

**Импульс әсерлі квазисызықтық интегралдық-дифференциалдық
тендеулер үшін шеттік есептер: шешу әдістері және қасиеттері**

8D05401 – Математика мамандағы бойынша философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның

АНДАТПАСЫ

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен (бірінші бөлімде 4 бөлімше, екінші бөлімде 3 бөлімше), қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Суреттер, кестелер мен әдебиеттер саны. Жұмыста 76 әдебиет, 2 кесте және 10 сурет пайдаланылды.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі импульс әсерлі интегралдық-дифференциалдық тендеулер белгілі бір уақыт мезеттерінде кенет өзгерістерге ұшырайтын көптеген физикалық жүйелерді модельдеу кезінде жиі кездесетіндіктен және бұл тендеулер үшін шеттік есептердің шешілімділігін тиімді анықтауға, шешімдерін табуға мүмкіндік беретін жаңа конструктивті әдістерді дамыту қажеттілігінде.

Импульс әсерлі интегралдық-дифференциалдық тендеулер популяциялық биологияда, химиялық заттардың таралуында, жылудың таралуында, электромагниттік толқындардың сәулеленуінде және т.б. процестер мен құбылыстарды математикалық модельдеудің тиімді құралы болып табылады. Бұл тендеулерді зерттеумен көптеген ғалымдар айналысты: D.D. Bainov және P.S. Simeonov (1989), D.D. Bainov және P.S. Simeonov (1993), A.M. Samoilenko және N.A. Perestyk (1995), W.M. Haddad, V. Chellaboina және S.G. Neresov (2006), A.O. Ignat'ev (2008), J.J. Nieto және D. O'Regan (2009), V. Lakshmikantham, J. Li (2012). Соған қарамастан, импульс әсерлі интегралдық-дифференциалдық тендеулердің шешілімділігі мен олардың шешімдерін құру мәселелері өзекті күйінде қалып отыр. Сондықтан мұндай тендеулерге арналған шеттік есептерді тиімді зерттеуге және олардың шешімдерін табуға мүмкіндік беретін жаңа конструктивті әдістерді әзірлеу маңызды.

Зерттеу мақсаты: Импульс әсерлі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық тендеулері үшін шеттік есептерді Джумабаев параметрлеу әдісімен зерттеу және оның негізінде шешудің конструктивті әдісін құру.

Зерттеу міндеттері:

- а) импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық тендеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешілімділігін орнату;
- ә) импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық тендеуі үшін Джумабаев бойынша жалпы шешімді құру;
- б) Джумабаев бойынша жалпы шешімді импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық тендеуі үшін шеттік есепті шешуде қолдану;

в) импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттарын орнату;

г) импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің жуық шешімін табудың сандық әдісі мен алгоритмдерін ұсыну;

ғ) импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешілімділігін анықтау;

д) импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Джумабаев бойынша жалпы шешімді құру;

е) импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті Джумабаев бойынша жалпы шешімнің тәуелсіз векторларына қатысты квазисызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіру.

Зерттеу нысаны импульс әсерлі сызықтық және квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер.

Зерттеу пәні. Импульс әсерлі сызықтық және квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептердің шешілімділік мәселелері, олардың шешімдерін табудың тиімді алгоритмдерін құру және сандық талдау.

Ғылыми жаңалық.

1. Параметрлері бар импульс әсерлі сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі шешілді.

2. Импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің Джумабаев бойынша жалпы шешімі құрылды.

3. Импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептер Джумабаев бойынша жалпы шешімі арқылы шешілді.

4. Параметрлеу әдісі арқылы импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептердің шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары орнатылды.

5. Импульс әсерлі сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешімін табуға арналған алгоритм ұсынылды және сандық түрде жүзеге асырылды.

6. Параметрлері бар импульс әсерлі квазисызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі шешілді.

7. Импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеудің Джумабаев бойынша жалпы шешімі құрылды.

8. Параметрлеу әдісі импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуге арналған шеттік есептерге кеңейтілді.

Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер:

– импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешілімділігі;

– импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі;

– импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті шешудің параметрлеу әдісі;

– импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің жуық шешімін табудың сандық әдісі мен алгоритмдері;

– импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешілімділігі;

– импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі;

– импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепке $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімінің тәуелсіз векторларына қатысты квазисызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін құру.

Зерттеу жұмыстарын жүргізу қажеттігінің негіздемесі. Диссертациялық жұмыста дифференциалдық, интегралдық-дифференциалдық және операторлық теңдеулер теориясының әдістері мен нәтижелері кеңінен қолданылады. Зерттелетін есептерді талдау мен шешудің негізгі әдісі – параметрлеу әдісі.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертация нәтижелері негізінен теориялық сипатқа ие. Жұмыстың ғылыми маңыздылығы – импульс әсерлі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу мен шешудің конструктивті әдістерін әзірлеу.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс «Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеулерінің квазисызықты импульсті жүйелері үшін шеттік есептерді шешу әдістері» (№AP13268824, 2022-2024 жж.) және «Сызықтық емес операторлық теңдеулердің жаңа дамуы және олардың қолданысы» (№AP23485509, 2024-2026жж.) жобалары аясында «Жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулер» басымдығы бойынша гранттық қаржыландыру шеңберінде орындалды.

Автордың жеке үлесі диссертациялық жұмыста келтірілген барлық нәтижелер автор тарапынан алынды. Ғылыми кеңесшілердің үлесі есептерді қоюдан және алынған нәтижелерді талқылаудан тұрады.

Жұмысты апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

– Сәуір айындағы дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Математика және математикалық модельдеу институты. Алматы, Қазақстан (сәуір 2023 ж., сәуір 2024 ж.);

– «Дифференциалдық теңдеулердің заманауи мәселелері және олардың қолданылуы» халықаралық ғылыми конференция, Ташкент, 23-25 қараша 2023 ж.;

– Өзбекстан Ұлттық университетінің Дифференциалдық теңдеулер ғылыми семинары (семинар жетекшісі – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Юлдашев Т.К.);

– Ўзбекистон Республикасы Ғылым академиясының В.И. Романовский атындағы Математика институты Дифференциалдық теңдеулер және олардың қолданылуы бөлімінің ғылыми-зерттеу семинары (семинар жетекшісі – физика-математика ғылымдарының докторы, доцент Муминов З.Э.);

– Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Математика және математикалық модельдеу ҒЗИ Дифференциалдық теңдеулер және динамикалық жүйелер бөлімінің «Дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің қазіргі мәселелері» ғылыми-зерттеу семинары (семинар жетекшісі – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Асанова А.Т.);

– Қ.Жұбанов атындағы АӨУ математика кафедрасының «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары (семинар жетекшісі – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Ж.А. Сартабанов).

Шетелдік тағылымдама 11.09.-20.10.2023 аралығында Ўзбекистон Республикасы Ғылым академиясының В.И. Романовский атындағы Математика институтында (Ўзбекистон, Ташкент) өтілді.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 8 жұмыс жарияланды, оның ішінде 2 мақала Scopus және Web of Science мәліметтер базаларында индекстелген рейтингтік ғылыми журналда, 1 мақала ҚР ҒЖБМ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынатын ғылыми басылымдар тізбесінің 1-Тізіміне енетін ғылыми басылымда, 1 мақала Ўзбекистон Республикасы Ғылым академиясының В.И. Романовский атындағы Математика институтының ғылыми бюллетенінде, 3 жарияланым халықаралық конференция материалдарында жарияланды және 1 Авторлық құқықпен қорғалатын объектілерге құқықтардың мемлекеттік тізілімге мәліметтерді енгізу туралы куәлік, Авторлық құқық объектісі: ЭЕМ-ге арналған бағдарлама.

Диссертацияның қысқаша мазмұны. Диссертацияның бірінші бөлімінде импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептер зерттеледі. 1.1 бөлімшесінде импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешілімділігі қарастырылады

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f(t),$$

$$t \neq \theta_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$(\theta_0 = 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_l < T = \theta_{l+1}),$$

$$B_j x(\theta_j - 0) + C_j x(\theta_j + 0) = d_j, \quad d_j \in R^n, \quad j = \overline{1, l}, \quad (2)$$

мұндағы $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1, m}$ $[0, T]$ аралығында үзіліссіз $n \times n$ матрицалар, $f(t)$ — $[0, T]$ аралығында $t = \theta_j$, $j = \overline{1, l}$ нүктелерінде мүмкін үзілістермен бөлікті-үзіліссіз n вектор-функция, B_j , C_j $n \times n$ тұрақты матрицалар және d_j n өлшемді тұрақты вектор.

(1), (2) жүйенің шешімі (1) интегралдық-дифференциалдық теңдеуді, (2) импульс әсерлі шарттарды қанағаттандыратын $(0, T)$ аралығында бөлікті-үзіліссіз дифференциалданатын $x(t) = PC \left([0, T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^l \right)$ функциясы.

$x(t)$ функциясының r -ші $[t_{r-1}, t_r)$ интервалға тарылуын $x_r(t)$ арқылы белгілейміз, яғни $x_r(t) = x(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$. Анықтылық үшін ішкі интервалдардың сол жақ шеткі нүктелеріндегі $x_r(t)$ функциясының мәндері оң жақты шектерге тең деп ұйғарамыз, яғни $x_r(t_{r-1}) = \lim_{t \rightarrow t_{r-1}+0} x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$.

Сонымен қатар, егер $x(t)$ функциясы $(0, T)$ интервалында бөлікті-үзіліссіз дифференциалданса және $t \in (0, T) \setminus \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$ әр нүктесі үшін (1), (2) импульс әсерлі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырса, онда оның $x[t] = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ тарылулар жүйесі келесі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) x_j(\tau) d\tau + f(t),$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}. \quad (3)$$

$\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$ параметрлерін және $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ жаңа белгісіз функцияларын енгіземіз, әрбір $[t_{r-1}, t_r)$ интервалында $x_r(t)$ функциясына ауыстыру жасасақ, келесі параметрлі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) (u_j(\tau) + \lambda_j) d\tau + f(t),$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}, \quad (4)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (5)$$

1.2 бөлімшесінде (1), (2) импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін Джумабаев бойынша жалпы шешімнің жаңа ұғымы енгізіледі. Жалпы шешім дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулерге қатысты әртүрлі есептерді зерттеу мен шешуде маңызды рөл атқарады.

1-анықтама. $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda), \dots, u_N(t, \lambda))$ функциялар жүйесі (4), (5) параметрлі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешімі болса және оның компоненттері келесі

$$B_j \left(\lambda_{r+(j)} + \lim_{t \rightarrow \theta_{j-0}} u_{r+(j)}(t) \right) + C_j \lambda_{r+(j)+1} = d_j, \quad j = \overline{1, l}$$

шарттарды қанағаттандырса, $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) = \lambda_r + u_r(t, \lambda)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$ және $x(\Delta_N(\theta), T, \lambda) = \lambda_N + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t)$ теңдіктерімен анықталатын $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ функциясы (1), (2) импульс әсерлі интегралдық-дифференциалдық теңдеудің Джумабаев бойынша $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі деп аталады.

Осылайша әрбір $\Delta_N(\theta)$ регулярлы бөліктеуі үшін $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ функциясы барлық $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in R^{nN}$ және $t \in [0, T] \setminus \theta_j$, $j = \overline{1, l}$ үшін анықталады. (3) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің (4), (5) параметрлі арнайы Коши есебіне эквиваленттілігі барлық $t \in (0, T) \setminus \{t_s, s = \overline{1, N-1}\}$ және $\lambda \in R^{nN}$ үшін $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ функциясы (1), (2) импульс әсерлі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырады дегенді білдіреді. Сонымен $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешім келесі өрнектермен анықталады

$$x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) = \lambda_r + \sum_{j=1}^N d_{r,j}(\Delta_N(\theta), t) \lambda_j + b_r(\Delta_N(\theta), t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}, \quad (6)$$

$$x(\Delta_N(\theta), T, \lambda) = \lambda_N + \sum_{j=1}^N d_{N,j}(\Delta_N(\theta), T) \lambda_j + b_N(\Delta_N(\theta), T). \quad (7)$$

1-теорема. Егер

а) $\Delta_N(\theta)$ регулярлы бөліктеу және $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ функциясы (1), (2) импульс әсерлі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі болса;

ә) $[0, T]$ аралығында $t = t_r$, $r = \overline{1, N-1}$ нүктелерінде мүмкін үзілістермен бөлікті-үзіліссіз $\tilde{x}(t)$ функциясы берілсе;

б) $\tilde{x}(t)$ функциясының θ_j , $j = \overline{1, l}$ нүктелерінде мүмкін үзілістермен $(0, T)$ аралығында бөлікті-үзіліссіз туындысы бар болса және барлық $t \in (0, T) \setminus \{t_s, s = \overline{1, N-1}\}$ үшін (2) шартты (1) теңдеуін қанағаттандырса; онда барлық $t \in [0, T]$ үшін $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) = \tilde{x}(t)$ теңдігі орындалатын жалғыз $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$ бар болады.

1-салдар. $\Delta_N(\theta)$ регулярлы бөліктеу, $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ функциясы (1), (2) теңдеуінің $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі және $\tilde{x}(t)$ функциясы (2) шартты (1) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің шешімі болса, онда

барлық $t \in [0, T]$ үшін $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) = \tilde{x}(t)$ теңдігі орындалатындай жалғыз $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$ бар болады.

1-салдарға сәйкес (1), (2) жүйенің кез келген шешіміне сәйкес жалғыз $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in R^{nN}$ параметр бар болады, осылайша $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі (1), (2) жүйенің шешіміне сәйкес келеді. (1), (2) теңдеулер жүйесінің шешімі (1), (2) жүйесін қанағаттандыратын бөлікті-үзіліссіз дифференциалданатын $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$, $t \in (0, T) \setminus \{t_p, p = \overline{1, N-l-1}\}$ функциясына қарағанда, $[0, T]$ аралығында бөлікті-үзіліссіз, θ_j , $j = \overline{1, l}$ нүктелерінде мүмкін үзілістермен $(0, T)$ интервалында бөлікті-үзіліссіз дифференциалданады және барлық $t \in (0, T)$ үшін (1), (2) жүйесіне сәйкес келеді. Сондықтан егер $x(t)$ функциясы (1), (2) жүйенің шешімі болса, онда оның тарылуларынан құралған $x[t] = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ функциялар жүйесі (2) импульс әсерлі шартты (1) теңдеуімен қатар импульс әсері жоқ нүктелерде үзіліссіздік шарттарын да қанағаттандырады:

$$\lim_{t \rightarrow t_{r^-(p)} - 0} x_{r^-(p)}(t) - x_{r^-(p)+1}(t_{r^-(p)}) = 0, \quad p = \overline{1, N-l-1}. \quad (8)$$

$\Delta_N(\theta)$ регулярлы бөліктеу және $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ функциясы (1), (2) жүйенің $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі деп ұйғарамыз. Осы шешімді қолданып (2) импульс шарттары мен (3) үзіліссіздік шарттарын келесі түрде жазамыз

$$B_j x(\Delta_N(\theta), \theta_j - 0, \lambda) + C_j x(\Delta_N(\theta), \theta_j + 0, \lambda) = d_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{r^-(p)} - 0} x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) - x(\Delta_N(\theta), t_{r^-(p)}, \lambda) = 0, \quad p = \overline{1, N-l-1}. \quad (10)$$

$x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ - $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімінің (6), (7) түріндегі өрнектерін (9), (10) шарттарына қойып $n(N-1)$ параметрлі сызықтық алгебралық теңдеулерді аламыз

$$B_j [I + d_{r^+(j), r^+(j)}(\Delta_N(\theta), \theta_j)] \lambda_{r^+(j)} + [B_j d_{r^+(j), r^+(j)+1}(\Delta_N(\theta), \theta_j) + C_j] \lambda_{r^+(j)+1} + \\ + \sum_{\substack{i=1, i \neq r^+(j), \\ i \neq r^+(j)+1}}^N d_{r^+(j), i}(\Delta_N(\theta), \theta_j) \lambda_i = d_j - B_j b_{r^+(j)}(\Delta_N(\theta), \theta_j), \quad j = \overline{1, l}, \quad (11)$$

$$[I + d_{r^-(p), r^-(p)}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(p)})] \lambda_{r^-(p)} - [I - d_{r^-(p), r^-(p)+1}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(p)}) + C_j] \times \\ \times \lambda_{r^-(p)+1} + \sum_{\substack{i=1, i \neq r^-(p), \\ i \neq r^-(p)+1}}^N d_{r^-(p), i}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(p)}) \lambda_i =$$

$$= -b_{r-(p)}(\Delta_N(\theta), t_{r-(p)}), \quad p = \overline{1, N-l-1}. \quad (12)$$

1-лемма. Егер $x[t] = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ функциялар жүйесі (3) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі болса және $x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$ функциялар (6) шарттарын қанағаттандырса, онда $x(t) = x_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$ $r = \overline{1, N}$ және $x(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} x_N(t)$ теңдіктерімен анықталатын $x(t)$ функциясы (1), (2) импульс әсерлі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің шешімі болады.

2-теорема. (1), (2) жүйесі шешілімді болуы үшін $b^*(\Delta_N(\theta))$ векторы $(D_*(\Delta_N(\theta)))'$ транспонирленген матрицасының өзегіне ортогональ, яғни

$$(b^*(\Delta_N(\theta)), \eta) = 0$$

теңдігі кез келген $\eta \in \text{Ker} (D_*(\Delta_N(\theta)))'$ үшін орындалуы қажетті және жеткілікті, мұндағы $(\cdot, \cdot) - R^{n(N-1)}$ кеңістігіндегі скаляр көбейтінді.

3-теорема. Егер $\Delta_N(\theta)$ регулярлы және $D_*(\Delta_N(\theta))$ матрицасының рангісі $n(N-1)$ -ге тең болса, онда (1), (2) жүйенің классикалық жалпы шешімі бар болады.

1.3 бөлімшесінде

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d_0, \quad d_0 \in R^n \quad (13)$$

шеттік шартымен (1), (2) импульс жүйесін қарастырамыз.

$\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімнің сәйкес мәндерін (13) шеттік шартына қойып параметрлері бар сызықтық алгебралық теңдеуді аламыз

$$B_0 \lambda_1 + C_0 \left[\lambda_N + \sum_{i=1}^N d_{N,i}(\Delta_N(\theta), T) \lambda_i \right] = d_0 - C_0 b_N(\Delta_N(\theta), T), \quad (14)$$

$Q_*(\Delta_N(\theta))$ арқылы (11), (12), (14) теңдеулерінің сол жағына сәйкес матрицаны белгілейміз. Сонда (11), (12), (14) теңдеулер жүйесін келесі түрде жазуға болады

$$Q_*(\Delta_N(\theta)) \lambda = -F_*(\Delta_N(\theta)), \quad \lambda \in R^{nN}, \quad (15)$$

мұндағы $F_*(\Delta_N(\theta)) = (-d_1 + B_1 b_{r+(1)}(\Delta_N(\theta), \theta_1), \dots, -d_l + B_l b_{r+(l)}(\Delta_N(\theta), \theta_l),$

$$b_{r-(1)}(\Delta_N(\theta), t_{r-(1)}), \dots, b_{r-(N-l-1)}(\Delta_N(\theta), t_{r-(N-l-1)}),$$

$$-d_0 + C_0 b_N(\Delta_N(\theta), T)) \in R^{nN}.$$

2-лемма. $\Delta_N(\theta)$ регулярлы бөліктеу және $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda)$ функциясы (1), (2) импульс әсерлі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің Джумабаев бойынша $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі деп ұйғарамыз.

(а) егер $\lambda^* \in R^{nN}$ (15) теңдеуінің шешімі болса, онда $x^*(t) = x(\Delta_N(\theta), t, \lambda^*)$ функциясы (1), (2), (13) шеттік есебінің шешімі болады;

(ә) егер $x^{**}(t)$ (1), (2), (13) шеттік есебінің шешімі және $\lambda_r^{**} = x^{**}(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$ компоненттерінен тұратын $\lambda^{**} = (\lambda_1^{**}, \dots, \lambda_N^{**}) \in R^{nN}$ параметр болса, онда λ^{**} (15) теңдеуінің шешімі болады.

4-теорема. (1), (2), (13) есебі шешілімді болуы үшін $\mathcal{F}_*(\Delta_N(\theta))$ векторы $(Q_*(\Delta_N(\theta)))'$ транспонирленген матрицасының өзегіне ортогональ, яғни

$$(\mathcal{F}_*(\Delta_N(\theta)), \eta) = 0$$

теңдігі кез келген $\eta \in \text{Ker}(Q(\Delta_N(\theta)))'$ үшін орындалуы қажетті және жеткілікті, мұндағы $(\cdot, \cdot) - R^{nN}$ кеңістігіндегі скаляр көбейтінді.

2-салдар. (1), (2), (13) есебі бірімәнді шешілімді болуы үшін $Q_*(\Delta_N(\theta)): R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ матрицасы қайтымды болуы қажетті және жеткілікті.

1.4 бөлімшесінде импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептердің жуық шешімдерін табу алгоритмдері қарастырылады. Джумабаев параметрлеу әдісі (1), (2), (13) импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерге қолданылады. Алгоритмнің жүзеге асырылуын және орындалуының қарапайымдылығын көрсету үшін мысалдар келтіріледі.

Диссертациялық жұмыстың 2 бөлімінде импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептер зерттеледі. 2.1 бөлімшесінде импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешілімділігін анықтау үшін бекітілген уақыт мезеттерінде импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуін қарастырамыз

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & A(t)x + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f(t) + \\ & + \varepsilon f(t, x), \quad t \neq \theta_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \end{aligned} \quad (16)$$

$$(\theta_0 = 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_l < T = \theta_{l+1}),$$

$$B_j x(\theta_j - 0) + C_j x(\theta_j + 0) = d_j, \quad d_j \in R^n, \quad j = \overline{1, l}, \quad (17)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$, $f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$ үзіліссіз функция, $\|x\| = \max_{i=\overline{1, n}} |x_i|$.

(16), (17) жүйенің шешімі (16) интегралдық-дифференциалдық теңдеуді, (17) импульс әсерлі шарттарын қанағаттандыратын $(0, T)$ аралығында бөлікті-үзіліссіз дифференциалданатын $x(t) \in PC\left([0, T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^l\right)$ функциясы.

Егер $x(t)$ функциясы (16), (17) импульс әсерлі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырса және $(t, x(t)) \in G^{(0)}(\rho)$, онда оның $x[t] = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ тарылулар жүйесі төмендегі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады

$$\begin{aligned} \frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) x_j(\tau) d\tau + f(t) + \\ + \varepsilon f(t, x_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (18)$$

$\lambda_r \triangleq x_r(t_{r-1})$ қосымша параметрлерді енгізу және $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ функциясын ауыстыру арқылы параметрлі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) [u_j(\tau) + \lambda_j] d\tau + f(t) + \\ + \varepsilon f(t, u_r + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \end{aligned} \quad (19)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (20)$$

(19), (20) есебі параметрлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі болып табылады.

(19), (20) есебіне сәйкес сызықтық арнайы Коши есебін қарастырамыз

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) [u_j(\tau) + \lambda_j] d\tau + \\ + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \end{aligned} \quad (21)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (22)$$

А шарты. Келесі теңсіздіктер орындалсын:

(1) $\|f(t, x)\| \leq M_0, (t, x) \in G^0(\rho), M_0 - \text{тұрақты};$

(2) $M_1 \bar{h} = [(\alpha + K_0)(\rho + \|\lambda^{(0)}\|) + K_1 + \varepsilon M_0] \bar{h} < \rho, \text{ мұндағы}$

$$K_0 = \sum_{k=1}^m \max_{t \in [0, T]} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(\tau)\| d\tau, \quad \alpha = \max_{t \in [0, T]} A(t), \quad K_1 = \max_{t \in [0, T]} f_0(t),$$

$$\bar{h} = \max_{r=1, \overline{N}} (t_r - t_{r-1}).$$

$\rho_\lambda = \rho - M_1 \bar{h}, \quad \rho_v = M_1 \bar{h}$ сандарын таңдаймыз және келесі жиындарды құрамыз:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in R^{nN}: \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho_\lambda, r = \overline{1, N}\},$$

$$S(0, \rho_v) = \{v[t] \in C([0, T], \Delta_N(\theta), R^{nN}): \|v[\cdot]\|_2 < \rho_v\},$$

$$G_p^0(\rho) = \{(t, x): t \in [t_{p-1}, t_p), \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1(t_p - t)\}, p = \overline{1, N-1},$$

$$G_N^0(\rho) = \{(t, x): t \in [t_{N-1}, t_N], \|x - x_0(t)\| < \rho - M_1(t_N - t)\}$$

және

$$G_0(\Delta_N(\theta), \rho) = \bigcup_{r=1}^N G_r^0(\rho).$$

Тұйық аралық интервалдарда келесі арнайы Коши есебін қарастырамыз:

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)(v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) [v_j(\tau) + \lambda_j] d\tau + f_0(t) +$$

$$+ \varepsilon f(t, v_r + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad (23)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (24)$$

5-теорема. $I - G(\Delta_N(\theta))$ матрицасы қайтымды болсын, A шарты және келесі теңсіздіктер орындалсын:

(i) $\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq L_0 \|x' - x''\|, L_0 - \text{тұрақты}, (t, x'), (t, x'') \in G_0(\rho);$

(ii) $(\alpha + L_0 + K_0) \bar{h} < 1;$

(iii) $\chi e^{\alpha(t_r - t_{r-1})} \left(\varepsilon M_0 + K_1 + (\alpha + K_0)(\rho_\lambda + \|\lambda^{(0)}\|) \right) \bar{h} < \rho_v$, мұндағы

$$\chi = 1 + \bar{h} \sum_{k=1}^m \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{p=1}^m \|\mathcal{R}_{k,p}(\Delta_N(\theta))\| \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_p(s)\| ds e^{\alpha \bar{h}}.$$

Онда кез келген $\hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ үшін $S(0, \rho_v)$ жиынында (23), (24) арнайы Коши есебінің жалғыз шешімі $v[t, \hat{\lambda}] = (v_1(t, \hat{\lambda}), \dots, v_N(t, \hat{\lambda}))$ функциялар жүйесі бар болады.

2-анықтама. $u[t, \lambda, \varepsilon] = (u_1(t, \lambda, \varepsilon), \dots, u_N(t, \lambda, \varepsilon)) \in S(v[t, \lambda], \rho_u)$ функциялар жүйесі (19), (20) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ параметрлі арнайы Коши есебінің жалғыз шешімі болса және

$$B_j \left(\lambda_{r+(j)} + \lim_{t \rightarrow \theta_j - 0} u_{r+(j)}(t, \lambda, \varepsilon) \right) + C_j \lambda_{r+(j)+1} = d_j, \quad j = \overline{1, l}$$

шарттарды қанағаттандырса, онда $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon) = \lambda_r + u_r(t, \lambda, \varepsilon)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$ және $x(\Delta_N(\theta), T, \lambda, \varepsilon) = \lambda_N + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon)$ теңдіктерімен анықталатын $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon)$ функциясы (16), (17) импульс әсерлі квазисызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеудің $G^0(\Delta_N(\theta), \rho)$ жиынындағы Джумабаев бойынша $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі деп аталады.

2-анықтама мен 5-теоремадан келесі тұжырым шығады.

6-теорема. 5-теореманың шарттары орындалса, онда (16), (17) жүйенің $G^0(\Delta_N(\theta), \rho)$ жиынындағы $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімі $x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon)$ функциясы бар және бұл функцияны келесі түрде жазуға болады

$$x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon) = y(\Delta_N(\theta), t, \lambda) + \Delta x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon)$$

және келесі бағалау орындалады

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\Delta x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon)\| \leq \frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\|,$$

мұндағы $\Delta x(\Delta_N(\theta), t, \lambda, \varepsilon) = u_r(t, \lambda, \varepsilon) - v_r(t, \lambda)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, $\Delta x(\Delta_N(\theta), T, \lambda, \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon) - \lim_{t \rightarrow T-0} v_N(t, \lambda)$.

Диссертацияның 2.3 бөлімшесінде импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептер қойылады және ол $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімнің тәуелсіз векторларына қатысты квазисызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіріледі. Бекітілген уақыт мезеттерінде импульс әсерлі (16), (17) квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуін (3) шеттік шартпен қарастырамыз. $\Delta_N(\theta)$ регулярлы бөліктеу үшін жалпы шешімнің сәйкес өрнектерін (3) шеттік шартқа,

(17) импульс шарттарына және (18) үзіліссіздік шарттарына қоя отырып келесі теңдеулерді аламыз

$$B_0 x(\Delta_N(\theta), 0, \lambda) + C_0 x(\Delta_N(\theta), T, \lambda) = d_0, \quad (25)$$

$$B_j x(\Delta_N(\theta), \theta_j - 0, \lambda) + C_j x(\Delta_N(\theta), \theta_j + 0, \lambda) = d_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad (26)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{r-(p)} - 0} x(\Delta_N(\theta), t, \lambda) - x(\Delta_N(\theta), t_{r-(p)}, \lambda) = 0, \quad p = \overline{1, N - l - 1}. \quad (27)$$

(19), (20) арнайы Коши есебінің $\Delta_N(\theta)$ жалпы шешімін (25) шеттік шартқа, (26) импульс және (27) үзіліссіздік шарттарына қойып, квазисызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$Q_*(\Delta_N(\theta))\lambda = -F_*(\Delta_N(\theta)) - F^*(\Delta_N(\theta), \varepsilon, f), \quad (28)$$

7-теорема. 5-теореманың шарттары мен келесі теңсіздіктер орындалсын:

$$(i) Q_*(\Delta_N(\theta)) \text{ қайтымды және } \|[Q_*(\Delta_N(\theta))]\]^{-1} \leq \gamma;$$

$$(ii) q_\varepsilon = \varepsilon \chi L_0 < 1;$$

$$(iii) \sigma_\varepsilon = q_\varepsilon \left(\frac{\chi}{1 - q_\varepsilon} (\alpha + K_0 + \varepsilon L_0) + 1 \right) < 1;$$

$$(iv) \frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda^{(0)}) + \lambda_r^{(0)})\| < \rho_v;$$

$$(v) \frac{1}{1 - \sigma_\varepsilon} \frac{\varepsilon \chi}{1 - q_\varepsilon} \gamma \max(1, \|D\|) \max(\|d_0\| + \|C_0\|, \max_{j=\overline{1, l}} (\|d_j\| + \|B_j\|), 1)$$

$$\times \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|f(t, v_r(t, \lambda^{(0)}) + \lambda_r^{(0)})\| < \rho_\lambda.$$

Онда (28) квазисызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ жалғыз шешімі бар болады.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:

– параметрлері бар импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешілімділігі анықталды;

– импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Джумабаев бойынша жалпы шешімі құрылды;

– Джумабаев бойынша жалпы шешім импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті шешуде қолданылды;

– импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары орнатылды;

– импульс әсерлі сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің жуық шешімін табудың сандық әдісі мен алгоритмдері ұсынылды;

– импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешілімділігі анықталды;

– импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Джумабаев бойынша жалпы шешімі құрылды;

– импульс әсерлі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есеп Джумабаев бойынша жалпы шешімнің тәуелсіз векторларына қатысты квазисызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне келтірілді.