне көшуге болады, мұндағы  $p = (p_0, \dots, p_m)$ ,  $p_j = \frac{\partial x}{\partial t_j}$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $t_0 = \tau$ ,  $q = (q_1, \dots, q_l)$ ,

$$q_k = \frac{\partial x}{\partial \zeta_k}, \quad k = \overline{1, l}, \quad m + l + 2 = n.$$

(2) теңдеу өзара әсерлеспейтін бөлшектерден тұратын тұтас орта механикасындағы процестерді сипаттайтыны белгілі. Егер бұл процестерді векторлық өрістеги ағын ретінде қарастыратын болсақ, онда олардың (2) теңдеумен анықталған моделін (1) жүйесіне көшіру арқылы зерттеу өте тиімді. Процесті ағын бөлшектерінің қозғалысы ретінде қарастырған жағдайда сипаттауыштардың жалпы теориясына сәйкес (2) теңдеуден жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесіне көшу керек.

Көппериодты тербелістер әдістері арқылы  $\tau = t_0, t_1, \dots, t_m$  көп уақыт айнымалылары бойынша периодты тербелістер жиынтығынан тұратын тербеліс ретінде бір  $\bar{t}$  уақыт айнымалысы бойынша квазипериодты тербелісті қарастыруға болады. Бұдан периодты қозғалыстар бойынша Ляпунов әдістерін  $\bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_m) = (\tau, t)$  уақыт айнымалысына қатысты көпөлшемді периодты жағдайға тарату идеясы туындайды

Сәйкес сызықты жүйенің сындық емес жағдайда анықтама ретінде қабылданған экспоненциалды дихотомиялық қасиеті бар болғанда (1)

түріндегі жүйелерде периоды  $(\theta, \omega)$  болатын көппериодты тербелістер квазисызықты жағдайда жеткілікті толық зерттелген. (1) жүйесінде кеңістік айнымалысы айқын болмаған жағдайдағы тербелістер толық зерттелген.

(1) түріндегі жүйелер а) сындық және б) автономды болған жағдайлар зерттелмеген. Жүйелердің қарапайым түрінен күрделірек түріне көшудегі әдістерді дамытуда үлкен маңызы бар квазисызықты жүйенің жалпы шешімінің көппериодты құрылымы зерттелмеген. Жүйелердің көппериодты тербелістері туралы негізгі есептің шешіміне векторлық өрістегі өзгерістердің әсері туралы сұрақтар қарастырылмаған. Жүйелер сындық емес деп ұйғарылмаған кездегі жалпы квазисызықты жағдайда Грин функциялары әдісі дамытылмаған. Көппериодты тербелістер жағдайында кіші бөлгіштер қиындықтарын жеңу мәселесі зерттелмеген. Бұл мәселелердің негізінде сындық жағдайдағы жүйелерде көппериодты тербелістерді зерттеу туралы мәселе туындады.

Докторантқа  $D$  дифференциалдау операторы қарапайым болған кезде осы мәселелерді зерттеу есебі қойылды. Бұл жұмыста мұндай оператор ретінде  $\dot{D} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$  және  $D' = \left\langle M\zeta + \psi(\tau, t, \zeta), \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\rangle$  екі оператордың қосындысынан тұратын оператор алынған, мұндағы  $e = (1, \dots, 1)$  –  $m$ -вектор,  $\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$ ,  $\frac{d\zeta}{d\tau} = M\zeta + \psi$  – Ляпунов векторлық өрісін анықтайды,  $\frac{\partial}{\partial \zeta} = \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \zeta_l} \right)$ .

$\dot{D}$  операторын Г. Бор теоремасы негізінде квазипериодты тербелістерді дербес туындылы тендеулерге ауыстыру арқылы зерттеуде В.Х. Харасахал енгізген болса,  $D'$  операторы Ляпунов жүйесі арқылы берілген векторлық өрісті анықтайды.

Егер механика есептеріне қолданысын айқындау мақсатында (2) тендеуді Якоби тендеуінің

$$\dot{D}u + H(\tau, t, \xi, \eta) = 0 \quad (2')$$

арнайы түрімен анықтаса, онда (1) жүйесі

$$D = \dot{D} + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \xi} \right\rangle$$

дифференциалдау операторымен

$$D\eta = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad D\eta_0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial \eta_j} \eta_j \quad (1')$$

түріне келеді, мұндағы  $u$  – ізделінді функция,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – кеңістік

айнымалылары,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ,  $\eta_k = \frac{\partial u}{\partial \xi_k}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $\eta_0 = u$ ,  $\frac{\partial H}{\partial \xi_0} = \left( \frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \xi_n} \right)$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial H}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \eta_n} \right).$$

Сонда  $(\tau, t)$  көп өлшемді уақытты сипаттауыштардың теңдеулерін  $H$  гамильтониан және уақыттан тұратын канондық жүйе деп атауға болады және оны келесі түрінде ұсынуға болады

$$\dot{D}\xi = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \dot{D}\eta = -\frac{\partial H}{\partial \xi}. \quad (3)$$

(3) жүйе қарастырылып отырған есептің механикамен тығыз байланысын орнататындықтан диссертацияда жүргізілген зерттеулер өзекті.

Диссертацияның есептері  $D = \dot{D} + D'$  операторлы (1) түріндегі жүйелер үшін жоғарыда келтірілген мәселелер арқылы анықталды.

Осы мәселелерді шешуде докторант айтарлықтай нәтижелерге қол жеткізді.

- Сызықты жүйенің бір жұп таза жорымал меншікті мәндері болғандағы сындық жағдай алғаш рет зерттелді және сызықты жүйенің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынған. Кіші бөлгіштердің әсерін көрсете отырып, бұл шешімнің бағалауы келтірілген.

- Бір жұп таза жорымал меншікті мәндері бар сызықты жүйенің Грин функциясы тұрғысында ұзындығы периодқа тең ақырлы аралықта анықталған, әрі сан осі бойымен жылжымалы көппериодты шешімінің интегралдық өрнегі берілген. Ал мұндай функцияның аналогы тіпті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі жағдайында да болған емес.

- Автономды жағдайда дифференциалдық теңдеулер жүйесін зерттеудің қолданылымда маңызы зор, себебі процестердің математикалық модельдері негізделген көптеген физикалық заңдылықтар уақытқа тәуелді емес. Жұмыста векторлық өріс бойынша дифференциалдау операторлы жүйелердің осындай көппериодты шешімдері мәселелерін зерттеу алғаш рет басталған. Көппериодты шешімдер теориясында қолданылатын негізгі әдіс ізделінді шешімдердің периодтары алдын-ала көрсетілетін автономды емес жүйелер үшін жасалғаны белгілі. Автономды жағдайда бұл периодтар көрсетілмейді, сондықтан алдыңғы әдіс қолданылмайды. Сондықтан шешімдермен бірге олардың периодтар да ізделінді болады. Автономды жүйелердің қиындығы да осы болатын. Ол мәселенің докторант шешімін тауып, жұмыста зерттеулерін келтірген.

- Бұл теорияны жәй дифференциалдық теңдеулердің квазипериодты шешімдері мәселелерін зерттеуге қолдану кезінде зерттелетін жүйелер шешімдерінің көппериодты құрылымдары талдауы қажет болады. Осы бағытта докторант көппериодты шешімдердің периодты компоненттерін анықтауда берілген жүйені дифференциалдау операторының векторлық өрісінің сипаттауышы бойында қарастыру арқылы алынатын квазипериодты жүйелердің бар болуының жеткілікті шарттарын анықтауда қажет болатын нәтижелер алған.

- Сәйкес біртекті жүйелердің нөлден өзге көппериодты шешімдері болмаған кезде біртекті емес жүйелердің көппериодты шешімдерін зерттеу сындық емес жағдайға қарағанда жалпы жағдайға жатады. Докторант сындық

