

Краевые задачи для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями: методы решения и свойства

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 8D05401 – Математика

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов (первый раздел включает 4 подраздела, второй раздел включает 3 подраздела), заключения и списка использованных источников.

Количество иллюстраций, таблиц и литературных источников. Работа содержит 76 источников, 2 таблицы и 10 рисунков.

Актуальность темы исследования. Интегро-дифференциальные уравнения с импульсным воздействием часто возникают при моделировании физических систем, которые подвергаются резким изменениям в фиксированные моменты времени. Подобные уравнения широко применяются в популяционной биологии, распространении химических веществ, теплопередаче, излучении электромагнитных волн и других процессах. Их изучением занимались многие учёные: D.D. Bainov, P.S. Simeonov, A.M. Samoilenko, N.A. Perestyk, W.M. Haddad, V. Chellaboina, S.G. Neresov, A.O. Ignat'ev, J.J. Nieto, D. O'Regan, V. Lakshmikantham, J. Li и др. Несмотря на это, вопросы разрешимости и построения решений интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием остается актуальной проблемой. Поэтому важно разрабатывать новые конструктивные методы, позволяющие эффективно исследовать краевые задачи для таких уравнений и находить их решения.

Цель исследования: Исследование краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием с использованием метода параметризации Джумабаева и на его основе построение конструктивного метода решения.

Задачи исследования:

а) установить разрешимость специальных задач Коши для линейных и квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием;

б) определить общее решение по Джумабаеву для линейных и квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием;

в) применение общего решения по Джумабаеву к решению краевой задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;

г) установить необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;

д) разработать приближённый численный метод и алгоритмы решения краевой задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;

ж) определить разрешимость специальной задачи Коши для системы квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием;

з) найти общее решение по Джумабаеву для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;

и) привести краевую задачу для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием к системе квазилинейных алгебраических уравнений относительно независимых векторов общего решения по Джумабаеву.

Объект исследования краевые задачи для линейных и квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием.

Предмет исследования. Вопросы разрешимости краевых задач, построение эффективных алгоритмов нахождения решений и их численный анализ.

Научная новизна.

1. Решена специальная задача Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием с параметрами.

2. Построено общее решение по Джумабаеву для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием.

3. С помощью общего решения по Джумабаеву решены краевые задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием.

4. Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием методом параметризации.

5. Разработан и численно реализован алгоритм для нахождения решения краевой задачи линейного интегро-дифференциального уравнения с импульсным воздействием.

6. Решена специальная задача Коши для системы квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и параметрами.

7. Построено общее решение по Джумабаеву для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием.

8. Метод параметризации распространён на краевые задачи для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием.

Основные результаты, выносимые на защиту:

– разрешимость специальной задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием;

– $\Delta_N(\theta)$ общее решение линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;

– метод параметризации для решения краевой задачи для линейного интегрально-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;

– численный метод и алгоритмы нахождения приближённого решения краевой задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;

– разрешимость специальной задачи Коши для системы квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием;

– $\Delta_N(\theta)$ общее решение квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;

– построение системы квазилинейных алгебраических уравнений относительно независимых векторов $\Delta_N(\theta)$ общего решения краевой задачи для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием.

Обоснование необходимости проведения исследования. В диссертационной работе широко применяются методы и результаты теории дифференциальных, интегро-дифференциальных и операторных уравнений. Основной метод анализа и решения рассматриваемых задач – метод параметризации.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Результаты диссертации в основном имеют теоретический характер. Научная значимость работы заключается в разработке конструктивных методов исследования и решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами. Диссертационная работа выполнена в рамках проектов «Методы решения краевых задач для квазилинейных импульсных систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма» (№ AP13268824, 2022-2024 гг.) и «Новое развитие нелинейных операторных уравнений и их приложения» (№ AP23485509, 2024-2026 гг.) по приоритету «Фундаментальные исследования в области естественных наук» в рамках грантового финансирования.

Личный вклад автора заключается в том, что все результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. Вклад научных руководителей заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на следующих мероприятиях:

– Традиционная международная научная апрельская конференция. Институт математики и математического моделирования. Алматы, Казахстан (апрель 2023 г., апрель 2024 г.);

– Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применение», Ташкент, 23-25 ноября 2023 г.

– Научный семинар по дифференциальным уравнениям Национального университета Узбекистана (руководитель семинара – доктор физико-математических наук, профессор Т.К. Юлдашев);

– Научно-исследовательский семинар отдела дифференциальных уравнений и их приложений Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (руководитель семинара – доктор физико-математических наук, доцент З.Э. Муминов);

– Научно-исследовательский семинар «Современные проблемы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений» отдела дифференциальных уравнений и динамических систем Научно-исследовательского института математики и математического моделирования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (руководитель семинара – доктор физико-математических наук, профессор А.Т. Асанова);

– Научный семинар «Проблемы прикладной математики и информатики» кафедры математики Актюбинского регионального университета имени К. Жубанова (руководитель семинара – доктор физико-математических наук, профессор Ж.А. Сартабанов).

Зарубежная стажировка проходила в Институте математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан в период с 11.09.2023 по 20.10.2023 (г. Ташкент, Узбекистан).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, в том числе 2 статьи – в рейтинговых научных журналах, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science, 1 статья – в научном издании, входящем в Список № 1 научных изданий, рекомендуемых Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК, 1 статья – в научном бюллетене Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, 3 публикации – в материалах международных конференций и 1 свидетельство о внесении сведений в Государственный реестр прав на объекты, охраняемые авторским правом (объект авторского права: программа для ЭВМ).

Краткое содержание диссертации. В первой главе диссертации исследуются краевые задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием. В подразделе 1.1 рассматривается разрешимость специальной задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f(t),$$

$$t \neq \theta_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$(\theta_0 = 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_l < T = \theta_{l+1}),$$

$$B_j x(\theta_j - 0) + C_j x(\theta_j + 0) = d_j, \quad d_j \in R^n, j = \overline{1, l}, \quad (2)$$

где $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1, m}$ непрерывные на отрезке $[0, T]$ $n \times n$ матрицы, $f(t)$ – кусочно-непрерывная n вектор-функция на $[0, T]$, с возможными разрывами в точках $t = \theta_j$, $j = \overline{1, l}$, B_j , C_j $n \times n$ постоянные матрицы и d_j постоянный вектор размерности n .

Решение системы (1), (2) называется кусочно-непрерывно дифференцируемая функция $x(t) = PC \left([0, T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^l \right)$ на интервале $(0, T)$ которая удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1) и условиям с импульсными воздействиями (2).

Сужение функции $x(t)$ на r -ый $[t_{r-1}, t_r)$ интервал обозначим через $x_r(t)$, то есть $x_r(t) = x(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$. Для определённости будем считать, что значения функции $x_r(t)$ в левых конечных точках внутренних интервалов равны правым пределам, то есть $x_r(t_{r-1}) = \lim_{t \rightarrow t_{r-1}+0} x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$.

Кроме того, если функция $x(t)$ является кусочно-непрерывно дифференцируемой на интервале $(0, T)$ и для каждой точки $t \in (0, T) \setminus \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Фредгольма с импульсным воздействием (1), (2) то её система сужений $x[t] = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ удовлетворяет следующей системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) x_j(\tau) d\tau + f(t),$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Введём параметры $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$ и $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ новые неизвестные функции, если на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r)$ выполнить подстановку для функции $x_r(t)$ то получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) (u_j(\tau) + \lambda_j) d\tau + f(t),$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}, \quad (4)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (5)$$

В подразделе 1.2 для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием (1), (2) вводится новое понятие общего решения по Джумабаеву. Общее решение играет важную роль в исследовании и решении различных задач, связанных с дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями.

Определение 1. Пусть $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda), \dots, u_N(t, \lambda))$ решение специальной задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма (4), (5). Если ее компоненты удовлетворяют условиям

$$B_j \left(\lambda_{r+(j)} + \lim_{t \rightarrow \theta_j - 0} u_{r+(j)}(t) \right) + C_j \lambda_{r+(j)+1} = d_j, \quad j = \overline{1, l},$$

то функция $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ определяемая равенствами $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) = \lambda_r + u_r(t, \lambda)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$ и $x(\Delta_N(\theta), T, \lambda) = \lambda_N + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t)$ называется $\Delta_N(\theta)$ общим решением по Джумабаеву интегро-дифференциального уравнения с импульсным воздействием (1), (2).

Таким образом, для каждого регулярного разбиения $\Delta_N(\theta)$ функция $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ определяется для всех $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in R^{nN}$ и $t \in [0, T] \setminus \theta_j$, $j = \overline{1, l}$. Эквивалентность системы интегро-дифференциальных уравнений (3) специальной задаче Коши с параметром (4), (5) означает, что для всех $t \in (0, T) \setminus \{t_s, s = \overline{1, N-1}\}$ и $\lambda \in R^{nN}$ функция $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Фредгольма с импульсным воздействием (1), (2)

$$\begin{aligned} x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) = \lambda_r + \sum_{j=1}^N d_{r,j}(\Delta_N(\theta), t) \lambda_j + \\ + b_r(\Delta_N(\theta), t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$x(\Delta_N(\theta), T, \lambda) = \lambda_N + \sum_{j=1}^N d_{N,j}(\Delta_N(\theta), T) \lambda_j + b_N(\Delta_N(\theta), T). \quad (7)$$

Теорема 1. Если

а) $\Delta_N(\theta)$ регулярное разбиение и функция $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ является $\Delta_N(\theta)$ общим решением интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием (1), (2);

б) на отрезке $[0, T]$ задана кусочно-непрерывная функция $\tilde{x}(t)$ с возможными разрывами в точках $t = t_r$, $r = \overline{1, N-1}$;

в) функция $\tilde{x}(t)$ имеет кусочно-непрерывную производную на интервале $(0, T)$ с возможными разрывами в точках θ_j , $j = \overline{1, l}$ и удовлетворяет уравнению (1) при условии (2) для всех $t \in (0, T) \setminus \{t_s, s = \overline{1, N-1}\}$.

тогда существует единственный $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$, такой что для всех $t \in [0, T]$ выполняется равенство $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) = \tilde{x}(t)$.

Следствие 1. Если $\Delta_N(\theta)$ регулярное разбиение, $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ функция $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ является $\Delta_N(\theta)$ общим решением уравнения (1), (2) и функция $\tilde{x}(t)$ решением интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (1) с условием (2), то существует вектор $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$, такой что для всех $t \in [0, T]$ выполняется равенство $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) = \tilde{x}(t)$.

В соответствии с Следствием 1, для любого решения системы (1), (2) существует единственный параметр $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in R^{nN}$, таким образом, общее решение $\Delta_N(\theta)$ соответствует решению системы (1), (2). Решение системы уравнений (1), (2) по сравнению с кусочно-непрерывно дифференцируемой функцией $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$, $t \in (0, T) \setminus \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$ является кусочно-непрерывной функцией на отрезке $[0, T]$ дифференцируемой на интервале $(0, T)$ возможными разрывами в точках θ_j , $j = \overline{1, l}$ и для всех $t \in (0, T)$ удовлетворяет системе (1), (2). Следовательно, если функция $x(t)$ является решением системы (1), (2) то система функций $x[t] = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ составленная из её сужений, удовлетворяет уравнению (1) с импульсным условием (2), а также условиям непрерывности в точках, где импульсное воздействие отсутствует

$$\lim_{t \rightarrow t_{r^-(p)} - 0} x_{r^-(p)}(t) - x_{r^-(p)+1}(t_{r^-(p)}) = 0, \quad p = \overline{1, N-l-1}. \quad (8)$$

Предположим, что $\Delta_N(\theta)$ регулярное разбиение, а функция $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ является общим решением $\Delta_N(\theta)$ системы (1), (2). Используя это решение, импульсные условия (2) и условия непрерывности (3) запишем в следующем виде

$$B_j x(\Delta_N(\theta), \theta_j - 0, \lambda) + C_j x(\Delta_N(\theta), \theta_j + 0, \lambda) = d_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{r^-(p)} - 0} x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) - x(\Delta_N(\theta), t_{r^-(p)}, \lambda) = 0, \quad p = \overline{1, N-l-1}. \quad (10)$$

Используя выражение $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ общего решения $\Delta_N(\theta)$ вида (6), (7) подставляя в условия (9), (10) получаем линейные алгебраические уравнения с $n(N-1)$ параметрами

$$B_j [I + d_{r^+(j), r^+(j)}(\Delta_N(\theta), \theta_j)] \lambda_{r^+(j)} + [B_j d_{r^+(j), r^+(j)+1}(\Delta_N(\theta), \theta_j) + C_j] \lambda_{r^+(j)+1} + \\ + \sum_{\substack{i=1, i \neq r^+(j), \\ i \neq r^+(j)+1}}^N d_{r^+(j), i}(\Delta_N(\theta), \theta_j) \lambda_i = d_j - B_j b_{r^+(j)}(\Delta_N(\theta), \theta_j), \quad j = \overline{1, l}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& [I + d_{r^-(p), r^-(p)}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(p)})] \lambda_{r^-(p)} - [I - d_{r^-(p), r^-(p)+1}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(p)}) + C_j] \times \\
& \times \lambda_{r^-(p)+1} + \sum_{\substack{i=1, i \neq r^-(p), \\ i \neq r^-(p)+1}}^N d_{r^-(p), i}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(p)}) \lambda_i = \\
& = -b_{r^-(p)}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(p)}), \quad p = \overline{1, N-l-1}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Лемма 1. Если система функций $x[t] = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ является решением системы интегро-дифференциальных уравнений (3) и функции $x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$ удовлетворяют условиям (6), то функция $x(t)$, определяемая равенствами $x(t) = x_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r]$ $r = \overline{1, N}$ и $x(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} x_N(t)$, является решением интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием (1), (2).

Теорема 2. Для того чтобы система (1), (2) была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы вектор $b^*(\Delta_N(\theta))$ был ортогонален ядру транспонированной матрицы $(D_*(\Delta_N(\theta)))'$, то есть выполнялось равенство

$$(b^*(\Delta_N(\theta)), \eta) = 0$$

для любого $\eta \in \text{Ker}(D_*(\Delta_N(\theta)))'$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $R^{n(N-1)}$.

Теорема 3. Если $\Delta_N(\theta)$ является регулярным и ранг матрицы $D_*(\Delta_N(\theta))$ равен $n(N-1)$, то система (1), (2) имеет классическое общее решение.

В подразделе 1.3 рассматривается импульсная система (1), (2) с краевым условием

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d_0, \quad d_0 \in R^n. \quad (13)$$

Подставив соответствующие значения общего решения $\Delta_N(\theta)$ в краевое условие (13), получаем линейное алгебраическое уравнение с параметрами

$$B_0 \lambda_1 + C_0 \left[\lambda_N + \sum_{i=1}^N d_{N,i}(\Delta_N(\theta), T) \lambda_i \right] = d_0 - C_0 b_N(\Delta_N(\theta), T). \quad (14)$$

Обозначим через $Q_*(\Delta_N(\theta))$ матрицы, соответствующую левой части уравнений (11), (12), (14). Тогда систему уравнений (11), (12), (14) можно записать в следующем виде

$$Q_*(\Delta_N(\theta)) \lambda = -F_*(\Delta_N(\theta)), \quad \lambda \in R^{nN}, \quad (15)$$

где $F_*(\Delta_N(\theta)) = (-d_1 + B_1 b_{r+(1)}(\Delta_N(\theta), \theta_1), \dots, -d_l + B_l b_{r+(l)}(\Delta_N(\theta), \theta_l),$
 $b_{r-(1)}(\Delta_N(\theta), t_{r-(1)}), \dots, b_{r-(N-l-1)}(\Delta_N(\theta), t_{r-(N-l-1)}),$
 $-d_0 + C_0 b_N(\Delta_N(\theta), T)) \in R^{nN}.$

Лемма 2. Предположим, что $\Delta_N(\theta)$ регулярное разбиение и функция $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ является $\Delta_N(\theta)$ общим решением системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма (1), (2) по Джумабаеву.

(а) если $\lambda^* \in R^{nN}$ является решением уравнения (15), то функция $x^*(t) = x(\Delta_N(\theta), t, \lambda^*)$ будет решением краевой задачи (1), (2), (13);

(б) если $x^{**}(t)$ является решением краевой задачи (1), (2), (13) и $\lambda_r^{**} = x^{**}(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$ параметр составленный из компонент $\lambda^{**} = (\lambda_1^{**}, \dots, \lambda_N^{**}) \in R^{nN}$, то λ^{**} будет решением уравнения (15).

Теорема 4. Для того чтобы задача (1), (2), (13) была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы вектор $F_*(\Delta_N(\theta))$ был ортогонален ядру транспонированной матрицы $(Q_*(\Delta_N(\theta)))'$, то есть выполнялось условие

$$(F_*(\Delta_N(\theta)), \eta) = 0$$

для любого $\eta \in \text{Ker}(Q(\Delta_N(\theta)))'$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в пространстве R^{nN} .

Следствие 2. Для того чтобы задача (1), (2), (13) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица $Q_*(\Delta_N(\theta)): R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ была обратимой.

В подразделе 1.4 рассматривается приближённый численный метод и алгоритм решения краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием. Метод параметризации Джумабаева применяется к краевым задачам для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием (1), (2), (13). Для демонстрации реализации алгоритма и простоты его применения приводятся примеры.

Во второй главе диссертационной работы исследуются краевые задачи для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием. В подразделе 2.1 для определения разрешимости специальной задачи Коши для системы квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием рассматривается квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f_0(t) +$$

$$+\varepsilon f(t, x), \quad t \neq \theta_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad (16)$$

$$(\theta_0 = 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_l < T = \theta_{l+1}),$$

$$B_j x(\theta_j - 0) + C_j x(\theta_j + 0) = d_j, \quad d_j \in R^n, \quad j = \overline{1, l}, \quad (17)$$

где $\varepsilon > 0$, $f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$ непрерывная функция, $\|x\| = \max_{i=\overline{1, n}} |x_i|$.

Решение системы (16), (17) называется функция $x(t) \in PC([0, T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^l)$ кусочно-непрерывно дифференцируемая на интервале $(0, T)$, которая удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (16) и импульсным условиям (17).

Если функция $x(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Фредгольма с импульсным воздействием (16), (17) и $(t, x(t)) \in G^{(0)}(\rho)$, то ее система сужений $x[t] = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ удовлетворяет следующей системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_r}{dt} &= A(t)x_r + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) x_j(\tau) d\tau + f_0(t) + \\ &+ \varepsilon f(t, x_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вводя дополнительные параметры $\lambda_r \triangleq x_r(t_{r-1})$ и выполняя замену функции $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ получаем систему интегро-дифференциальных уравнений с параметром

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) [u_j(\tau) + \lambda_j] d\tau + f_0(t) + \\ &+ \varepsilon f(t, u_r + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \end{aligned} \quad (19)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (20)$$

Задача (19), (20) является специальной задачей Коши для системы квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметрами.

Рассмотрим линейную специальную задачу Коши, соответствующую задаче (19), (20)

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) [u_j(\tau) + \lambda_j] d\tau + \\ + f_0(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \end{aligned} \quad (21)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (22)$$

Условие А. Пусть выполняются следующие неравенства:

$$(1) \|f(t, x)\| \leq M_0, (t, x) \in G^0(\rho), M_0 - \text{постоянная};$$

$$(2) M_1 \bar{h} = [(\alpha + K_0)(\rho + \|\lambda^{(0)}\|) + K_1 + \varepsilon M_0] \bar{h} < \rho, \text{ где}$$

$$K_0 = \sum_{k=1}^m \max_{t \in [0, T]} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(\tau)\| d\tau, \quad \alpha = \max_{t \in [0, T]} A(t), \quad K_1 = \max_{t \in [0, T]} f_0(t),$$

$$\bar{h} = \max_{r=\overline{1, N}} (t_r - t_{r-1}).$$

выберем числа $\rho_\lambda = \rho - M_1 \bar{h}$, $\rho_v = M_1 \bar{h}$ и составим следующие множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in R^{nN}: \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho_\lambda, r = \overline{1, N}\},$$

$$S(0, \rho_v) = \{v[t] \in C([0, T], \Delta_N(\theta), R^{nN}): \|v[\cdot]\|_2 < \rho_v\},$$

$$G_p^0(\rho) = \{(t, x): t \in [t_{p-1}, t_p), \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1(t_p - t)\}, p = \overline{1, N-1},$$

$$G_N^0(\rho) = \{(t, x): t \in [t_{N-1}, t_N], \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1(t_N - t)\}$$

и

$$G_0(\Delta_N(\theta), \rho) = \bigcup_{r=1}^N G_r^0(\rho).$$

На замкнутых промежутках рассмотрим следующую специальную задачу Коши:

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)(v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) [v_j(\tau) + \lambda_j] d\tau + f_0(t) +$$

$$+\varepsilon f(t, v_r + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad (23)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (24)$$

Теорема 5. Пусть $I - G(\Delta_N(\theta))$ матрица будет обратимой, условие A выполнено и справедливы следующие неравенства:

$$(i) \|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq L_0 \|x' - x''\|, \quad L_0 - \text{постоянная}, \quad (t, x'), (t, x'') \in G_0(\rho);$$

$$(ii) (\alpha + L_0 + K_0)\bar{h} < 1;$$

$$(iii) \chi e^{\alpha(t_r - t_{r-1})} (\varepsilon M_0 + K_1 + (\alpha + K_0)(\rho_\lambda + \|\lambda^{(0)}\|)) \bar{h} < \rho_v, \text{ где}$$

$$\chi = 1 + \bar{h} \sum_{k=1}^m \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{p=1}^m \|\mathcal{R}_{k,p}(\Delta_N(\theta))\| \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_p(s)\| ds e^{\alpha \bar{h}}.$$

Тогда для любого $\hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ на множестве $S(0, \rho_v)$ существует единственное решение специальной задачи Коши (23), (24), представляющее собой систему функций $v[t, \hat{\lambda}] = (v_1(t, \hat{\lambda}), \dots, v_N(t, \hat{\lambda}))$.

Определение 2. Если система функций $u[t, \lambda, \varepsilon] = (u_1(t, \lambda, \varepsilon), \dots, u_N(t, \lambda, \varepsilon)) \in S(v[t, \lambda], \rho_u)$ является единственным решением специальной задачи Коши (19), (20) с параметрами $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ и выполняются условия

$$B_j \left(\lambda_{r+(j)} + \lim_{t \rightarrow \theta_{j-0}} u_{r+(j)}(t, \lambda, \varepsilon) \right) + C_j \lambda_{r+(j)+1} = d_j, \quad j = \overline{1, l},$$

тогда функция $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon)$ определяемая равенствами $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon) = \lambda_r + u_r(t, \lambda, \varepsilon), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}$ и $x(\Delta_N(\theta), T, \lambda, \varepsilon) = \lambda_N + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon)$ называется $\Delta_N(\theta)$ общим решением по Джумабаеву для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения с импульсным воздействием (16), (17) на множестве $G^0(\Delta_N(\theta), \rho)$.

Из определения 2 и теоремы 5 следует следующий результат.

Теорема 6. Если выполняются условия теоремы 5, то система (16), (17) имеет на множестве $G^0(\Delta_N(\theta), \rho)$ $\Delta_N(\theta)$ общее решение в виде функции $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon)$ которое можно записать следующим образом

$$x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon) = y(\Delta_N(\theta), t, \lambda) + \Delta x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon)$$

и выполняется следующая оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\Delta x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon)\| \leq \frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\|,$$

$$\text{где } \Delta x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon) = u_r(t, \lambda, \varepsilon) - v_r(t, \lambda), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N},$$

$$\Delta x(\Delta_N(\theta), T, \lambda, \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon) - \lim_{t \rightarrow T-0} v_N(t, \lambda).$$

В подразделе 2.3 диссертации формулируются краевые задачи для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием, которые сводятся к системе квазилинейных алгебраических уравнений относительно независимых векторов $\Delta_N(\theta)$ общего решения. Рассмотрим в фиксированные моменты времени квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма с импульсным воздействием (16), (17) с краевым условием (3). Для регулярного разбиения $\Delta_N(\theta)$, подставляя соответствующие выражения общего решения в краевое условие (3), импульсные условия (17) и условия непрерывности (18), получаем следующую систему уравнений

$$B_0 x(\Delta_N(\theta), 0, \lambda) + C_0 x(\Delta_N(\theta), T, \lambda) = d_0, \quad (25)$$

$$B_j x(\Delta_N(\theta), \theta_j - 0, \lambda) + C_j x(\Delta_N(\theta), \theta_j + 0, \lambda) = d_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad (26)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{r-(p)}-0} x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) - x(\Delta_N(\theta), t_{r-(p)}, \lambda) = 0, \quad p = \overline{1, N - l - 1}. \quad (27)$$

Подставляя $\Delta_N(\theta)$ общее решение специальной задачи Коши (19), (20) в краевое условие (25), импульсные условия (26) и условия непрерывности (27), получаем систему квазилинейных алгебраических уравнений

$$Q_*(\Delta_N(\theta))\lambda = -F_*(\Delta_N(\theta)) - F^*(\Delta_N(\theta), \varepsilon, f). \quad (28)$$

Теорема 7. Пусть выполняются условия теоремы 5 и следующие неравенства:

$$(i) \quad Q_*(\Delta_N(\theta)) \text{ обратима и } \|[Q_*(\Delta_N(\theta))]^{-1}\| \leq \gamma;$$

$$(ii) \quad q_\varepsilon = \varepsilon \chi L_0 < 1;$$

$$(iii) \quad \sigma_\varepsilon = q_\varepsilon \left(\frac{\chi}{1 - q_\varepsilon} (\alpha + K_0 + \varepsilon L_0) + 1 \right) < 1;$$

$$(iv) \quad \frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda^{(0)}) + \lambda_r^{(0)})\| < \rho_v;$$

$$(v) \frac{1}{1 - \sigma_\varepsilon} \frac{\varepsilon \chi}{1 - q_\varepsilon} \gamma \max(1, \|D\|) \max \left(\|d_0\| + \|C_0\|, \max_{j=1, l} (\|d_j\| + \|B_j\|), 1 \right)$$

$$\times \max_{r=1, N} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda^{(0)}) + \lambda_r^{(0)})\| < \rho_\lambda.$$

Тогда система квазилинейных алгебраических уравнений (28) имеет единственное решение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$.

Основные результаты диссертационной работы:

- установлена разрешимость специальной задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием и параметрами;
- построено общее решение по Джумабаеву для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;
- общее решение по Джумабаеву применено для решения краевой задачи линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;
- установлены необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;
- предложены численный метод и алгоритмы нахождения приближённого решения краевой задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;
- установлена разрешимость специальной задачи Коши для системы квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с импульсным воздействием;
- построено общее решение по Джумабаеву для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием;
- краевая задача для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсным воздействием сведена к системе квазилинейных алгебраических уравнений относительно независимых векторов общего решения по Джумабаеву.