Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ӘОЖ 517.956 Қолжазба құқығында

ТӘҢІРБЕРГЕН АЙСҰЛУ КӨБЕЙСІНҚЫЗЫ

Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептер

8D05401 – Математика

Философия докторы (PhD) ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
Физика-математика
ғылымдарының докторы,
профессор Алдашев С.А.

Шетелдік ғылыми кеңесші:
Физика-математика
ғылымдарының докторы,
профессор Кудайбергенов К.К.

Қазақстан Республикасы
Ақтөбе, 2026

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР

Осы диссертацияда стандарттарға келесі сілтемелер қолданылды ҚР СОСЕ 5.04.034-2011. Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура.

Мемлекеттік стандарт 7.32-2001 (2006 жылғы өзгерістер). Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Ұсыну құрылымы мен ережелері.

Мемлекеттік стандарт 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар мен ережелер.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

D_α	E_{m+1} Евклид кеңістігінде $\Gamma = \{(x,t)\|x\| = 1\}$ цилиндрімен және $t = \alpha > 0$, $t = 0$ жазықтықтарымен шектелген $(x_1, \dots, x_m, t)$ нүктелерінің цилиндрлік облысы, мұндағы $\|x\| -$ вектор ұзындығы $x = (x_1, \dots, x_m)$;
G	$C([0,1]) \cap C^1((0,1))$ класындағы $\nu(r)$ функцияларының жиыны;
$N^\perp$	Грин формуласы бойынша ∂D_α шекарасына жүргізілген сыртқы нормаль;
$\Omega_{\alpha\beta}$	E_{m+1} евклид кеңістігінде $\Gamma = \{(x,t): \|x\| = 1\}$ цилиндрімен, $t = \alpha > 0$ және $t = \beta < 0$ жазықтықтарымен шектелген цилиндрлік облыс болсын, мұндағы $\|x\|$ – векторының ұзындығы $x = (x_1, \dots, x_m)$;
S	Ω_α және Ω_β облыстарының ортақ шекарасы және ол E_m евклид кеңістігіндегі $\{t = 0, 0 < \|x\| < 1\}$ жиыны;
H	E_m кеңістігіндегі бірлік сфера.

КІРІСПЕ

Диссертациялық жұмыстың жалпы сипаттамасы.

Диссертациялық жұмыс өзгешеленген көп өлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептердің шешімінің бар және жалғыз болуын, сондай-ақ олардың қисындылығын зерттеуге арналған.

Зерттеудің өзектілігі. Электромагниттік өрістерді математикалық модельдеу кезінде электромагниттік процестің сипаты ортаның қасиеттеріне байланысты екені белгілі. Егер орта тепе-тең күйде болса, онда Гамильтон принципі бойынша көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге келеміз.

Ал егер орта жоғары өткізгіштікке ие болса, онда көпөлшемді параболалық теңдеулер туындайды. Демек, электромагниттік өрістерді күрделі ортада (мысалы, ортаның өткізгіштігі өзгеретін жағдайда) талдау көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерді зерттеуге алып келеді [1].

Комплекс айнымалылардың аналитикалық функциялары теориясы әдісімен жазықтықтағы эллиптикалық теңдеулер үшін шекаралық есептердің қисындылығы жақсы зерттелген. Алайда, тәуелсіз айнымалылар саны екіден көп болған жағдайларда ұқсас есептерді зерттеу кезінде принциптік сипаттағы қиындықтар туындайды. Көпөлшемді сингулярлық интегралдық теңдеулердің толық теориясы болмағандықтан, сингулярлық интегралдық теңдеулер әдісі өзінің тиімділігін жоғалтады [2].

Керісінше, көпөлшемді сфералық функциялар теориясы жақсы зерттелген [3-4]. Жалпыланған кеңістіктерде көпөлшемді гиперболалық теңдеулер үшін аралас есептер жақсы қарастырылған [5–8], [9, 10] еңбектерінде бұл есептердің жалғыз классикалық шешімі болатыны дәлелденген. Көпөлшемді эллиптикалық теңдеулер үшін аралас есептер [11] жұмысында қарастырылған.

Алайда, өзгешеленген эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге арналған аралас есептер әлі де жеткілікті түрде зерттелмеген. Сондықтан, өзгешеленген эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге арналған аралас есептерді зерттеу – өзекті ғылыми мәселе болып табылады.

Тақырыптың қазіргі жағдайы. Эллиптико-параболалық теңдеулер қолданбалы сипаттағы көптеген маңызды мәселелерді шешу кезінде кездеседі. Бұл теңдеулер фракталдық диффузия кезіндегі толқындық құбылыстарды зерттеуде, газ динамикасы теңдеулерінде, математикалық биологияда, генетикада, медицинада және т.б. пайда болатын өзгешеленген теңдеулер класына жатады.

Эллиптикалық және параболалық типтегі теңдеулер теориясы классикалық еңбектерден бастау алады. Бұл бағыттың негізін қалаушылардың қатарында Hadamard J., Сергей Соболев және Evans L.C. сияқты ғалымдарды атап өтуге болады [12-15].

Өзгешеленген теңдеулерді зерттеу бағыты XX ғасырдың екінші жартысында қарқынды дамыды. Бұл салада коэффициенттердің нөлге айналу жағдайлары қарастырылып, салмақталған кеңістіктер (weighted Sobolev spaces) енгізілді. Мұндай есептерді зерттеуде О. А. Ладыженскаяның еңбектері маңызды рөл атқарды.

Осы бағыттағы алғашқы нәтижелер Ф. И. Франкль, И. Н. Векуа, А. В. Бицадзе еңбектерінде алынған [16,17, 2]. Газ динамикасында мұндай типтегі теңдеулердің маңызды қолданбалары анықталды, беттердің шексіз аз иілу теориясында туындайтын есептерді шешуде аралас типті теңдеулердің маңыздылығы атап өтілді, сондай-ақ аралас типті теңдеулер үшін экстремум принципі тұжырымдалды, одан, атап айтқанда, шешімнің бірмәнділігі туындайды.

Кейіннен бұл нәтижелер К. И. Бабенконың, А. М. Нахушевтің, М. Л. Красновтың, И. А. Киприяновтың, М. С. Салахитдиновтың және Х. Наджафовтың және басқа да ғалымдардың еңбектерінде дамытылды [18-22].

Бөлшек интеграл-дифференциалдау операциясы арқылы сипатталатын аралас типті есептер маңызды рөл атқарады. Аралас типті теңдеулер теориясындағы бөлшектік есептеудің рөлі параболалық өзгешеленген кеңістіктік-бағытталған беттері бар көпөлшемді облыстарда Ф. Трикоми [23] есебінің аналогын іздеу мәселесінің пайда болуымен байланысты. Бұл мәселені А. В. Бицадзе қойған және соңғы жылдары ол қарқынды түрде дамыды.

Өзгешеленген эллиптикалық теңдеулер теориясының дамуына М. В. Келдыштың [24] еңбегі принципті маңызға ие болды. Бұл жұмыс осындай типтегі есептердің одан әрі дамуына бастау болды.

Көпөлшемді осындай есептер жағдайында Г. Фикераның, О. А. Олейниктің, М. И. Вишиктің, С. Г. Михлиннің, және басқа да зерттеушілердің еңбектерін ерекше атап өткен жөн [25-27]. M. Franciosi, A. Alvino, G. Trombetti еңбектерінде тегіс коэффициенттері бар, дивергенциялық емес формадағы эллиптико-параболалық теңдеулер үшін бірінші шекаралық есептің күшті шешімділігі дәлелденген [28, 29]. G. Talenti және V. Iftimie,_ еңбектерінде Кордес типті шарт орындалған жағдайда, үзілісті коэффициенттері бар, дивергенциялық емес формадағы екінші ретті эллиптикалық және параболалық теңдеулер, сондай-ақ әртүрлі типтегі эллиптико-параболалық теңдеулер үшін бірінші шекаралық есептің бірмәнді күшті шешімділігі дәлелденген [30, 31]. Сонымен қатар Л. Ниренбергтің, О. А. Ладыженскаяның, В. А. Солонниковтың, Н. Н. Уральцеваның, Е. М. Ландистің және басқалардың еңбектерін де атап өткен жөн [32-35].

H. Gajewski мен I. V. Skrypnik, P. Benilan мен P. Wittbold еңбектерінде эллиптико-параболалық типтегі теңдеулер жүйелері қарастырылған [36-40].

Т. С. Гаджиев еңбектерінде үзілісті коэффициенттері бар, дивергенциялық емес сызықтық эллиптико-параболалық теңдеулер зерттелген [41, 42].

Эллиптикалық теңдеулерге арналған шекаралық есептер математикалық физикада теориялық маңызға ие. Бұл, ең алдымен, әртүрлі физикалық құбылыстардың (мысалы, тербеліс, жылу өткізгіштік, диффузия және т.б.) стационарлық үдерістерін талдау көбінесе эллиптикалық теңдеулерге алып келетінімен түсіндіріледі. Мұндай теңдеулердің қолданылуына тән мысалдар ретінде қуыс металл түтікшелердегі радиотолқындардың диффузиясы, қуыс резонаторлардағы электромагниттік тербелістер (электротехникада кеңінен қолданылады), сондай-ақ өткізгіштің қимасы бойынша айнымалы электр тогының таралуы (бұл — «беттік әсер» немесе скин-эффект деп аталады) жатады. Бұл есептердің кейбіреулері өзгешеленген эллиптикалық теңдеулерді зерттеу қажеттілігіне әкеледі.

Осыған байланысты соңғы жылдары өзгешеленген эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулер үшін шекаралық және аралас есептердің қойылымы мен олардың шешімдерінің қасиеттерін зерттеуге арналған ғылыми еңбектер саны айтарлықтай артты [43-51].

Көпөлшемді жағдайда жалпыланған шешімдерді зерттеу функционалдық кеңістіктер теориясымен тығыз байланысты болып табылады. Атап айтқанда, Соболев және Morrey кеңістіктерінде алынған нәтижелер эллиптикалық және параболалық типтегі теңдеулер үшін шешімдердің бар болуы мен бірегейлілігін дәлелдеуде маңызды рөл атқарады. Сонымен қатар, коэффициенттері үзілісті немесе шектелген тербелісті болатын теңдеулер үшін априорлық бағалар алу және олардың тұрақтылығын зерттеу көптеген ғылыми жұмыстарда қарастырылған [52-67].

Сонымен бірге, өзгешеленген эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулер үшін аралас есептердің толық теориясы әлі де жеткілікті деңгейде қалыптаспағанын атап өткен жөн. Әсіресе, коэффициенттері дегенерацияланатын немесе ерекше нүктелері бар жағдайларда шешімдердің бар болуы, жалғыздығы және орнықтылығы мәселелері өзекті болып қала береді. Осы бағыттағы зерттеулерде жаңа әдістер мен тәсілдер ұсынылып, теориялық нәтижелер одан әрі дамытылуда [68-87].

Бірқатар қолданбалы есептер өзгешеленген эллиптикалық теңдеулерді талдауды талап етеді. Жазықтықтағы эллиптикалық теңдеулер үшін шекаралық есептердің қисындылығы комплекс айнымалының аналитикалық функциялары теориясының әдістері арқылы жақсы зерттелген [7, 31-бет], [8]. Алайда, тәуелсіз айнымалылар саны екіден көп болған жағдайда ұқсас есептерді зерттеу кезінде принципиалды қиындықтар туындайды. Көпөлшемді сингулярлық интегралдық теңдеулер теориясының жеткілікті дамымағандығына байланысты, сингулярлық интегралдық теңдеулер әдісі өзінің тиімділігін жоғалтады.

Бұл жұмыста өзгешеленген эллиптикалық теңдеулерге арналған аралас шекаралық есептің шешімінің бірегейлігі дәлелденіп, классикалық шешімінің айқын түрі алынатын балама әдіс ұсынылады. Бұл есепте Чаплыгин операторы қарастырылады.

Бірінші шекаралық есеп (немесе Дирихле есебі) үшін шекарада ерекшеленетін көпөлшемді эллиптикалық теңдеулер жеткілікті дәрежеде зерттелген [88-93]. С.А. Алдашевтің, өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге арналған аралас есептер аз зерттелген [88, 174-бет].

Осы жұмыста сфералық функциялар бойынша жіктеу әдісі қолданылып, цилиндрлік облыстағы өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге арналған аралас есептің бірегей шешілетіндігі дәлелденіп, оның классикалық шешімінің айқын түрі алынды.

Екінші реттік эллиптико-параболалық теңдеулердің жалпы түрі үшін бірінші шекаралық есептің (Дирихле есебінің) қойылымын алғаш рет Г. Фикера ұсынған. Бұл есептің одан әрі зерттелуі О.А. Олейник пен Е.В. Радкевичтің монографиясында берілген [26, 8-бет].

С.А. Алдашевтің еңбектерінде көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулер үшін цилиндрлік облыстағы Дирихле есебінің қисындылығы (бірегей шешілетіндігі мағынасында) зерттелген [94].

Жалпыланған кеңістіктердегі өзгешеленген көпөлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған аралас есептер М.Л. Краснов [7, 29-бет] және Ф.Т. Барановский [8, 23-бет] тарапынан зерттелген.

С.А. Алдашев [88, 174-бет] пен С.Г. Михлин [4, 199-бет] өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулер үшін мұндай есептердің қисындылығын дәлелдеп, классикалық шешімнің айқын түрін алған.

Қазіргі уақытқа дейін өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулер үшін аралас есептер зерттелмеген. Бұл диссертациялық жұмыста өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулер үшін аралас есептің бірегей шешілетіндігі көрсетіліп, классикалық шешімнің айқын түрі алынды.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты – өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге арналған аралас есептердің бірмәнді шешілетінін көрсету, сондай-ақ қарастырылып отырған есептердің шешімдеріне тән жаңа сапалық және құрылымдық қасиеттерді анықтау.

Зерттеу міндеттері:

а) өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге арналған аралас есептің қисындылығын көрсету, оның шешімінің бар болатындығын дәлелдеп, шешімнің айқын аналитикалық түрін алу. Көрсетілген есеп шешімінің бірмәнділігін қамтамасыз ететін шарттарды анықтау.

ә) өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулер класы үшін аралас есептің қисындылығы дәлелдеу, оның шешімінің бар екенін негіздеу және шешімнің айқын аналитикалық түрін құру. осы теңдеулер класы үшін шешімнің бірмәнділігін дәлелдеу.

б) жалпыланған түрдегі өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге арналған аралас есепті зерттеу, оның қисындылығы, шешімінің бар және бірмәнділігін дәлелдеу және шешімнің айқын түрін табу.

Зерттеу нысаны - цилиндрлік облыстағы өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептер.

Зерттеу пәні - өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептер шешімдерін құру мәселелері.

Зерттеу әдістері

Диссертациялық жұмыста Фурье қатарына жіктеу әдісі, арнайы функциялар теориясы және интегралдық теңдеулер әдісі қолданылады.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы

Цилиндрлік облыста қарастырылған өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулер үшін аралас есептердің бірмәнді шешілетіндігі дәлелденді. Зерттелген есептер үшін шешімдердің айқын аналитикалық түрлері алынды

1. Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің бар екендігі дәлелденіп, оның аналитикалық түрі алынды, қисындылығы көрсетілді;
2. Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің жалғыз болатындығы дәлелденді;
3. Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қисындылығы көрсетілді, шешімінің бар болатындығы дәлелденді және бұл есептің айқын шешімі алынды;
4. Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің шешімінің жалғыздығы дәлелденді;
5. Өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің бар болатындығы дәлелденді және оның айқын шешімі алынды, қисындылығы көрсетілді;
6. Өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің жалғыздығы анықталды.

Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің қисындылығы, шешімінің бар болуы, оның аналитикалық түрі және шешімінің жалғыздығы;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қисындылығы, шешімінің бар болуы, айқын шешімі және шешімінің жалғыздығы;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің қисындылығы, шешімінің бар болуы, оның айқын шешімі және шешімінің жалғыздығы.

Алынған нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі барлық келтірілген теоремалар мен тұжырымдардың функционалдық анализ, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясы және арнайы функциялар теориясының қағидаттарына негізделген қатаң математикалық дәлелдеулерімен расталады. Жұмыста сфералықлық функциялар бойынша Фурье қатарына жіктеу, Бессель функцияларын қолдану сияқты дәстүрлі және сыналған аналитикалық әдістер пайдаланылды. Зерттеу нәтижелері логикалық тұрғыда үйлесімді, жекелеген жағдайларды да, жалпыланған түрлерді де қамтиды.

Сонымен қатар, диссертацияның негізгі тұжырымдары халықаралық ғылыми конференцияларда апробациядан өткен және рецензияланатын ғылыми журналдарда жарияланған, бұл алынған нәтижелердің ғылыми дәлдігі мен сенімділігін растайды.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы

Жұмыс негізінен теориялық сипатта. Алынған нәтижелер өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге локалдық және локалдық емес шекаралық есептерді зерттеу барысында қолданылуы мүмкін.

Жұмыста алынған шешімдер газ динамикасы, механика, биология, физика, экономика және басқа да салалардағы есептердің сандық моделдерін талдау кезінде пайдалануға болады.

Автордың жеке үлесі

Диссертациялық жұмыста ұсынылған барлық негізгі нәтижелер тікелей автордың өзі тарапынан алынған. Зерттеліп отырған аралас есептердің қойылымы, оларды талдау әдістерінің таңдалуы, шешімдердің қисындылығы, шешімінің бар және жалғыз болуының математикалық дәлелдеулері автордың өзімен орындалды.

Автор тарапынан сфералықлық функциялар мен Бессель функциялары арқылы жіктеу әдістерін пайдалана отырып, есептердің аналитикалық шешімдері алынды.

Диссертацияда ұсынылған әдістер мен тәсілдер автордың ғылыми мақалаларында жарияланған нәтижелерінің қисынды жалғасы мен дамуы болып табылады. Бұл нәтижелер әртүрлі деңгейдегі ғылыми конференцияларда апробациядан өткен. Жұмысты орындау барысында автор ғылыми әдебиеттерге талдау жүргізіп, теориялық тұжырымдарды, теоремалардың дәлелдерін және диссертация мәтінін толықтай өз бетінше әзірледі.

Жұмысты апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

– «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері» тақырыбында Халықаралық ғылыми конференция. Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті. Ақтөбе, Қазақстан (24-28 мамыр 2022 ж.);

– «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары» физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА құрметті академигі К.К.Кенжебаевтың 70 жас мерейтойына арналған Халықаралық ғылыми семинар. Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті. Ақтөбе, Қазақстан (20 қаңтар 2023 ж.);

– Қазақстан Республикасының Ғылым айына арналған сәуір айындағы дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Математика және математикалық моделдеу институты. Алматы, Қазақстан (сәуір 2024 ж.);

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 9 жұмыс жарияланды, оның ішінде Scopus базасында индекстелетін рейтингтік ғылыми журналда 3 жарияланым [95-97], ҚР ҒЖБМ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған ғылыми нәтижелерді жариялау тізіміне енетін ғылыми басылымдарда 2 мақала [98, 99], ғылыми журналда – 1 мақала [11], халықаралық конференциялар мен семинарлар материалдарында 3 мақала жарияланды [100-102].

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс қазақ тілінде жазылған және кіріспеден, үш бөлімнен тұрады. Пайдаланылған әдебиеттер тізімі 115 библиографиялық дереккөзден тұрады, жұмыс құрамында 2 сурет бар. Формулалардың нөмірленуі 2 таңбалы бірінші сан бөлім нөмірін, екіншісі формуланың меншікті нөмірін білдіреді. Теоремалар, леммалар бүкіл диссертация шегінде нөмірленеді. Диссертацияның жалпы көлемі - 91 бетті құрайды.

Диссертацияның қысқаша мазмұны.

Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Әрбір бөлім өз кезегінде бірнеше бөлімшелерге бөлінген.

Диссертацияның бірінші бөлімінде өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептер қарастырылады.

1.1 – бөлімшеде көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің қойылымы қойылады.

Айталық, $D_\alpha - E_{m+1}$ Евклид кеңістігінде $\Gamma = \{(x,t)|x| = 1\}$ цилиндрімен және $t = \alpha > 0$, $t = 0$ жазықтықтарымен шектелген $(x_1, \dots, x_m, t)$ нүктелерінің цилиндрлік облысы, мұндағы $|x| -$ вектор ұзындығы $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Осы беттердің D_α облысының ∂D_α шекарасын құрайтын бөліктерін сәйкесінше $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ деп белгілейік.

1–анықтама. $D \subset R^n$ – ашық облыс, ал $\Gamma - D$ облысының шекарасы болсын. D облысында $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$ функциялары анықталған. Екінші ретті дифференциалдық операторды L арқылы келесі түрде анықталық

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u.$$

Егер

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\ \xi_i \xi_j$$

квадраттық формасы D облысының әрбір нүктесінде кез келген $\xi \in R^n$ үшін анықталған болса, дифференциалдық L операторы эллиптикалық деп аталады.

D_α облысында өзара байланысқан өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерді қарастырайық

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \qquad (0.1)$$

$$L^{*}\vartheta \equiv g(t)\Delta_x\vartheta + \vartheta_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i\vartheta_{x_i} - b\vartheta_t + c\vartheta = 0, \qquad (0.1^{*})$$

мұндағы $g(t) > 0$ және $t > 0,\ g(0) = 0,\ g(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2\big((0,\alpha)\big),\ \Delta_x$- Лаплас операторы $x_1, \dots, x_m,\ m \geq 2,\ d(x,t) = \mathrm{c} - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

Аралас есеп ретінде 0.1 - есепті қарастырайық.

Есеп 0.1. D_α облысында $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ класынан

$$Lu \equiv g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_{rr} - \frac{\delta u}{r^2}\right) + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + \qquad (0.1_1)$$

$$+c(r,\theta,t)u = 0.$$

$$u|_{S_0} = \tau(r,\theta), \quad u_t|_{S_0} = \nu(r,\theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \qquad (0.2)$$

шектік шарттарын қанағаттандыратын (0.1_1) теңдеуінің шешімін табу керек, мұндағы $\tau(1,\theta) = \psi(0,\theta),\ \nu(1,\theta) = \psi_t(0,\theta)$.

Лемма 0.1. Айталық, $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Егер $l \geq m - 1$, онда қатар

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (0.3)$$

сонымен бірге, $p \leq l - m + 1$ ретті дифференциалдау арқылы одан алынған қатар абсолютті және бірқалыпты жинақталады.

Лемма 0.2. $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$ болу үшін, (0.3) қатарындағы коэффициенттер келесі теңсіздіктерді қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті шарт болып табылады

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \mathrm{const}$$

1.2–бөлімшеде өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге аралас есептің қисындылығы қарастырылып теорема дәлелденеді.

D_α облысында (0.1) теңдеудегі қосымша мүшелері 0-ге тең болғандағы жағдайда, өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуді қарастырайық:

$$g(t)\Delta_x u + u_{tt} = 0, \qquad (0.4)$$

(0.4) теңдеуі сфералық координаталарда келесі түрде болады:

$$g(t)\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)+u_{tt}=0,$$

Есеп 0.1.1. D_α облысында $C^1(\overline{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$ класынан келесі эллиптикалық теңдеудің

$$g(t)\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)+u_{tt}=0, \tag{0.5}$$

шекаралық шарттарды (0.2)

$$u|_{S_0}=\tau(r,\theta), u_t|_{S_0}=\nu(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha}=\psi(t,\theta),$$

қанағаттандыратын шешімді табу керек, мұндағы δ–екінші ретті дифференцалды оператор,

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$$

$$g_1=1,\ g_j=\left(sin\theta_1\dots sin\theta_{j-1}\right)^2, j>1.$$

δ операторының спектрі.

0.1-есептің ізделетін шешімі $C^1(\overline{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$ класына тиесілі болғандықтан, 0.1.1- есептің де шешімін келесі түрде іздеуге болады

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{0.6}$$

(0.6)-ны в (0.5)-ке қойып және $Y_{n,m}^k(\theta)$ сфералық функцияларының ортогоналдығын қолдана отырып, келесіні аламыз

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right)+\bar{u}_{ntt}^k=0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots \tag{0.7}$$

мұндағы (0.2) шектік шарты 0.1 лемманы ескере отырып, келесі түрде жазылады

$$\bar{u}_n^k(r,0)=\bar{\tau}_n^k(r), \bar{u}_{nt}^k(r,0)=\bar{\nu}_n^k(r), \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_n^k(t), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots. \tag{0.8}$$

(0.7), (0.8) теңдіктерде $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$ айнымалыларын ауыстыру арқылы аламыз

$$g(t)\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right)-\bar{\vartheta}_{ntt}^k=\bar{f}_n^k(r,t) \tag{0.9}$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \bar{\vartheta}_{nt}^k(r,0) = \nu_n^k(r), \bar{\vartheta}_n^k(1,t) = 0, k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\dots, \quad (0.10)$$

$\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\vartheta_n^k(r,t)$ ауыстыруын орындай отырып, (0.9), (0.10) есептерін келесі есепке келтіреміз

$$L\vartheta_n^k \equiv g(t)\left(\vartheta_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) + \bar{\vartheta}_{ntt}^k = f_n^k(r,t), \quad (0.11)$$

$$\vartheta_n^k(r,0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \vartheta_{nt}^k(r,0) = \tilde{\vartheta}_n^k(r), \vartheta_n^k(1,t) = 0, \quad (0.12)$$

(0.11), (0.12) есептерінің шешімін келесі түрде іздейміз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t), \quad (0.13)$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ – есептің шешімі

$$L\vartheta_{1n}^k = f_n^k(r,t), \quad (0.14)$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,0) = \vartheta_{1nt}^k(r,0) = 0,\ \vartheta_{1n}^k(1,t) = 0, \quad (0.15)$$

Ал, $\vartheta_{2n}^k(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{2n}^k = 0, \quad (0.16)$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,0) = \tilde{\tau}_n^k(r),\ \vartheta_{2nt}^k(r,0) = \tilde{\nu}_n^k(r),\ \vartheta_{2n}^k(1,t) = 0. \quad (0.17)$$

Жоғарыда көрсетілген (0.14), (0.16) теңдеулердің шешімін келесі түрде қарастырамыз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \sum_{l=1}^{\infty} R_l(r)T_l(t), \quad (0.18)$$

мұндағы,

$$f_n^k(r,t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{l,n}^k(t)R_l(r), \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{l=1}^{\infty} b_{l,n}^k R_l(r), \tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{l=1}^{\infty} e_{l,n}^k R_l(r). \quad (0.19)$$

(0.18) теңдеуді (0.14) және (0.15) теңдеулерге (0.19)-ды ескере отырып, қойсақ, аламыз

$$R_{lrr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_l + \mu R_l = 0, 0 < r < 1, R_l(1) = 0, |R_l(0)| < \infty, \quad (0.20)$$

$$T_{ltt}-\mu g(t)T_l(t)=a_{l,n}(t), 0<t<\alpha, \tag{0.21}$$

$$T_l(0)=0, T_{lt}(0)=0. \tag{0.22}$$

(0.20) есебінің шектеулі шешімі болып (0.23) табылады

$$R_l(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{l,n}r), \tag{0.23}$$

мұндағы $\nu=\frac{n+m-2}{2}$, $\mu=\mu_{l,n}$ – бірінші текті $J_\nu(z), \mu=\mu_{l,n}^2$ Бессель функциясының нөлдері.

(0.21), (0.22) есептері $T_l(t)$ функциясына қатысты екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтіріледі, демек бұл теңдеудің шешімі бар және жалғыз:

$$T_{l,n}(t)-\mu_{l,n}^2\int_0^t(t-\xi)g(\xi)\,T_{l,n}(\xi)d\xi=\int_0^t(t-\xi)a_{l,n}^k(\xi)d\xi, \tag{0.24}$$

Фурье-Бессель қатарларының жіктелуін ескере отыра, Бессель функциясының оң таңбалы нөлдерін қолданып (0.0.1) есептің шешімін келесі түрде аламыз:

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_n^k(r)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\vartheta_{1n}^k(r,t)+\vartheta_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \tag{0.25}$$

мұндағы

$$\vartheta_{1n}^k(r,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{r}\,T_{l,n}(r)J_\nu(\mu_{l,n}r),$$

$$\vartheta_{ln}^k(r,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{r}V_{l,n}(t)\,J_\nu(\mu_{l,n}r),$$

$$a_{l,n}^k(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{l,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)\,J_\nu(\mu_{l,n}\xi)d\xi,$$

$$b_{l,n}^k(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{l,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\tau}_n^k(\xi)\,J_\nu(\mu_{l,n}\xi)d\xi,$$

$$e_{l,n}^k=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{l,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\nu}_n^k(\xi)\,J_\nu(\mu_{l,n}\xi)d\xi,$$

Теорема 0.1 Егер (0.2) шекаралық шарттарындағы берілген функциялар үшін, 0.1 және 0.2-леммаларда көрсетілген шарттар орындалса, онда (1.5) теңдеуі үшін қойылған 0.1 аралас есептің D_α облысында $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ класына класына тиесілі жалғыз шешімі бар болады.

Ол шешім (0.25) түрінде беріледі және келесі бағалау орындалады:

$$k_n \le c_1 n^{m-2}, \left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, j=\overline{1,m-1}, l=0,1,\dots . \quad (0.26)$$

1.3 – бөлімшеде аралас есеп шешімінің бар болуы және жалғыздығы дәлелденеді.

Аралас есеп ретінде 0.1 есепті қарастырып, оның шешімінің бар екендігін көрсетеміз.

Теорема 0.2. Егер $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0), \psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), l > \frac{3m}{2}$, онда 0.1- есептің жалғыз шешімі болады.

Дәлелдеу. 0.1 есептің ізделінді шешімін келесі түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t)\, \mathrm{Y}_{n,m}^k(\theta), \quad (0.27)$$

(0.27) теңдігінің шешімі (0.1_1)-ге қойып, алынған өрнекті H бірлік сферасы бойынша интегралдай отырып дифференциалдық теңдеудің шексіз жүйесін қарастырып және 0.1-лемманы ескере отырып

$$\rho_0^1 g(t)\bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = 0,$$

$$\rho_1^k g(t)\bar{u}_{1rr}^k + \rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} g(t)\rho_1^k\bar{u}_1^k =$$
$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\,\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right), n=1, k=\overline{1,k_1},$$

$$\rho_n^k g(t)\bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} g(t)\rho_n^k\bar{u}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\sum_{k=1}^{k_n-1}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k + \right.$$
$$\left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}$$

0.1 есептегідей ауыстырулар енгізе отырып Бессель функциясының нөлдері мен Вольтердің екінші текті интегралдық теңдеуіне келтіріледі

$$T_{s,n}(t)-\mu_{s,n}^2\int_0^t (t-\xi)g(\xi)T_{s,n}(\xi)d\xi = \int_0^t (t-\xi)a_{ns}(\xi)d\xi$$

бұл теңдеудің шешімі бар және ол жалғыз болады.

$$a_{ns}^k(t) = 2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_{s,n}\right)\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\tilde{f}_n^k(\xi,t)J_\nu\left(\mu_{s,n}\xi\right)d\xi, \tag{0.28}$$

$$b_{ns}^k = 2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_{s,n}\right)\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\tilde{\tau}_n^k(\xi)J_\nu\left(\mu_{s,n}\xi\right)d\xi,$$

$$e_{ns}^k = 2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_{s,n}\right)\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\tilde{\nu}_n^k(\xi)J_\nu\left(\mu_{s,n}\xi\right)d\xi, \tag{0.29}$$

0.1-анықтамаға сәйкес Фурье-Бессел қатарларына жіктелуі өсу реті бойынша Бессель функциясының оң таңбалы нөлдері болады.

Сонымен, D_α облысында келесі теңдіктер орын алады

$$\int_H \rho(\theta)LudH = 0. \tag{0.30}$$

$$\int_{D_\alpha} f(r,\theta,t)LudD_\alpha = 0$$

Осылайша, 0.1-есептің шешімі келесі қатар түрдінде жазылады

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_n^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\vartheta_{1n}^k(r,t)+\vartheta_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \tag{0.31}$$

1.2 бөлімшесіндегі 0.0.1 есеп үшін алынған нәтижелерді, бағалауларды қолданып, сонымен қатар 0.1 және 0.2 леммаларды, берілген (0.0.1)-теңдеудің коэффициенттеріне қойылған шектеулерді ескерсек (0.31) шешімі $C^1(\bar{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$ класында өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас 0.1-есептің шешімінің бар екендігі дәлелденді.

Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есеп шешімінің жалғыздығын дәлелдеу үшін алдымен (0.1*) теңдеуі үшін келесі шарттармен шекаралық есептің шешімін құрылады.

$$\vartheta|_{\Gamma_\alpha}=0, \vartheta|_{s_\alpha}=0,\ \vartheta_t|_{s_\alpha}=\nu(r,\theta)=\bar{\nu}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots, \tag{0.32}$$

мұндағы $\bar{v}_n^k(r) \in G, G-\ C([0,1]) \cap C^1\big((0,1)\big)$ класындағы $\nu(r)$ функцияларының жиыны. G жиыны $L_2\big((0,1)\big)$ кеңістігінің барлық жерінде тығыз болып табылады.

(0.1*) және (0.32) есептерінің шешімін (0.27) түрінде іздесек онда ол (0.31) қатар түрінде құрылады және (0.26) бағалауларына сәйкес $\mathrm{C}^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ класына жатады.

Түйіндес L, L^* операторларының анықтамасына сәйкес келесі теңдеу алынады

$$\vartheta L u - u L^* \vartheta = -\vartheta P(u) + u P(\vartheta) - u\vartheta Q,$$

(0.2) біртекті шарттар мен (0.32) шарттарды ескерсек келесі формуланы аламыз

$$\int\limits_{S_\alpha} \nu(r,\theta) u(r,\theta,\alpha) ds = 0.$$

$\left\{\bar{v}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ функциялар жүйесінің сызықтық қабықшасы $L_2(S_\alpha)$ кеңістігінде тығыз орналасқандықтан интеграл үшін $u(r,\theta,\alpha) = 0,\ \ \forall (r,\theta) \in S_\alpha$ деген қорытынды шығарамыз.

Онда есепті нөлдік шешімі бар келесі Дирихле есебіне келтіру жолдары көрсетіледі.

$$Lu = 0, \qquad u\Big|_{S_0} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad u\Big|_{S_\alpha} = 0,$$

Демек, шешімнің жалғыздығы, яғни, 0.2 теорема дәлелденді.

2 – бөлімде өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есеп қарастырылады.

2.1 – эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қойылымы қойылады.

Айталық, $\Omega_{\alpha\beta}$ – E_{m+1} евклид кеңістігінде $\Gamma = \{(x,t) \colon |x| = 1\}$ цилиндрімен, $t = \alpha > 0$ және $t = \beta < 0$ жазықтықтарымен шектелген цилиндрлік облыс болсын, мұндағы $|x|$ – векторының ұзындығы $x = (x_1, \dots, x_m)$.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысының бөліктерін Ω_α және Ω_β арқылы, ал $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – арқылы $t > 0$ және $t < 0$ жартылай кеңістігінде жатырған Γ бетінің бөліктерін; $\Omega_{\alpha\beta}$ облысының жоғарғы табанын – σ_α, ал төменгі табанын – σ_β арқылы белгілейік .

S – Ω_α және Ω_β облыстарының ортақ шекарасы және ол E_m евклид кеңістігіндегі $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ жиыны болсын.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында келесі өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерді қарастырайық

$$0=\begin{cases} t^q\Delta_x u-u_t+\sum_{i=1}^{m}d_i(x,t)u_{x_i}+e(x,t)u, t>0 \\ |t|^p\Delta_x u+u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u, t<0, \end{cases} \quad (0.33)$$

$p, q = const,\ p>0,\ q\geq 0,\ ,\Delta_x\ -\ x_1,\dots,x_m, m\geq 2$ айнымалылары бойынша Лаплас операторы.

Аралас есеп ретінде келесі есепті қарастырамыз.

Есеп 0.2. (00.1_1) теңдеудің $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында $t\neq 0$ үшін $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta})\cap C^1(\Omega_{\alpha\beta})\cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$ класынан келесі шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек

$$L_1u\equiv t^q\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)-u_t+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}d_i\,(r,\theta,t)u_{x_i}+e(r,\theta,t)u=0 \quad (0.0.1_1)$$

$$u\Big|_{\sigma_\alpha}=\varphi(r,\theta)\ ,\ u\Big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta), \quad (0.34)$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(r,\theta), \quad (0.35)$$

2.2–бөлімшеде эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қисындылығы, шешімінің құрылымы көрсетіледі. Осы бөлімшедеде $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында келесі өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеу қарастырылады

$$0=\begin{cases} t^q\Delta_x u-u_t, t>0 \\ |t|^p\Delta_x u+u_{tt}, t<0. \end{cases} \quad (0.36)$$

Есеп 0.2.1 **с**фералық координаталарда (0.36) теңдеу Ω_α облысында келесі түрде жазылады

$$t^q\left(u_{rr}+\tfrac{m-1}{r}u_r-\tfrac{1}{r^2}\delta u\right)-u_t=0 \quad (0.37)$$

0.2 есептің ізделінді шешімі Ω_α облысында $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына жататындықтан, 0.2.1 есептің шешімін келесі түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (0.38)$$

мұндағы, $\bar{u}_n^k(r,t)$ – анықталуы тиіс функциялар.

Сфералық функциялардың ортогональдық қасиеттерін қолданып 0.1 лемманы ескере отырып (0.34) шекаралық шарттарды келесі түрде жазамыз

$$t^q\left(\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right)-\bar{u}_{nt}^k=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots. \qquad (0.39)$$

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_n^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t),\quad k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots. \qquad (0.40)$$

(0.39), (0.40) теңдіктеріне $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\bar{\psi}_{1n}^k$ ауыстыруларын қолдансақ онда келесі теңдіктер алынады

$$t^q\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right)-\bar{\vartheta}_{nt}^k=\bar{f}_n^k(r,t), \qquad (0.41)$$

$$\bar{\vartheta}_n^t(r,\alpha)=\varphi_n^k(r),\bar{\vartheta}_n^k(1,t)=0,k=\overline{1,k_n},n=0,1,\dots. \qquad (0.42)$$

$$\bar{f}_n^k(r,t)=\psi_{1nt}^k+\frac{\lambda_n t^q}{r^2}\psi_n^k,\varphi_n^k(r)=\bar{\varphi}_n^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha).$$

Айнымалыны $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\vartheta_n^k(r,t)$ ауыстыра отырып, (0.41), (0.42) есептерін келесі есепке келтіреміз

$$L\vartheta_n^k\equiv t^q\left(\vartheta_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right)-v_{nt}^k=f_n^k(r,t). \qquad (0.43)$$

$$\vartheta_n^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_n^k(r),\vartheta_n^k(1,t)=0. \qquad (0.44)$$

(2.11), (2.12) есептерінің шешімін келесі түрінде іздейміз

$$\vartheta_n^k(r,t)=\vartheta_{1n}^k(r,t)+\vartheta_{2n}^k(r,t), \qquad (0.45)$$

$$L\vartheta_{1n}^k=f_n^k(r,t). \qquad (0.46)$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,\alpha)=0,\vartheta_{1n}^k(1,t)=0, \qquad (0.47)$$

Жоғарыда аталған есептердің шешімін келесі түрде қарастырамыз

$$\vartheta_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \qquad (0.48)$$

мұнда келесідей болсын

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)R_s(r),\ \tilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}R_s(r). \qquad (0.49)$$

(0.48)-ді (0.46) және (0.47)-ні (0.49)-ды ескере отырып онда есептің шектелген шешімі келесідей түрде болады

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad (0.50)$$

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad (0.51)$$

$$a_{s,n}(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi\,,$$

$$b_{s,n}=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\tilde{\varphi}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi.$$

Фуреье-Бессель қатарларына жіктелуі болып табылады, өсу реті бойынша орналасқан Бессель функциясының оң таңбалы нөлдері

Демек, (0.45)-тен Ω_α облысында (0.36), (0.34) есебінің жалғыз шешімі келесі функция екендігі шығады

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{1n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\vartheta_{1n}^k(r,t)+\vartheta_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (0.52)$$

ассимптоталық формулалар мен бағалауларды сондай-ақ леммалар мен берілген $\psi_1(t,\theta),\varphi(r,\theta)$ функциялары үшін қойылған шектеулерді ескере отырып, алынған (0.52) шешімі $C(\bar{\Omega}_\alpha)\cap C^1(\Omega_\alpha\cup S)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына жататыны дәлелденеді.

$t\to+0$ кезінде

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)\,Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (0.53)$$

Осылайша, Ω_β облысында шектік шарттарды ескере отырып, келесі өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге аралас есепке келеміз:

$$|t|^p \Delta_x u + u_{tt} = 0 \quad (0.54)$$

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u_t\Big|_S = \nu(r,\theta), u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta) \quad (0.55)$$

(0.54), (0,55) есебінің жалғыз шешімі бар екеніні дәлелденген (0.1 теоремада)

Теорема 0.3. Егер (0.36), (0.35) шекаралық шарттарындағы берілген функциялар леммалар және жинақталу шарттарын қанағаттандырса, онда (0.37) теңдеуі үшін қойылған 0.2.1 аралас есептің Ω_α облысында жататын жалғыз шешімі бар болады.

Бұл шешім (0.38) түріндегі жіктелу арқылы анықталады және Фурье–Бессель қатарлары (0.52) бойынша өрнектеледі, олар және олардың туындылары абсолютті және бірқалыпты жинақталады. Сондықтан, қойылған аралас есеп қисынды болып табылады.

2.3 – бөлімшеде аралас есеп шешімінің бар болуы және жалғыздығы дәлелденеді.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында (0.33) теңдеулерді және олар үшін аралас есеп ретінде 0.2-есепті қарастырып, оның шешімі бар екендігін көрсетелік.

Теорема 0.4. Егер $\varphi(r,\theta) \in W_2^p(S), \psi_1(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha), \psi_2(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $p > \frac{3m}{2}$, онда 0.2 есептің бірмәнді шешімі бар.

Алдымен, Ω_α облысында (0.33), (0.34) есебінің шешімі бар болатындығын көрсетіліп сфералық координаталарда (0.33) теңдеуі $(0.0.1_1)$ түрде болады.

Ω_α облысында 0.2-есептің ізделінді шешімін келесі түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (0.56)$$

(0.56)-ны (2.1_1)-ға қойып, алынған өрнекті бірлік сфера H бойынша интегралдасақ, $\bar{u}_n^k$ үшін келесі өрнекті аламыз және дифференциалдық теңдеулердің шексіз жүйесін қарастырамыз

$$t^q \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \left(\frac{m-1}{r} t^q \rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1\right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Bigg\{ t^q \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \left(\frac{m-1}{r} t^q \rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} d_{in}^k\right) \bar{u}_{nr}^k + \quad (0.57)$$

$$+\left[\tilde{e}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}t^q+\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{d}_{in-1}^k-nd_{in}^k\right)\right]\Bigg\}\bar{u}_n^k=0.$$

$$t^q\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0t}^1+\frac{(m-1)}{r}t^q\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=0, \tag{0.58}$$

$$t^q\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^1-\rho_1^k\bar{u}_{1t}^k+\frac{(m-1)}{r}t^q\rho_1^k\bar{u}_{1r}^1-\frac{\lambda_1}{r^2}t^q\rho_1^k\bar{u}_1^k=$$
$$=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m}d_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\tilde{e}_0^1\bar{u}_0^1\right),n=1,k=\overline{1,k_1} \tag{0.59}$$

$$t^q\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{nt}^k+\frac{(m-1)}{r}t^q\rho_n^k\bar{u}_{nr}^1-\frac{\lambda_n}{r^2}t^q\rho_n^k\bar{u}_n^k$$

$$=\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}d_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+\left[\tilde{e}_{n-1r}^k+\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{d}_{in-2}^k-(n-1)d_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \tag{0.60}$$

$$k=\overline{1,k_n},n=2,3,\dots.$$

Енді теңдеуді (0.59) 1-ден k_1-ге дейін, (0,60) теңдеуді 1-ден k_n-ге дейін қосып, алынған өрнекті (0.58) теңдеумен қоссақ, (0.57) теңдеуіне келеміз.

Бұдан мынандай қорытынды шығады егер $\{\bar{u}_n^k\}, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots$ – жүйесі (0.58)–(0.60) жүйесінің шешімі болса, онда ол (0.57) теңдеудің де шешімі болады.

(0.58)–(0.60) жүйелеріндегі әрбір теңдеуді келесі түрде жазуға болады,

$$t^q\left(\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right)-\bar{u}_{nt}^k=\bar{f}_n^k(r,t), \tag{0.61}$$

мұндағы$\bar{f}_n^k(r,t)$ – осы жүйенің алдыңғы теңдеулерінен алынған функциялар, және $\bar{f}_0^1(r,t)\equiv 0$

Әрі қарай, (0.34) шекаралық шартты және (0.56)-ні ескерсек, (0.40) аламыз

(0.61), (0.40) теңдеулерінде $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t))$ айнымалыларын ауыстыра отырып, (0.41), (0.42) аламыз

$\bar{\vartheta}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\vartheta_n^k(r,t)$ айнымалыларын ауыстыра отырып, (0.41), (0.42) есептерін (0.41), (0.42) келесі (0.43)т-тен айырмашылығы $\tilde{f}_n^k$-да (0.44) есепке келтіреміз тек

$$L\vartheta_n^k \equiv t^q\left(\vartheta_{nrr}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) - \vartheta_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (0.62)$$

(0,62), (0.45) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз

$$L\vartheta_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (0.63)$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,\alpha) = 0, \qquad \vartheta_{1n}^k(1,t) = 0, \qquad (0.47)$$

$$L\vartheta_{2n}^k = 0,$$

$$\vartheta_{2n}^k(r,\alpha) = \widetilde{\varphi}_n^k(r), \qquad \vartheta_{2n}^k(1,t) = 0.$$

Жоғарыда көрсетілген есептердің шешімдерін (0.48) түрде қарастырамыз мұнда

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)R_s(r), \qquad \widetilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}R_s(r) \qquad (0.64)$$

болсын.

(0.50)-ді (0.64)-ке қойсақ, аламыз

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad (0.65)$$

$$a_{s,n}^k(t) = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\tilde{f}_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,$$

$$b_{s,n}^k = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\tilde{\varphi}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,$$

онда (0.50) қатарлары – Фурье–Бессель қатарларына жіктелуі болып табылады $\mu_{s,n}, s = 1,2,\dots$ – өсу ретімен орналасқан $J_\nu(z)$ Бессель функцияларының оң таңбалы нөлдері.

Осылайша, Ω_α облысында (0.35), шекаралық шарттарын ескере отырып, келесі түрдегі өзегешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есепке келеміз

$$L_2 u \equiv |t|^{\rho}\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \qquad (0.66)$$

берілген шарттармен

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta),\ u_t\Big|_S = \nu(r,\theta), u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta). \qquad (0.67)$$

1–бөлімде дәлелденген 0.2– теоремаға сәйкес, егер $\tau(r,\theta), \nu(z,\theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta), l > \frac{3m}{2}$ болса, онда (0.53), есебінің жалғыз шешімі болады.

Әрі қарай, осы теореманы пайдалана отырып, 0.2-есептің шешімі болатындығын дәлелденеді.

Демек, ($0.0.1_1$) параболалық теңдеулері үшін экстремум принципі бойынша $\overline{\Omega}_\alpha$ облысында $u \equiv 0$.

Бұдан

$$u_t(r,\theta,0) = \nu(r,\theta) = 0, \forall(r,\theta) \in S.$$

шығады.

Осылайша, (0.66), (0.67) біртекті аралас есебіне келдік, ал бұл есеп 0.1-теоремаға сәйкес тек тривиалды шешімге ие.

Демек, 0.2-есептің шешімінің жалғыздығы дәлелденді.

3 – бөлімде эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есеп қарастырылады.

3.1 – бөлімшеде эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің қойылымы қойылады.

Айталық, $\Omega_{\alpha\beta}$ – E_{m+1} евклид кеңістігіндегі $(x_1, \dots, x_m, t)$ нүктелерінен тұратын цилиндрлік облыс және ол $\Gamma = \{(x,t);\ |x| = 1\}$ цилиндрімен және $t = \alpha > 0$ және $t = \beta < 0$ жазықтықтарымен шектелген болсын, мұндағы $|x|$ — $x = (x_1, \dots, x_m)$) векторының ұзындығы.

Ω_α және Ω_β арқылы $\Omega_{\alpha\beta}$ облысының бөліктерін, Γ_α және Γ_β арқылы Γ бетінің сәйкесінше $t > 0$ және $t < 0$ жарты кеңістіктерінде жатқан бөліктерін, σ_α – жоғарғы, ал σ_β – төменгі табанын белгілейміз.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында келесі эллиптикалық-параболалық теңдеулерді қарастырайық

$$0 = \begin{cases} g(t)\Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i\,(x,t)u_{x_i} + e(x,t)u, t > 0, \\ p(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u, t < 0, \end{cases} \qquad (0.68)$$

мұндағы $t > 0, g(0) = 0, g(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2\big((0,\alpha)\big)$ болғанда $g(t) > 0$, $t < 0, p(0) = 0, p(t) \in C([\beta,0])$ болғанда $p(t) > 0$, Δ_x – $x_1, \dots, x_m$, айнымалылары бойынша Лаплас операторы, $m \geq 2$.

Есеп 0.3. (0.68) теңдеудің $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында $t \neq 0$ үшін $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$ класынан келесі шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек

$$L_1 u = g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t)u_{x_i} + e(r,\theta,t)u = 0, \qquad (0.0.0.1_1)$$

$$u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), u|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta), \qquad (0.69\ )$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \qquad (0.70\ )$$

мұндағы

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$$

$$g_1 = 1,\ g_j = \left(sin\theta_1 \dots sin\theta_{j-1}\right)^2, j > 1.$$

$\psi_1(0,\theta) = \psi_2(0,\theta),\ \psi_2(\beta,\theta) = \varphi(1,\theta), a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha),$
$d_i(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\beta), e(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\beta),\ i = 1,\dots,m,$
$e(r,\theta,t) \leq 0, \forall(r,\theta,t) \in \Omega_\beta,$

$d_i(r,\theta,t)\rho, d_i\frac{x_i}{r}\rho, e(r,\theta,t)\rho, d(r,\theta,t)\rho, \rho(\theta), i = 1,\dots,m, \varphi(r,\theta), \psi_1(t,\theta),$ $\psi_2(t,\theta)$ функцияларының жіктелу коэффициенттерін сәйкесінше $\tilde{d}_{in}^k(r,t), d_n^k(r,t), \tilde{e}_n^k(r,t), \tilde{d}_n^k(r,t), \rho_n^k, \bar{\varphi}_n^k(r), \varphi_{1n}^k(t), \varphi_{2n}^k(t)$ арқылы белгілейік, мұндағы $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, ал $H - E_m$ евклид кеңістігіндегі бірлік сфера.

Айталық, $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – Соболев кеңістігінің n ретті сызықтық тәуелсіз сфералық функциялар жүйесі болсын, мұнда $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n++m-3)!\,(2n+m-2), W_2^l(S), l = 0,1,\dots$

3.2 - бөлімшеде $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық-параболалық теңдеу қарастырылады.

$$0 = \begin{cases} g(t)\Delta_x u - u_t, t > 0 \\ p(t)\Delta_x u + u_{tt}, t < 0 \end{cases} \qquad (0.71)$$

Сфералық координаталарда (0.71) теңдеуі Ω_α облысында төмендегідей түрде болады

$$g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t = 0.$$

Аралас есеп ретінде 3.1-есепті қарастырайық.

Есеп 0.3.1. Ω_α облысында $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ классынан

$$g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t = 0. \tag{0.72}$$

теңдеудің $(0.69), (0.70)$ шекаралық шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

0.3-есептің Ω_α облысындағы ізделінді шешімі $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына жататындықтан, оны келесі түрде іздеуге болады

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{0.73}$$

мұндағы $\bar{u}_n^k(r,t)$ – анықталуға жататын функциялар.

Сфералық функциялардың ортогоналдылығын пайдалансақ, 0.1 лемманы ескере отырып шектік шарт мына түрде жазылады

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right) - \bar{u}_{nt}^k = 0, k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\ldots, \tag{0.74}$$

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_{1n}^k(t), k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\ldots. \tag{0.75}$$

(0.74), (0.75) теңдеулерінде айнымалыны $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_{1n}^k(t)$ деп ауыстыра отырып, келесі теңдеуді аламыз

$$g(t)\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right) - \bar{\vartheta}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{0.76}$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r,\alpha) = \varphi_n^k(r), \bar{\vartheta}_n^k(1,t) = 0, k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\ldots, \tag{0.77}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t) = \bar{\psi}_{1nt}^k + \frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi_n^k, \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(r) - \psi_{1n}^k(\alpha).$$

Айнымалыны $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}\vartheta_n^k(r,t)$ деп ауыстыра отырып, (0.76), (0.77) есептерін келесі түрге келтіреміз

$$L\vartheta_n^k \equiv g(t)\left(\vartheta_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) - \vartheta_{nt}^k = f_n^k(r,t), \tag{0.78}$$

$$\vartheta_n^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r),\ \vartheta_n^k(1,t) = 0, \tag{0.79}$$

(0.78), (0.79) есептерінің шешімін $\vartheta_n^k(r,t) = \bar{\vartheta}_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t)$, түрінде іздейміз, мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t), \vartheta_{2n}^k(r,t)$ – келесі есептердің шешімі

$$L\vartheta_{1n}^k = f_n^k(r,t), \qquad (0.80)$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,\alpha) = 0, \quad \vartheta_{1n}^k(1,t) = 0, \qquad (0.81)$$

$$L\vartheta_{2n}^k = 0,$$

$$\vartheta_{2n}^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \qquad \vartheta_{2n}^k(1,t) = 0.$$

Жоғарыда көрсетілген есептердің шешімін келесі түрде қарастырайық

$$\vartheta_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \qquad (0.82)$$

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \qquad (0.83)$$

(0.83)-тіі ескере отырып, (0.82)-ні (0.80), (0.81)-ге қойсақ, аламыз

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, 0 < r < 1, R_s(1) = 0, |R_s(0)| < \infty, \qquad (0.84)$$

(0.84) есептің шектеулі шешімі

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad (0.50)$$

болып табылады, мұндағы $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}), \mu = \mu_{s,n}^2$.
(0.83)-ге (0.50)-гі қойып,

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} J_\nu(\mu_{s,n} r), (0.85)$$

$$a_{s,n}(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi,$$

$$b_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi,$$

болса, онда 0.1 анықтамаға сәйкес (0.85) қатарлары – Фурье-Бессель қатарына жіктелуі болады. $\mu_{s,n}, s = 1,2, \ldots$ – өсу реті бойынша орналасқан $J_\nu(z)$ Бессель функциясының оң таңбалы нөлдері.

Демек, Ω_α облысындағы (0.71), (0.72) есебінің жалғыз шешімі келесі функция болады

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta)\,, \quad (0.86)$$

Леммалар мен берілген функциялар $\psi_l(t,\theta), \varphi(t,\theta)$ шектеулерін ескерсек, алынған шешімнің (0.86) $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^1(\Omega_\alpha \cup S) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ класына жататындығын дәлелдеуге болады.

$t \to +0$ болған жағдайда аламыз

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$$

Осылайша, Ω_β облысында шекаралық шарттарды ескере отырып, келесі түрде берілген көпөлшемді өзгешеленген эллиптикалық теңдеулерге аралас есепке келеміз

$$g(t)\Delta_x u + u_{tt} = 0 \quad (0.87)$$

келесі берілген шарттармен

$$u|_S = \tau(r,\theta), u|_S = \nu_2(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_2(t,\theta). \quad (0.88)$$

1.2 - бөлімшеде бұл есептің жалғыз шешімі бар екендігі дәлелденген (теорема 0.1).

Теорема 0.5. Егер (0.70) шекаралық шарттары орындалып және (0.85), $a_{s,n}(t)$, $b_{s,n}$ коэффициенттер Фурье–Бессель жіктелуінің жинақталу шарттарын қанағаттандырса, онда (0.72) теңдеуі үшін қойылған 0.0.0.1 аралас есептің Ω_α облысында $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына тиесілі жалғыз шешімі бар болады.

Сонымен қатар, 0.0.0.1 есеп, 1.2 бөлімде қарастырылған (0.1)–(0.2) есебіне келтірілетіндіктен, оның шешімі бар, жалғыз және берілгендерге үздіксіз тәуелді. Демек, (0.68)–(0.70) есебі қисынды.

3.3 бөлімшесінде аралас есеп шешімінің бар болуы және жалғыздығы көрсетіледі

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында (3.1) теңдеуін қарастырып, аралас есеп ретінде 0.3-есепті қарастырамыз және оның шешімінің болатындығын көрсетеміз.

Теорема 6. Егер $\varphi(r,\theta) \in W_2^p(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^2(\Gamma_\beta)$, $p > \frac{3m}{2}$, онда 3-есептің жалғыз шешімі бар.

Алдымен (0.68), (0.69) есебінің шешімінің бар екендігін көрсетеміз. (0.68) теңдеуін сфералық координаттарда Ω_α облысында қарастырайық, яғни $(0.0.0.1_1)$ теңдеуін аламыз.

Ω_α облысында $(0.0.0.1_1)$-(0.69) есебінің ізделінді шешімін мына түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{0.89}$$

мұндағы $\bar{u}_n^k(r,t)$– анықталуға тиісті функциялар.

(0.89)-ды $(0.0.0.1_1)$-ге қойып, алынған өрнекті $\rho(\theta) \neq 0$-ге көбейтіп, H бірлік сфера бойынша $\bar{u}_n^k$ үшін интегралдасақ, мына нәтижені аламыз және дифференциалдық теңдеулердің шексіз жүйесін қарастырайық

$$g(t)\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^k - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^k + \left(\frac{m-1}{r} g(t)\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{g(t)\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \left(\frac{m-1}{r} g(t)\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} d_{in}^k\right)\bar{u}_{nt}^k + \right. \tag{0.90}$$

$$\left. + \left[\tilde{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} g(t) + \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{d}_{in-1}^k - n d_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k = 0.\right.$$

$$g(t)\rho_0^k \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^k \bar{u}_{0t}^k + \frac{(m-1)}{r} g(t)\rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{0.91}$$

$$g(t)\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1t}^k + \frac{(m-1)}{r} g(t)\rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} g(t)\rho_1^k \bar{u}_1^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^k + \tilde{e}_0^1 \tilde{u}_0^k\right), \; n = 1, \qquad k = \overline{1, k_1} \tag{0.92}$$

$$g(t)\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r} g(t)\rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} g(t)\rho_n^k \bar{u}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} d_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \left[\tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m}\left(d_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \tag{0.93}$$

$$k = \overline{1, k_n}, n = 2,3, \dots .$$

Сондай-ақ, (0.91), (0.93) жүйесіндегі әрбір теңдеуді келесі түрде жазуға болады

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right) - \bar{u}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r,t), \qquad (0.94)$$

мұндағы $\tilde{f}_n^k(r,t)$ осы жүйенің алдыңғы теңдеулерінен анықталады, және де $\bar{f}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Әрі қарай, (0.69) шектік шартынан және (0.89)-ға сәйкес

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha) = \overline{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_{1n}^k(t), \quad k = \overline{1,k_n}, n = 0,1, \dots . \qquad (0.95)$$

шығады.

(0.94) және (0.95)-ке $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \bar{\psi}_n^k(t)$ ауыстыруын жасасақ, келесі өрнекті аламыз

$$g(t)\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right) - \bar{\vartheta}_{nt}^k = f_n^k(r,t), \qquad (0.96)$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r,\alpha) = \varphi_n^k(r), \quad \bar{\vartheta}_n^k(1,t) = 0, k = 1, k_n, \quad n = 0,1, \dots . \qquad (0.97)$$

$$f_n^k(r,t) = \bar{f}_n^k(r,t) + \psi_{1nt}^k + \frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi_{1n}^k, \ \varphi_n^k(r) = \overline{\varphi}_n^k(\mathrm{r}) - \psi_{1n}^k(\alpha).$$

$\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\vartheta_n^k(r,t)$ ауыстыру жасай отырып, (0.96), (0.97) есептерін келесі есепке келтіреміз

$$L\vartheta_n^k \equiv g(t)\left(\vartheta_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) - \vartheta_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (0.98)$$

$$\vartheta_n^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad \vartheta_n^k(1,t) = 0, \qquad (0.99)$$

мұндағы

$$\bar{\lambda}_n = \frac{\left((m-1)(3-m) - 4\lambda_n\right)}{4},$$

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} f_n^k(r,t),$$

$$\tilde{\varphi}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_n^k(r)$$

(0.98), (0.99) есептерінің шешімін келесі түрде іздейміз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t), \tag{3.46}$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$, $\vartheta_{2n}^k(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{0.100}$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,\alpha) = 0,\ \vartheta_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{0.101}$$

$$L\vartheta_{2n}^k = 0, \tag{3.49}$$

$$\vartheta_{2n}^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad \vartheta_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{3.50}$$

Жоғарыда көрсетілген есептердің шешімін келесі түрде қарастырамыз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{0.102}$$

сонымен қатар, мұнда

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)R_s(r)\,, \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}R_s(r). \tag{0.64}$$

(0.102)-ні (0.100), (0.11)-ге қойып, ϑ_{2n}^k-ні ескерсек, осы есептердің шектеулі шешімі болып табылады

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_\nu\left(\mu_{s,n}r\right), \tag{0.103}$$

мұндағы $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}, \mu = \mu_{s,n}^2$.

(0.103), (0.64)-ке қойып

$$r^{-1/2}\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)J_\nu\left(\mu_{s,n}r\right),$$

$$r^{-1/2}\tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}J_\nu\left(\mu_{s,n}r\right), \tag{0.65}$$

Егер $a_{s,n}(t)$, $b_{s,n}$

$$a_{s,n}(t) = 2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_{s,n}\right)\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{f}_n^k(\xi,t)J_\nu\left(\mu_{s,n}\xi\right)d\xi,$$

$$b_{s,n} = 2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_{s,n}\right)\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_n^k(\xi)J_\nu\left(\mu_{s,n}\xi\right)d\xi,$$

Онда (0.65) қатарлары – Бессель-Фурье қатарларына жіктелуі болады, мұндағы $\mu_{s,n}, s = 1,2,\dots$ – $J_\nu(z)$ Бессель функциясының өсу ретімен орналасқан оң нөлдері.

Осылайша, (0.73), $u(r,\theta,0)$, $u_t(r,\theta,0)$ шектік шарттарды ескере отырып, Ω_α облысында өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есепке келеміз

$$L_2u = p(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{l=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} +$$
$$+b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \qquad (0.104)$$

келесі мәліметтерімен

$$u\big|_S = \tau(r,\theta),\ u_t\big|_S = \nu(r,\theta),\ u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta) \qquad (0.105)$$

Бірінші бөлімде дәлелденген 0.2 теоремаға сәйкес, егер $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_2(\mathrm{t},\theta) \in W_2^l\left(\Gamma_\beta\right)$, $l > \frac{3m}{2}$, онда (0.104), (0.105) есептерінің жалғыз шешімі болады.

Осы теореманы қолдана отырып, 0.3-есептің шешімінің бар болатындығына келеміз.

$$L_1^*\vartheta = g(t)\Delta_x\vartheta - \vartheta_t - \sum_{i=1}^{m} d_i\,\vartheta_{x_i} + d\vartheta = 0, \qquad (0.0.0.1_1{}^*)$$

берілгендер

$$\vartheta\Big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad \vartheta\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad (0.106)$$

$$d(x,t) = e - \sum_{i=1}^{m} d_{ix_i},$$

мұндағы $\bar{\tau}_n^k(r) \in W,\ W$ – $C([0,1]) \cap C^1\big((0,1)\big)$ классына тиесілі $\tau(r)$ функцияларының жиыны. W жиыны $L_2\big((0,1)\big)$ кеңістігінің барлық жерінде тығыз. $(0.0.0.1_1{}^*)$, (0.106) есептерінің шешімін (0.89) түрінде іздейміз, Сонда, $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)$ функциялары (0.90)–(0.92) түріндегі теңдеулер жүйесін қанағаттандырады.

(0.105) шектік шартына және (0.89)-ға сәйкес, келесі есепке келеміз

$$L_1\vartheta_n^k \equiv g(t)\left(\vartheta_{nrr}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) - \vartheta_{nt}^k(r) = \tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (0.107)$$

$$\vartheta_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \qquad \vartheta_n^k(1,t) = 0,$$

$$\vartheta_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\vartheta}_n^k(r,t), \tilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)^2}{2}}\bar{f}_n^k(r,t), \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(r).$$

Демек, $(0.0.0.1_1)$ параболалық теңдеудің экстремум принципіне сәйкес $\bar{\Omega}_\alpha$ облысында $u \equiv 0$.

Бұдан $u_t(r,\theta,0) = \nu(r,\theta,0) = 0, \forall(r,\theta) \in S$.

Осылайша, (0.104), (0.105) біртекті аралас есебіне келдік, ол 0.2 теоремаға сәйкес тривиалды шешімге ие.

Демек, 3-есептің шешімінің жалғыздығы дәлелденді.

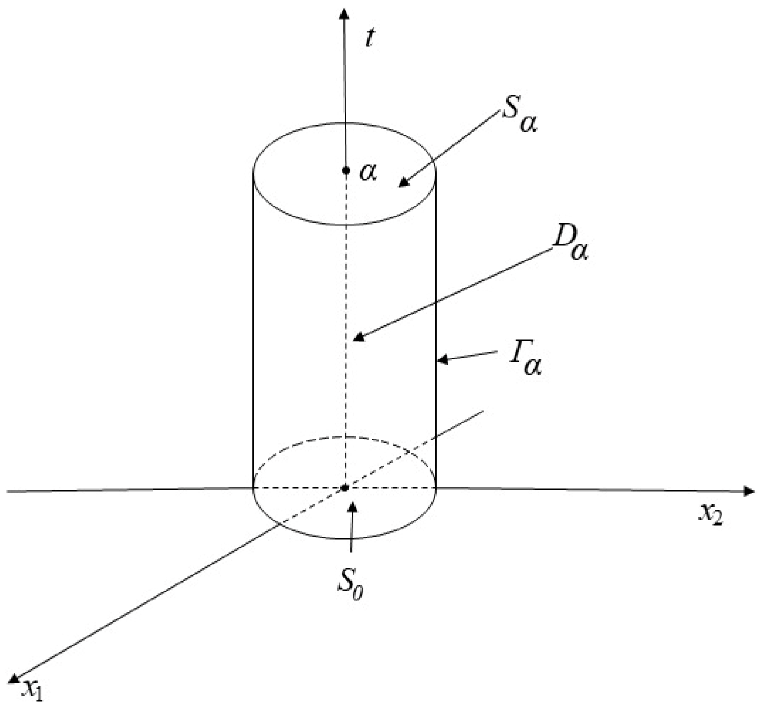
1 ӨЗГЕШЕЛЕНГЕН КӨПӨЛШЕМДІ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ АРАЛАС ЕСЕП

1.1 Көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің қойылымы

Көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есепті қойылымын қарастырайық.

Айталық, $D_\alpha - E_{m+1}$ Евклид кеңістігінде $\Gamma = \{(x,t)|x| = 1\}$ цилиндрімен және $t = \alpha > 0$, $t = 0$ жазықтықтарымен шектелген $(x_1, \dots, x_m, t)$ нүктелерінің цилиндрлік облысы, мұндағы $|x| -$ вектор ұзындығы $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Осы беттердің D_α облысының ∂D_α шекарасын құрайтын бөліктерін сәйкесінше $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ деп белгілейік (1- сурет).



Сурет 1.

1–анықтама. $D \subset R^n$ – ашық облыс, ал Γ – D облысының шекарасы болсын. D облысында $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$ функциялары анықталған. Екінші ретті дифференциалдық операторды L арқылы келесі түрде анықталық

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u.$$

Егер

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\ \xi_i\xi_j$$

квадраттық формасы D облысының әрбір нүктесінде кез келген $\xi \in R^n$ үшін анықталған болса, дифференциалдық L операторы эллиптикалық деп аталады. [3, 204- бет].

D_α облысында өзара байланысқан өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерді қарастырайық

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \tag{1.1}$$

$$L^*\vartheta \equiv g(t)\Delta_x\vartheta + \vartheta_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i\vartheta_{x_i} - b\vartheta_t + c\vartheta = 0, \tag{1.1*}$$

мұндағы $g(t) > 0$ және $t > 0$, $g(0) = 0$, $g(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2\big((0,\alpha)\big)$, Δ_x- Лаплас операторы $x_1, \dots, x_m$, $m \geq 2$, $d(x,t) = \mathrm{c} - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

Декарттық координаталар жүйесінен қисық сызықты координаталар жүйесіне көшейік.

$x_1, \dots, x_m, t$ декарттық координаттарының гиперсфералық полярлық координаттармен байланысы келесідей болады. [103]

$$\begin{aligned}
&x_1 = r\cos\theta_1 = rp_1(\theta_1),\\
&x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 = rp_2(\theta_1,\theta_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..\\
&x_{m-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1} = rp_{m-1}(\theta_1,\dots,\theta_{m-1}),\\
&x_m = r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1} = rp_m(\theta_1,\dots,\theta_{m-1})
\end{aligned}$$

мұндағы $r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2,3,\dots,m-1$ және $\sum_{i=1}^{m} p_i^2 = 1$.

Ізделінді $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t)$ функциясын, сондай-ақ диссертациялық жұмыста кездесетін белгілі функцияларды сфералық координаттарда осы әріптермен белгілейтін боламыз.

Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің қойылымы келесідей болады.

Есеп 1. D_α облысында $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ класынан

$$Lu \equiv g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_{rr} - \frac{\delta u}{r^2}\right) + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + \\ + c(r,\theta,t)u = 0. \tag{1.1$_1$}$$

$$u|_{S_0} = \tau(r,\theta), u_t|_{S_0} = \nu(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \tag{1.2}$$

(1.1_1) теңдеуінің (1.2) шектік шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Мұндағы $\tau(1,\theta) = \psi(0,\theta), \nu(1,\theta) = \psi_t(0,\theta)$, $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\alpha) \subset C(\bar{D}_\alpha)$, $l \geq m + 1$, $c(r,\theta,t) = 0$, $\forall(r,\theta,t) \in D_\alpha$.

Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің бар және жалғыз болуын, қисындылығын дәлелдеуге қолданылатын, сфералық функциялар бойынша қатарлар туралы қажетті бірнеше леммаларды қарастырайық [88, 175-бет].

Лемма 1. Айталық, $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Егер $l \geq m - 1$, онда қатар

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{1.3}$$

сонымен бірге, $p \leq l - m + 1$ ретті дифференциалдау арқылы одан алынған қатар абсолютті және бірқалыпты жинақталады.

Мұндағы $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — сызықты тәуелсіз n ретті сфералық функциялар жүйесі, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2), \theta = (\theta_{1,} \dots, \theta_{m-1})$. $W_2^l(S_0), l = 0, \dots, 1$ — Соболев кеңістігі.

Лемма 2. $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$ болу үшін, (1.3) қатарындағы коэффициенттер келесі теңсіздіктерді қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті шарт болып табылады

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}$$

$\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\hat{d}_n^k(r,t)$, $\rho_n^k, \bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, арқылы (1.3) қатарының коэффициенттерін $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1,\dots,m$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$ функцияларына сәйкес белгілейік, мұндағы $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H- евклидтік E_m кеңістігіндегі бірлік сфера.

1.2 Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге аралас есептің қисындылығы

Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге аралас есептің қисындылығын қарастырайық.

D_α облысында (1.1) теңдеудегі қосымша мүшелері 0-ге тең болғандағы жағдайда, өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуді қарастырайық:

$$g(t)\Delta_x u + u_{tt} = 0, \tag{1.4}$$

Δ_x- айнымалыдағы Лаплас операторы.

(1.4) теңдеуі сфералық координаталарда [3, 143-бет] келесі түрде болады:

$$g(t)\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)+u_{tt}=0,$$

Есеп 1.1. D_α облысында $C^1(\overline{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$ класынан келесі эллиптикалық теңдеудің

$$g(t)\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)+u_{tt}=0, \tag{1.5}$$

шекаралық шарттарды

$$u|_{S_0}=\tau(r,\theta), u_t|_{S_0}=\nu(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha}=\psi(t,\theta), \tag{1.2}$$

қанағаттандыратын шешімді табу керек, мұндағы δ–екінші ретті дифференцалды оператор,

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$$

$$g_1=1,\ g_j=\left(sin\theta_1 \dots sin\theta_{j-1}\right)^2, j>1.$$

δ операторының спектрі $\lambda_n=n(n+m-2), n=0,1,\dots$, меншікті мәндерден тұрады, олардың әрқайсысына k_n ортонормаль $Y_{n,m}^k(\theta)$ функциялар сәйкес келеді. [3, 144-бет]

[96], [97] жұмыстарда модульдік және циклдік спектрді қоса алғанда, операторлардың спектралдық қасиеттері зерттелген.

Қарастырып отырған есеп $g(t)=t^p,\ p=\text{const}>0$ жағдайында [88, 175-бет] еңбекте зерттелген.

1-есептің ізделетін шешімі $C^1(\overline{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$ класына тиесілі болғандықтан, 1.1 есептің де шешімін келесі түрде іздеуге болады

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{1.6}$$

мұндағы $\bar{u}_n^k(r,t)$ –ізделінді функция.

(1.6)-ны в (1.5)-ке қойып және $Y_{n,m}^k(\theta)$ сфералық функцияларының ортогоналдығын қолдана отырып, келесіні аламыз [3, 144-бет]

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right)+\bar{u}_{ntt}^k=0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots \tag{1.7}$$

мұндағы (1.2) шектік шарты 1 лемманы ескере отырып, келесі түрде жазылады

$$\bar{u}_n^k(r,0)=\bar{\tau}_n^k(r), \bar{u}_{nt}^k(r,0)=\bar{\nu}_n^k(r), \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_n^k(t), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots . \quad (1.8)$$

(1.7), (1.8) теңдіктерде $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$ айнымалыларын

$$g(t)\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right)-\bar{\vartheta}_{ntt}^k=\bar{f}_n^k(r,t) \quad (1.9)$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r,0)=\tau_n^k(r), \bar{\vartheta}_{nt}^k(r,0)=\nu_n^k(r), \bar{\vartheta}_n^k(1,t)=0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots, \quad (1.10)$$

$$\bar{f}_n^k(r,t)=\frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi_n^k-\psi_{ntt}^k,$$

$$\tau_n^k(r)=\bar{\tau}_n^k(r)-\psi_n^k(0),$$

$$\nu_n^k(r)=\bar{\nu}_n^k(r)-\psi_{nt}^k(0).$$

ауыстырайық.

$\bar{\vartheta}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\vartheta_n^k(r,t)$ ауыстыруын орындай отырып, (1.9), (1.10) есептерін төмендегі

$$L\vartheta_n^k\equiv g(t)\left(\vartheta_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right)+\bar{\vartheta}_{ntt}^k=f_n^k(r,t), \quad (1.11)$$

$$\vartheta_n^k(r,0)=\tilde{\tau}_n^k(r), \vartheta_{nt}^k(r,0)=\tilde{\vartheta}_n^k(r), \vartheta_n^k(1,t)=0, \quad (1.12)$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{\left((m-1)(3-m)-4\lambda_n\right)}{4}, \qquad f_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t),$$

$$\tilde{\tau}_n^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\tau_n^k(r), \quad \tilde{\nu}_n^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\nu_n^k(r).$$

есепке келтіреміз.

(1.11), (1.12) есептерінің шешімін келесі түрде іздейміз

$$\vartheta_n^k(r,t)=\vartheta_{1n}^k(r,t)+\vartheta_{2n}^k(r,t), \quad (1.13)$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ – есептің шешімі

$$L\vartheta_{1n}^k=f_n^k(r,t), \quad (1.14)$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,0)=\vartheta_{1nt}^k(r,0)=0,\ \vartheta_{1n}^k(1,t)=0, \quad (1.15)$$

Ал, $\vartheta_{2n}^{k}(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{2n}^{k}=0, \qquad (1.16)$$

$$\vartheta_{1n}^{k}(r,0)=\tilde{\tau}_{n}^{k}(r),\ \vartheta_{2nt}^{k}(r,0)=\tilde{\nu}_{n}^{k}(r),\ \vartheta_{2n}^{k}(1,t)=0. \qquad (1.17)$$

Жоғарыда көрсетілген (1.14), (1.16) теңдеулердің шешімін келесі түрде қарастырамыз

$$\vartheta_{n}^{k}(r,t)=\sum_{l=1}^{\infty}R_{l}(r)T_{l}(t), \qquad (1.18)$$

мұндағы,

$$f_{n}^{k}(r,t)=\sum_{l=1}^{\infty}a_{l,n}^{k}(t)R_{l}(r), \tilde{\tau}_{n}^{k}(r)=\sum_{l=1}^{\infty}b_{l,n}^{k}R_{l}(r), \tilde{\nu}_{n}^{k}(r)=\sum_{l=1}^{\infty}e_{l,n}^{k}R_{l}(r). \qquad (1.19)$$

(1.18) теңдеуді (1.14) және (1.15) теңдеулерге (1.19)-ды ескере отырып, қойсақ,

$$R_{lrr}+\frac{\bar{\lambda}_{n}}{r^{2}}R_{l}+\mu R_{l}=0, 0<r<1, R_{l}(1)=0, |R_{l}(0)|<\infty, \qquad (1.20)$$

$$T_{ltt}-\mu g(t)T_{l}(t)=a_{l,n}(t), 0<t<\alpha, \qquad (1.21)$$

$$T_{l}(0)=0, T_{lt}(0)=0 \qquad (1.22)$$

аламыз.

(1.20) есебінің шектеулі шешімі болып (1.23) табылады [104]

$$R_{l}(r)=\sqrt{r}J_{\nu}\left(\mu_{l,n}r\right), \qquad (1.23)$$

мұндағы $\nu=\frac{n+m-2}{2}$, $\mu=\mu_{l,n}$ – бірінші текті $J_{\nu}(z), \mu=\mu_{l,n}^{2}$ Бессель функциясының нөлдері.

(1.21), (1.22) есептері $T_{l}(t)$ функциясына қатысты екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтіріледі [2, 100-бет]

$$T_{l,n}(t)-\mu_{l,n}^{2}\int_{0}^{t}(t-\xi)g(\xi)\,T_{l,n}(\xi)d\xi=\int_{0}^{t}(t-\xi)a_{l,n}^{k}(\xi)d\xi, \qquad (1.24)$$

бұл теңдеудің шешімі бар және ол жалғыз.

(1.23) теңдігін (1.19) теңдігіне қоя отырып,

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t)=\sum_{l=1}^{\infty}a_{l,n}^k(t)J_\nu(\mu_{l,n}r),\bar{\tau}_n^k(r)=\sum_{l=1}^{\infty}b_{l,n}J_\nu(\mu_{l,n}r),$$

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\nu}_n^k(r)=\sum_{l=1}^{\infty}e_{l,n}^kJ_\nu(\mu_{l,n}r),0<r<1. \tag{1.25}$$

аламыз.

Егер

$$a_{l,n}^k(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{l,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{l,n}\xi)d\xi,$$

$$b_{l,n}^k(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{l,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\tau}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{l,n}\xi)d\xi, \tag{1.26}$$

$$e_{l,n}^k=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{l,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\nu}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{l,n}\xi)d\xi,$$

болса, онда (1.25) қатарлары - Фурье-Бессель қатарларының жіктелуі деп аталады, мұндағы $\mu_{l,n}, l=1,2,\dots$ - өсу реті бойынша орналасқан $J_\nu(z)$ Бессель функциясының оң таңбалы нөлдері [103, 82-бет].

(1.23), (1.24) өрнектерінен (1.14), (1.15) есептерінің шешімін келесі түрде аламыз

$$\vartheta_{1n}^k(r,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{r}\,T_{l,n}(r)J_\nu(\mu_{l,n}r), \tag{1.27}$$

мұндағы $a_{l.n}^k(t)$ - (1.26)-тен анықталады.

Әрі қарай, (1.23) теңдігін (1.16), (1.17) теңдігіне қоя отырып және (1.19) ескере отырып, келесіні аламыз

$$V_{ltt}-\mu_{l,n}^2g(t)V_l=0,0<t<\alpha,$$

$$V_l(0)=b_{l,n}^k,V_l(0)=e_{l,n}^k$$

келесі ауыстыруды орындай отырып

$$G_{l,n}(t)=V_{l,n}(t)-b_{l,n}^k+e_{l,n}^k, \tag{1.28}$$

келесідей есепке келеміз

$$G_{tt} - \mu_{l,n}^2 g(t) G_l = q_{l,n}^2(t), \tag{1.29}$$

$$\begin{gathered} G_l(0) = 0, G_{lt}(0) = 0, \\ q_{l,n}^2(t) = \mu_{l,n}^2 \left(b_{l,n}^k + t e_{l,n}^k\right) g(t). \end{gathered} \tag{1.30}$$

(1.29), (1.30) есептері де (1.24) интегралдық теңдеуге келтіріледі, мұнда $a_{l,n}^k(t)$, орнына $q_{l,n}^k(t)$ алынады.

(1.23), (1.24), (1.28) теңдеулерінен (1.16), (1.17) есептерінің шешімін табамыз

$$\vartheta_{ln}^k(r,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{l,n}(t) J_\nu\left(\mu_{l,n} r\right), \tag{1.31}$$

мұндағы $b_{l,n}^k, e_{l,n}^k$ мәндері (1.26)-да табылады.

Осылайша, (1.6) және (1.13) теңдеулерінен 1.1 есептің шешімі келесі түрде алынады

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{\psi_n^k(r) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t)\right]\right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{1.32}$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t), \vartheta_{2n}^k(r,t)$ мәндері (1.27), (1.31)-лерден табылады.

(1.27), (1.31) қатарлары үшін асимптотикалық формулалар келесідей болады [1, 644-бет]:

$$\begin{gathered} 2J_\nu^1(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z), \\ J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right), \nu \geq 0. \end{gathered} \tag{1.33}$$

Даламбер белгісін қолданып, (1.27), (1.31) қатарлары мен олардың дифференциялданған қатарларының абсолютті және бірқалыпты жинақтылығын көрсетуге болады [103, 22-бет]

Әрі қарай, (1.33) формуланы қолданып, келесі бағалауларды аламыз [3, 147-бет]:

$$k_n \leq c_1 n^{m-2}, \left|\frac{\partial^l}{\partial \theta_j^l} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, j = \overline{1, m-1}, l = 0,1, \ldots . \tag{1.34}$$

сонымен қатар, 1,2 леммалар мен берілген $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta), \Psi(r,\theta)$ функцияларына шектеулерді қолдана отырып, (1.32) түріндегі алынған шешім D_α облысында $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ класына тиесілі екендігі шығады. [88, 180-бет] еңбектердерде көрсетілген.

Алынған нәтижелерді мынадай тұжырыммен қорытындылаймыз.

Теорема 1. Егер (1.2) шекаралық шарттарындағы берілген функциялар үшін, 1 және 2-леммаларда көрсетілген шарттар орындалса, онда (1.5) теңдеуі үшін қойылған 1.1 аралас есептің D_α облысында $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ класына класына тиесілі жалғыз шешімі бар болады.

Шешім (1.32) түрінде өрнектелеліп, (1.34) бағалауды қанағаттандырады. Бұл шешім шекаралық шарттардағы функциялардан үздіксіз тәуелді болғандықтан қойылған көпөлшемді эллиптикалық теңдеу үшін қойылған аралас есеп қисынды болады.

1.3 Аралас есеп шешімінің бар болуы және жалғыздығы

D_α облысында өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық (1.1) теңдеулерді қарастырайық.

Аралас есеп ретінде 1 есепті қарастырып, оның шешімінің бар екендігін көрсетейік.

Теорема 2. Егер $\tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0), \psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), l > \frac{3m}{2}$, онда 1-есептің жалғыз шешімі болады.

Дәлелдеу. 1 есептің ізделінді шешімін келесі түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t)\, \mathrm{Y}_{n,m}^k(\theta), \tag{1.35}$$

мұндағы $\bar{u}_n^k(r,t)$ – анықталуы тиіс функция.

(1.35) теңдігін (1.1_1)-ке қойып, алынған өрнекті $\rho(\theta) \neq 0$-ке көбейтіп және H бірлік сферасы бойынша интегралдап, $\bar{u}_n^k$ үшін аламыз [105-110]

$$g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\{g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \tag{1.36}$$

$$+\tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}g(t) + \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{a}_{in-1}^k - na_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k\Bigg\}.$$

Енді дифференциалдық теңдеулердің шексіз жүйесін қарастырайық

$$\rho_0^1 g(t)\bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = 0, \qquad (1.37)$$

$$\rho_1^k g(t)\bar{u}_{1rr}^k + \rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}g(t)\rho_1^k\bar{u}_1^k =$$
$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\,\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right), n = 1, k = \overline{1, k_1}, \qquad (1.38)$$

$$\rho_n^k g(t)\bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}g(t)\rho_n^k\bar{u}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\sum_{k=1}^{k_n-1}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k + \right. \qquad (1.39)$$

$$\left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}$$

$$k = \overline{1, k_n}, n = 2,3, \dots .$$

Егер $\{\bar{u}_n^k\}, k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, \dots$ - (1.37)-(1.39) жүйелерінің шешімі болса, онда ол (1.36) теңдеуінің де шешімі болатындығына көз жеткізу қиын емес.

(1.37)-(1.39) жүйелерінің әрбір теңдеуін келесідей жазуға болады

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right) + \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r, t), \qquad (1.40)$$

мұндағы $f_n^k(r, t)$ – осы жүйенің алдыңғы теңдеулерінен анықталады және $f_0^1(r, t) \equiv 0$.

Әрі қарай, (1.35) негізінде, (1.2) шеттік шарттан және 1-лемманы ескере отырып, (1.41)-ні аламыз

$$\bar{u}_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \bar{u}_{nt}^k(r, 0) = \bar{\nu}_n^k(r), \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, \dots . \qquad (1.41)$$

1.1 есептегідей ауыстыру енгізіп, (1.40), (1.41) теңдеулерінде $\bar{\vartheta}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$ деп қойсақ, келесі өрнекті аламыз

$$g(t)\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right) + \bar{\vartheta}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \qquad (1.42)$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r, 0) = \tau_n^k(r), \bar{\vartheta}_{nt}^k(r, 0) = \nu_n^k(r), \qquad \bar{\vartheta}_n^k(1, t) = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, \dots, \qquad (1.43)$$

$$\bar{f}_n^k(r,t) = f_n^k(r,t) + \frac{\lambda_n}{r^2} g(t)\psi_n^k - \psi_{ntt}^k,$$

$$\tau_n^k(r) = \bar{\tau}_n^k(r) - \psi_n^k(0),$$

$$\nu_n^k(r) = \bar{\nu}_n^k(r) - \psi_{nt}^k(0).$$

Айнымалыны $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \vartheta_n^k(r,t)$ деп ауыстыру арқылы (1.42), (1.43) теңдеулерін келесі есепке келтіреміз

$$L\vartheta_n^k \equiv g(t)\left(\vartheta_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) + \vartheta_{ntt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{1.44}$$

$$\vartheta_n^k(r,0) = \tilde{\tau}_n^k(r),\ \vartheta_{nt}^k(r,0) = \tilde{\nu}_n^k(r),\ \vartheta_n^k(1,t) = 0 \tag{1.45}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4},$$

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r,t),$$

$$\tilde{\tau}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \tau_n^k(r),$$

$$\tilde{\nu}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \nu_n^k(r).$$

(1.44), (1.45) есептерінің шешімін келесі түрде іздейміз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t), \tag{1.46}$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{1.47}$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,0) = \vartheta_{1nt}^k(r,0) = 0, \qquad \vartheta_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{1.48}$$

$\vartheta_{2n}^k(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{2n}^k = 0, \tag{1.49}$$

$$\vartheta_{2n}^k(r,0) = \tilde{\tau}_n^k(r),\ \vartheta_{2nt}^k(r,0) = \tilde{\nu}_n^k(r),\ \vartheta_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{1.50}$$

Жоғарыда көрсетілген есептерді келесі түрде қарастырайық

$$\vartheta_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s\,(r) T_s(t), \tag{1.51}$$

мұнда келесідей болсын

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k\,(t) R_s(r), \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r), \tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k\, R_s(r). \tag{1.52}$$

(1.51)-ні (1.47), (1.48)-ге қойып, (1.52)-ні ескерсек, келесі есепті аламыз

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, 0 < r < 1, \tag{1.53}$$

$$R_s(1) = 0, |R_s(0)| < \infty, \tag{1.54}$$

$$T_{stt} - \mu g(t) T_s(t) = a_{ns}(t), 0 < t < \alpha, \tag{1.55}$$

$$T_s(0) = 0, \qquad T_{st}(0) = 0. \tag{1.56}$$

(1.54), (1.55) есептерінің шектелген шешімі [104, 404-бет]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu\big(\mu_{s,n} r\big), \tag{1.57}$$

мұндағы $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ – бірінші текті Бессель функциясының нөлдері $\mu = \mu_{s,n}^2$.

(1.55), (1.56) есептері $T_{s,n}(t)$ функциясына қатысты Вольтердың екінші текті интегралдық теңдеуіне келтіріледі

$$T_{s,n}(t) - \mu_{s,n}^2 \int_0^t (t-\xi) g(\xi) T_{s,n}(\xi) d\xi = \int_0^t (t-\xi) a_{ns}\,(\xi) d\xi, \tag{1.58}$$

бұл теңдеудің шешімі бар және ол жалғыз болады [2, 100-бет].

(1.57)-ні (1.52)-ге қойсақ, келесі өрнекті аламыз

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu\big(\mu_{s,n} r\big), \qquad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_\nu\,\big(\mu_{s,n} r\big), \tag{1.59}$$

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{v}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k J_\nu\left(\mu_{s,n} r\right), 0 < r < 1.$$

Егер келесі теңдіктер орындалса

$$a_{ns}^k(t) = 2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_{s,n}\right)\right]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\, \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_\nu\left(\mu_{s,n}\xi\right) d\xi, \qquad (1.60)$$

$$b_{ns}^k = 2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_{s,n}\right)\right]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\, \tilde{\tau}_n^k(\xi) J_\nu\left(\mu_{s,n}\xi\right) d\xi,$$

$$(1.61)$$

$$e_{ns}^k = 2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_{s,n}\right)\right]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\, \tilde{v}_n^k(\xi) J_\nu\left(\mu_{s,n}\xi\right) d\xi,$$

(1.59) қатарлары–Фурье-Бессел қатарларына жіктелуі [103, 83-бет] болады, мұндағы $\mu_{s,n}, s = 1,2, \ldots$ - өсу реті бойынша орналасқан $J_\nu(z)$ Бессель функциясының оң таңбалы нөлдері.

(1.57), (1.58)-ден (1.47), (1.48) есебінің шешімін келесі түрде аламыз

$$\vartheta_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}\, T_{s,n}(t) J_\nu\left(\mu_{s,n} r\right), \qquad (1.62)$$

мұндағы a_{ns}^k- (1.66)-ден анықталады.

Әрі қарай, (1.57)-ні (1.49), (1.50)-ге қойып, (1.52)-ні ескере отырып, келесі есепті аламыз

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 g(t) V_s(t) = 0, \qquad 0 < t < \alpha,$$

$$V_s(0) = b_{ns}^k, \qquad V_{st}(0) = e_{ns}^k,$$

мұнда айнымалыларды алмастырып

$$T_s(t) = V_s(t) - b_{ns}^k - t e_{ns}^k, \qquad (1.63)$$

келесі есепке келеміз

$$T_{stt} - \mu_{s,n}^2 g(t) T_s(t) = q_{ns}^k(t), \qquad (1.64)$$

$$T_s(0) = 0, \;\; T_{st}(0) = 0, \qquad (1.65)$$

$$q_{ns}^{k}(t) = \mu_{s,n}^{2} g(t)(b_{ns}^{k} + te_{ns}^{k}).$$

(1.57), (1.58), (1.63)-ке сүйене отырып, (1.49), (1.50) есебінің шешімін табамыз

$$\vartheta_{2n}^{k}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \tag{1.66}$$

мұндағы b_{ns}^{k}, e_{ns}^{k} - (1.61)-ден табылады.

Демек, алдымен (1.37), (1.41) есебін $(n = 0)$, содан кейін (1.38), (1.41) есебін $(n = 1)$ және т.с.с шешу арқылы (1.46) өрнектегі барлық ден $\vartheta_{n}^{k}(r,t)$ табамыз. Мұндағы $\vartheta_{1n}^{k}(r,t)$, $\vartheta_{2n}^{k}(r,t)$ - (1.62), (1.66)-дан анықталады, $k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\ldots$.

Сонымен, D_{α} облысында келесі теңдік орын алады

$$\int_{H} \rho(\theta) Lu dH = 0. \tag{1.67}$$

Айталық $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$ болсын, мұндағы $R(r) \in V_0$, V_0 – $L_2((0,1))$ кеңістігінде тығыз, $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$ – $L_2(H)$ кеңістігінде тығыз, $T(t) \in V_1, V_1$ – $L_2((0,\alpha))$ кеңістігінде тығыз. Сонда $f(r,\theta,t) \in V, V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ – $L_2(D_2)$ кеңістігінде тығыз болады [111].

Бұдан және (1.67)-ден шығады

$$\int_{D_{\alpha}} f(r,\theta,t) Lu dD_{\alpha} = 0$$

және

$$Lu = 0, \forall (r,\theta,t) \in D_{\alpha}.$$

Осылайша, 1-есептің шешімі келесі қатар түрдінде жазылады

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{n}^{k}(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\vartheta_{1n}^{k}(r,t) + \vartheta_{2n}^{k}(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^{k}(\theta), \tag{1.68}$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^{k}(r,t), \vartheta_{2n}^{k}(r,t)$ – (1.62), (1.66)-дан табылады.

1.2 бөлімшесіндегі 1.1 есеп үшін алынған нәтижелерді қолдана отыра, яғни (1.33) формуласын, (1.34) бағалауларын, сонымен қатар, 1 және 2 леммаларды, берілген $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta), \psi(t,\theta)$ функцияларына және (1.1)-теңдеудің коэффициенттеріне қойылған шектеулерді ескерсек, (1.68) шешімі $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ класына жатады. [105, 65-бет, 108, 796-бет].

Демек, өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас 1-есептің шешімінің бар екендігі дәлелденді.

Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есеп шешімінің жалғыздығын дәлелдеу үшін алдымен келесі есептің шешімін құрамыз.

(1.1*) теңдеуі үшін келесі шарттармен шекаралық есептің шешімін құрайық

$$\vartheta|_{\Gamma_\alpha} = 0, \vartheta|_{s_\alpha} = 0,\ \vartheta_t|_{s_\alpha} = \nu(r,\theta) = \bar{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, \dots, \quad (1.69)$$

мұндағы $\bar{\nu}_n^k(r) \in G, G-\ C([0,1]) \cap C^1([0,1])$ класындағы $\nu(r)$ функцияларының жиыны. G жиыны $L_2\big((0,1)\big)$ кеңістігінің барлық жерінде тығыз болып табылады [111, 377-бет].

(1.1*) және (1.69) есептерінің шешімін (1.35) түрінде іздейміз, мұндағы $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)$ функциялары төменде анықталады. $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)$ функциялары 1.3- бөлімшеге ұқсас (1.37), (1.39) теңдеулер жүйесін қанағаттандырады, мұндағы $\tilde{a}_{in}^k,\ a_{in}^k,\ \tilde{b}_n^k$ коэффициенттері сәйкесінше $-\tilde{a}_{in}^k,\ -a_{in}^k\ -\tilde{b}_n^k$ коэффициенттеріне, ал $\tilde{c}_n^k$ коэффициенті $\tilde{d}_n^k$ коэффициентіне ауыстырылды, $i = 1, \dots, m, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$.

Әрі қарай, (1.39) шеттік шартынан және (1.35)-ға сәйкес келесіні

$$\bar{\vartheta}_n^k(1,t) = 0, \bar{\vartheta}_n^k(r,\alpha) = 0,\ \bar{\vartheta}_{nt}^k(r,\alpha) = \bar{\nu}_n^k(r), k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, \dots. \quad (1.70)$$

аламыз.

Жоғарыда атап өтілгендей, (1.37)–(1.39) жүйесінің әрбір теңдеуі (1.40) түрінде жазылған. (1.40), (1.70) есебінің жалғыз шешімінің бар екенін жоғарыда сипатталғандай көрсетуге болады.

Осылайша, (1.1*), (1.69) есебінің шешімі (1.68) қатар түрінде құрылды, және ол (1.34) бағалауларға сәйкес, $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ классына жатады.

Түйіндес $L,\ L^*$ операторларының анықтамасына сәйкес [89, 140-бет]

$$\vartheta L u - u L^* \vartheta = -\vartheta P(u) + u P(\vartheta) - u \vartheta Q,$$

мұндағы

$$P(u) = g(t) \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} cos(N^\perp, x_i) - u_t cos(N^\perp, t),$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos(N^\perp, x_i) - b \cos(N^\perp, t),$$

ал, $N^{\perp}$ – Грин формуласы бойынша ∂D_{α}шекарасына жүргізілген сыртқы нормаль, сонда

$$\int\limits_{D_{\alpha}} (\vartheta Lu - uL^{*}\vartheta) dD_{\alpha} = \int\limits_{\partial D_{\alpha}} \left[\left(\vartheta \frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial \vartheta}{\partial N}\right) M + u\vartheta Q\right] ds, \qquad (1.71)$$

мұндағы

$$\frac{\partial}{\partial N} = g(t)\sum_{i=1}^{m} cos(N^{\perp}, x_i) - cos(N^{\perp}, t)\frac{\partial}{\partial t},$$

$$M^2 = g^2(t)\sum_{i=1}^{m} cos^2(N^{\perp}, x_i) + cos^2(N^{\perp}, t).$$

(1.2) біртекті шекаралық шарттар мен (1.69) шарттарды ескеріп, (1.71) формуласынан аламыз

$$\int\limits_{S_{\alpha}} \nu(r,\theta) u(r,\theta,\alpha) ds = 0. \qquad (1.72)$$

$\left\{\bar{v}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ функциялар жүйесінің сызықтық қабықшасы $L_2(S_{\alpha})$ кеңістігінде тығыз орналасқандықтан [111, 377-бет], (1.72)-ден $u(r,\theta,\alpha) = 0$, $\forall(r,\theta) \in S_{\alpha}$ деген қорытынды шығарамыз.

Осылайша, біз нөлдік шешімі бар келесі Дирихле есебіне келеміз [112]

$$Lu = 0, \qquad u\Big|_{S_0} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_{\alpha}} = 0, \qquad u\Big|_{S_{\alpha}} = 0,$$

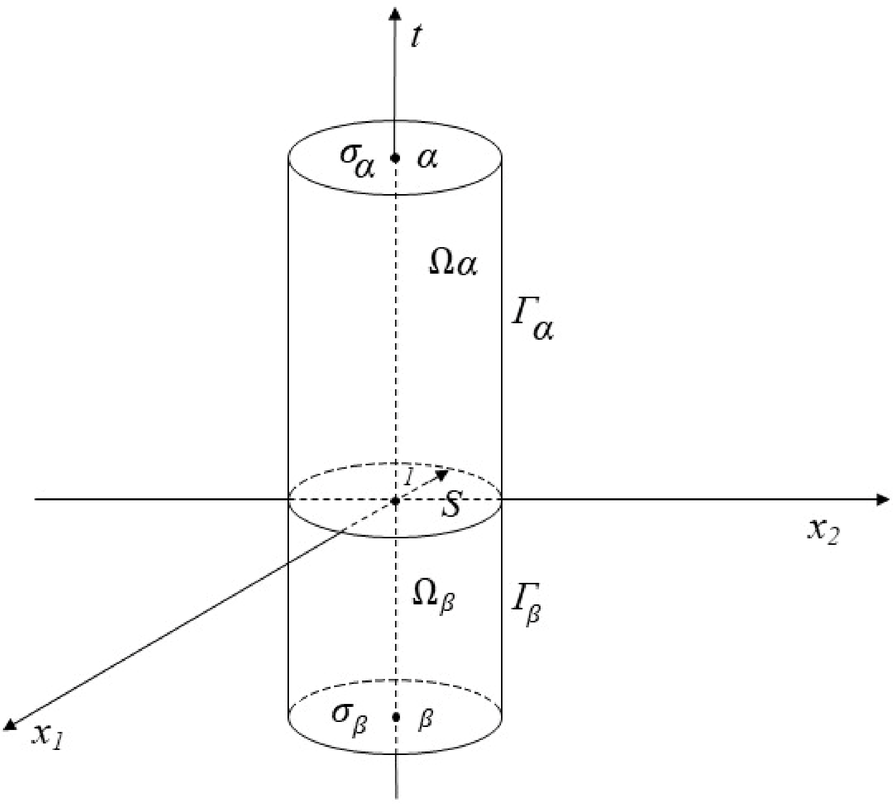
Демек, шешімнің жалғыздығы, яғни 2 теорема дәлелденді.

2 ӨЗГЕШЕЛЕНГЕН КӨПӨЛШЕМДІ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР КЛАСЫ ҮШІН АРАЛАС ЕСЕП

2.1 Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қойылымы

Айталық, $\Omega_{\alpha\beta}$ – E_{m+1} евклид кеңістігінде $\Gamma = \{(x,t): |x| = 1\}$ цилиндрімен, $t = \alpha > 0$ және $t = \beta < 0$ жазықтықтарымен шектелген цилиндрлік облыс болсын, мұндағы $|x|$ – векторының ұзындығы $x = (x_1, \dots, x_m)$.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысының бөліктерін Ω_α және Ω_β арқылы, ал $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – арқылы $t > 0$ және $t < 0$ жартылай кеңістігінде жатырған Γ бетінің бөліктерін; $\Omega_{\alpha\beta}$ облысының жоғарғы табанын – σ_α, ал төменгі табанын – σ_β арқылы белгілейік (2-сурет).



Сурет 2.

Әрі қарай, айталық, S – Ω_α және Ω_β облыстарының ортақ шекарасы және ол E_m евклид кеңістігіндегі $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ жиыны болсын.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында келесі өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерді қарастырайық

$$0=\begin{cases} t^q\Delta_x u-u_t+\sum_{i=1}^{m} d_i(x,t)u_{x_i}+e(x,t)u, t>0 \\ |t|^p\Delta_x u+u_{tt}+\sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u, t<0, \end{cases} \quad (2.1)$$

мұндағы $p,q=const,\, p>0,\, q\geq 0,\, ,\Delta_x - x_1,\dots,x_m, m\geq 2$ айнымалылары бойынша Лаплас операторы, $a_i(r,\theta,t),\ b(r,\theta,t),\ c(r,\theta,t)\in W_2^l(\Omega_\beta)\subset C(\bar{\Omega}_\beta)$, $d_i(r,\theta,t),\ e(r,\theta,t)\in W_2^l(\Omega_\alpha),\ i=1,\dots,m, l\geq m+1, e(r,\theta,t)\leq 0,\ \forall(r,\theta,t)\in \Omega_\alpha$.

Алдағы есептеулерде $x_1,\dots,x_m,t$ декарттық координаталардан сфералық координаталарға $r,\theta_1,\dots,\theta_{m-1},t,$ ауысу ыңғайлы болады мұндағы $r\geq 0,\ 0\leq \theta_1<2\pi, 0\leq\theta_i\leq\pi, i=2,3,\dots,m-1,\ \theta=(\theta_1,\dots,\theta_{m-1})$.

Аралас есеп ретінде келесі есепті қарастырамыз.

2 Есеп. (2.1_1) теңдеудің $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында $t\neq 0$ үшін $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta})\cap C^1(\Omega_{\alpha\beta})\cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$ класынан келесі шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек

$$L_1 u\equiv t^q\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)-u_t+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} d_i\,(r,\theta,t)u_{x_i}+e(r,\theta,t)u=0 \quad (2.1_1)$$

$$u\Big|_{\sigma_\alpha}=\varphi(r,\theta)\,,u\Big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta), \quad (2.2)$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(r,\theta), \quad (2.3)$$

мұнда,

$$\delta\equiv\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$$

$$g_1=1, g_j=\left(sin\,\theta_1\dots sin\,\theta_{j-1}\right)^2, j>1.$$

δ операторының спектрі меншікті мәндерден $\lambda_n=n(n+m-2),\ n=0,1,\dots,$ тұрады және оның әрбір мәніне k_n ортонормаланған $Y_{n,m}^k(\theta)$ меншікті функциялар сәйкес келетіндігі белгілі [3, 144], $\varphi(1,\theta)=\psi_2(\beta,\theta),\varphi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta),\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}-n$ ретті сызықты тәуелсіз сфералық функциялар жүйесі, $1\leq$

$k \leq k_n, (m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $W_2^l(S), l = 0,1,\dots$ – Соболев кеңістігі. $\tilde{d}_{in}^k(r,t)$, $d_{in}^k(r,t)$, $\tilde{e}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k , $\bar{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_{in}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$ арқылы (1.3) қатарына $d_i(r,\theta,t)\rho$, $d_i\frac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1,\dots,m$, $\varphi(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$ функцияларының сәйкесінше жіктелу коэффициенттерін белгілейік $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, мұнда $H - E_m$ кеңістігіндегі бірлік сфера. 1-бөлімдегі 1 және 2-леммалар орын алады [5, 14-бет].

2.2 Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қисындылығы, шешімінің құрылымы

Осы бөлімде $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында келесі өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеу қарастырылады

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t, t > 0 \\ |t|^p \Delta_x u + u_{tt}, t < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Аралас есеп ретінде 2.1-есепті қарастырамыз.

2.1 есеп. Сфералық координаталарда (2.4) теңдеу Ω_α облысында келесі түрде жазылады

$$t^q \left(u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u \right) - u_t = 0 \tag{2.5}$$

Онда (2.5) теңдеудің (2.2), (2.3) шарттарын қанағаттандыратын Ω_α облысында $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына тиісті болатын шешімін табу керек.

2 есептің ізделінді шешімі Ω_α облысында $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына жататындықтан, 2.1 есептің шешімді келесі түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{2.6}$$

мұндағы, $\bar{u}_n^k(r,t)$ – анықталуы тиіс функциялар.

(2.6)-ны (2.5)-ке қойып, $Y_{n,m}^k(\theta)$ сфералық функцияларының ортогоналдық қасиетін қолдана отырып [5, 70-бет], келесіні

$$t^q \left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k \right) - \bar{u}_{nt}^k = 0, \; k = \overline{1, k_n}, \; n = 0, 1, \dots . \tag{2.7}$$

аламыз, мұнда, 1 лемманы ескере отырып, (2.2) шекаралық шарттары келесі түрде жазылады

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_{1n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots . \tag{2.8}$$

(2.7), (2.8) теңдіктеріне $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \bar{\psi}_{1n}^k$(t) ауыстыруларын орындап, келесіні аламыз

$$t^q\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right) - \bar{\vartheta}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{2.9}$$

$$\bar{\vartheta}_n^t(r,\alpha) = \varphi_n^k(r), \bar{\vartheta}_n^k(1,t) = 0, k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\dots . \tag{2.10}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t) = \psi_{1nt}^k + \frac{\lambda_n t^q}{r^2}\psi_n^k, \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(r) - \psi_{1n}^k(\alpha).$$

Айнымалыны $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\vartheta_n^k(r,t)$ ауыстыра отырып, (2.9), (2.10) есептерін келесі есепке келтіреміз

$$L\vartheta_n^k \equiv t^q\left(\vartheta_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) - v_{nt}^k = f_n^k(r,t). \tag{2.11}$$

$$\vartheta_n^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \vartheta_n^k(1,t) = 0. \tag{2.12}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{\big((m-1)(3-m) - 4\lambda_n\big)}{4},$$

$$f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t),$$

$$\tilde{\varphi}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_n^k(r).$$

(2.11), (2.12) есептерінің шешімін келесі түрінде іздейміз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t), \tag{2.13}$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{1n}^k = f_n^k(r,t). \tag{2.14}$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,\alpha) = 0, \vartheta_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{2.15}$$

ал, $\vartheta_{2n}^k(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$Lv_{2n}^k = 0, \tag{2.16}$$

$$\vartheta_{2n}^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \vartheta_{2n}^k(1,t) = 0. \qquad (2.17$$

Жоғарыда аталған есептердің шешімін келесі түрде қарастырамыз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{2.18}$$

мұнда келесідей болсын

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)R_s(r),\ \varphi_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}R_s(r). \tag{2.19}$$

(2.18)-ді (2.14) және (2.15)-ке (2.19)-ды ескере отырып қойсақ,

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0{,}0 < r < 1, \tag{2.20}$$

$$R_s(1) = 0, |R_s(0)| < \infty, \tag{2.21}$$

$$T_{st} + \mu t^q T_s(t) = -a_{s,n}(t), 0 < t < \alpha, \tag{2.22}$$

$$T_s(\alpha) = 0. \tag{2.23}$$

аламыз.

(2.20), (2.21) есептің шектелген шешімі келесідей түрде беріледі [104, 404-бет]

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{2.24}$$

мұндағы $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

(2.22), (2.23) есептің шешімі келесідей түрде беріледі

$$T_{s,n}(t) = \left(exp\left(\frac{-\mu^2{}_{s,n}t^{q+1}}{q+1}\right)\right)\int_t^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi \tag{2.25}$$

(2.24)-ті (2.19)-ға қойсақ, келесіні аламыз

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{2.26}$$

$$0 < r < 1.$$

Егер

$$a_{s,n}(t) = 2\big[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\big]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \qquad (2.27)$$

$$b_{s,n} = 2\big[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\big]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\, \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \qquad (2.28)$$

онда, (2.26) қатарлары – Фурье-Бессель қатарларына жіктелуі болып табылады [103, 83-бет], мұндағы где $\mu_{s,n}, s = 1,2,\ldots$ – өсу реті бойынша орналасқан $J_\nu(z)$ Бессель функциясының оң таңбалы нөлдері.

(2.18), (2.25)-тен (2.14), (2.15) есебінің шешімін келесі түрде аламыз

$$\vartheta_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_s(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad (2.29)$$

мұндағы $a_{s,n}(t)$ – (2.27)-ден анықталады.

Әрі қарай, (2.18)-ді (2.16), (2.17)-ге, (2.19)-ды ескере отырып қойсақ, келесі есепті аламыз

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 t^q T_s = 0,\, 0 < t < \alpha,\, T_s(\alpha) = b_{s,n},$$

бұл есептің шешімі

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right). \qquad (2.30)$$

(2.24), (2.30)-ден аламыз

$$\vartheta_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}\sqrt{r} exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right) J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad (2.31)$$

мұндағы $b_{s,n}$ – (2.28)-ден табылады.

Демек, (2.13)-тен Ω_α облысында (2.4), (2.2) есебінің жалғыз шешімі келесі функция екендігі шығады

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{1n}^{k}(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\vartheta_{1n}^{k}(r,t)+\vartheta_{2n}^{k}(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^{k}(\theta), \tag{2.32}$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^{k}(r,t)$, $\vartheta_{2n}^{k}(r,t)$ – (2.29), (2.31) формулаларынан анықталады.

(1.33) формуласы, (1.34) бағалаулары, сондай-ақ леммалар мен берілген $\psi_1(t,\theta),\varphi(r,\theta)$ функциялары үшін қойылған шектеулерді ескере отырып, алынған (2.32) шешімі $C(\bar{\Omega}_\alpha)\cap C^1(\Omega_\alpha\cup S)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына жататыны [113] дәлелденеді.

Әрі қарай, $t\to+0$ кезінде (2.25), (2.30), (2.32) формулаларынан

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)\,Y_{n,m}^{k}(\theta), \tag{2.33}$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{1n}^{k}(0)-\sum_{s=1}^{\infty}r^{(2-m)/2}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi+\right.$$

$$\left.+b_{s,n}\left(exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right]J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n}r),$$

$$u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^{k}(\theta),$$

$$\nu_n^k(r)=\psi_{1nt}^{k}(0)-\sum_{s=1}^{\infty}r^{(2-m)/2}a_{s,n}(0)\,J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n}r). \tag{2.34}$$

аламыз.

(2.27), (2.28), (1.34) формулаларынан және леммалардан $\partial(r,\theta),\nu(r,\theta)\in W_2^l(S),l>\frac{3m}{2}$ екендігі шығады.

Осылайша, Ω_β облысында (2.3), (2.33), (2.34) шектік шарттарды ескере отырып, келесі өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге аралас есепке келеміз:

$$|t|^p\Delta_x u+u_{tt}=0 \tag{2.35}$$

$$u\Big|_S=\tau(r,\theta),\quad u_t\Big|_S=\nu(r,\theta),u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta) \tag{2.36}$$

Теорема 0.3. Егер (2.2), (2.3) шекаралық шарттарындағы берілген функциялар леммалар және жинақталу шарттарын қанағаттандырса, онда (2.5) теңдеуі үшін қойылған 2.1 аралас есептің Ω_α облысында жататын жалғыз шешімі бар болады.

Бұл шешім (2.6) түріндегі жіктелу арқылы анықталады және Фурье–Бессель қатарлары (2.26) бойынша өрнектеледі, олар және олардың туындылары абсолютті және бірқалыпты жинақталады. Сондықтан, қойылған аралас есеп қисынды болып табылады.

2.3 Аралас есеп шешімінің бар болуы және жалғыздығы

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында (2.1) теңдеулерді және олар үшін аралас есеп ретінде 2-есепті қарастырып, оның шешімі бар екендігін көрсетелік.

Теорема 4. Егер $\varphi(r,\theta) \in W_2^p(S), \psi_1(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha), \psi_2(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $p > \frac{3m}{2}$, онда 2 есептің бірмәнді шешімі бар.

Алдымен, Ω_α облысында (2.1) , (2.2) есебінің шешімі бар болатындығын көрсетейік. Сфералық координаталарда (2.1_1) теңдеуін қарастырамыз.

Ω_α облысында 2-есептің ізделінді шешімін келесі түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{2.37}$$

мұндағы $\bar{u}_n^k(r,t)$ – анықталуға тиісті функциялар.

(2.37)-ді (2.1_1)-ға қойып, алынған өрнекті $\rho(\theta) \neq 0$ функциясына интегралдап, бірлік сфера H бойынша интегралдасақ, $\bar{u}_n^k$ үшін келесі өрнекті аламыз [88, 176-бет]

$$t^q \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \left(\frac{m-1}{r} t^q \rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{t^q \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \left(\frac{m-1}{r} t^q \rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} d_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \right. \tag{2.38}$$

$$\left. + \left[\tilde{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} t^q + \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{d}_{in-1}^k - n d_{in}^k\right)\right]\right\}\bar{u}_n^k = 0.$$

Енді дифференциалдық теңдеулердің шексіз жүйесін қарастырайық.

$$t^q \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \frac{(m-1)}{r} t^q \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{2.39}$$

$$t^q \rho_1^k \bar{u}_{1rr}^1 - \rho_1^k \bar{u}_{1t}^k + \frac{(m-1)}{r} t^q \rho_1^k \bar{u}_{1r}^1 - \frac{\lambda_1}{r^2} t^q \rho_1^k \bar{u}_1^k =$$
$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1\right), n = 1, k = \overline{1, k_1} \qquad (2.40)$$

$$t^q \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r} t^q \rho_n^k \bar{u}_{nr}^1 - \frac{\lambda_n}{r^2} t^q \rho_n^k \bar{u}_n^k$$

$$= \frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} d_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \left[\tilde{e}_{n-1r}^k + \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k\right)\right] \bar{u}_{n-1}^k\right\}, (2.41)$$

$$k = \overline{1, k_n}, n = 2,3, \ldots.$$

Енді теңдеуді (2.40) 1-ден k_1-ге дейін, (2.41) теңдеуді 1-ден k_n-ге дейін қосып, алынған өрнекті (2.39) теңдеумен қоссақ, (2.38) теңдеуге келеміз.

Бұдан мынандай қорытынды шығады егер $\{\bar{u}_n^k\}, k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, \ldots$ – жүйесі (2.39)–(2.41) жүйесінің шешімі болса, онда ол (2.38) теңдеудің де шешімі болады.

(2.39) – (2.41) жүйелеріндегі әрбір теңдеуді келесі түрде жазуға болады,

$$t^q\left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right) - \bar{u}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r,t), \qquad (2.42)$$

мұндағы $\bar{f}_n^k(r,t)$ – осы жүйенің алдыңғы теңдеулерінен алынған функциялар, және $\bar{f}_0^1(r,t) \equiv 0$

Әрі қарай, (2.2) шекаралық шартты және (2.37)-ні ескерсек, келесіні аламыз

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \qquad \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_{1n}^k(t), \qquad k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, \ldots \qquad (2.43)$$

(2.42), (2.43) теңдеулерінде $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_{1n}^k(t))$ айнымалыларын ауыстыра отырып, келесіні аламыз

$$t^q\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right) - \bar{\vartheta}_{nt}^k = f_n^k(r,t) \qquad (2.44)$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r,\alpha) = \varphi_n^k(r), \qquad \bar{\vartheta}_n^k(1,t) = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, \ldots, \qquad (2.45)$$

$$f_n^k(r,t) = \bar{f}_n^k(r,t) + \psi_{1nt}^k + \frac{\lambda_n t^q}{r^2}\psi_{1n}^k, \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(r) - \psi_{1n}^k(\alpha),$$

$\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \vartheta_n^k(r,t)$ айнымалыларын ауыстыра отырып, (2.44), (2.45) есептерін келесі есепке келтіреміз

$$L\vartheta_n^k \equiv t^q\left(\vartheta_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) - \vartheta_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{2.46}$$

$$\vartheta_n^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \qquad \vartheta_n^k(1,t) = 0, \tag{2.47}$$

$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4}$, $\tilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} f_n^k(r,t)$, $\tilde{\varphi}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_n^k(r)$.

(2.46), (2.47) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t) \tag{2.48}$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{2.49}$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,\alpha) = 0, \qquad \vartheta_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{2.50}$$

ал, $\vartheta_{2n}^k(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{2n}^k = 0, \tag{2.51}$$

$$\vartheta_{2n}^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \qquad \vartheta_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{2.52}$$

Жоғарыда көрсетілген есептердің шешімдерін келесі түрде қарастырамыз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \sum_{S=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{2.53}$$

мұнда

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \qquad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r) \tag{2.54}$$

болсын.

(2.54)-ті ескере отырып, (2.53)-ті (2.49), (2.50)-ге қойсақ, келесі теңдеуді аламыз

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \qquad 0 < r < 1, \tag{2.55}$$

$$R_s(1) = 0, \qquad |R_s(0)| < \infty, \tag{2.56}$$

$$T_{st} + \mu t^q T_s = -a_{s,n}(t), \qquad 0 < t < \alpha, \tag{2.57}$$

$$T_s(\alpha) = 0. \tag{2.68}$$

(2.55), (2.56) есебінің шектеулі шешімі [104, 404-бет] келесідей болады

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{2.59}$$

мұндағы $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}, \quad \mu = \mu_{s,n}^2$.

(2.57), (2.58) есебінің шешімі келесі функция болады

$$T_{s,n}(t) = \left(\exp\left(-\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} t^{q+1}\right)\right) \int_t^\alpha a_{s,n}(\xi) \left(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \xi^{q+1}\right) d\xi. \tag{2.60}$$

(2.59)-ді (2.54)-ке қойсақ, аламыз

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{2.61}$$
$$0 < r < 1.$$

Егер

$$a_{s,n}^k(t) = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\, \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{2.62}$$

$$b_{s,n}^k = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\, \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{2.63}$$

онда (2.61) қатарлары – Фурье–Бессель қатарларына жіктелуі болып табылады [103, 83-бет], мұндағы $\mu_{s,n}, s = 1,2,\ldots$ – өсу ретімен орналасқан $J_\nu(z)$ Бессель функцияларының оң таңбалы нөлдері.

(2.53), (2.59), (2.60)-тан (2.49), (2.50) есебінің шешімі табылады

$$\vartheta_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}\, T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{2.64}$$

мұндағы $a_{s,n}^{k}(t)$ – (2.62)-ден анықталады.

Әрі қарай, (2.54)-ті ескере отырып, (2.53)-ті (2.51), (2.52)-ге қойсақ, келесі есепті аламыз

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 t^q T_s = 0,\ 0 < t < \alpha,\ T_{s,n}(\alpha) = b_{s,n}^{k},$$

Осы есептің шешімі мына түрде болады

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\left(\alpha^{q+1} - t^{q+1}\right). \qquad (2.65)$$

(2.61) және (2.67) ескере отырып, аламыз

$$\vartheta_{2n}^{k}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}\sqrt{r}\left(\exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\left(\alpha^{q+1} - t^{q+1}\right)\right) J_\nu\left(\mu_{s,n} r\right), \qquad (2.66)$$

мұндағы $b_{s,n}$ – (2.63) арқылы табылады.

Осылайша, алдымен (2.39), (2.43) ($n = 0$) есептерін, кейін (2.40), (2.43) ($n = 1$), т.с.с. есептерін шешіп, біртіндеп (2.48)-дан барлық $\vartheta_n^k(r,t)$ табамыз, мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t), \vartheta_{2n}^k(r,t)$ – сәйкесінше (2.64), (2.66) арқылы анықталады.

Сонда, Ω_α облысында келесі теңдік орын алады

$$\int_H \rho(\theta) L_1\, u dH = 0. \qquad (2.67)$$

Айталық, $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, мұнда

- $R(r) \in V_0, V_0 - L_2\big((0,1)\big)$ кеңістігінде;
- $\rho(\theta) \in C^\infty(H) - L_2(H)$ кеңістігінде;
- $T(t) \in V_1, - L_2\big((0,\alpha)\big)$ кеңістігінде тығыз.

Сонда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1 -\ L_2(\Omega_\alpha)$ кеңістігінде тығыз [111, 377-бет].

Бұдан және (2.67)-дан келесі шығады

$$\int_{\Omega_\alpha} f(r,\theta,t) L_1\, u d\Omega_\alpha = 0$$

және

$$L_1 u = 0, \qquad \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\alpha.$$

Демек, (2.1), (2.2) есептерінің Ω_α облысындағы шешімі келесі функция болып табылады

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{2n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\vartheta_{1n}^k(r,t)+\vartheta_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (2.68)$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t),\vartheta_{2n}^k(r,t)$ – (2.64), (2.66)-дан табылады.

$2J_\nu'(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$ формуласын қолданып [11, 40-бет], алынған шешім (2.70) $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^1(\Omega_\alpha\cup S)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына жататынын

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\nu\geq 0$$

формуласы

$$|k_n|\leq c_1n^{m-2},\left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq c_2n^{\frac{m}{2}-1+l}$$

$$j=\overline{1.m-1},\;\; l=0,1,\ldots,$$

бағалаулары, сонымен қатар леммалар мен (2.1) теңдеуінің коэффициенттеріне және $\psi_1(t,\theta),\varphi(t,\theta)$ берілген функцияларына қойылатын шектеулерді ескере отырып, [114]-дегі сияқты дәлелдеуге болады.

Әрі қарай, $t\;\to+0$ болғанда (2.64), (2.65), (2.68) формулаларынан

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),$$

(2.69)

$$\tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi+\right.$$
$$\left.+b_{s,n}\left(\exp\frac{\mu_{s,m}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

$$u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),$$

(2.70)

$$\nu_n^k(r) = \psi_{1nt}^k(0) - \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}} a_{s,n}(0) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

аламыз.

(2.62) - (2.64), (1.33), (1.34) формулалары және леммалар негізінде $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $l > \frac{3m}{2}$ екендігі шығады.

Осылайша, Ω_α облысында (2.3), (2.69), (2.70) шекаралық шарттарын ескере отырып, келесі түрдегі өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есепке келеміз

$$L_2 u \equiv |t|^\rho \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0, \qquad (2.71)$$

берілген шарттармен

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta),\ u_t\Big|_S = \nu(r,\theta),\ u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta). \qquad (2.72)$$

1–бөлімде дәлелденген 2– теоремаға сәйкес, егер $\tau(r,\theta), \nu(z,\theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta), l > \frac{3m}{2}$ болса, онда (2.71), (2.72) есебінің жалғыз шешімі болады.

Әрі қарай, осы теореманы пайдалана отырып, 2-есептің шешімі болатындығын дәлелдейміз.

Алдымен Ω_α облысындағы (2.1), (2.2) есебін қарастырып, оның шешімінің жалғыздығын дәлелдейік. Бұл үшін келесі теңдеудің бірінші шекаралық есебінің шешімін құрамыз

$$L_1^* \vartheta \equiv t^q \Delta_x \vartheta - \vartheta_t - \sum_{i=1}^{m} d_i \vartheta_{x_i} + d\vartheta = 0, \qquad (2.1_1^*)$$

берілген шарттарымен

$$\vartheta\Big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad \vartheta\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad (2.73)$$

мұндағы, $d(x,t) = e - \sum_{i=1}^{m} d_i x_i\ \bar{\tau}_n^k(r) \in G,\ G–C([0,1]) \cap C^1((0,1))$, класындағы $\tau(r)$ функцияларының жиыны. G жиыны $L_2((0,1))$ кеңістігінің барлық жерінде тығыз [111, 377-бет]. (2.1_1^*), (2.73) есебінің шешімін (2.37) түрінде іздейміз, мұнда $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)$ кейін анықталады. Осылайша, $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)$ функциялары (2.39)–(2.41) жүйесін қанағаттандырады, мұнда $\tilde{d}_{in}^k, d_{in}^k$ орнына сәйкесінше$-\tilde{d}_{in}^k$, $-d_{in}^k$, ал $\tilde{e}_n^k$ орнына $\tilde{d}_n^k$, ауыстырылды, $i = 1,\dots,m$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\dots$.

Әрі қарай, (2.73) шекаралық шарттарынан және (2.37) формуласына сүйене отырып, келесі есепке келеміз

$$L_1\vartheta_n^k = t^q\left(\vartheta_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) - \vartheta_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (2.74)$$

$$\vartheta_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \vartheta_n^k(1,t) = 0 \qquad (2.75)$$

$$\vartheta_n^k(r,t) = r^{(m-1)/2}\bar{\vartheta}_n^k(r,t),$$

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = r^{(m-1)/2}\bar{f}_n^k(r,t),$$

$$\tau_n^k(r) = r^{(m-1)/2}\bar{\tau}_n^k(r).$$

(2.74), (2.75) есебі (2.46), (2.47) есептері тәрізді шешіледі.

Осылайша, (2.1_1^*), (2.73) есебінің шешімі келесі қатар түрінде құрылады

$$\vartheta(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2}\vartheta_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta)$$

және ол (1.34) бағалауларына сәйкес $C(\overline{\Omega}_d) \cap C^1(\Omega_\alpha \cup S) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ кеңістігіне тиесілі.

Ω_α облысы бойынша интегралдау нәтижесінде [89, 140-бет] келесі теңдікті аламыз

$$\vartheta L_1 u - uL_1^* v = -\vartheta P(u) + uP(\vartheta) - u\vartheta Q,$$

мұндағы

$$P(u) = t^q\sum_{i=1}^{m} u_{x_i}cos(N^\perp, x_i),$$

$$Q = cos(N^\perp, t) - \sum_{i=1}^{m} d_i cos(N^\perp, x_i),$$

$N^\perp -$ шекараға ішкі нормаль, Грин формуласы бойынша аламыз

$$\int_S \tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds = 0. \qquad (2.76)$$

$\left\{\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ функциялар жүйесінің сызықтық қабығы $L_2(S)$ кеңістігінде тығыз болғандықтан [111, 377-бет], (2.76)-дан шығады

$$u(r,\theta,0)=0, \forall(r,\theta)\in S.$$

Демек, (2.1_1) параболалық теңдеулері үшін экстремум принципі бойынша $\overline{\Omega}_\alpha$ облысында $u\equiv 0$ [115, 75-бет].

Бұдан шығады

$$u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=0, \forall(r,\theta)\in S.$$

Осылайша, (2.73), (2.74) біртекті аралас есебіне келдік, ал бұл есеп 1-теоремаға сәйкес тек тривиалды шешімге ие.

Демек, 2-есептің шешімінің жалғыздығы дәлелденді.

3 ӨЗГЕШЕЛЕНГЕН КӨПӨЛШЕМДІ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ АРАЛАС ЕСЕП

3.1 Эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің қойылымы

Айталық, $\Omega_{\alpha\beta}$ – E_{m+1} евклид кеңістігіндегі $(x_1, \dots, x_m, t)$ нүктелерінен тұратын цилиндрлік облыс және ол $\Gamma = \{(x,t);\ |x| = 1\}$ цилиндрімен және $t = \alpha > 0$ және $t = \beta < 0$ жазықтықтарымен шектелген болсын, мұндағы $|x|$ — $x = (x_1, \dots, x_m)$) векторының ұзындығы.

Ω_α және Ω_β арқылы $\Omega_{\alpha\beta}$ облысының бөліктерін, Γ_α және Γ_β арқылы Γ бетінің сәйкесінше $t > 0$ және $t < 0$ жарты кеңістіктерінде жатқан бөліктерін, σ_α – жоғарғы, ал σ_β – төменгі табанын белгілейміз (2-сурет).

S – E_m кеңістігінде $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ жиынымен ұсынылатын, Ω_α және и Ω_β облыстарының ортақ шекарасы болсын.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында келесі эллиптикалық-параболалық теңдеулерді қарастырайық

$$0 = \begin{cases} g(t)\Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i\,(x,t)u_{x_i} + e(x,t)u, t > 0, \\ p(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u, t < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

мұндағы $t > 0, g(0) = 0, g(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2\big((0,\alpha)\big)$ болғанда $g(t) > 0$,
$t < 0, p(0) = 0, p(t) \in C([\beta, 0])$болғанда $p(t) > 0$,
$\Delta_x - x_1, \dots, x_m$, айнымалылары бойынша Лаплас операторы, $m \geq 2$.

Келесі есептеулерде ыңғайлы болу үшін $x_1, \dots, x_m, t$ декарттық координаттарынан $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0,\ 0 \leq \theta_1 < 2\pi,\ 0 \leq \theta_i \leq \pi,\ i = 2,3, \dots, m-1, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$ сфералықлық координаталарына өтеміз.

Аралас есеп ретінде 3-есепті қарастырайық.

Есеп 3. (3.1) теңдеудің $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында $t \neq 0$ үшін $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$ класынан келесі шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек:

$$L_1 u = g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t + \\ + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t)u_{x_i} + e(r,\theta,t)u = 0, \tag{3.1$_1$}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$$

$$g_1 = 1,\ g_j = \left(sin\theta_1 \dots sin\theta_{j-1}\right)^2, j > 1.$$

δ операторының спектрі

$$u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), u|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta), \tag{3.2}$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \tag{3.3}$$

мұндағы

$\psi_1(0,\theta) = \psi_2(0,\theta), \psi_2(\beta,\theta) = \varphi(1,\theta), a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha)$,

$$d_i(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\beta), e(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\beta),\ i = 1,\dots,m,$$

$$e(r,\theta,t) \le 0, \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta,$$

$d_i(r,\theta,t)\rho, d_i \frac{x_i}{r}\rho, e(r,\theta,t)\rho, d(r,\theta,t)\rho, \rho(\theta), i = 1,\dots,m, \varphi(r,\theta), \psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$ функцияларының жіктелу коэффициенттерін сәйкесінше $\tilde{d}_{in}^k(r,t), d_n^k(r,t), \tilde{e}_n^k(r,t), \tilde{d}_n^k(r,t), \rho_n^k, \bar{\varphi}_n^k(r), \varphi_{1n}^k(t), \varphi_{2n}^k(t)$ арқылы белгілейік, мұндағы $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, ал $H - E_m$ евклид кеңістігіндегі бірлік сфера.

Айталық, $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – Соболев кеңістігінің n ретті сызықтық тәуелсіз сфералық функциялар жүйесі болсын, мұнда $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n + +m - 3)!\,(2n + m - 2), W_2^l(S), l = 0,1,\dots$ 1 бөлімдегі 1 және 2-леммалар орын алады.

3.2 Аралас есептің қисындылығы

Бұл бөлімшеде $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық-параболалық теңдеу қарастырылады.

$$0 = \begin{cases} g(t)\Delta_x u - u_t, t > 0 \\ p(t)\Delta_x u + u_{tt}, t < 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Сфералық координаталарда (3.4) теңдеуі Ω_α облысында төмендегідей түрде болады

$$g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t = 0.$$

Аралас есеп ретінде 3.1-есепті қарастырайық.

3.1 есеп. Ω_α облысында $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ классынан

$$g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t = 0. \tag{3.5}$$

теңдеудің $(3.2), (3.3)$ шекаралық шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

3-есептің Ω_α облысындағы ізделінді шешімі $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына жататындықтан, оны келесі түрде іздеуге болады

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3.6}$$

мұндағы $\bar{u}_n^k(r,t)$ – анықталуға жататын функциялар.

(3.6)-ны (3.5)-ке қойып, $Y_{n,m}^k(\theta)$ сфералықлық функциялардың ортогоналдылығын пайдалансақ, келесі теңдеуге келеміз

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right)-\bar{u}_{nt}^k=0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots, \tag{3.7}$$

бұл жағдайда, (3.3) шеттік шарты, 1-лемманы ескере отырып, мына түрде жазылады

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_n^k(r), \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots. \tag{3.8}$$

(3.7), (3.8) теңдеулерінде айнымалыны $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t)$ деп ауыстыра отырып, келесі теңдеуді аламыз

$$g(t)\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right)-\bar{\vartheta}_{nt}^k=\bar{f}_n^k(r,t), \tag{3.9}$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r,\alpha)=\varphi_n^k(r), \bar{\vartheta}_n^k(1,t)=0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots, \tag{3.10}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t)=\bar{\psi}_{1nt}^k+\frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi_n^k, \varphi_n^k(r)=\bar{\varphi}_n^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha).$$

Айнымалыны $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}\vartheta_n^k(r,t)$ деп ауыстыра отырып, (3.9), (3.10) есептерін келесі түрге келтіреміз

$$L\vartheta_n^k\equiv g(t)\left(\vartheta_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right)-\vartheta_{nt}^k=f_n^k(r,t), \tag{3.11}$$

$$\vartheta_n^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_n^k(r), \qquad \vartheta_n^k(1,t)=0, \tag{3.12}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{\left((m-1)(3-m)-4\lambda_n\right)}{4}$$

$$f_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t), \qquad \tilde{\varphi}_n^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_n^k(r)$$

(3.11), (3.12) есептерінің шешімін $\vartheta_n^k(r,t)=\bar{\vartheta}_{1n}^k(r,t)+\vartheta_{2n}^k(r,t)$, түрінде іздейміз, мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ – келесі есептердің шешімі

$$L\vartheta_{1n}^{k} = f_n^k(r,t), \tag{3.13}$$

$$\vartheta_{1n}^{k}(r,\alpha) = 0, \quad \vartheta_{1n}^{k}(1,t) = 0, \tag{3.14}$$

ал, $\vartheta_{2n}^{k}(r,t)$ – төмендегі есептердің шешімі

$$L\vartheta_{2n}^{k} = 0, \tag{3.15}$$

$$\vartheta_{2n}^{k}(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \qquad \vartheta_{2n}^{k}(1,t) = 0. \tag{3.16}$$

Жоғарыда көрсетілген есептердің шешімін келесі түрде қарастырайық

$$\vartheta_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{3.17}$$

мұнда, айталық

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \tag{3.18}$$

(3.18)-ді ескере отырып, (3.17)-ні (3.13), (3.14)-ке қойсақ, аламыз

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, 0 < r < 1, R_s(1) = 0, |R_s(0)| < \infty, \tag{3.19}$$

$$T_{st} + \mu g(t) T_s(t) = -a_{s,n}(t), \qquad 0 < t < \alpha, \tag{3.20}$$

$$T_s(\alpha) = 0. \tag{3.21}$$

(3.19) есептің шектеулі шешімі [104, 404-бет]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{3.22}$$

болып табылады, мұндағы $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}), \mu = \mu_{s,n}^2$.

(3.20), (3.21) есептерінің шешімі

$$T_{s,n}(t) = \left(exp\left(-\mu_{s,n}^2 \int_0^t g(\xi) d\xi \right) \right) \times \tag{3.23}$$

$$\times\left(\int_t^{\alpha} a_{s,n}(\xi)\left(exp\,\mu_{s,n}^2\int_0^{\xi} g(\xi_1)d\xi_1\right)d\xi\right).$$

(3.18)-ге (3.22)-ні қойып,

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)J_{\nu}(\mu_{s,n}r),\, r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}J_{\nu}(\mu_{s,n}r),\qquad(3.24)$$

$$0<r<1$$

аламыз.

Егер

$$a_{s,n}(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\,f_n^k(\xi,t)J_{\nu}(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\qquad(3.25)$$

$$b_{s,n}=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\,\tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi)J_{\nu}(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\qquad(3.26)$$

болса, онда (3.24) қатарлары – Фурье-Бессель қатарына жіктелуі болады [103, 83-бет], мұндағы $\mu_{s,n}, s=1,2,\ldots$ – өсу реті бойынша орналасқан $J_{\nu}(z)$ Бессель функциясының оң таңбалы нөлдері.

(3.17), (3.22), (3.23) теңдеулерінен (3.13), (3.14) есептерінің шешімін

$$\vartheta_{1n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\,T_{s,n}(t)J_{\nu}(\mu_{s,n}r),\qquad(3.27)$$

аламыз, мұндағы $a_{s,n}(t)$ –(3.25)-тен анықталады

Әрі қарай, (3.18)-ді ескере отырып, (3.17)-ні (3.15), (3.16)-ға қойсақ, келесі есепке келеміз

$$T_{st}+\mu_{s,n}^2 g(-t)T_s=0,\qquad 0<t<\alpha,\qquad T_s(\alpha)=b_{s,n},$$

бұл есептің шешімі

$$T_{s,n}(t)=b_{s,n}\exp\left(\mu_{s,n}^2\int_t^{\alpha} g\,(\xi)d\xi\right).\qquad(3.28)$$

(3.22), (3.28)-ден шығады

$$\vartheta_{2n}^{k}(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}\sqrt{r}\left(\exp \mu_{s,n}^{2}\int_{t}^{\alpha} g(\xi)d\xi\right)J_{\nu}\left(\mu_{s,n}r\right), \qquad (3.29)$$

мұндағы $b_{s,n}$–(3.26)-дан табылады.

Демек, Ω_{α} облысындағы (3.4), (3.2) есебінің жалғыз шешімі келесі функция болады

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{1n}^{k}(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\vartheta_{1n}^{k}(r,t)+\vartheta_{2n}^{k}(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^{k}(\theta), \qquad (3.30)$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^{k}(r,t), \vartheta_{2n}^{k}(r,t)$ – (3.27), (3.29) формулаларынан анықталады.

(1.33) формуласын, (1.34) бағасын, сондай-ақ леммалар мен берілген функциялар $\psi_{l}(t,\theta), \varphi(t,\theta)$ шектеулерін ескерсек, алынған шешімнің (3.30) $C\left(\overline{\Omega}_{\alpha}\right)\cap C^{1}(\Omega_{\alpha}\cup S)\cap C^{2}(\Omega_{\alpha})$ класына жататындығын [116]-тегідей дәлелдеуге болады.

Әрі қарай, (3.27), (3.29), (3.30) формулаларынан $t\rightarrow +0$ болған жағдайда

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_{n}^{k}(r)Y_{n,m}^{k}(\theta)$$

$$\tau_{n}^{k}(r)=\psi_{1n}^{k}(0)+\sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}}\left[\int_{0}^{\alpha} a_{s,n}(\xi)\left(\exp\left(\mu_{s,n}^{2}\int_{0}^{\xi} g(\xi_1)\xi_1\right)\right)d\xi+\right.$$
$$\left.+b_{s,n}\exp\left(\mu_{s,n}^{2}\int_{0}^{\alpha} g(\xi)d\xi\right)J_{n+\frac{m-2}{2}}\left(\mu_{s,n}r\right).\right. \qquad (3.31)$$

$$u_{t}(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_{n}^{k}(r)Y_{n,m}^{k}(\theta), \qquad (3.32)$$

$$\nu_{n}^{k}(r)=\psi_{1nt}^{k}(0)-\sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}}\left[a_{s,n}(0)+\right.$$

$$+\mu_{s,n}^2 g(0)\int_0^{\alpha} a_{s,n}(\xi)\left(\exp\left(\mu_{s,n}^2\int_0^{\xi} g(\xi_1)d\xi_1\right)\right)d\xi +$$

$$+\mu_{s,n}^2 g(0) b_{s,n}(\xi)\left(\exp \mu_{s,n}^2\int_0^{\alpha} g(\xi)d\xi\right)\Bigg] J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

аламыз.

(3.23), (3.25), (3.26) формулаларынан және леммалардан келесі нәтиже шығады

$$\tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in W_l^2(S), \qquad l > \frac{3m}{2}.$$

Осылайша, Ω_β облысында (3.3), (3.31), (3.32) шекаралық шарттарды ескере отырып, келесі түрде берілген көпөлшемді өзгешеленген эллиптикалық теңдеулерге аралас есепке келеміз

$$g(t)\Delta_x u + u_{tt} = 0 \tag{3.33}$$

келесі берілген шарттармен

$$u|_S = \tau(r,\theta), u|_S = \nu_2(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_2(t,\theta). \tag{3.34}$$

1.2 - бөлімшеде бұл есептің жалғыз шешімі бар екендігі дәлелденген (теорема 1).

Теорема 5. Егер (3.3) шекаралық шарттары орындалып және (3.23), (3.25), (3.26) коэффициенттер Фурье–Бессель жіктелуінің жинақталу шарттарын қанағаттандырса, онда (3.5) теңдеуі үшін қойылған 3.1 аралас есептің Ω_α облысында $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына тиесілі жалғыз шешімі бар болады.

Сонымен қатар, 3.1 есеп, 1.2 бөлімде қарастырылған (1.1)–(1.2) есебіне келтірілетіндіктен, оның шешімі бар, жалғыз және берілгендерге үздіксіз тәуелді. Демек, (3.1)–(3.3) есебі қисынды.

3.3 Аралас есеп шешімінің бар болуы және жалғыздығы

Бұл бөлімшеде $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында (3.1) теңдеуін қарастырып, аралас есеп ретінде 3-есепті қарастырамыз және оның шешімінің болатындығын көрсетеміз.

Теорема 6. Егер $\varphi(r,\theta) \in W_2^p(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^2(\Gamma_\beta)$, $p > \frac{3m}{2}$, онда 3-есептің жалғыз шешімі бар.

Алдымен (3.1), (3.2) есебінің шешімінің бар екендігін көрсетеміз. (3.1) теңдеуін сфералық координаттарда Ω_α облысында қарастырайық, яғни (3.1_1) теңдеуін аламыз.

Ω_α облысында (3.1_1)-(3.3) есебінің ізделінді шешімін мына түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3.35}$$

мұндағы $\bar{u}_n^k(r,t)$– анықталуға тиісті функциялар.

(3.35)-ны (3.1_1)-ге қойып, алынған өрнекті $\rho(\theta)\neq 0$-ге көбейтіп, H бірлік сфера бойынша $\bar{u}_n^k$ үшін интегралдасақ, мына нәтижені аламыз [105, 65-бет]

$$g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^k-\rho_0^1\bar{u}_{0t}^k+\left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1+\sum_{i=1}^{m}d_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\tilde{e}_0^1\bar{u}_0^1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{nt}^k+\left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k+\sum_{i=1}^{m}d_{in}^k\right)\bar{u}_{nt}^k+\right. \tag{3.36}$$

$$\left.+\left[\tilde{e}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}g(t)+\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{d}_{in-1}^k-nd_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k=0.\right.$$

Енді дифференциалдық теңдеулердің шексіз жүйесін қарастырайық

$$g(t)\rho_0^k\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^k\bar{u}_{0t}^k+\frac{(m-1)}{r}g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=0, \tag{3.37}$$

$$g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\bar{u}_{1t}^k+\frac{(m-1)}{r}g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}g(t)\rho_1^k\bar{u}_1^k=$$

$$=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m}d_{i0}^1\bar{u}_{0r}^k+\tilde{e}_0^1\tilde{u}_0^k\right),\ n=1,\qquad k=\overline{1,k_1} \tag{3.38}$$

$$g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{nt}^k+\frac{(m-1)}{r}g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}g(t)\rho_n^k\bar{u}_n^k=$$

$$=-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}d_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+\left[\tilde{e}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^{m}\left(d_{in-2}^k-(n-1)d_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \tag{3.39}$$

$$k=\overline{1,k_n},n=2,3,\dots .$$

Егер $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0,1, ...$, – (3.37), (3.40) жүйесінің шешімі болса, онда ол (3.36) теңдеуінің де шешімі болатындығына көз жеткізу қиын емес.

Сондай-ақ, (3.37), (3.39) жүйесіндегі әрбір теңдеуді келесі түрде жазуға болады

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right) - \bar{u}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r,t), \qquad (3.40)$$

мұндағы $\tilde{f}_n^k(r,t)$ осы жүйенің алдыңғы теңдеулерінен анықталады, және де $\bar{f}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Әрі қарай, (3.2) шектік шартынан және (3.35)-ға сәйкес бізде

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_{1n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, ... \qquad (3.41)$$

(3.40) және (3.41)-ге $\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \bar{\psi}_n^k(t)$ ауыстыруын жасасақ, келесі өрнекті аламыз

$$g(t)\left(\bar{\vartheta}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r}\bar{\vartheta}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\vartheta}_n^k\right) - \bar{\vartheta}_{nt}^k = f_n^k(r,t), \qquad (3.42)$$

$$\bar{\vartheta}_n^k(r,\alpha) = \varphi_n^k(r), \quad \bar{\vartheta}_n^k(1,t) = 0, k = 1, k_n, \quad n = 0,1, ... \qquad (3.43)$$

$$f_n^k(r,t) = \bar{f}_n^k(r,t) + \psi_{1nt}^k + \frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi_{1n}^k, \ \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(\mathrm{r}) - \psi_{1n}^k(\alpha).$$

$\bar{\vartheta}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\vartheta_n^k(r,t)$ ауыстыру жасай отырып, (3.42), (3.43) есептерін келесі есепке келтіреміз

$$L\vartheta_n^k \equiv g(t)\left(\vartheta_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) - \vartheta_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (3.44)$$

$$\vartheta_n^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad \vartheta_n^k(1,t) = 0, \qquad (3.45)$$

мұндағы

$$\bar{\lambda}_n = \frac{\big((m-1)(3-m) - 4\lambda_n\big)}{4},$$

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}f_n^k(r,t),$$

$$\tilde{\varphi}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_n^k(r)$$

(3.44), (3.45) есептерінің шешімін келесі түрде іздейміз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t), \qquad (3.46)$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ – келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (3.47)$$

$$\vartheta_{1n}^k(r,\alpha) = 0,\ \vartheta_{1n}^k(1,t) = 0, \qquad (3.48)$$

ал, $\vartheta_{2n}^k(r,t)$ - келесі есептің шешімі

$$L\vartheta_{2n}^k = 0, \qquad (3.49)$$

$$\vartheta_{2n}^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad \vartheta_{2n}^k(1,t) = 0. \qquad (3.50)$$

Жоғарыда көрсетілген есептердің шешімін келесі түрде қарастырамыз

$$\vartheta_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \qquad (3.51)$$

сонымен қатар, мұнда

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \qquad (3.52)$$

(3.51)-ні (3.47), (3.48)-ға қойып, (3.51)-ні ескерсек,

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R = 0, \qquad 0 < r < 1, \qquad (3.53)$$

$$R_s(1) = 0, \qquad |R_s(0)| < \infty, \qquad (3.54)$$

$$T_{st} + \mu g(t) T_s = -a_{s,n}(t), \qquad 0 < t < \alpha, \qquad (3.55)$$

$$T_s(\alpha) = 0. \qquad (3.56)$$

аламыз.

(3.53), (3.54) есептерінің шектеулі шешімі болып табылады

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad (3.57)$$

мұндағы $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}, \mu = \mu_{s,n}^2$.

(3.55), (3.56) есептерінің шешімі

$$T_{s,n}(t) = \left(\exp\left(-\mu_{s,n}^2 \int_0^t g(\xi) d\xi\right)\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\int_t^\alpha a_{s,n}(\xi) \left(\exp \mu_{s,n}^2 \int_0^\xi g(\xi_1) d\xi_1\right) d\xi\right) \quad (3.58)$$

(3.57)-ді (3.52)-ге қойып,

$$r^{-1/2} \tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),$$
$$r^{-1/2} \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^\infty b_{s,n} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (3.59)$$
$$0 < r < 1.$$

аламыз.

Егер

$$a_{s,n}(t) = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (3.60)$$

$$b_{s,n} = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (3.61)$$

Онда (3.60) қатарлары – Бессель-Фурье қатарларына жіктелуі [103, 83-бет] болады, мұндағы $\mu_{s,n}, s = 1,2, \ldots$ – $J_\nu(z)$ Бессель функциясының өсу ретімен орналасқан оң нөлдері.

(3.52), (3.58), (3.59)-тан (3.48), (3.49) есептерінің шешімін аламыз

$$\vartheta_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (3.62)$$

мұндағы $a_{s,n}(t)$ функциялары (3.60)-ден анықталады.

Одан әрі (3.51)-ні (3.49), (3.50)-ге қойып, (3.52)-ті ескерсек, келесіні аламыз

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 g(t)T_s = 0, \qquad 0 < t < \alpha, \qquad T_s(\alpha) = b_{s,n},$$

оның шешімі

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp\left(\mu_{s,n}^2 \int_t^\alpha g(\xi)d\xi\right). \tag{3.63}$$

(3.57) және (3.63)-тен

$$\vartheta_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty b_{s,n}\sqrt{r}\left(exp\int_t^\alpha g(\xi)d\xi\right)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{3.64}$$

мұндағы $b_{s,n}$ шамалары (3.61)-ден табылады.

Демек, алдымен (3.38), (3.41) есебінің шешімін $(n = 0)$ тауып, содан кейін ретімен (3.37), (3.41) (n=1) және т.с.с. есептерін шешу арқылы (3.46)-дан барлық $\vartheta_n^k(r,t)$ табамыз, мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ және $\vartheta_{2n}^k(r,t)$ сәйкесінше (3.62) және (3.64)-тен анықталады.

Сонымен, Ω_α облысында келесі орын алады

$$\int_H \rho(\theta)L_1\,udH = 0, \tag{3.65}$$

Айталық, $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$ және мұнда $R(r) \in V_0$, $V_0 - L_2\big((0,1)\big)$ кеңістігінде тығыз, $\rho(\theta) \in C^\infty(H) - L_2(H)$ кеңістігінде тығыз, ал $T(t) \in V_1$, $T(t) \in V_1 - L_2\big((0,\alpha)\big)$ кеңістігінде тығыз болсын. Сонда – $L_2(\Omega_\alpha)$ кеңістігінде $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ тығыз болады [111, 387-бет].

Бұдан және (3.65)-тен шығады

$$\int_{\Omega_\alpha} f(r,\theta,t)L_1ud\Omega_\alpha = 0$$

және

$$L_1u = 0, \quad \forall(r,\theta,t) \in \Omega_\alpha.$$

Осылайша, (3.1), (3.3) есептерінің Ω_α облысындағы шешімі келесі функция болады

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{1n}^k(t)+r^{(1-m)/2}\left[\vartheta_{1n}^k(r,t)+\vartheta_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (3.66)$$

мұндағы $\vartheta_{1n}^k(r,t)$ және $\vartheta_{2n}^k(r,t)$ сәйкесінше (3.62) және (3.64)-тен табылады.

(1.33) формуласына, (1.34) бағалауларына, сондай-ақ леммалар мен (3.1) теңдеуінің коэффициенттеріне және берілген функцияларға $\psi_1(r,\theta),\varphi(r,\theta)$ қойылатын шектеулерге сүйене отырып, алынған шешім (3.66) $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^1(\Omega_\alpha\cup S)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ класына жататындығын [116, 3-бет] көрсетілгендей дәлелдеуге болады.

Ары қарай, (3.62), (3.64), (3.66)-ден $t\ \to +0$ болғанда келесілерді аламыз

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (3.67)$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(exp\,\mu_{s,n}^2\int_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1\right)d\xi+\right.$$

$$\left.+b_{s,n}\,exp\left(\mu_{s,n}^2\int_0^\alpha g(\xi)d\xi\right)\right]J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n}r),$$

$$u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (3.68)$$

$$\nu_n^k(r)=\varphi_{1nt}^k(0)-\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[a_{s,n}(0)+\right.$$

$$+\mu_{s,n}^2g(0)\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(exp\left(\mu_{s,n}^2\int_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1\right)\right)d\xi+$$

$$\left.+\mu_{s,n}^2g(0)b_{s,n}\left(exp\,\mu_{s,n}^2\int_0^\beta g(\xi)d\xi\right)\right]\ J_{n+\frac{(m+2)}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

(3.60)–(3.62), (3.64) және сәйкес леммалардан $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in W_2^l(S), l > \frac{3m}{2}$ шығады.

Осылайша, (3.3), (3.67), (3.68) шектік шарттарды ескере отырып, Ω_α облысында өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есепке келеміз

$$L_2 u = p(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{l=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \quad (3.69)$$

келесі мәліметтерімен

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \qquad u_t\Big|_S = \nu(r,\theta), \qquad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta) \qquad (3.70)$$

Бірінші бөлімде дәлелденген 2 теоремаға сәйкес, егер $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l > \frac{3m}{2}$, онда (3.70), (3.71) есептерінің жалғыз шешімі болады.

Осы теореманы қолдана отырып, 3-есептің шешімінің бар болатындығына келеміз.

Алдымен Ω_α облысында (3.1), (3.2) есебін қарастырып, оның шешімінің жалғыздығын дәлелдейік. Ол үшін келесі теңдеуге арналған бірінші шектік есептің шешімін құрамыз

$$L_1^* \vartheta = g(t)\Delta_x \vartheta - \vartheta_t - \sum_{i=1}^{m} d_i \vartheta_{x_i} + d\vartheta = 0, \qquad (3.1_1{}^*)$$

берілгендер

$$\vartheta\Big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \qquad \vartheta\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad (3.71)$$

$$d(x,t) = e - \sum_{i=1}^{m} d_{ix_i},$$

мұндағы $\bar{\tau}_n^k(r) \in W$, W – $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$ классына тиесілі $\tau(r)$ функцияларының жиыны. W жиыны $L_2((0,1))$ кеңістігінің барлық жерінде тығыз [111, 377-бет]. $(3.1_1{}^*)$, (3.71) есептерінің шешімін (3.35) түрінде іздейміз, мұндағы $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)$ функциялары төменде анықталады. Сонда, $\bar{\vartheta}_n^k(r,t)$ функциялары (3.37)–(3.39) түріндегі теңдеулер жүйесін қанағаттандырады, мұнда $\tilde{d}_{in}^{n}, d_{in}^{k}$ шамалары $-\tilde{d}_{in}^{k}$ $-d_{in}^{k}$ шамаларына, ал $\tilde{e}_n^k$ шамасы $\tilde{d}_n^k$ шамасына ауыстырылған, $i = 1, \dots, m,\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0,1, \dots$.

Әрі қарай, (3.71) шектік шартына және (3.35)-ке сәйкес, келесі есепке келеміз

$$L_1 \vartheta_n^k \equiv g(t)\left(\vartheta_{nrr}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\vartheta_n^k\right) - \vartheta_{nt}^k(r) = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{3.72}$$

$$\vartheta_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \qquad \vartheta_n^k(1,t) = 0,$$

$$\vartheta_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\vartheta}_n^k(r,t), \tilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)^2}{2}}\bar{f}_n^k(r,t), \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(r).$$

(3.72) және (3.73) есептерінің шешімі (3.44), (3.45) есептерін шешу тәсілімен табылады.

Осылайша, (3.1_1^*), (3.71) есебінің қатары түріндегі шешімі

$$\vartheta(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t)\right]Y_{n,m}^k(\theta)$$

құрылды. Ол (1.34) бағалауларына сәйкес $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^1(\Omega_\alpha \cup S) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ класына жатады.

Ω_α облысы бойынша интегралдау нәтижесінде [89, 140-бет]

$$\vartheta L_1 u - u L_1^* \vartheta = -\vartheta P(u) + uP(v\vartheta) - u\vartheta Q,$$

мұндағы

$$P(u) = g(t)\sum_{i=1}^{m} u_{x_i}\cos(N^{\perp}, x_i), \quad Q = \cos(N^{\perp}, t) - \sum_{i=1}^{m} a_i\cos(N^{\perp}x_i),$$

ал, $N^{\perp}$ $-\partial\Omega_\alpha$ шекарасына ішкі нормаль, Грин формуласы бойынша аламыз

$$\int_S \tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds = 0. \tag{3.74}$$

$\{\bar{\tau}_n^k Y_{n,m}^k(\theta)\}$ функциялар жүйесінің сызықтық қабықшасы $L_2(S)$ кеңістігінде тығыз [111, 377-бет] болғандықтан, (3.74)-тен $u(r,\theta,0) = 0, \forall(r,\theta) \in S$ деген қорытындыға келеміз.

Демек, (3.1_1) параболалық теңдеудің экстремум принципіне [115, 75-бет] сәйкес $\overline{\Omega}_\alpha$ облысында $u \equiv 0$.

Бұдан $u_t(r,\theta,0) = \nu(r,\theta,0) = 0, \forall(r,\theta) \in S$.

Осылайша, (3.69), (3.70) біртекті аралас есебіне келдік, ол 2 теоремаға сәйкес тривиалды шешімге ие.

Демек, 3-есептің шешімінің жалғыздығы дәлелденді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыс цилиндрлік облыста өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептердің бірмәнді шешілетіндігі дәлелденді. Зерттелген аралас есептердің айқын түрлері келтірілді.

Зерттеу нәтижелері есептердің дұрыс қойылымын және алынған шешімдердің негізділігін растайды. Шешімдердің бар болуы, қисындылығы және жалғыздығы анықталып, қойылған ғылыми міндеттердің толық шешілгенін көрсетеді.

Негізгі нәтижелер:

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің қисындылығы көрсетілді;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің бар екендігі дәлелденіп, оның аналитикалық түрі алынды;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің жалғыз болатындығы анықталды;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қисындылығы көрсетілді;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің шешімінің бар болатындығы дәлелденді және бұл есептің айқын шешімі алынды;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің шешімінің жалғыздығы анықталды;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің қисындылығы көрсетілді;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің бар болатындығы дәлелденді және оның айқын шешімі алынды;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің жалғыздығы анықталды.

Қойылған міндеттерді шешу толықтығын бағалау. Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге арналған аралас есептердің қойылымы жасалып, олардың қисындылығы, шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы және құрылымы зерттеліп, бірмәнді шешілетіндігі дәлелденді, айқын аналитикалық түрлері алынды.

Зерттеу нәтижелерін нақты қолдану бойынша ұсыныстар. Жұмыста алынған аналитикалық шешімдер газ динамикасы, механика, биофизика, физика, экономика және басқа да қолданбалы салалардағы есептерді теориялық тұрғыда талдау мен сандық әдістер арқылы шешу үшін қолдануға болады. Бұл нәтижелер тиімді сандық әдістерді құруға және өзгешеленген дифференциалдық теңдеулер теориясын дамытуға негіз болады.

Осы саладағы ең жақсы жетістіктермен салыстырғанда орындалған жұмыстың ғылыми деңгейін бағалау. Жүргізілген ғылыми зерттеу нәтижелері

ҚР ҒЖБМ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдарда, халықаралық конференциялар материалдарында, сондай-ақ Scopus және Web of Science дерекқорларында индекстелетін ғылыми журналдарда жарияланды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.-724 с.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981.-448 с.
3. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962.-254 с.
4. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977.-431 с.
5. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. - М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953.-280 с.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973-407 с.
7. Краснов М.Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб., 1959, Т. 49(91) – С. 29-84.
8. Барановский Ф.Т. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости // Ученые записки Ленингр. пед. Института, 1958, Т. 183 – С. 23-58
9. Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // Укр. матем. журнал, 2017, Т. 69, №7 – С.992-999
10. Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // журнал «Вычислительной и прикладной математики», Киев, КНУ им. Т.Шевченко, 2019, №2 (131) – С.5-14
11. Танирберген А.К. Смешанная задача для вырождающегося многомерного эллиптического уравнения // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. - 2021. - №3. - С. 37-41.
12. Hadamard, J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations; Dover Publications, 1952.
13. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. - М.: Наука, 1988-336 с.
14. Evans, L.C.; Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2010; Vol. 19
15. Alikakos, N. D., Evans, L. C. Continuity of the gradient for weak solutions of a degenerate parabolic equation // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1983. -Vol.62, pp 253–268
16. Франкль Ф.И. Обобщение задачи Трикоми и применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля // Ученые записки КБГУ. 1959. Т. 3. С. 79–93.
17. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н. Векуа. – М.: Физматлит, 1948.- 296 с.

18. Бабенко К. И. К теории уравнений смешанного типа. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. – М., 1952
19. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. - М.: Наука, 2006. - 287 с.
20. Киприянов И. А. О краевых задачах для уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя. / Докл. АН СССР, 158:2. 1964. – С. 275-278
21. Салахитдинов М. С., Хасанов А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 110–119.
22. Наджафов Х.М. Задача Коши для одного уравнения гиперболического типа, вырождающегося на границе, с сингулярными коэффициентами на линии вырождения // Изв. АН. АзССР. Сер. физ.-тех. и матем. наук. 1971. № 2. С. 69–77.
23. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / Пер. с итал. Ф.И. Франкля. — М.–Л.: Гостехиздат, 1947. - 192 с
24. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. / *ДАН СССР*, **77**:2. 1951. – С.181-183
25. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Математика, 7:6. 1963. С. 99–122; Boundary problems in differential equations / Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1960. – P. 97–120
26. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1969, 1971. С. 7–252
27. Вишик М.И. О краевых задачах для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. // ДАН, 93.1953. – С.225-228.
28. Franciosi, M. Un teorema di esistenza ed unicita per la soluzione di un'equazione ellittico-parabolica, a coefficienti discontinui, in forma non divergenza. // Boll. Un. Mat. Ital. B (6), 4. 1985. – P. 253-263
29. Alvino, A., Trombetti, G. Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri. // Ricerche Mat., 27:2. 1978; pp 413-428
30. Talenti, G. Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlich spaces7 // Ann. Mat. Pura ed Appl., 120.1979; pp159-184
31. Iftimie, V. Sur un probleme non lineaire pour un systeme hyperbolique. // Rev. Roum. Math. Pures Appl., 21. 1976; pp 303-328
32. Ниренберг Л. О нелинейных эллиптических дифференциальных уравнениях в частных производных и непрерывности по Гельдеру. // Математика. Сб. переводов. 3:3. 1959. Р. 9-55
33. Ladyzhenskaya O.A. and Uraltseva N.N. Linear and quailinear elliptic equations. – Moscow: Nauka, 1973.
34. Солонниковым В. А., Уральцевой Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа – М.: Наука, 1967. – 736 с.

35. Ландис Е. М. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. / ДАН, 105:5. 1956. С. 640-643
36. Gajewski, H. On a variant of monotonicity and its application todifferential equations. / Nonlinear Analysis: TMA 22, 1994; pp 73-80
37. Gajewski, H., Groger, K. Reaction Diffusion Processes of Electrically Charged Species. / Mathematische Nachrichten, 177(1), 1996; pp 109-130
38. Gajewski, H., Zacharias, K. Global Behaviour of a Reaction-Diffusion System Modelling Chemotaxis. / Mathematische Nachrichten, 195(1), 1998; pp 77-114
39. Skrypnik I.V. Methods for analysis of nonlinear elliptic boundaryvalue problems. / Translations of mathematical monographs, 1994; Vol. 139, American Mathematical Society, Providence, R.I.
40. Benilan, P.H. and Wittbold P. On mind and weak solutions ofelliptic-parabolic systens. Adv. Differ. Equ. 1996; Vol. 1, pp 1053-1073
41. Gadjiev, T.S., Gasanova, G.H., Zulfaliyeva, G.Z. A priori estimates forthe solutions to a kind of degenerate elliptic-parabolic equations, Transac-tions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, 37 (1), 2017; pp 92-108
42. Gadjiev, T.S., Kerimova, M.N. On some estimations of solutions fordegenerate elliptic-parabolic equations. Transactions of NAS of Azerbaijan, 33 (4), 2013; pp 57-72
43. Brezis,H. On a conjecture of Serrin, J. Rend. Lincei Mat. Appl. 19, 2008; pp 335-338
44. Byun, S., Wang, L., Nonlinear gradient estimates for elliptic equations of general type. Calc. Var. Partial Differ. Equ 2012, 45(34); pp 403-419
45. S-S. Byun. Parabolic equations with BMO coefficients in Lipschitz domains. J. Differential Equations 209, no. 2, 2005; pp 229–265
46. S.-S. Byun, L. Wang, Parabolic equations in Reifenberg domains. Arch. Ration. Mech. Anal. 176 no. 2, 2005; pp 271-301
47. S.-S. Byun, L. Wang, Elliptic equations with BMO coefficients in Reifenberg domains. Comm. Pure Appl. Math. 57, no. 10, (2004); pp 1283-1310
48. Caffarelli, L.A. and Peral, I. On W1,p estimates for elliptic equations in divergence form. Comm. Pure Appl. Math. 51, no. 1, 1998; pp 1–21
49. Alt. H. W. and Luckhaus S. Qusilinear elliptic-parabolic differentialequations, Math. Z., 183, 1983; pp 311-341
50. Chiarenza, F., Frasca, M. and Longo, P. Interior W2, p estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients, Ricerche Mat., 40 (1991); pp 149-168
51. E. De Giorgi, Sulla differenziabiliti`a e lanaliticit`a dele estremali degli integrali multipli regolari. Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 3:25-43, 1957
52. G.DiFazio, M.A.Ragusa, Interior estimates in Morrey spaces for stong to non divergence form equations withdiscontinuous coefficients, J. of Fun. Ana., 112, 1993; pp 241- 256
53. G. Di Fazio, Lp estimates for divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients, Boll. Un. Mat. Ital., A 10, 1996

54. DiFazio, G., S.Fanciullo, M., Zamboni, P. Interior Lp estimates for degenerate elliptic equations in divergence form with VMO coefficients. Differential Integral Equations 25 no. 7-8, 2012; pp 619-628
55. Fabes, E. B., Kenig, C. E., Serapioni, R. P. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. Comm. Partial Differential Equations 7 no. 1, 1982; pp 77- 116
56. Heinonen, J., Kilpel¨ainen, T., Martio, O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.
57. Hoang, L. T., Nguyen, T. V., Phan, T. V. Gradient estimates and global existence of smooth solutions to a cross-diffusion system. SIAM J. Math. Anal. 47 no. 3, 2015; pp 2122-2177
58. Gilbarg, D. and Trudinger, N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Classics in Mathematics, Springer Verlag, Berlin 2001
59. Grafakos, L., Modern Fourier Analysis, Graduate texts in Math., Springer, 2009
60. Guti´errez, C., Wheden, R. Harnack's inequality for degenerate parabolic equations, Com. in Partial Differential Equations, 16 (4&5), 1991; pp 745-770
61. Kim, D. and Krylov, N.V. Elliptic differential equations with coefficients measurable with respect to one variable and VMO with respect to the others, SIAM J. Math. Anal., 39, 2007; pp 489-506
62. Kinnunen, J. and Zhou, S. A local estimate for nonlinear equations with discontinuous coefficients, Comm. Partial Differential Equations 24, 1999; pp 2043–2068
63. Han, Q., Lin, F. Elliptic Partial Differential Equations, Courant Lecture Notes in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997
64. Maugeri, A., Palagachev, D. K., Softova, L. G. Elliptic and parabolic equations with discontinuous coefficients. Mathematical Research, 109. Wiley-VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin, 2000.
65. Mengesha, T. Phuc, N. C. Weighted and regularity estimates for nonlinear equations on Reifenberg flat domains, J. of Diff. Eqns 250, 1, 2011; pp 1485-2507
66. Mengesha, T., Phuc, N.C. Global estimates for quasilinear elliptic equations on Reifenberg flat domains. Arch. Ration. Mech. Anal. 203, 2011; 189-216
67. Meyers, N.G. An Lp-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3) 17, 1963; pp 189-206
68. . Monticelli, D. D., Rodney, S., Wheeden, R. L. Harnack's inequality and Holder continuity for weak solutions of degenerate quasilinear equations with rough coefficients, Nonlinear Anal. 126, 2015; pp 69-114
69. Monticelli, D. D., Rodney, S., Wheeden, R. L. Boundedness of weak solutions of degenerate quasilinear equations with rough coefficients. Differential Integral Equations 25 no. 1-2, 2012; pp 143-200
70. Moser, J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math, Vol 13, 1960; pp 457-468

71. Moser, J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Com. Pure Appl. Math., Vol XIV, 1961; pp 577-591
72. Muckenhoupt, B. and Wheeden, R. L. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. Studia Mathematica, T. LIV. 1976
73. Muckenhoupt, B. and Wheeden, R. L. On the dual of weighted H1 of the half-space. Studia Mathematica, T. LXIII. 1978
74. Nash, J. Parabolic equations, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America Vol 43 (8), 1957; pp 754-758
75. Murthy, M.K.V., Stampacchia, G. Boundary value problems for some degenerate-elliptic operators. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 80, 1968; pp 1-122
76. Nguyen, T. Interior Calder´on-Zygmund estimates for solutions to general parabolic equations of p-Laplacian type, 2016
77. Nguyen, T., Phan, T. Interior gradient estimates for quasilinear elliptic equations, Calc. Var. Partial Differ. Equ., DOI: 10.1007/s00526-016-0996-5
78. K. Nystr¨om, H. Persson, and O. Sande, Boundary estimates for solutions to linear degenerate parabolic equations. J. Differ ential Equations 259 no. 8, 2015; pp 3577-3614
79. Sarason, D. Functions of vanishing mean oscillation, Trans. Amer. Math. Soc., 207, 1975; pp 391-405
80. Surnachev, M. A Harnack inequality for weighted degenerate parabolic equations. J. Differential Equations 248 no. 8, 2010; pp 2092-2129
81. Stredulinsky, E. Weighted inequalities and applications to degenerate elliptic Partial Differential Eequations Ph. D. Thesis, Indiana University, 1981
82. Turesson, B. O. Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000
83. L. Wang, A geometric approach to the Calder´on-Zygmund estimates, Acta. Math. Sin. (Engl. Ser.), 19, 2003; pp 381-396
84. Krivorotko O.I., Kabanikhin S.I., Bektemesov M. A., Nurseitov D.B., Alimova A.N. An optimization method in Dirihlet's problem for wave equation, Journal of Inverse and III-posed Problems - Walter de Gruyter, Berlin. Volume 20, number 2, 2012; pp 193-212
85. Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitova A.T. Iterative methods for solving inverse and ill-posed problems with data given on the part of the boundary. Monograph. – Almaty, Novosibirsk, 2006; p 425
86. Bektemessov Zh., Cherfils L., Allery C., Berger J., Serafini E., Dondossola E., Casarin S. On a data-driven mathematical model for prostate cancer bone metastasis, AIMS Mathematics. Volume 9, Issue 12. 2024; pp 34785-34805. Doi: 10.3934/math.20241656.
87. Goriely, A. The Mathematics and Mechanics of Biological Growth. Interdisciplinary Applied Mathematics, 45. Monograph. – Springer, 2017; p 637
88. Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Науч. ведомости БелГУ. Математика и физика. 51, № 2. 2019. – С.174–182
89. Смирнов В.И. Кур высшей математики, т.4, 2 – М.: Наука, 1980. -550 с.

90. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. – Новосибирск: НГУ, 1973. -144 с.
91. Янушаускас А.И. Аналитическая теория эллиптических уравнений. – Новосибирск: Наука, 1979. -190 с.
92. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Мат. заметки. Т. 94, № 6. 2013. – С. 936-939
93. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных эллиптических уравнений // Мат. журн. Т. 2 (64). 2017. – С. 5-12.
94. Алдашев С.А. Задача Дирехле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений // Научные ведомости БелГУ, математика, физика, №27(248), вып 45, 2016. – С. 16-25
95. Aldashev S., Tanirbergen A. Well-Posedness of the Mixed Problem for the Degenerate Multi-Dimensional Elliptic Equations // Azerbaijan Journal of Mathematics 2022, July V.12, No 2, 61-71 p.
96. Arziev A.D., Kudaybergenov K.K., Orinbaev P.R., Tangirbergen A.K. Partial Integral Operators on Banach–Kantorovich Spaces // Mathematical Notes, 114 (1-2), (2023) pp. 15 - 29, DOI: 10.1134/S0001434623070027
97. Kudaybergenov K., Arziev A., Orinbaev P., Tangirbergen A. THE MERCER’S THEOREM FOR PARTIAL INTEGRAL OPERATORS // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2023, 271 (6), pp. 749 - 761, DOI: 10.1007/s10958-023-06747-w
98. Aldashev S., Tanirbergen A. Correctness of a mixed problem for degenerate multidimensional elliptic–parabolic equations// Қазақстан Республикасы Ұлттық инженерлік академиясы хабаршысы. №3 (93), Алматы, 2024. – С. 267-277
99. Tanirbergen A., Kudaybergenov K. Correctness of a mixed problem for a degenerate multidimensional elliptic–parabolic equation// Қазақстан Республикасы Ұлттық инженерлік академиясы хабаршысы. №4 (94), Алматы, 2024. – С. 310-317
100. Алдашев С.А., Танирберген А.К., Смешанная задача для одного класса вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений // «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары» IX Халықаралық ғылыми конференция. Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті. – Қазақстан, Ақтөбе, 2022. – 112-113 б.
101. Танирберген А.К., Смешанная задача для одного вырождающегося многомерного эллиптико-параболического уравнения // «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары» Халықаралық ғылыми конференция. Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті. – Қазақстан, Ақтөбе, 2023. – 57-63 б.
102. Алдашев С.А., Танирберген А.К. Корректность смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений //

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстана, Алматы, 2024. – С. 89

103. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. – М.: Наука, 1974. –295 с.
104. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. –703 с.
105. Алдашев С.А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференци.уравнения, т.34, № 1-с. 1998. – С. 64-68
106. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Ғылым, 1994. – С.170 с.
107. Алдашев С.А. Критерий существования собственных функций спектральной задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Дифференц уравнения, т. 41, № 6, 2005. –С. 795-801
108. Aldashev S.A. Mixed problem in a multidimensional domain for the Lavrent’ev-Bitsadze equation // Kazakh Mathematical Journal. Vol. 19, No. 2. 2019. pp 6-13
109. Aldashev S.A. Well-posedness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic equations // Bulletin of NSU. Mathematics, mechanics, computer science seriesVol. 12, issue. – 1. 2012. pp 7–13
110. Колмогоров А.Н. Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. -543 с.
111. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. -352 с.
112. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле для вырождающегося многомерного гиперболо-параболического уравнения // Известия НАН РК, сер. физико-математическая, № 5– 2014. – С. 7-11
113. Алдашев С.А. Задача Дирихле для одного класса вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений. // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Механ. Информатика, 2017. – С. 244–254
114. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. -527 с.
115. Алдашев С. А., Корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений // Владикавказский матем. журнал, т.16, вып.4, 2014. – С. 3-8