

**МУСИНА АЛЛА АЛЕКСАНДРОВНА**

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ  
ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ С УЧЕТОМ МАССООБМЕННЫХ  
ПРОЦЕССОВ**

**АННОТАЦИЯ**

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по  
специальности 8D05401 –Математика**

**Общее описание диссертационной работы.** Работа посвящена разработке математических и численных моделей теории фильтрации с учетом массообменных процессов. В ходе исследования особое внимание уделяется взаимодействию между жидкостью и поверхностью грунта, а также влиянию адсорбции на распределение и скорость перемещения фаз. Этот аспект играет значительную роль в точности моделирования и предсказания процессов многофазной фильтрации в реальных пористых средах.

**Актуальность исследования.** В современной нефтяной промышленности широко используется математическое моделирование при проектировании и разработке нефтяных месторождений. Это позволяет решать задачи контроля и прогнозирования добычи нефти и способствует оптимизации ее добычи и извлечению остаточных запасов нефти. Извлечение остаточных запасов нефти - это процесс добычи нефти из месторождений, где уже проводились длительные эксплуатационные работы, и главная добыча приближается к своему завершению.

Кроме аналитических методов решения задач фильтрации используются и численные методы. В последние годы в этой области накопился большой опыт создания как математических, так и численных моделей.

Однако, несмотря на значительные успехи в разработке математических моделей нестационарной многофазной фильтрации, эти достижения еще не привели к радикальному увеличению эффективности прогнозирования извлечения остаточных запасов нефти, и являются далеко не полными. Классические математические модели Маскета-Леверетта и Баклея-Леверетта рассматривают однозначную зависимость фазовой проницаемости от насыщенности и давления. Это возможно только в однородных пластах. На практике нефтяной пласт является неоднородным, кроме этого, еще и пористым. Классические модели являются, в своем роде, равновесным приближением. Неравновесные эффекты также должны быть учтены в модели.

По своим реологическим свойствам нефти Западного Казахстана имеют повышенную вязкость.

На сегодняшний день сохраняется проблема недостаточного учета всех неравновесных эффектов из-за сложности физических процессов (турбулентность, химические реакции, перенос массы и тепла), ограничений в вычислительных ресурсах, доступности данных и упрощения моделей.

Все вышеуказанные факторы свидетельствуют об актуальности диссертационной работы, в которой исследуется модель многофазной фильтрации с учетом массообменных процессов. Модель является обобщением модели Маскета-Леверетта.

Исследование, проводимое в данной диссертации, основывается на существующих достижениях в этой области. Оно дополняет предыдущие исследования, учитывая не только ранее изученные эффекты, но также добавляя в анализ новый аспект - влияние грунта с учетом адсорбции. Таким образом, расширяется область рассмотрения, углубляется понимание и учет сложных взаимодействий в системе.

Диссертационная работа опирается на идеи Баренблатта Г.И., Коновалова А.Н., Монахова В.Н., Мухамбетжанова С.Т.. В работе проведено распространение анализа разностных схем на математические модели вытеснения нефти водой с учетом тепловых и физико-химических эффектов в прискважинной зоне пласта. Эти методы исследования обладают перспективой и могут быть применены к аналогичным проблемам, связанным с родственными процессами.

**Цель исследования.** Разработка математических и численных моделей теории фильтрации, описывающих движение многофазной жидкости с учетом массообменных процессов и построение приближенных решений задачи со свободными границами.

**Задачи исследования:**

- а) исследовать модель неравновесной изотермической фильтрации с учетом адсорбции;
- б) исследовать поведение модели при малых значениях параметра релаксации;
- в) построить приближенное решение задачи неравновесной неизотермической фильтрации на основе вариационного принципа;
- г) исследовать качественные свойства решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации с конвективным теплопереносом;
- д) провести численное исследование задачи неизотермической фильтрации с учетом капиллярных сил;
- е) провести численное исследование одномерной задачи Стефана с подвижными границами в теплопроводности и диффузии.

**Методы исследования.** Для задач, связанных с теорией фильтрации, характерно применение современных функциональных методов для решения задач с подвижными границами в задачах фильтрации многофазных сред. Основными методами исследования служат классические методы математической физики, разностные методы, автотельный метод, вариационный метод и метод оптимизации. При этом также используются численные методы анализа.

**Объектом исследования являются** задачи изотермической и неизотермической неравновесной фильтрации.

**Научная новизна:**

а) обоснована математическая модель неравновесной фильтрации с полимерными растворами. Установлено, что система уравнений Маскета-Леверетта, дополненная уравнением диффузии и кинетическими соотношениями, позволяет описать процессы в пластах при добавлении активной примеси; установлены достаточные условия существования и единственности решения, доказана устойчивость решений. Обосновано, что задача разбивается на три автономные подзадачи;

б) установлены условия, при которых решение задачи неравновесной изотермической фильтрации стремится к обобщённому решению задачи типа Стефана;

в) представлено решение задачи неизотермической фильтрации с учетом массообмена приближенным методом решения на основе вариационного принципа;

г) указаны достаточные условия существования и единственности решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации с конвективным теплопереносом;

д) получены асимптотические оценки движения границы фазового перехода;

д) задача неизотермической фильтрации с учетом капиллярных сил с помощью автомодельных переменных приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и предложен вычислительный алгоритм;

е) представлен алгоритм численного решения задачи с подвижными границами, основанный на методе конечных элементов, позволяющий с высокой точностью отслеживать положение фазовых границ независимо от количества фаз или их изменения по времени.

**Положения, выносимые на защиту:**

- математическая модель неравновесной изотермической и неизотермической фильтрации;
- сходимости к обобщённому решению задачи типа Стефана;
- приближенное решение задачи неизотермической фильтрации;
- достаточные условия существования и единственности решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации с конвективным теплопереносом;
- асимптотические оценки движения границы фазового перехода;
- численные исследования с учетом капиллярных сил;
- алгоритм численного решения с подвижными границами;
- численное исследование в автомодельных переменных.

**Обоснованность и достоверность** исследования достигается за счет сочетания фундаментальных знаний о физических процессах с применением математических моделей и численных методов, а также за счет комплексного подхода, включающего в себя учет различных аспектов физических процессов, математических моделей и численных методов.

Исследование опирается на анализ физических процессов, происходящих в системе нефтедобычи и фильтрации через грунт. Это включает

в себя рассмотрение явлений, таких как теплообмен, массоперенос, адсорбция в грунте, образование парафина и других.

Для описания физических процессов используются математические модели, которые формулируются на основе законов физики, гидромеханики и теории фильтрации. Для анализа и решения математических моделей используются вариационные методы, методы оптимизации, а также метод конечных элементов. Эти методы позволяют получить численные решения уравнений, аппроксимирующих физические процессы.

Достоверность и обоснованность подтверждена публикациями в индексируемых международных журналах из базы Scopus и Web of Science, а также публикациями основных результатов деятельности в журналах, рекомендуемых Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан для публикации основных результатов научной деятельности. Кроме того, достоверность подтверждена апробацией результатов исследования на практике. Результаты диссертации по мере их получения докладывались на семинарах кафедры математики, на конференциях. Достоверность обоснована приведенными доказательствами теорем, корректностью проведения преобразований и подтверждена результатами вычислительных экспериментов. В работе используются результаты, полученные другими авторами ранее и отмеченные ссылками. Достоверность обусловлена также обсуждением результатов диссертационного исследования на научных семинарах.

#### **Теоретическая и практическая значимость исследования:**

- разработанная новая математическая модель позволяет более точно описывать процессы добычи остаточных запасов нефти;

- исследование достаточных условий существования и единственности решений для задач неравновесной фильтрации и фазовых переходов создает основу для дальнейших исследований и приложений в рамках теории фильтрации;

- установление связи между задачами неравновесной изотермической фильтрации и обобщёнными решениями типа Стефана позволяет углубить понимание динамики многофазных систем и их поведения при различных условиях;

- полученные асимптотические оценки для движения границы фазового перехода могут быть использованы для оптимизации технологических процессов и улучшения эффективности разработки месторождений.

**Практическая значимость результатов.** Представленный алгоритм решения применен при решении задачи прогнозирования добычи нефти на месторождениях западного региона Республики Казахстан. Результаты послужили базовыми элементами в блоке программ «ИСАР-2» - это «Цифровая технология по разработке нефтегазовых месторождений ИСАР-2», акт внедрения которой был оформлен в 2023 году в ТОО «Норс Каспиан Ойл» «Информационная система анализа разработки нефтегазовых месторождений».

**Личный вклад автора** заключается в том, что все результаты, которые получены в ходе исследования, получены автором самостоятельно. Участие

научных консультантов заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

**Апробация работы.** Полученные результаты были представлены на конференциях различного уровня. Ниже приведен список, где были доложены результаты диссертационного исследования:

1) IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры», г. Актобе, 24-28.05.2022г., доклад: «О совместном движении жидкостей в поровом пространстве»;

2) международная математическая конференция «Functional Analysis in interdisciplinary applications», 02.07.2023г., Анталья, Турция, доклад «Mathematical Modeling of Fluid Filtration Processes with Consideration of Mass Transfer Processes»;

3) Proceedings of the International University Scientific Forum «Practice Oriented Science: UAE – RUSSIA – INDIA», 25.08.2023г., доклад: «Estimation of fluid volume displacement in the reservoir using mathematical model»;

4) XII Международная научно-практическая конференция «Инновационные научные исследования в современном мире: теория, методология, практика», г. Уфа. 15.08.2023г. доклад: «О разработке цифровой технологии для нефтегазовых месторождений»;

5) традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан. г. Алматы, 16-19.04. 2024г., доклад: «Исследование математической модели неравновесной фильтрации»;

6) Actual problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khwarizmi 2024, доклад: Numerical Modeling of Fluid Filtration Processes with Free Boundaries.

Основные результаты диссертации были представлены на научном семинаре кафедры «Математика» Актюбинского регионального университета им. К. Жубанова «Проблемы дифференциальных уравнений, прикладной математики и информатики» (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор Сартабанов Ж.А., секретарь семинара – к.ф.-м.н., доцент Абдикаликова Г.А.) 12.01.2024 г., 21.02.2024г., 27.02.2024 г., 10.10.2024 г., 7.11.2024 г., 18.02.2025 г.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 10 работ, в том числе 1 статья (article) в международном рецензируемом научном журнале, имеющем показатель по CiteScore (СайтСкор) 2,8, и перцентиль по прикладной математике 34 (Q3) на 2023 г., 1 публикация, входящая в базу данных WoS (Q4) и в список 1 научных изданий, входящих в перечень, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК для публикации основных результатов научной деятельности, 1 публикация, входящая в список 2 научных изданий, входящих в перечень, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК для публикации основных результатов научной деятельности, 6 публикаций в материалах международных научных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов, первый раздел состоит из 5-и подразделов и 5-и

пунктов, второй раздел состоит из 2-ух подразделов и 3-х пунктов, заключения и списка использованной литературы.

**Количество иллюстраций, таблиц и литературных источников.** В работе использованы 8 иллюстраций, 4 таблицы и 94 источника.

**Краткое содержание диссертации.** В данной работе изучены основные теоретические аспекты исследования математической модели фазовых переходов при изотермической и неизотермической фильтрации, а также приближенных методов, применяемых при решении задач теории фильтрации с учетом массообменных процессов.

Во введении дан обзор литературы по теме диссертационного исследования, кратко изложено содержание работы, цель, объект, предмет и задачи исследования, сформулированы результаты, выносимые на защиту.

Первый раздел работы содержит пять подразделов. В первом подразделе оговаривается состояние вопроса совместного движения жидкостей в поровом пространстве с учетом неравновесных эффектов. Приведены понятия и формулы, которые являются основой для понимания процессов совместного движения жидкостей в поровом пространстве с учетом неравновесных эффектов и играют важную роль в развитии моделей и методов анализа транспорта в пористых средах.

Во втором подразделе рассмотрена математическая модель изотермической фильтрации. Исследована математическая модель неравновесной фильтрации, которая описывает процесс вытеснения нефти полимерными растворами. Установлено, что система уравнений Маскета-Леверетта, дополненная кинетическим уравнением и уравнением диффузии, позволяет описать процессы в нефтяных пластах при добавлении активной примеси; установлены достаточные условия существования и единственности решения, доказана устойчивость решений. Обосновано, что задача разбивается на три автономные подзадачи. Основные результаты сформулированы в виде теорем.

В третьем подразделе исследовано поведение исходной системы при малых значениях параметра релаксации  $\tau$ , и поведение решения при предельном переходе  $\tau \rightarrow 0$ . В ходе исследования был сделан вывод, что решение стремится к обобщенному решению задачи Стефана. В изотермической фильтрации подвижные границы отсутствуют, но при малых релаксациях изотермическая система начинает вести себя как неизотермическая система. При  $\tau \rightarrow 0$  изотермическая система быстро реагирует на изменения и переходы между фазами происходят почти мгновенно. Это и есть ключевое допущение задачи Стефана. Установлены условия, при которых решение задачи неравновесной изотермической фильтрации стремится к обобщенному решению задачи типа Стефана. В результате сформулированы теоремы.

В четвертом подразделе рассмотрены приближенные методы решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации. На практике нефтяной пласт это сложная модель, в которой присутствуют неравновесные эффекты. Поэтому был осуществлен переход к неизотермической фильтрации и построена модель неизотермической фильтрации. Представлено решение

задачи неизотермической фильтрации с учетом массообмена приближенным методом решения на основе вариационного принципа. Были сформированы и минимизированы функционалы (мера ошибки между текущими и предыдущими значениями насыщенности). Функционал был выбран таким образом, чтобы описать физические аспекты процесса фильтрации. Основные результаты сформулированы в виде теорем.

В пятом подразделе исследуются качественные свойства решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации. В разделе исследована разрешимость задачи Стефана с конвективным теплопереносом. Рассматриваются три фазы, водная, нефтяная и переходная, а также динамика перехода фаз. Положение свободной границы между жидкостью и твердой фазой, а также распределение температуры внутри каждой фазы описаны автомодельными функциями, доказано существование и единственность решения. В подразделе исследовано асимптотическое поведение решения задачи с учетом конвекции. Получены асимптотические оценки движения границы фазового перехода.

Конвекция может ускорять или замедлять фазовый переход, изменяя скорость движения границы раздела фаз. Построение данной математической модели является актуальной задачей для нефтедобычи. Изменения температуры в пластах, например при интенсификации добычи нефти могут приводить к фазовым изменениям нефти, таким как кристаллизация. Эти процессы могут значительно повлиять на продуктивность месторождений. Моделирование таких процессов важно для оптимизации способов добычи. Найдены обобщенные решения с переходной фазой для задачи Стефана с конвективным переносом тепла. В вышеуказанной постановке получены теоремы существования и единственности, а также изучены качественные свойства решений.

В первом подразделе второго раздела численно исследована задача в автомодельных переменных. Численные расчеты показали, что водонасыщенность и концентрация поверхностно-активных веществ уменьшаются с увеличением пространственной переменной, что указывает на эффективный процесс фильтрации. Используемые численные методы демонстрируют высокую точность, что подтверждается стабильностью результатов при увеличении количества узлов в сетке. Это свидетельствует о корректности выбранного численного подхода.

Было проведено исследование изменения водонасыщенности и концентрации в пористой среде при неизотермической неравновесной фильтрации. По мере прогрессирования процесса фильтрации водонасыщенность падает, что указывает на снижение капиллярного давления.

Представлено численное решение задачи капиллярной пропитки в пористой среде с учетом процессов тепло- и массообмена. Основное внимание уделено построению разностной схемы и ее реализации в условиях неизотермической фильтрации. Используемая модель описывается системой дифференциальных уравнений, включающей члены диффузии, фильтрации и теплопередачи. Основные этапы численного алгоритма включали

дискретизацию расчетной области с равномерной сеткой по пространству и времени, применение метода конечных разностей для аппроксимации производных, учет граничных условий, задающих насыщенность на краях области, итерационный процесс расчета распределения насыщенности с учетом критериев устойчивости. Численные эксперименты подтверждают стабильность и сходимость метода. Поведение системы показывает ожидаемое уменьшение концентрации в пористой среде и подтверждает важность учета капиллярного давления и теплопроводности в задачах фильтрации. Разработан вычислительный алгоритм в автоматических переменных для решения задачи неравновесной фильтрации. Основные результаты сформулированы в виде теоремы.

Во втором подразделе описан алгоритм численного решения задачи с подвижными границами, основанный на методе конечных элементов. Алгоритм позволил с высокой точностью отслеживать положение фазовых границ. Это было достигнуто путем сочетания методов сквозного счета и методов явного выделения фронтов, дает точные результаты при решении задач с подвижными границами. Численный алгоритм является универсальным и может быть применен к задачам теплопроводности и диффузии независимо от количества фаз или их изменения по времени. Применение неявных разностных схем для аппроксимации производных по времени повышает устойчивость алгоритма и улучшает точность учета изменений в положении фазовых границ на каждом временном шаге. Использование итерационных методов для корректировки положения фазовых границ позволило точно отслеживать изменение фаз и учесть возможность появления новых фаз. Коррекция сетки и положения границ осуществлялась динамически на каждом временном шаге. Итерационный процесс численного решения обеспечивает сходимость, корректность решения проверяется на каждом шаге.