

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ӘОЖ 517.9, 519.6

Қолжазба құқығында

**ТОЛЕУОВ ТИМУР ЖАКСЫЛЫКОВИЧ**

**Бакли – Леверетт моделі негізінде екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің жуық шешімдері**

8D05401 (6D060100) – Математика

Философия докторы (PhD)  
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:  
Байшемиров Ж.Д.  
PhD, профессор

Шетелдік ғылыми кеңесші:  
Утебаев Даулетбай,  
ф.-м.ғ.д., профессор (Өзбекстан)

Қазақстан Республикасы  
Ақтөбе, 2026

## МАЗМҰНЫ

<b>НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР.....</b>	<b>3</b>
<b>АНЫҚТАМАЛАР.....</b>	<b>4</b>
<b>БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР.....</b>	<b>6</b>
<b>КІРІСПЕ.....</b>	<b>7</b>
<b>1 КЕУЕКТІ ОРТАДА АРАЛАСПАЙТЫН ФЛЮИДТЕР АҒЫСЫН СҮЗГІЛЕУДІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІН ҚҰРУ.....</b>	<b>22</b>
1.1 Сүзгілеу теориясының негізгі ұғымдары және дифференциалдық теңдеулері.....	22
1.2 Араласпайтын екіфазалық флюидтер ағысының сүзгілеу теңдеуі үшін Коши есебі.....	34
1.3 Бакли-Леверетт теңдеуі үшін Коши есебінің жалпыланған шешімінің жалғыздығы және бастапқы шарт бойынша орнықтылығы.....	41
1.4 Кеуекті ортадағы араласпайтын екіфазалық ағыстарды сүзгілеудің математикалық модельдері.....	43
<b>2 СҮЗГІЛЕУ ЕСЕПТЕРІНІҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ.....</b>	<b>52</b>
2.1 Негізгі нәтижелер.....	52
2.2 Бірөлшемді екіфазалық сүзгілеу есебінің қолданбалы қойылымы.....	57
2.3 Екіфазалық ағыстардың моделі.....	60
2.4 Екіфазалық ағыстарды сүзгілеу есебі.....	64
2.4.1 Риман типті бастапқы деректер және фронттың физикалық интерпретациясы.....	65
2.4.2 Жойылатын тұтқырлық әдісі және соққы фронтының құрылымы.....	66
2.4.3 Риман есебі негізіндегі сандық жуықтаулар.....	69
2.5 Екіфазалық ағыстарды сүзгілеудің кері есебі.....	73
2.6 Сүзгілеу теориясымен сабақтас қолданбалы есептер.....	75
2.7 Екіфазалық ағыстарды сүзгілеуді талдаудың қолданбалы аспектілері..	81
2.7.1 Математикалық модель (фронт қозғалысын шығару).....	81
2.7.2 Фракциялық ағыс функциясы.....	82
2.7.3 Соққы толқыны қанықтылығын анықтау.....	85
2.7.4 Бағдарламалық құрылым.....	87
2.7.5 Сандық нәтижелер.....	89
<b>ҚОРЫТЫНДЫ.....</b>	<b>93</b>
<b>ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....</b>	<b>96</b>
<b>ҚОСЫМШАЛАР.....</b>	<b>105</b>

## НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Осы диссертацияда стандарттарға келесі сілтемелер қолданылды:

Докторлық диссертация туралы ереже. «Қ.Жұбанов атындағы АӨУ» ҚеАҚ, 2022 ж.

Докторлық (PhD) диссертацияларды рәсімдеу ережесі. «Қ.Жұбанов атындағы АӨУ» ҚеАҚ, 2025 ж.

Мемлекеттік стандарт 7.32-2001. Ғылыми зерттеу жұмысы туралы есеп. Ұсыну құрылымы мен ережелері (2006 жылғы өзгерістер).

Мемлекеттік стандарт 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар мен құрастыру ережелері.

СТ РК 1090-2002. Единая система программной документации. Спецификация требований к программному обеспечению.

## АНЫҚТАМАЛАР

Осы диссертацияда тиісті анықтамалары бар келесі терминдер қолданылады:

**Ағыстар.** Ағыс түріндегі флюидтің қозғалысы;

**Айырымдылық әдіс.** Туындыларды айырмалармен жуықтау;

**Бэклунд түрлендірулері.** Екі функцияны байланыстыратын және көбінесе қосымша параметрге тәуелді бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Осы екі функция дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді жеке-жеке қанағаттандырады және әрқайсысы Бэклунд түрлендіруі деп аталады;

**Гидрофильді, гидрофобты жыныстар.** Мұнайға қарағанда сумен тез ылғалданатын жыныстар гидрофильді ал, керісінше мұнаймен тез ылғалданатын жыныстар гидрофобты деп аталады. Табиғатта таза күйде екеуі де болмайды;

**Гомогенизациялау.** Концентрациялық біртекті еместілікті жою және құрамды теңестіру процесі;

**Екіфазалы ағын.** Мұнай мен судың бірге ағуы;

**Жойылатын тұтқырлық әдісі.** Теңдеуге аз диффузия қосып, кейін оны нөлге ұмтылдыру әдісі;

**Гидравликалық үзіліс жарықшақтары.** Газ, мұнай, су қаныққан және басқа тау жыныстарының массивтерінде оларға қысыммен берілетін флюидтің әсерінен пайда болған жарықтар;

**Капиллярлық қысым.** Фазалар арасындағы қысым айырмасы;

**Кеуекті орта.** Флюидтер өтетін кеуекті жыныс;

**Компьютерлік қосымша.** Есептеуіш жүйеге есептеу мен басқару функцияларын орындауға мүмкіндік беретін компьютерлік нұсқаулар мен мәліметтердің комбинациясы;

**Көздер.** Жер астында ағып жатқан флюид;

**Көлемдік әдіс.** Сақталу заңдарына негізделген сандық әдіс;

**Кружков энтропиялық шарты.** Барлық тұрақты  $k$  үшін орындалатын энтропиялық теңсіздік;

**Қабат өткізгіштігі.** Қабат жыныстарының қысым айырмашылығында флюид пен газды өткізу қабілеті;

**Қалдық мұнай қанығуы.** Ығыстырылмай қалған мұнай үлесі;

**Модельдеу.** Зерттеу нысандарын олардың модельдері негізінде белгілі құбылыстарды түсіндіру мақсатында нақты өмірдегі нысандар мен үрдістер модельдерін зерттеу және құру;

**Мұнайға қанықтылық коэффициенті.** Ашық бос кеңістіктегі мұнай көлемінің ашық кеңістіктердің қосынды көлеміне қатынасы;

**Ньютон сұйықтығы.** Ағыс барысында мұндай сұйықтықта жылдамдықтың жанама кернеуі мен градиенті сызықты тәуелді болады (*Ньютонның тұтқырлық немесе ішкі үйкеліс заңы*). Бұл шамалар арасындағы пропорционалдық коэффициенті тұтқырлық ретінде белгілі;

**Парциал қысым.** Қоспадағы флюидтің жеке қысымы;

**Ранкин – Гюгио шарты.** Соққы толқынының жылдамдығын анықтайтын шарт;

**Салыстырмалы өткізгіштік.** Фазаның кеуекті орта арқылы өту қабілеті;

**Сирету толқыны.** Шешімі біртіндеп өзгертін толқын;

**Скалярлы сақталу теңдеуі.** Физикалық шаманың сақталуын сипаттайтын теңдеу;

**Соққы толқыны.** Шешімде пайда болатын секіріс;

**Соққы фронты.** Секірістің орналасқан шекарасы;

**Су қанығуы.** Кеуекті ортадағы су үлесі;

**Суға қанықтылық коэффициенті.** Ашық бос кеңістіктегі қалдық су көлемінің ашық кеңістіктердің қосынды көлеміне қатынасы;

**Сығылмайтын тұтқыр флюид.** Қысым өзгерсе де тығыздығы сақталатын флюид;

**Тиімді кеуектілік коэффициенті.** Қабатта флюид немесе газдың сүзілуін бағалайды және сүзілу процесі жүретін кеуектің көлеміне тәуелді болады;

**Тұтас орта.** Ішкі еркіндік дәрежесі ақырсыз, яғни континиум болатын механикалық жүйе. Тұтас ортаның кеңістіктегі қозғалысы басқа механикалық жүйелердегідей координаталармен, жекелеген бөлшектерінің жылдамдықтарымен емес, тығыздықтарының скалярлық өрісімен және жылдамдықтарының векторлық өрісімен сипатталады;

**Тұтқырлық.** Флюидтің ағынға қарсыласуы;

**Ұңғыма.** Жер бетінен жер асты қазбасына кез келген бұрышпен бұрғыланған дөңгелек қималы тау-кен қазбасы;

**Фазалық ағын үлесі.** Белгілі бір фазаның жалпы ағынға қатынасы;

**Фазаның келтірілген жылдамдығы.** Фазаның көлденең қима арқылы өтетін орташа көлем шығынының осы қиманың толық ауданына қатынасы;

**Флюидтер.** Деформацияланған кездегі күйі сұйықтықтар механикасы заңдарымен сипатталатын зат (*газдар және әртүрлі сұйықтық қоспалары*);

**Энергия диссипациясы.** Реттелген процесстер энергиясының реттелмеген процесстер энергиясына ауысып, ақырында жылуға айналуы;

**Энтропия.** Жүйедегі ретсіздік өлшемі немесе процесстің қайтымсыздығын сипаттайтын шама;

**Энтропиялық шарт.** Физикалық дұрыс шешімді таңдайтын шарт;

**Энтропиялық шешім.** Гиперболалық сызықты емес теңдеулер үшін физикалық тұрғыдан дұрыс әлсіз шешімді таңдайтын қосымша шартпен анықталатын шешім;

## БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

- $m(x, y, z)$  – кеуектілік функциясы;
- $g$  – еркін түсу үдеуі;
- $C$  – сүзгілеу коэффициенті;
- $\rho_i$  –  $i$ -ші фазаның тығыздығы;
- $div$  – дивергенция;
- $\phi$  – кенорнының тиімді кеуектілігі;
- $k$  – кеуекті ортаның өтімділік коэффициенті;
- $kr_o, kr_w$  – фазааралық импульс алмасуды сипаттайтын айқас фазалық өтімділіктер;
- $S_i$  –  $i$ -ші фазаның қанықтылық функциясы;
- $U_i$  –  $i$ -ші фазаның жылдамдығы;
- $\mu_i$  –  $i$ -ші фазаның динамикалық тұтқырлығы;
- $p_i$  –  $i$ -ші фазаның парциал (дербес) қысымы;
- $p_{c,o,w}$  – капиллярлық қысым;
- $F(\sigma)$  – Бакли – Леверетт функциясы;
- $\hat{f}$  –  $f$  функциясының Фурье түрлендіруі;
- $S_{wi}$  – соққы толқынының фронты әлі жетпеген бастапқы суға қанықтылық;
- $S_{w shock}$  – соққы толқынының фронтындағы суға қанықтылық;
- $1 - S_{or}$  – соққы толқынының фронтынан кейінгі суға қанықтылық;
- $S_{or}$  – мұнаймен қанықтылық қалдығы.

## КІРІСПЕ

**Диссертациялық жұмыстың жалпы сипаттамасы.** Диссертациялық жұмыс Бакли – Леверетт моделі негізінде екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің жуық шешімдерін зерттеуге арналған. Жұмыста жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы гиперболалық типті теңдеулердің энтропиялық шешімдерін алу және олардың сүзгілеу процестеріндегі физикалық интерпретациясы қарастырылған.

**Зерттеу тақырыбының өзектілігі.** Кеуекті ортадағы екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысын сипаттайтын математикалық модельдер қазіргі таңда мұнай-газ инженериясында, гидрогеологияда және энергия ресурстарын тиімді пайдалану есептерінде маңызды орын алады. Мұндай процестердің негізінде жатқан құбылыстардың бірі – бір фазаның екінші фазаны ығыстыруы, соның нәтижесінде соққы толқындарының, сирету толқындары аймақтарының және фронтальді қозғалыстың қалыптасуы болып табылады [1–4].

Бұл құбылыстарды сипаттайтын классикалық модельдердің бірі – Бакли – Леверетт теңдеуі. Аталған модель гиперболалық типтегі сақталу заңына жатады және оның шешімдері әдетте, үзілісті сипатқа ие болады. Осыған байланысты шешімдердің әлсіз және энтропиялық мағынасын дұрыс анықтау, олардың жалғыздығы мен орнықтылығын қамтамасыз ету – теориялық және қолданбалы тұрғыдан өзекті мәселе болып табылады.

Соңғы жылдарда гиперболалық сақталу заңдарының энтропиялық шешімдерін таңдаудың ең сенімді тәсілдерінің бірі ретінде жойылатын тұтқырлық әдісі кеңінен қолданылуда. Бұл әдіс гиперболалық теңдеуді аз тұтқырлығы бар параболалық теңдеумен жуықтап, тұтқырлық параметрі нөлге ұмтылғанда алынатын шектік шешімді энтропиялық шешім ретінде таңдауға мүмкіндік береді [5–8].

Осы тұрғыдан алғанда, Бакли – Леверетт моделіне сәйкес Риман есебінің жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы алынатын жуық шешімдерін зерттеу, соққы қабатының құрылымын талдау және сандық модельдермен негіздеу – өзекті әрі маңызды ғылыми міндет болып табылады.

**Зерттеу тақырыбының қазіргі жағдайы.** Су арқылы мұнайды ығыстыру, газ-конденсат жүйелеріндегі сүзгілеу процестері, жер асты суларының қозғалысы сияқты көптеген практикалық есептер екіфазалық ағыс модельдеріне негізделеді. Бұл есептердің көпшілігі сызықтық емес гиперболалық типтегі сақталу заңдары арқылы сипатталады және шешімдерінің құрылымы күрделі болып келеді.

Екіфазалық сүзгілеу есептерін зерттеуде Бакли – Леверетт моделі классикалық әрі іргелі модельдердің бірі болып табылады. Бұл модель қанықтылықтың эволюциясын бірөлшемді гиперболалық теңдеу арқылы сипаттайды және шешімдерінде соққы толқындары мен сирету толқындары аймақтарының пайда болуын көрсетеді. Мұндай үзілісті шешімдер физикалық тұрғыдан мағыналы болғанымен, оларды классикалық мағынада дифференциалдық теңдеулердің шешімі ретінде қарастыру мүмкін емес [9–13].

Осыған байланысты әлсіз және энтропиялық шешімдер теориясы ерекше маңызға ие болады. Энтропиялық шешімдер физикалық тұрғыдан дұрыс болатын шешімді таңдауға мүмкіндік береді және модельдің бірімділігін қамтамасыз етеді. Алайда энтропиялық шешімдерді тікелей аналитикалық жолмен табу көп жағдайда қиын болғандықтан, оларды сипаттаудың балама әдістері қажет. Осындай әдістердің бірі – жойылатын тұтқырлық әдісі. Бұл әдісте бастапқы гиперболалық теңдеуге кіші параметрмен көбейтілген тұтқырлық мүшесі қосылып, алынған параболалық есептің шешімдері зерттеледі. Тұтқырлық параметрі нөлге ұмтылған кезде алынған шешімдердің энтропиялық шешімге жинақталуы дәлелденсе, онда бұл шешім *физикалық тұрғыдан дұрыс* деп есептеледі. Сондықтан жойылатын тұтқырлық әдісі сүзгілеу есептерін теориялық тұрғыдан зерттеудің сенімді құралы болып табылады [14–18].

Флюидтер ағысын кеуекті ортада модельдеу мұнай-газ инженериясы, гидрогеология, химия инженериясы және ядролық қауіпсіздік сияқты көптеген ғылыми және қолданбалы салаларда маңызды орын алады. Мұндай есептерді сипаттаудың классикалық негізі бірфазалық ағыс үшін енгізілген Дарси заңы болып табылады. Көпфазалық жағдайларда бұл заң салыстырмалы өтімділік ұғымын енгізу арқылы жалпыланып, фазалар арасындағы өзара әсер қанықтылық функциялары арқылы ескеріледі [19–24].

Соңғы онжылдықтарда кеуекті орталардың күрделі құрылымын, гетерогенділігін және динамикалық қасиеттерін ескеретін кеңейтілген модельдер белсенді түрде зерттелуде. Әсіресе фазалар арасындағы масса мен импульс алмасуды тікелей ескеретін модельдерге қызығушылық артып отыр. Мұндай тәсілдер классикалық Дарси заңын феноменологиялық түрде жалпылауға негізделгенімен, нақты инженерлік есептерде олардың маңыздылығы тәжірибелік және сандық зерттеулермен расталуда [25–27].

Мұнай кен орындарын игеру барысында екіфазалық сүзгілеу процестері мұнайды сумен немесе газбен ығыстырып шығару арқылы жүзеге асырылады. Бұл процестердің тиімділігі флюидтердің тұтқырлығына, қанықтылыққа, капиллярлық қысымға және кеуекті ортаның өтімділік қасиеттеріне тәуелді. Осыған орай Бакли – Леверетт моделі мұнайды ығыстыру процестерін сипаттайтын негізгі теориялық құралдардың бірі болып табылады. Классикалық модельде флюидтердің тұтқырлығы тұрақты деп қарастырылатындықтан, ол нақты жағдайларды әрдайым дәл сипаттай бермейді [28–31].

Қазіргі зерттеулерде көптеген флюидтердің, соның ішінде шикі мұнайдың, тұтқырлығы қысымға тәуелді екені көрсетілген. Бұл факт Бакли – Леверетт моделін жалпылау қажеттілігін туындатады. Сонымен қатар, гиперболалық сақталу заңдарымен сипатталатын мұндай модельдерде шешімдердің үзілісті сипаты байқалады, бұл оларды талдауда Риман есебі мен жойылатын тұтқырлық әдісін қолдануды өзекті етеді. Осы бағыттағы зерттеулер теориялық тұрғыдан да, мұнай өндіру процестерін тиімді басқару тұрғысынан да маңызды.

Зерттеу барысында отандық аға буын ғалымдардың еңбектерімен танысу қарастырылып отырған мәселелерді тереңірек түсінуге мүмкіндік берді. Атап айтқанда, Ш.С. Смағұловтың еңбектерінде тұтқыр, сығылмайтын сұйықтықтар

үшін ағыс теңдеулерін шешудің жаңа сандық әдістері ұсынылған. Н.Т. Данаев, А.М. Мейірманов, С.Т. Мұхамбетжанов, М.Б. Габбасов, Н.М. Темірбеков, Т.С. Кенжебаев еңбектерінде сүзгілеу модельдерінің сандық шешімдері мен резервуарлардағы флюид қозғалысының математикалық модельдері зерттелген. Сонымен қатар, Б.Е. Бекбауов пен Ж.Д. Байшемировтың жұмыстарында үш өлшемді сүзгілеу модельдерін сандық шешу, химиялық әдістер арқылы кабаттардың мұнай беруін арттыру, әртүрлі масштабтағы ағыстарды модельдеу және сығылатын сұйықтықтардың макроскопиялық модельдері қарастырылған. Бұл еңбектерде алынған нәтижелер сүзгілеу теориясының Қазақстандағы қолданбалы математика ғылымының маңызды бағыттарының бірі екенін көрсетеді [32–47].

**Диссертациялық жұмыстың мақсаты.** Бакли – Леверетт моделі негізінде екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің жойылатын тұтқырлық әдісімен алынатын жуық шешімдерін теориялық және қолданбалы тұрғыдан зерттеу.

**Зерттеу міндеттері:**

а) кеуекті ортадағы екіфазалық сүзгілеу процестерінің математикалық модельдерін талдау;

ә) бастапқы деректері бір секірісті бөлшек-тұрақты болатын Риман есебін зерттеу, Риман есебін шешуде Коши есебінің жуық шешімдері арқылы жойылатын тұтқырлық әдісін қолдану;

б) гиперболалық типтегі сақталу заңдары үшін әлсіз және энтропиялық шешімдер теориясын жүйелеу, Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Коши және Риман есебінің энтропиялық шешімдерінің жалғыздығы мен орнықтылығын негіздеу;

в) жойылатын тұтқырлық әдісін қолдану арқылы тұтқыр жуықтаулардың энтропиялық шешімге жинақталуын дәлелдеу, Риман есебі үшін соққы қабатының жүгірмелі толқын түріндегі құрылымын талдау;

г) тура және кері есептерді қарастыру, модельдердің үйлесімділігін талдау, екіфазалық сүзгілеудің қолданбалы қойылымын құру, алынған теориялық нәтижелерді сандық модельдермен растау;

ғ) авторлық бағдарламалық құрал көмегімен есептеу эксперименттерін жүргізу, алынған жуық шешімдердің жинақтылығын растау үшін есептің сандық шешімдерін құру және талдау.

**Зерттеу әдістері мен қолданылған математикалық аппарат.** Диссертациялық жұмыста қойылған мақсатқа жету үшін қазіргі заманғы математикалық талдау әдістері мен гиперболалық типтегі дифференциалдық теңдеулер теориясының нәтижелері кеңінен қолданылды. Негізгі зерттеу құралы ретінде сақталу заңдарының әлсіз және энтропиялық шешімдер теориясы пайдаланылды. Бұл теория шешімдердің үзілісті болуы мүмкін жағдайларда да физикалық тұрғыдан мағыналы нәтижелер алуға мүмкіндік береді.

Жұмыста жойылатын тұтқырлық әдісі негізгі аналитикалық тәсіл ретінде қарастырылды. Бұл әдіс гиперболалық теңдеулерді параболалық жуықтаулар арқылы зерттеуге және алынған шешімдердің энтропиялық шекке жинақталуын дәлелдеуге мүмкіндік береді. Сонымен қатар Риман есебі, жүгірмелі толқын

типті шешімдер, Ранкин – Гюгонио шарттары және Кружков энтропиялары қолданылды.

Сондай-ақ алынған теориялық нәтижелерді тексеру және иллюстрациялау мақсатында сандық әдістер пайдаланылды. Сандық эксперименттер жойылатын тұтқырлық әдісімен алынған жуық шешімдердің энтропиялық шешімдермен сәйкестігін көрсетуге мүмкіндік берді.

**Зерттеу нысаны.** Кеуекті ортадағы араласпайтын екіфазалық флюидтер ағысын сипаттайтын математикалық модельдер.

**Зерттеу пәні.** Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман есебінің энтропиялық шешімдері, жойылатын тұтқырлық әдісімен алынатын жуық шешімдердің жинақтылығы мен жалғыздығын зерттеу.

**Зерттеудің ғылыми жаңалығы.** Диссертациялық жұмыста Бакли – Леверетт моделі үшін Риман есебінің жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы жуық шешімдері жүйелі түрде зерттелді. Тұтқыр жуықтаулардың энтропиялық шешімге жинақталуы дәлелденіп, соққы қабатының жүгірмелі толқын типті құрылымы анықталды. Өтпелі аймақтың қалыңдығы тұтқырлық параметрімен бірдей ретте өзгеретіні көрсетіліп, алынған нәтижелердің орнықтылығы негізделді. Сонымен қатар энтропиялық шешімдердің  $L^1$ -мағынадағы жалғыздығы мен орнықтылығы дәлелденіп, алынған жуық шешімдердің физикалық мағынасы бар екені көрсетілді.

**Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер:**

а) Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман есебінің энтропиялық шешімдерінің бар болуы, жалғыздығы және  $L^1$ -орнықтылығы;

ә) Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман есебінің жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы алынған жуық шешімдерінің энтропиялық шешімге жинақталуы және соққы қабатының жүгірмелі толқын типті құрылымы;

б) кеуекті ортадағы екіфазалық ағыстар үшін қысымға тәуелді тұтқырлықты ескеретін кеңейтілген математикалық моделі;

в) екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін екіфазалық сүзгілеудің тура және кері есептерін сандық шешу әдістері;

г) Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман есебінің жуық шешімдерін есептеуге арналған сандық алгоритмдері және олардың жинақтылығы.

**Алынған нәтижелердің нақтылығы және негізделуі.** Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелердің нақтылығы мен негізделуі жер асты гидродинамикасы, функционалдық анализ, дифференциалдық теңдеулер теориясы және есептеу математикасының қазіргі заманғы әдістерін қолдану арқылы қамтамасыз етіледі. Қарастырылып отырған модельдер сызықты емес болғандықтан, олар үшін аналитикалық шешімдер тек шектеулі жағдайларда ғана алынуы мүмкін. Осыған байланысты жұмыста сандық әдістер кеңінен қолданылды.

Сандық есептеулерде алынған нәтижелердің дұрыстығы мен орнықтылығы әртүрлі бастапқы және шеттік шарттар үшін тексеріліп, шешімдердің физикалық мағынаға сәйкестігі талданды. Қолданылған

алгоритмдер мен есептеу тәсілдері есептеу гидродинамикасында кеңінен қолданылатын заманауи әдістерге негізделген.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері халықаралық рецензияланатын ғылыми журналдарда жарияланған еңбектерде баяндалып, тәуелсіз сарапшылардың талқылауынан өткен. Бұл алынған нәтижелердің ғылыми тұрғыдан негізделгенін және олардың нақтылығын растайды.

**Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы.** Зерттеудің теориялық маңыздылығы гиперболалық жүйелер үшін Риман есебі жағдайында жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы алынған шешімдердің Коши есебінің энтропиялық шешіміне жинақталуын және оның жалғыздығын негіздеумен сипатталады. Бұл нәтижелер сызықты емес сақталу заңдары теориясын дамытуға үлес қосады.

Зерттеудің практикалық маңыздылығы алынған нәтижелерді кеуекті ортадағы екіфазалық сүзгілеу процестерін модельдеуге қолдану мүмкіндігімен анықталады. Ұсынылған тәсіл жер асты суларын қорғау, флюидтерді кеуекті орта арқылы тасымалдау және мұнай өнеркәсібінде мұнайды ығыстырып шығару процестерін сандық модельдеу арқылы өнімділікті алдын ала болжауға мүмкіндік береді.

**Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы.** Диссертациялық жұмыс ҚР ҒЖБМ Ғылым комитетінің 2025-2027 жылдарға арналған ғылыми және (*немесе*) ғылыми-техникалық жобалар бойынша гранттық қаржыландыру бағдарламасының «Геофизикалық мониторингтің сенімді схемаларын әзірлеу мақсатында табиғи және антропогендік әсерлер нәтижесінде толқындық сейсмикалық өрістердегі кеуекті серпімді сұйықтық қаныққан орталардың механикалық қасиеттерінің өзгергіштігін болжамды сандық модельдеу» атты ғылыми жоба аясында орындалды (№ АР26196267).

**Автордың жеке үлесі.** Диссертациялық жұмыста келтірілген барлық ғылыми нәтижелер автордың жеке өзі немесе оның тікелей қатысуымен алынған. Ғылыми кеңесшілер мен бірлескен авторлар зерттеу есебінің қойылымын талқылауға және алынған нәтижелерді талдауға ғылыми қолдау көрсетті.

**Зерттеу нәтижелерінің апробациясы.** Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері мен қорытындылары бойынша халықаралық және алыс шет ел конференцияларында (*Украина, Ресей, Біріккен Араб Әмірліктері, Өзбекстан*) мақалалар жарық көріп, келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

- «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан. 10-11 қараша 2017 жыл.

- «Қолданбалы математика» ғылыми семинары, М.Улугбек атындағы Өзбекстан ұлттық университеті, Ташкент, Өзбекстан (*семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор З.Х. Юлдашев*). 15 қазан 2019 жыл.

- «Қолданбалы математика және ақпараттық технологиялар» халықаралық ғылыми конференциясы, М.Улугбек атындағы Өзбекстан ұлттық университеті, Ташкент, Өзбекстан. 14-15 қараша 2019 жыл.

- «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, математика кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан (*семинар жетекшісі - ф.-м.ғ.д., профессор Ж.А.Сартабанов*).

**Жарияланымдар.** Аталмыш диссертациялық жұмысты орындау аясында зерттеу нәтижелері бойынша автор шетелдік рецензияланған Scopus базасында индекстелген журналда - 4 мақала [48–51], Scopus деректер базасында индекстелетін шетелдік конференция материалында - 2 мақала [52–53], халықаралық конференциялар жинақтары мен журналдарда - 5 мақала [54–55, 58–59, 120].

Сонымен қатар, жұмыс аясында әзірленген «Сүзгілеу есептеріндегі екіфазалық сұйықтық ағыстары моделін тұтқырлықты жою әдісімен талдау» бағдарламалық қамсыздандыруына Қазақстан Республикасы Әділет министрлігінің «Ұлттық зияткерлік меншік институты» берген №23424 авторлық куәлігі.

Диссертациялық жұмыста қарастырылатын кеуекті ортадағы екіфазалық сүзгілеу есептері қолданбалы инженерлік жүйелердегі ағындар динамикасын модельдеу және басқару мәселелерімен тікелей сабақтас. Автордың бұған дейінгі зерттеулерінде мұнай-газ саласындағы күрделі объектілердің жұмыс режимдерін бақылау, диагностика және басқару міндеттері қарастырылып, бастапқы деректердің толық еместігі жағдайында шешім қабылдаудың математикалық қойылымдары мен алгоритмдері талданған. Атап айтқанда, магистральдық мұнай құбырларының технологиялық объектілерін диагностикалау және олардың жұмыс режимдерін басқару мәселелері зерттеліп, басқару есебінің математикалық қойылымы ұсынылған және оны шешудің эвристикалық тәсілі берілген [53].

Сонымен бірге автор қатысқан еңбектерде мұнай өңдеу мен химиялық-технологиялық жүйелер (ХТЖ) үшін математикалық модельдер құру, көпкритерийлі оңтайландыру және шешім қабылдау теориясының әдістері жүйелі түрде қарастырылған. Бастапқы деректердің толық еместігі жағдайында күрделі ХТЖ объектілерін модельдеу, параметрлерді идентификациялау және көпкритерийлі оңтайландырудың эвристикалық алгоритмдерін құрастыру мәселелері нақты өндірістік мысалдармен негізделеді. Бұл диссертациядағы «физикалық мағынасы бар шешімді таңдау» идеясымен методологиялық тұрғыдан үндеседі (*яғни «көп мүмкін шешімнен дұрыс класты іріктеу» логикасы*) [50].

Бұдан бөлек, автордың деректерді біріктіру және параметрлерді бағалау бағытындағы нәтижелері (мысалы, жабық кеңістікте RSSI/INS деректерін Extended Kalman Filter арқылы біріктіріп дәлдікті арттыру) өлшеу деректеріндегі қателік пен белгісіздікті есепке алудың практикалық маңызын көрсетеді. Бұл тәжірибе диссертациядағы жойылатын тұтқырлық әдісінің идеясына (*аз «реттеу» енгізіп, дұрыс шешімді алу*) жақсы методологиялық үйлесімділік береді және есептеу эксперименттерін сенімді интерпретациялайды [54].

**Диссертацияның құрылымы мен көлемі.** Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен, қорытындыдан, 120 пайдаланылған әдебиеттер тізімі және қосымшалардан тұрады. Формулалар, анықтамалар мен теоремаларды нөмірлеу екі саннан: бірінші сан бөлім нөмірін, екіншісі - бөлім ішіндегі формуланың, теореманың тиісті нөмірін білдіреді. Диссертациялық жұмыс 111 беттен тұрады.

**Диссертацияның қысқаша мазмұны.** Диссертацияның бірінші бөлімінде кеуекті ортадағы араласпайтын екіфазалық флюидтер ағысының математикалық қойылымы және Бакли – Леверетт моделі қарастырылады. Кеуекті ортадағы көпфазалық флюидтер ағысы қазіргі қолданбалы математика мен инженерлік ғылымдардың маңызды бағыттарының бірі болып табылады. Мұндай есептер мұнай-газ кен орындарын игеру, гидрогеология, экологиялық процестерді модельдеу және фильтрациялық жүйелерді басқару сияқты көптеген практикалық салаларда кездеседі. Бұл есептердің күрделілігі флюидтердің араласпайтын табиғатына, фазааралық шекаралардың пайда болуына және шешімдердің үзілісті құрылымына байланысты.

*Екіфазалық сүзгілеу процесінің физикалық негіздері*

Қарастырылатын процесс – кеуекті ортада екі араласпайтын флюидтің, әдетте су мен мұнайдың, бірлескен қозғалысы. Флюидтер бір-бірінде ерімейді және олардың арасында айқын фазааралық шекара сақталады. Кеуекті орта флюидтер үшін қозғалыс арналары қызметін атқарады, ал ағыс процесі қысым градиентімен анықталады.

Инженерлік практикада келесі стандартты жорамалдар кеңінен қолданылады: *флюидтер сызылмайды; фазалар арасында масса алмасу болмайды; кеуекті орта деформацияланбайды; процесс изотермиялық; ауырлық күші мен капиллярлық әсер белгілі бір жағдайларда еленбеуі мүмкін.*

Осы жорамалдар сүзгілеу процесін салыстырмалы түрде қарапайым, бірақ физикалық тұрғыдан мағыналы математикалық модель арқылы сипаттауға мүмкіндік береді.

*Массаның сақталу заңдары және Дарси заңы*

Екіфазалық ағысты сипаттаудың негізінде әрбір фаза үшін массаның сақталу заңы жатады. Бірөлшемді жағдайда бұл заңдар келесі түрде жазылады:

$$\frac{\partial(\phi S_o)}{\partial t} + \frac{\partial u_o}{\partial x} = 0, \frac{\partial(\phi S_w)}{\partial t} + \frac{\partial u_w}{\partial x} = 0,$$

мұндағы  $\phi$  – кеуектілік,  $S_o, S_w$  – мұнай мен суға қанықтылықтар,  $u_o, u_w$  – сәйкес фазалардың сүзгілеу жылдамдықтары.

Физикалық тұрғыдан қанықтылықтар келесі табиғи шектеумен байланысқан:

$$S_o + S_w = 1.$$

Фазалардың қозғалысы Дарси заңы арқылы сипатталады:

$$u_\alpha = -\frac{kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x}, \alpha \in \{o, w\},$$

мұндағы  $k$  – абсолютті өтімділік,  $k_{r\alpha}$  – салыстырмалы өтімділік,  $\mu_\alpha$  – фазаның тұтқырлығы.

*Фракциялық ағыс функциясы және Бакли – Леверетт теңдеуі*  
Жалпы сүзгілеу жылдамдығын

$$u = u_o + u_w$$

деп енгізіп, алгебралық түрлендірулер жүргізу арқылы су фазасының фракциялық ағыс функциясы анықталады:

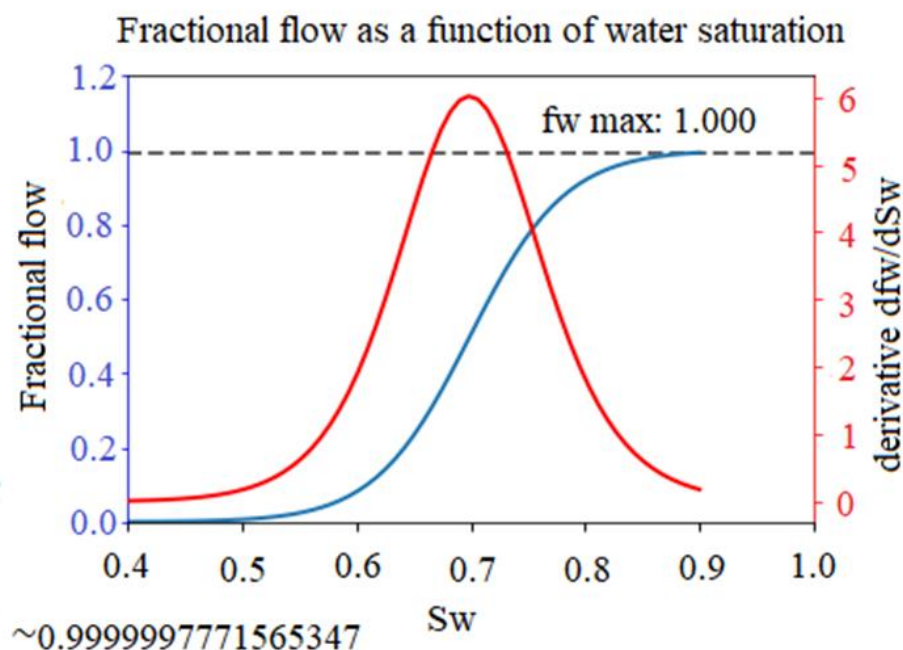
$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w)}, \lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}.$$

Фракциялық ағыс функциясының сызықтық емес сипаты соққы толқынының пайда болу механизмімен тікелей байланысты. Бұл функцияның графигі мен оның туындысы төменде көрсетілген (0.1-сурет).

Осылайша суға қанықтылық үшін негізгі эволюциялық теңдеу алынады:

$$\partial_t S_w + \partial_x f_w(S_w) = 0. \quad (0.1)$$

Бұл теңдеу Бакли – Леверетт теңдеуі деп аталады және гиперболалық типтегі сақталу заңы болып табылады.



0.1-сурет – Фракциялық ағыс функциясы және оның туындысы  
(автордың бағдарламасы негізінде алынған)

### *Гиперболалық табиғат және шешімдердің үзілісті құрылымы*

Бакли – Леверетт теңдеуінің басты ерекшелігі – оның шешімдері жалпы жағдайда үзілісті болады. Бастапқы шарт тегіс болса да, шектеулі уақытта қанықтылықтың секірмелі өзгерістері, яғни соққы толқындары пайда болуы мүмкін. Бұл физикалық тұрғыдан ығыстыру фронтының қалыптасуын сипаттайды. Осы факт классикалық мағынадағы шешімдердің жеткіліксіз екенін көрсетеді және әлсіз, кейіннен энтропиялық шешімдер теориясына көшуді талап етеді.

Диссертацияның екінші бөлімінде әлсіз және энтропиялық шешімдер, Риман есебі және соққы толқындарының құрылымы қарастырылады.

Бакли – Леверетт теңдеуі гиперболалық типтегі сызықты емес сақталу заңы болғандықтан, оның классикалық (*үзіліссіз*) шешімдері жалпы жағдайда ұзақ уақыт сақталмайды. Бастапқы дерек тегіс болғанның өзінде, шектеулі уақытта шешімнің градиенті шексіз өсіп, қанықтылықтың секірмелі өзгерістері – соққы толқындары пайда болады. Осыған байланысты теңдеуді шешудің әлсіз және энтропиялық тұжырымдамалары енгізіледі.

### *Әлсіз шешім ұғымы*

Классикалық шешімнің жоқтығы теңдеуді үлестірімдер мағынасында қарастыруды талап етеді.

**0.1-анықтама (әлсіз шешім).** Егер кез келген  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$  сынақ функциясы үшін

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (S \partial_t \varphi + f(S) \partial_x \varphi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} S_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0$$

теңдігі орындалса, онда  $S(x, t) \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$  функциясы Бакли – Леверетт теңдеуінің әлсіз шешімі деп аталады.

Бұл анықтама теңдеудің дифференциалдық формасын интегралдық формаға ауыстыру арқылы секірмелі шешімдерді де қарастыруға мүмкіндік береді.

Алайда әлсіз шешімдер бірімәнді емес: бір бастапқы шартқа бірнеше әлсіз шешім сәйкес келуі мүмкін. Сондықтан физикалық мағынасы бар шешімді таңдап алу үшін қосымша шарт қажет.

### *Энтропиялық шешім ұғымы және Крузков шарттары*

Физикалық тұрғыдан қабылданатын шешімдер уақыт бойынша энергияның немесе энтропияның өсуіне жол бермеуі тиіс. Осы идея энтропиялық шешім ұғымына алып келеді.

**0.2-анықтама (энтропиялық шешім).** Кез келген тұрақты  $k \in \mathbb{R}$  үшін келесі энтропиялық теңсіздік орындалса (үлестірімдер мағынасында):

$$\partial_t |S - k| + \partial_x \left( \operatorname{sgn}(S - k)(f(S) - f(k)) \right) \leq 0,$$

онда  $S(x, t)$  әлсіз шешімі энтропиялық шешім деп аталады.

Бұл шарт Кружков энтропиялары деп аталады және соққы толқынының физикалық дұрыс бағытын таңдауды қамтамасыз етеді.

Энтропиялық шешімдер үшін келесі маңызды қасиеттер орындалады:

- бар болуы;
- жалғыздығы;
- $L^1$ -орнықтылығы.

Бұл қасиеттер Бакли – Леверетт моделінің қолданбалы сенімділігін қамтамасыз етеді.

#### *Риман есебі*

Энтропиялық шешімдердің құрылымын түсіну үшін негізгі модельдік есеп – Риман есебі қарастырылады.

Бастапқы шарт келесі түрде берілсін:

$$S(x, 0) = \begin{cases} S_L, & x < 0, \\ S_R, & x > 0, \end{cases} \quad S_L \neq S_R.$$

Бұл есеп физикалық тұрғыдан айдау аймағы мен өндіру аймағы арасындағы қанықтылықтың күрт өзгерісін сипаттайды.

$f(S)$  ағын функциясының қасиеттеріне байланысты шешім екі типте болуы мүмкін:

1. Сирету толқыны (егер  $f'(S_L) < f'(S_R)$ );
2. Соққы толқыны (егер  $f'(S_L) > f'(S_R)$ ).

Бакли – Леверетт моделінде практикалық жағдайда көбінесе соққы толқындары пайда болады.

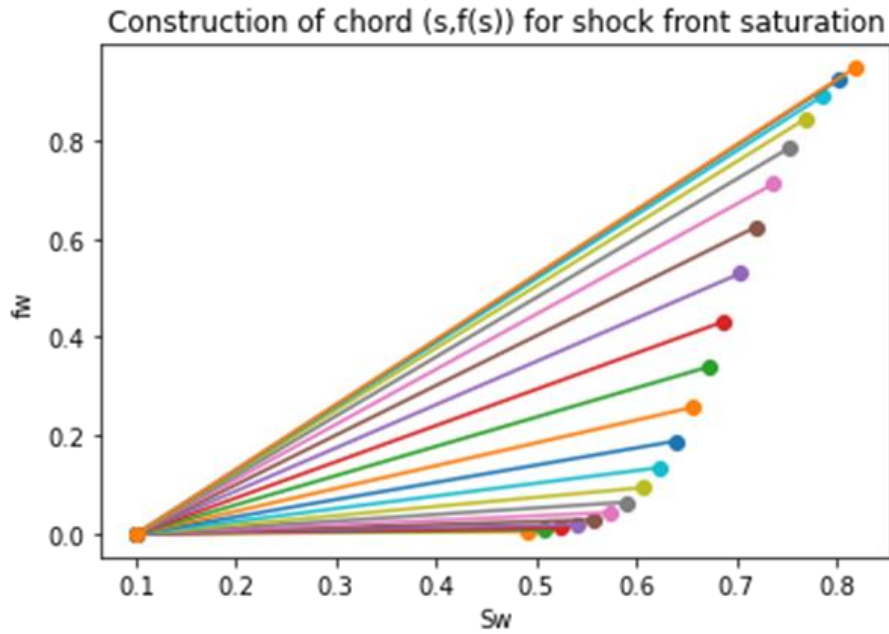
#### *Ранкин – Гюгонио шарты*

Секірмелі шешімдердің таралу жылдамдығы интегралдық баланс арқылы анықталады.

$$\sigma = \frac{f(S_R) - f(S_L)}{S_R - S_L}.$$

Бұл формула соққы фронтының жылдамдығын анықтайды және физикалық тұрғыдан массаның сақталуымен байланысты.

Бұл шарттың геометриялық интерпретациясы  $(S, f(S))$  жазықтығында хорда әдісі арқылы түсіндіріледі (*0.2-сурет*).



Сурет 0.2 – Ранкин – Гюгонио шартының геометриялық интерпретациясы  
(автордың бағдарламасы негізінде алынған)

### *Энтропиялық шарттың геометриялық интерпретациясы*

Бакли – Леверетт моделінде энтропиялық шартты геометриялық түрде түсіндіруге болады.  $(S, f(S))$  жазықтығында  $S_L$  және  $S_R$  нүктелерін қосатын хорда қисықтың астында жатуы тиіс (0.1-сурет).

Бұл интерпретация: соққының дұрыс бағыты мен қанықтылық фронтының тұрақтылығын анық көрсетеді.

### *Жойылатын тұтқырлық әдісі*

Энтропиялық шешімді конструктивті түрде алу үшін жойылатын тұтқырлық әдісі қолданылады. Ол гиперболалық теңдеуге аз диффузия қосуға негізделген:

$$\partial_t S^\varepsilon + \partial_x f(S^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} S^\varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Бұл теңдеу параболалық типке жатады және классикалық мағынада жақсы қойылған. Негізгі идея:

- $\varepsilon > 0$  кезінде шешім тегіс;
- $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде шешім энтропиялық шешімге жинақталады.

### *Негізгі теоремалар*

**0.1-теорема (жойылатын тұтқырлық шегінің жинақталуы).** Егер  $f \in C^2([0,1])$ ,  $S_0 \in L^\infty(R)$  болса, онда кез келген  $T > 0$  үшін

$$S^{\varepsilon_n} \rightarrow S, L^1_{loc}(R \times (0, T))$$

болатындай  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  ішкі тізбек табылады.

Мұндағы  $S$  – Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімі.

**0.2-теорема ( $L^1$ -орнықтылық).** Егер келесі теңсіздік орындалса

$$\|S(\cdot, t) - \tilde{S}(\cdot, t)\|_{L^1(R)} \leq \|S_0 - \tilde{S}_0\|_{L^1(R)}, t \geq 0,$$

онда (0.1) – Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімі жалғыз болады.

*Жойылатын тұтқырлық әдісінің терең талдауы және оның қолданбалы мағынасы*

Гиперболалық типтегі Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімдерін конструктивті түрде алу үшін жойылатын тұтқырлық әдісі қолданылады. Осы әдістің аналитикалық құрылымы, соққы қабатының микроқұрылымы және алынған нәтижелердің физикалық интерпретациясы егжей-тегжейлі қарастырылады.

*Тұтқырланған теңдеу және оның қасиеттері*

Гиперболалық теңдеуге аз диффузия қосу арқылы келесі параболалық теңдеу алынады:

$$\partial_t S^\varepsilon + \partial_x f(S^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} S^\varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Бұл теңдеу келесі қасиеттерге ие:

- Параболалық типті – классикалық шешім бар және бірімәнді.
- Максимум принципі орындалады:  $\|S^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|S_0\|_{L^\infty}$ .
- Энергетикалық бағалаулар  $\varepsilon$ -ге тәуелсіз тұрақтылықты қамтамасыз етеді.

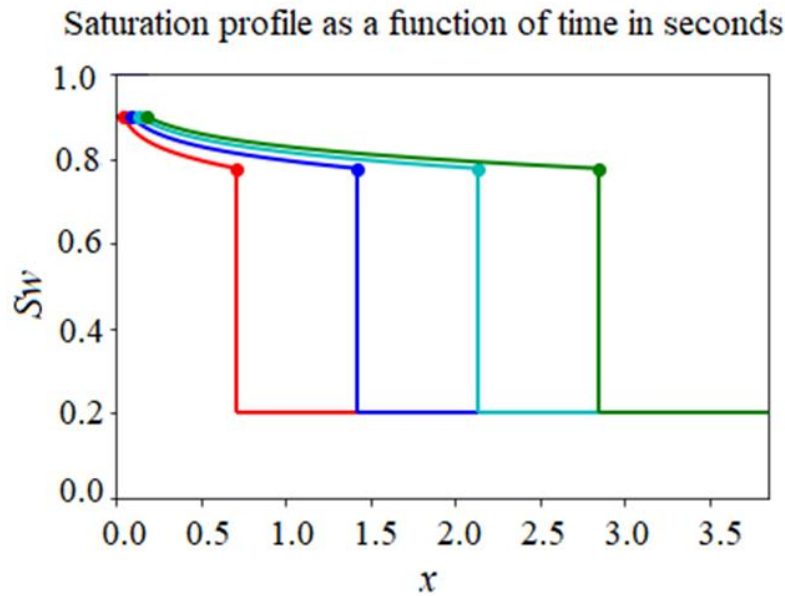
Осы қасиеттер  $\varepsilon \rightarrow 0$  шегінде жинақталуды зерттеуге мүмкіндік береді.

*Соққы қабатының жүгірмелі толқын құрылымы*

Риман есебі үшін тұтқырланған теңдеудің шешімі соққы маңында арнайы формада ізделеді:

$$S^\varepsilon(x, t) = U(\xi), \xi = \frac{x - \sigma t}{\varepsilon}.$$

Тұтқырланған есеп шешімі соққы маңында тегіс өтпелі қабат түзеді. Бұл қабаттың профилі  $\varepsilon$  параметріне тәуелді және  $\varepsilon$  азайған сайын жіңішкереді. Төмендегі 0.3-суретте соққы қабатының типтік профилі көрсетілген.



Сурет 0.3 –  $t$  уақыты мен  $x$  координатасына тәуелді судың қанығу профилі  
(автордың бағдарламасы негізінде алынған)

Бұл ауыстыру теңдеуді автономды екінші ретті дифференциалдық теңдеуге келтіреді:  $\varepsilon(-\sigma U' + f'(U)U') = \varepsilon U''$ .

Қысқартудан кейін:  $U'' = (f'(U) - \sigma)U'$ .

Шекаралық шарттар:  $U(-\infty) = S_L, U(+\infty) = S_R$ .

Бұл теңдеу фазалық жазықтықта талданады.

Егер  $f''(S) \geq 0$  (дөңес функция) болса, онда монотонды жүгірмелі толқын профилі бар болады.

*Негізгі нәтиже*

Соққы қабатының сипаттамалық қалыңдығы:

$$\delta_\varepsilon = O(\varepsilon).$$

Бұл нәтиже физикалық тұрғыдан:

- $\varepsilon$  азайған сайын соққы фронтының «жіңішкедетінін»,
- ал  $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде секірмелі энтропиялық шешімге өтетінін көрсетеді.

*Жинақталу механизмі*

Жинақталуды дәлелдеу үш негізгі кезеңнен тұрады:

1. Аппроксимацияның шектелгендігі.  $L^\infty$  бағалар  $\varepsilon$ -ге тәуелсіз.
2. Компакттылық. Колмогоров – Рисс теоремалары арқылы  $L^1_{loc}$ -жинақталатын ішкі тізбек табылады.
3. Энтропиялық теңсіздікті шекте сақтау. Тұтқырлық мүшесі  $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде нөлге ұмтылады, ал энтропиялық теңсіздік сақталады.

Нәтижесінде шек функция гиперболалық теңдеудің энтропиялық шешімі болады.

*Қолданбалы сүзгілеу есебіне көшу*

Бірөлшемді су айдау режимінде су қанықтылығы үшін теңдеу:

$$\partial_t S_w + u \partial_x f_w(S_w) = 0.$$

Фракциялық ағыс функциясы:

$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w)}, \lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}.$$

Соққы фронтының жылдамдығы:

$$v_f = \frac{u(f_w(S_{shock}) - f_w(S_i))}{S_{shock} - S_i}.$$

Бұл формула Ранкин – Гюгонио шартының қолданбалы интерпретациясы болып табылады.

*Физикалық интерпретация*

Жойылатын тұтқырлық әдісі тек математикалық құрал ғана емес, оның нақты физикалық мағынасы бар:

- Тұтқырлық мүшесі соққыны тегістейді;
- Өтпелі қабат нақты физикалық диффузиялық әсерлерді бейнелейді;
- $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде идеализацияланған гиперболалық модельге өтеміз.

Бұл тәсілдің инженерлік модельдеудегі маңыздылығы:

- фронттың таралу жылдамдығын анықтау;
- су жарылу уақытын болжау;
- параметрлердің әсерін талдау.

*Сандық интерпретация*

Сандық схемалар жойылатын тұтқырлық принципіне сәйкес құрылған жағдайда:

- локальді жинақталу қамтамасыз етіледі;
- жасанды осцилляциялар жойылады;
- өткір фронттар дұрыс дамиды.

Соққы фронтының орны:

$$x_f(t) = v_f t.$$

Бұл формула сандық модельдеу нәтижелерімен сәйкес келеді.

*Теория мен қолданбаның синтезі*

Осы жұмыста көрсетілгендей:

1. Жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы энтропиялық шешім конструктивті түрде анықталды.

2. Жүгірмелі толқын талдауы арқылы соққы қабатының құрылымы сипатталды.

3. Энтропиялық шешімдердің  $L^1$ -орнықтылығы арқылы модельдің сенімділігі қамтамасыз етілді.

4. Алынған нәтижелер сүзгілеу процестерінің инженерлік есептерінде тікелей қолданылды.

Диссертацияның бірінші бөлімінде теориялық негізді қалыптастыруға арналған кеуекті ортадағы екіфазалық ағыстың математикалық модельдерінің негізгі ұғымдары мен классикалық нәтижелері қарастырылады.

Диссертацияның екінші бөлімінде Бакли – Леверетт теңдеуі үшін әлсіз және энтропиялық шешімдер теориясы жүйелі түрде баяндалады. Риман есебі арқылы соққы толқындарының пайда болу механизмі түсіндіріліп, жойылатын тұтқырлық әдісі энтропиялық шешімді таңдаудың табиғи математикалық құралы екені көрсетіледі.

# 1 КЕУЕКТІ ОРТАДА АРАЛАСПАЙТЫН ФЛЮИДТЕР АҒЫСЫН СҮЗГІЛЕУДІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІН ҚҰРУ

Бұл тарауда кеуекті ортадағы екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысын сипаттайтын математикалық модельдерге қатысты негізгі ұғымдар мен классикалық нәтижелер қарастырылады. Атап айтқанда, Бакли – Леверетт теңдеуінің шығару жолдары, әлсіз және энтропиялық шешімдер ұғымдары, сондай-ақ Риман есебінің негізгі қасиеттері баяндалады. Берілген материал жойылатын тұтқырлық әдісіне негізделген кейінгі зерттеулерді жүргізуге қажетті теориялық негізді қалыптастыруға арналған.

## 1.1 Сүзгілеу теориясының негізгі ұғымдары және дифференциалдық теңдеулері

Кеуекті орта деп өзара байланысқан кеуектер мен қатты матрицадан тұратын материалды айтады. Табиғи жағдайда кеуектер газдар мен әртүрлі сұйықтық қоспалары сияқты флюидтермен толтырылады. Табиғи кеуекті орталарға тау жыныстары, құм, құмтас, әктас және басқа да геологиялық материалдар жатады.

Сүзгілеу процесі флюидтердің белгілі бір факторлардың әсерінен кеуекті орталардың тармақтала байланысқан арналарының күрделі жүйесі арқылы қозғалуымен сипатталады. Сүзгілеу процестері күнделікті өмірде (*мыс., ауаны түтіннен тазарту, тұрмыстық сүзгілер арқылы лайлы суды тазарту*) және мемлекеттердің әлеуметтік-экономикалық дамуына әсер ететін ауқымды құбылыстарда (*жер асты қабаттарындағы мұнай мен газдың қозғалысын басқару, құнарлы топырақтағы ылғал режимін реттеу*) кеңінен қолданылады [61–62].

Сүзгілеу процесінің пайда болуына бірнеше факторлар әсер етеді, олардың қатарына қоршаған орта шекараларындағы қысым айырмалары, сыртқы массалық күштердің әрекеті, фазааралық шекаралардағы капиллярлық күштер, сондай-ақ кеуекті ортаның деформациясы жатады. Әдетте кеуек кеңістігінің ішкі беті күрделі әрі кездейсоқ құрылымға ие болғандықтан, флюид қозғалысын барлық егжей-тегжейімен сипаттау мүмкін емес. Дегенмен, кеуектердің ішкі геометриясын белгілі бір дәрежеде сипаттап, гидродинамика теңдеулеріне негізделген параметрлерді практикалық жолмен анықтауға болады, мысалы, жасанды түрде құрылған периодтық орталар үшін.

Көптеген қолданбалы есептерде сүзгілеу құбылыстарына тән сызықтық өлшемдер жеке кеуектердің өлшемдерінен әлдеқайда үлкен болады, сондықтан практикалық зерттеулерде ағыстың орташа сипаттамаларына басымдық беріледі. Осыған байланысты кеуекті материал тұтас орта ретінде қарастырылып, оның қасиеттері әрбір нүктеде кеуектердің жеткілікті үлкен санын қамтитын аймақ бойынша орташалау арқылы анықталады. Мұндай тәсіл молекулалық-кинетикалық теориядан континуальді сипаттамаға көшуге ұқсас, яғни құбылыстың сипаттамалық өлшемдері жеке микродеңгейлік элементтердің өлшемдерінен едәуір үлкен болған жағдайда қолданылады.

Айырмашылығы – сүзгілеу құбылыстарында микродеңгейдегі ағыстардың сипаттамасы үздіксіз механика шеңберінде де жүзеге асырылуы мүмкін.

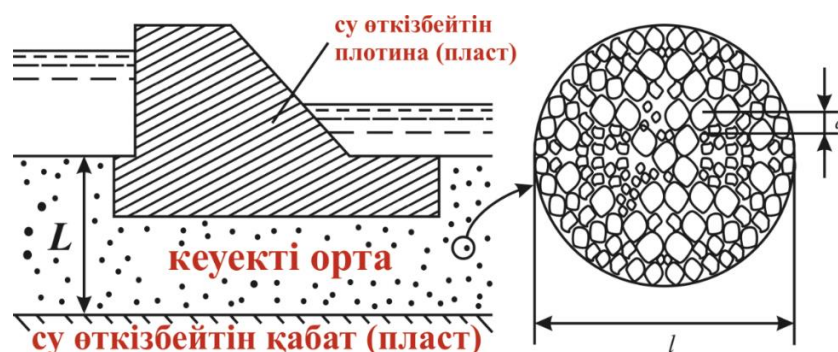
#### *Континуальді жуықтаудың қолданылу шектері*

Континуальді жуықтау кеуекті ортаның микроскопиялық құрылымын тікелей есепке алмай, оның әсерін макрокопиялық параметрлер арқылы сипаттауға негізделген. Мұндай тәсіл кеңістіктік масштабтар арасындағы айқын айырмашылық болған жағдайда орынды болып табылады, яғни сүзгілеу процесінің сипаттамалық өлшемдері жеке кеуектердің өлшемдерінен әлдеқайда үлкен болған кезде. Бұл жағдайда орта үздіксіз деп қарастырылып, флюид ағысы үшін орташа сипаттамалар енгізіледі.

Алайда континуальді жуықтаудың қолданылуы белгілі бір шектеулерге ие. Мысалы, өте ұсақ кеуекті құрылымдарда немесе қанықтылықтың күрт өзгертін аймақтарында микроскопиялық эффектілердің рөлі артуы мүмкін. Мұндай жағдайларда фазааралық кернеу, капиллярлық күштер және кеуек геометриясының локальді ерекшеліктері шешімнің мінез-құлқына айтарлықтай әсер етеді.

Соған қарамастан, мұнай-газ инженериясындағы көптеген практикалық есептерде континуальді модельдер жеткілікті дәлдік береді. Себебі қабат өлшемдері үлкен, ал өндірістік процестерде орташа сипаттамалар шешуші рөл атқарады. Осыған байланысты бұл диссертациялық жұмыста екіфазалық сүзгілеу процесі континуальді ортадағы ағыс ретінде қарастырылып, алынған нәтижелер қолданбалы есептерді сипаттауға бағытталған.

Мысалы, су өткізбейтін бетон бөгеттің астындағы кеуекті қабат арқылы судың сүзгіленуін қарастырайық (1.1-сурет). Бұл жағдайда кеуектердің сипаттық өлшемі  $d$  (миллиметрдің үлесі) кеуекті қабаттың сипаттық өлшемі  $L$ -ден (ондаған метр) әлдеқайда кіші болады. Осыған байланысты ағынды микродеңгейде, яғни жеке кеуек ішіндегі қозғалыс ретінде сипаттаудан макродеңгейде сипаттауға көшуге болады.



1.1-сурет – Бөгет астындағы кеуекті қабат арқылы сұйықтықтың ағысы [65]

Басқаша айтқанда, кеуектердегі сұйықтықтың орташа қысымы  $p$  (қабаттың белгілі бір нүктесінде және белгілі бір уақыт мезетінде) жеткілікті түрде шағын көлем ішіндегі кеуек кеңістігіндегі қысымды орташалау арқылы анықталады. Бұл көлемнің сипаттық өлшемі  $l$  бір жағынан  $L$ -ден әлдеқайда

кіші, ал екінші жағынан  $d$ -дан әлдеқайда үлкен болуы тиіс, яғни келесі қатынас орындалады:

$$d \ll l \ll L. \quad (1.1)$$

Осылайша қарастырылып отырған қысым кеңістік координаттары мен уақытқа тәуелді  $p = p(x, y, z, t)$  функциясы ретінде анықталады [63–64].

Кеукеті ортаның маңызды сипаттамаларының бірі – материалдағы кеукеті кеңістігінің салыстырмалы көлемдік үлесіне тең кеукетілік  $m$ . Кеукетілік кеукеті ортада белгілі бір көлемде болуы мүмкін флюид мөлшерін анықтайды. Егер көлемі  $V$  болатын біртекті кеукеті материал үлгісінің кеукеті көлемі  $V_K$  болса, онда бұл үлгінің кеукетілігі  $m = V_K/V$  қатынасы арқылы анықталады.

Кеукетілік  $0 < m < 1$  аралығында мән қабылдайтын өлшемсіз шама болып табылады. Мысалы, топырақтың кеукетілігі әдетте 0,3–0,7, өзен құмының кеукетілігі 0,3–0,55, ал тәжірибеде кездесетін мұнай-газ қабаттарының кеукетілігі 0,1–0,2 аралығында болатыны белгілі [66].

Кейбір кеукеті орталарда кеукетердің бір бөлігі біртұтас кеукеті кеңістігінің қалған бөлігінен оқшауланған немесе басқа ортамен толтырылған болуы мүмкін. Мысалы, топырақта ауаның сүзгіленуі кезінде кеукетердің бір бөлігін капиллярлық күштердің әсерінен кеукеті кеңістігінде сақталатын су алып жатады. Мұндай жағдайда бұл кеукетер бізді қызықтыратын флюидтің кеукеті ортада жиналуына және қозғалуына қатыспайды. Сондықтан мұндай орталар үшін толық кеукетілік орнына тиімді кеукетілікті пайдалану ыңғайлы.

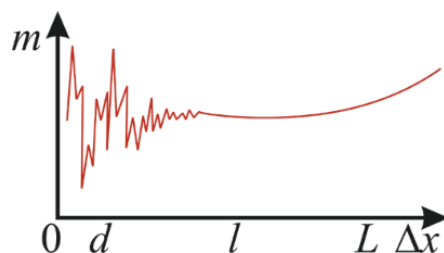
Толық және тиімді кеукетіліктің айырмашылығын иллюстрациялау үшін тығын ағашы немесе кеукеті шоколад мысал бола алады: бұл материалдардың толық кеукетілігі нөлден өзгеше болғанымен, тиімді кеукетілігі нөлге тең, яғни олар арқылы сұйықтық сүзілмейді.

Қасиеттері нүктеден нүктеге өзгеруі мүмкін гетерогенді кеукеті орталар үшін кеукетілік  $m$  кеңістіктік координаттардың функциясы болып табылады. Егер кеукеті орта деформацияланатын болса (*мыс., топырақтың тығыздалуы немесе сұйықтық қысымының өзгеруі нәтижесінде*), онда кеукетілік уақыт бойынша да өзгеруі мүмкін, яғни  $m = m(x, y, z, t)$  түрінде беріледі [65, 9 б.].

Континуальді сипаттау кезінде кеукетілік шамасы (*басқа да орташаланған параметрлер сияқты*) (1.1) қатынасын қанағаттандыратын, сипаттық өлшемі  $l$  болатын аймақ бойынша орташалау арқылы анықталады. Егер орташалау өлшемі  $\Delta x \sim d$  болатын тым шағын аймақ үшін жүргізілсе, онда  $m = V_K/V$  формуласы бойынша есептелген кеукетілік мәні  $\Delta x$ -тің өзгеруіне байланысты айтарлықтай ауытқуларға ұшырайды (*1.2-сурет*).

Кеукетерге тән  $d$  сипаттамалық өлшемі туралы жоғарыда айтылған тұжырымға байланысты келесі ескертуді келтірейік. Нақты кеукеті орталарда біртексіздіктің өлшемдері, әдетте, кездейсоқ сипатқа ие болады және көп жағдайда кеукетердің радиустар бойынша таралу тығыздығы бірнеше максимумға ие болуы мүмкін. Осыған байланысты сипаттамалық өлшемді енгізу бірімәнді болмауы ықтимал. Алайда мұндай шаманы енгізу теңдеулерді

талдау кезінде шамалардың реттік бағаларын жүргізу үшін ыңғайлы болып табылады.



1.2-сурет – Кішкентай аймақ бойынша жүргізілген орташалауда кеуектілік  $m$  мәнінің  $\Delta x$ -тің ұлғаюымен ауытқуы [65, 10 б.]

Сипаттамалық өлшем ретінде, мысалы, кеуекті үлгі көлемінің кеуек кеңістігінің беткі ауданына қатынасына пропорционал шаманы немесе кеуектердің радиустар бойынша таралу тығыздығы графигіндегі белгілі бір нүктеге (*медианаға немесе максимум нүктесіне*) сәйкес келетін өлшемді алуға болады.

Кеуекті орта үлгісінің көлденең қимасында ауданның бір бөлігі кеуектерге ( $S_K$ ), ал қалған бөлігі кеуекті ортаның қатты бөлігіне ( $S - S_K$ ) сәйкес келеді. Қимадағы кеуек ауданының жалпы қима ауданына қатынасы қималық жарықтылық немесе беттік кеуектілік деп аталып,

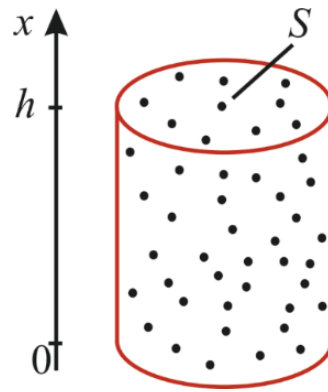
$$n = \frac{S_K}{S}$$

түрінде анықталады.

Жарықтылық шамасы қиманың қай нүкте арқылы және қандай бағытта жүргізілгеніне тәуелді болады. Белгілі бір үлгінің параллель қималарының жеткілікті үлкен жиынтығы үшін жарықтылықтың орташа мәні осы үлгінің кеуектілігіне тең болады. Ауданы  $S$  және биіктігі  $h$  болатын кеуекті ортаның цилиндрлік үлгісін қарастырып (1.3-сурет), оның көлденең қималарындағы  $n(x)$  жарықтылық мәндерін биіктік бойымен орташалайық:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h n(x) dx = \frac{1}{Sh} \int_0^h Sn(x) dx = \frac{1}{Sh} \int_0^h S_k(x) dx = \frac{V_K}{V} = m.$$

Осылайша, алынған қатынас кеуектілік пен қималық жарықтылықтың арасындағы байланысты көрсетеді. Бұл дәлелденген қасиет нақты кеуекті орталар үшін, әсіресе құрылымы кездейсоқ болған жағдайда, кеуектілік пен жарықтылық шамаларын бір-біріне жуық, яғни  $m \approx n$  деп қарастыруға мүмкіндік береді.



1.3-сурет – Ауданы  $S$  және биіктігі  $h$  болатын цилиндрлік кеуекті ортаның үлгісі [65, 11 б.]

Күнделікті өмірден алынған қарапайым мысал арқылы қолданылатын әдістің идеясын былайша сипаттауға болады. Мәселен, ірімшік бөлігінің кеуектілігін бағалау үшін оны жұқа тілімдерге кесіп, әрбір тілімдегі тесіктерге сәйкес келетін ауданның үлесін анықтауға болады. Осылайша алынған шамалардың орташа мәні ірімшік үлгісінің кеуектілігін сипаттайды.

Алайда жоғарыда қарастырылған геометриялық параметрлер жалпы жағдайда флюидтің кеуекті орта арқылы өту қабілетін толық сипаттай алмайды. Шынында да, кеуекті кеңістікті бірнеше жерден бекіту арқылы бастапқыда флюид өткізетін ортаны өткізбейтін ортаға айналдыруға болады. Бұл жағдайда орташа геометриялық сипаттамалар іс жүзінде өзгермегенімен, ортаның флюидті өткізу қабілеті, яғни өтімділігі, айтарлықтай өзгереді.

Флюидті сүзгілеу кезінде масса тасымалын сипаттау үшін жылдамдықтың векторлық шамасы енгізіледі. Кеуекті материалмен толтырылған жіңішке, түзу түтік бойымен флюид қозғалысын қарастырайық. Мұндай ағыс үшін сүзгілеу жылдамдығы флюид қозғалысының бағытымен бағытталған  $u$  вектормен анықталады. Оның шамасы түтіктің толық көлденең қимасының бірлік ауданына келетін көлемдік ағынға тең.

Айта кету керек, сүзгілеу жылдамдығы жылдамдық өлшеміне ие болғанымен, ол флюидтің жеке бөлшектерінің нақты қозғалу жылдамдығына тең емес. Егер  $S$  – түтіктің көлденең қимасының толық ауданы, ал  $S_K$  – осы қимадағы кеуектерге сәйкес келетін бөлігі болса, онда біртекті сығылмайтын флюид үшін көлемдік ағын

$$Q = |u|S = vS_K = \text{const}$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы  $Q$  – түтік арқылы өтетін флюидтің көлемдік ағыны,  $v$  – кеуектер алып жатқан қима ауданы бойынша есептелген флюид бөлшектерінің жылдамдығының түтік осіне проекциясының орташа мәні.

Осыдан

$$v = \frac{|u|S}{S_K} = \frac{|u|}{n} \approx \frac{|u|}{m}$$

қатынасы шығады. Демек, сұйықтық бөлшектерінің орташа жылдамдығы  $v$  сүзгілеу жылдамдығынан шамамен  $1/m$  есе үлкен болады. Мысалы, кеуектілігі  $m = 0,3$  болатын өзен құмы үшін флюидтің кеуектер ішіндегі орташа қозғалу жылдамдығы сүзгілеу жылдамдығынан шамамен үш есе артық.

Кеуекті ортадағы флюидтің біркелкі емес қозғалысын сипаттау үшін жалпы жағдайда сүзгілеу жылдамдығы  $u$  векторы енгізіледі. Бұл вектордың берілген бағытқа проекциясы сол бағытқа перпендикуляр бірлік аудан арқылы өтетін флюидтің көлемдік ағынына тең болады. Осы анықтаманың негізінде кеуекті орта ішінде жүргізілген кез келген  $\Sigma$  беті арқылы өтетін жалпы көлемдік ағын  $Q$  және массалық ағын  $Q_M$  келесі түрде өрнектеледі:

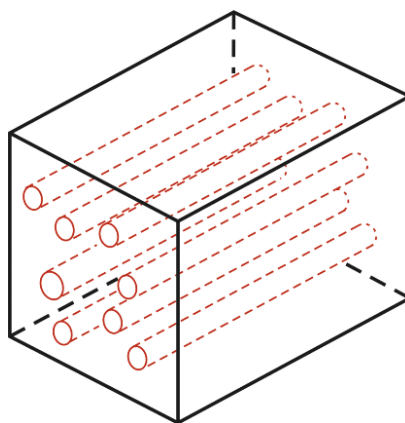
$$Q = \int_{\Sigma} u \cdot n d\sigma, \quad Q_M = \int_{\Sigma} \rho u \cdot n d\sigma, \quad (1.2)$$

мұндағы  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  – флюидтің тығыздығы,  $n$  –  $\Sigma$  бетіне жүргізілген сыртқы нормаль бірлік векторы.

Практикалық зерттеулерде сүзгілеу жылдамдығын қолданудың негізгі артықшылығы – оның көмегімен (1.2) формулада кеуектілік туралы қосымша ақпаратты пайдаланбай-ақ флюидтің көлемдік шығынын анықтауға болатындығында. Бұл қасиет сүзгілеу жылдамдығын инженерлік есептерде қолдануға ыңғайлы етеді.

Гидрология мен мұнай өндіру практикасында сүзгілеу жылдамдығының мәні, әдетте, өте аз болады, алайда кейбір табиғи процестерде оның салыстырмалы түрде үлкен мәндері де кездесуі мүмкін. Нақты кеуекті орталардың кеуек кеңістігі кездейсоқ құрылымға ие болғанына қарамастан, олардың сүзгілеу қасиеттерінің орташа геометриялық параметрлерге сапалық тәуелділіктерін қарапайым геометриялық модельдер негізінде сипаттауға болады. Мұндай модельдер өздерінің қарапайымдылығының арқасында жүріп жатқан процестердің физикалық мәнін айқындауға мүмкіндік береді.

Аналитикалық немесе сандық түрде шешімін алуға болатын осындай модельдерге келесі мысалдарды келтіруге болады: радиустары белгілі бір заңдылық бойынша таралған параллель цилиндрлік капиллярлардан тұратын кеуекті орта (1.4-сурет); көлденең бағытта айналатын параллель цилиндрлер шоғыры; периодты түрде орналасқан бірдей бөлшектерден құралған орта; цилиндрлік капиллярлардың тармақталған желісі және т.б.



1.4-сурет – Радиустары белгілі бір заңдылықпен таралған параллель цилиндрлік капиллярлардан тұратын кеуекті орта үлгісі [65, 13 б.]

Жоғарыда енгізілген кеңістік координаттары мен уақытқа тәуелді  $p(x^i, t), \rho(x^i, t), m(x^i, t), u(x^i, t)$  функциялары алдын ала белгісіз болып табылады және олар сақталу заңдарына, сондай-ақ зерттеліп отырған нақты құбылыстарды сипаттайтын қосымша физикалық заңдылықтарға негізделген теңдеулер жүйесі арқылы анықталуы тиіс. Қарапайым жағдайларда дифференциалдық теңдеулердің тұйық жүйесін алу үшін сақталудың екі заңы – масса мен импульс балансының теңдеулерін қолдану жеткілікті болады. Кейбір есептерде қосымша параметрлерді енгізу қажеттілігі туындауы мүмкін.

Сұйықтық массасының сақталу заңының интегралдық тұжырымдамасы кеуекті орта ішіндегі еркін көлемде  $V$  орналасқан сұйықтық массасының өзгеруі осы көлемді шектейтін  $\Sigma$  беті арқылы өтетін ағынмен ғана жүзеге асатынына негізделеді.

Осыған сәйкес,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho m dV = - \int_{\Sigma} \rho u \cdot n d\sigma.$$

Нормальдың осы таңдалуына байланысты теңдеудің оң жағындағы интеграл минус таңбасымен жазылады, ал  $V$  көлемі кеуекті ортаға қатысты қозғалмайды.

Егер осы теңдеуге кіретін функциялар жеткілікті түрде тегіс болса, онда сол жақтағы уақыт бойынша туындыны интеграл белгісінің астына енгізуге, ал оң жақтағы беттік интегралды Гаусс – Остроградский теоремасының көмегімен көлемдік интегралға түрлендіруге болады:

$$\int_V \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div}(\rho u) dV.$$

$V$  көлемінің еріктілігін ескере отырып, массаның сақталу заңының дифференциалдық түрі – үздіксіздік теңдеуі алынады:

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \quad (1.3)$$

Егер  $\rho = \text{const}$  және кеуекті орта деформацияланбайтын болса (яғни, кеуектілік тек кеңістік координаттарына тәуелді), онда бірінші қосылғыш нөлге тең болып, үздіксіздік теңдеуі келесі түрге келеді [65, 14 б.]:

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (1.4)$$

Тарихи тұрғыдан алғанда, қозғалмайтын изотропты кеуекті ортада сығылмайтын флюидтің баяу стационарлы қозғалысын сипаттайтын импульс теңдеуі 1856 жылы француз гидравлигі Анри Дарси жүргізген эксперименттік зерттеулер нәтижесінде алынған.

Ауырлық өрісін ескерген жағдайда сүзгілеу процесі үшін Дарси заңы заманауи белгілеулерде келесі түрде жазылады:

$$0 = -\operatorname{grad} p + \rho g - \frac{\mu}{k} u, \quad (1.5)$$

мұндағы  $g$  – еркін түсу үдеуі,  $\mu$  – флюидтің динамикалық тұтқырлығы,  $k$  – кеуекті ортаның құрылымына тәуелді өтімділік коэффициенті.

$\mu = \text{const}$  болған жағдайда (1.5) теңдеуі құрылымдық тұрғыдан тұтқыр, сығылмайтын сұйықтық үшін жазылатын Навье – Стокс теңдеуіне ұқсас келеді:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho g + \mu \Delta v. \quad (1.6)$$

Бұл ұқсастық кездейсоқ емес. Шынында да, кеуекті ортадағы сүзгілеу кезіндегі қозғалыстың макроскопиялық заңы – Дарси заңы – флюидтің кеуектер ішіндегі микро-деңгейдегі қозғалысын сипаттайтын Навье – Стокс теңдеуін белгілі бір орташалау (*гомогенизация*) процедуралары арқылы алу нәтижесінде туындайды.

Рейнольдс саны  $Re$  енгізілген жағдайда Навье – Стокс теңдеуін келесі түрде қайта жазуға болады:

$$\frac{1}{Re} \left( \rho \frac{dv}{dt} - \mu \Delta v \right) = -\operatorname{grad} p + \rho g. \quad (1.6 *)$$

(1.6\*) теңдеуінде

$$u = \frac{1}{Re} \left( \rho \frac{dv}{dt} - \mu \Delta v \right)$$

ауыстыруын енгізу арқылы сүзгілеу жылдамдығы үшін

$$u = -\text{grad}p + \rho g$$

түріндегі өрнек алынады, бұл Дарси заңының құрылымына сәйкес келеді.

Дарси заңы орындалатын баяу ағыстарда инерциялық күштер тұтқыр күштермен салыстырғанда елеусіз аз болғандықтан, (1.6) теңдеуіндегі үдеу мүшесін елемеуге болады. Орташалау процедурасын қолдану нәтижесінде бұл теңдеудің сол жағы нөлге теңеседі де, соның салдарынан (1.5) теңдеуі алынады.

Тұтқырлықтың әсерін сипаттайтын (1.6) теңдеуіндегі соңғы қосылғыш макроскопиялық сипаттамаға көшкен кезде кеуекті скелет тарапынан сұйықтыққа әсер ететін тұтқыр кедергінің көлемдік күшінің пайда болуына әкеледі. Қарастырылып отырған изотропты ортадағы баяу ағыстар үшін, яғни Рейнольдс саны  $Re = \rho v d / \mu \ll 1$  болған жағдайда, бұл қарсылық күші сүзгілеу жылдамдығына қарама-қарсы бағытталады және оның шамасы тұтқырлыққа әрі сүзгілеу жылдамдығының модуліне тура пропорционал болады [67].

Ауырлық өрісі болмаған жағдайда ( $g = 0$ ) Дарси заңы келесі түрге келеді:

$$u = -\frac{k}{\mu} \text{grad}p. \quad (1.7)$$

#### *Дарси заңының қолданылу аймағы және шектеулері*

Дарси заңы кеуекті ортадағы флюид қозғалысын сипаттайтын негізгі эмпирикалық заңдардың бірі болып табылады. Ол флюидтің жылдамдығы қысым градиентіне сызықтық тәуелді болады деген болжамға негізделеді және ламинар ағыс режимінде орынды деп есептеледі. Мұндай жағдайда инерциялық әсерлер еленбейді, ал флюид қозғалысы тұтқырлық күштерімен анықталады.

Дарси заңының қолданылуы Рейнольдс санының кіші мәндерінде, яғни ағыс баяу және орнықты болған кезде дұрыс нәтиже береді. Ал жоғары жылдамдықтарда немесе турбулентті режимдерде бұл заңның дәлдігі төмендейді, сондықтан қосымша түзетулер немесе кеңейтілген модельдер қажет болады.

Осы диссертациялық жұмыста қарастырылатын сүзгілеу процестері мұнай-газ қабаттарына тән баяу ағыстармен байланысты болғандықтан, Дарси заңын қолдану орынды деп қабылданады. Бұл жорамал модельдің математикалық күрделілігін арттырмай, негізгі физикалық заңдылықтарды дұрыс сипаттауға мүмкіндік береді.

(1.7) теңдеуінің оң жағындағы теріс таңбаның айқын физикалық мағынасы бар: массалық күштер әсер етпеген жағдайда флюид кеуекті ортада қысымы жоғары аймақтардан қысымы төмен аймақтарға қарай қозғалады.

Егер флюид кеуекті ортада тыныштық күйде болса ( $u = 0$ ), онда Дарси заңы флюидтің қарапайым тепе-теңдік теңдеуіне айналады:  $0 = -\text{grad}p + \rho g$ .

Өтімділік коэффициенті  $k$  тек кеуекті ортаның қасиеттеріне тәуелді және негізінен кеуек кеңістігінің геометриялық құрылымымен анықталады. Бұл коэффициент аудан өлшеміне ие және сипаттамалық кеуек өлшемі  $d$  болатын

жағдайда шамамен  $d^2$  ретімен бағаланады. Мысалы, құмтастар үшін өтімділіктің типтік мәндері  $10^{-15} - 10^{-12} \text{ м}^2$ , ал топырақтар үшін  $10^{-13} - 10^{-11} \text{ м}^2$  аралығында жатады.

[68–69] еңбектерде өтімділіктің кеуекті ортаның геометриялық сипаттамаларына тәуелділігін сипаттау үшін кеуекшілік кеңістіктің әртүрлі қарапайым модельдеріне негізделген бірқатар жуық формулалар ұсынылған. Осындай кеңінен қолданылатын тәуелділіктердің бірі – Козени – Карман формуласы, ол өтімділікті кеуек өлшемі мен кеуектілік арқылы бағалауға мүмкіндік береді. Атап айтқанда, өтімділік шамамен  $k \sim d^2 m^3 / (1 - m)^2$  түрінде өрнектеледі, ал кеуектің сипаттамалық өлшемі  $d$  үлгі көлемінің кеуек бетінің жалпы ауданына қатынасы ретінде анықталады.

Ал диаметрі  $D$  бірдей сфералық бөлшектерден құралған ортаның тығыз оралған жағдайы үшін өтімділіктің келесі жуықталған формуласы қолданылады:

$$k = 2 \cdot 10^{-3} D^2.$$

Практикалық қосымшаларда өтімділік коэффициентінің  $k$  өлшем бірлігі ретінде көбіне дарси қолданылады. Бір дарси деп, ауырлық күші ескерілмеген жағдайда, тұтқырлығы  $0,01 \text{ г}/(\text{см} \cdot \text{с})$  болатын флюид үшін қысым градиенті  $1 \text{ атм}/\text{см}$  кезінде сүзгілеу жылдамдығы  $1 \text{ см}/\text{с}$ -қа тең болатын өтімділік мәні алынады. Сандық тұрғыдан  $1 \text{ Д} \approx 1,02 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \approx 1 \text{ мкм}^2$ .

Біртексіз кеуекті орталар үшін өтімділік коэффициенті кеңістіктік координаталарға тәуелді функция болып табылады және уақыт бойынша да өзгеруі мүмкін. Мұндай өзгерістер кеуекті қаңқаның деформациясымен, оның бітелуімен немесе еру процестерімен байланысты болады.

Гидротехникалық тәжірибеде Дарси заңы көбіне сүзгілеу жылдамдығына қатысты шешілген теңдеу түрінде қолданылады. Бұл жағдайда қысымның орнына пьезометриялық қысым (*немесе гидравликалық напор*) енгізіледі, ол келесі түрде анықталады:

$$H = H(x, y, z, t) = \frac{p}{\rho g} + z,$$

мұндағы  $z$  – қарастырылып отырған нүктенің тік координаты,  $Oz$  осі еркін түсу үдеуіне қарама-қарсы бағытта, яғни жоғары бағытталған деп алынады.

Пьезометриялық қысымды пайдалану сүзгілеу процестерін сипаттауды жеңілдетеді, себебі ол қысымдық және потенциалдық энергияларды бір шамада біріктіріп, ағыс бағытын тікелей анықтауға мүмкіндік береді.

Пьезометриялық қысым ұзындық өлшеміне ие шама болып табылады және қабатқа бұрғыланған өлшеу ұңғымасындағы сұйықтықтың бос бетінің тік координатасымен тұрақты қосылғышқа дейінгі дәлдікпен сәйкес келеді. Дәл осы қасиет оның инженерлік есептерде кеңінен қолданылуын қамтамасыз етеді.

(1.5) теңдеуден сүзгілеу жылдамдығын өрнектей отырып, Дарси заңы

келесі түрде жазылады:

$$u = -C \text{grad} H, C = \frac{k \rho g}{\mu}, \quad (1.8)$$

мұндағы  $C$  – сүзгілеу коэффициенті, ол кеуекті ортаның және флюидтің физикалық қасиеттеріне тәуелді.

Сүзгілеу коэффициентінің типтік мәндері келесідей: құмда суды сүзгілеу кезінде  $10^{-5}$ – $10^{-2}$  м/с, топырақта  $10^{-6}$ – $10^{-4}$  м/с, ал сазды ортада  $10^{-7}$ – $10^{-6}$  м/с.

Анизотропты кеуекті ортада сүзгілеу кезінде (*мыс., қатпарлы шөгінді қабаттарда немесе жарықшақтары бар орталарда*) баяу ағыстар үшін сүзгілеу жылдамдығы мен қысым градиенті арасындағы сызықтық тәуелділік сақталады. Алайда бұл жағдайда аталған векторлар, жалпы алғанда, бір-біріне параллель болмайды.

Мұндай орталарда өтімділік бір скаляр шамамен емес, Дарси заңына кіретін симметриялы, оң-анықталған өтімділік тензорымен сипатталады:  $K = k_{ij}$ , және Дарси заңы компоненттер түрінде келесі түрде жазылады:

$$u_i = -\frac{1}{\mu} k_{ij} \left( \frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho g_j \right),$$

мұндағы  $u_i$  – сүзгілеу жылдамдығының компоненттері,  $k_{ij}$  – өтімділік тензорының компоненттері,  $g_j$  – ауырлық үдеуінің компоненттері.

Индекстер бойынша қосындылау Эйнштейн ережесіне сәйкес жүргізіледі.

Қабаттасу жазықтығына перпендикуляр бағытты сипаттайтын бірлік вектор  $n$  арқылы берілетін қабатты кеуекті орта үшін декарттық координаталар жүйесінде өтімділік тензоры келесі түрде жазылады:

$$k_{ij} = (k_{\perp} - k_{\parallel}) n_i n_j + k_{\parallel} \delta_{ij},$$

мұндағы  $k_{\perp}$  және  $k_{\parallel}$  – сәйкесінше қабаттарға көлденең және қабат бойымен сүзгілеу кезіндегі өтімділік коэффициенттері,  $n_i$  – бірлік вектордың компоненттері,  $\delta_{ij}$  – Кронекер символы [70].

Квазисызықты теңдеулердің жалпыланған шешімдері теориясының негізгі мәселесі келесі түрдегі теңдеумен

$$u_t + \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \varphi_i(t, x, u) + \psi(t, x, u) = 0, \quad (1.9)$$

және

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad (1.10)$$

бастапқы шартымен берілген Коши есебі үшін шешімдердің бар болуы мен жалғыздығын сипаттау болып табылады.

Мұндағы

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_i(t, x, u) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} u_{x_i}, x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n.$$

Бұл есептің негізгі мәні – шешімнің уақыт бойынша бар болу қасиеттерін және оның жалғыздығын зерттеу. Осы мәселеге байланысты бастапқы функция  $u_0(x)$  мен (1.9) теңдеу құрылымының әртүрлі жағдайларында көптеген зерттеулер жүргізілген. Квазисызықты теңдеулердің жалпыланған шешімдері теориясы бойынша алғашқы іргелі жұмыстардың бірі [71] жарық көргеннен бері бұл бағытта елеулі нәтижелер алынған.

Мұндай теңдеулерді зерттеудің негізгі әдістерінің бірі – жойылатын тұтқырлық әдісі, ол келесі параболалық теңдеуге көшу идеясын қолдануға негізделген:

$$u_t + \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \varphi_i(t, x, u) + \psi(t, x, u) = \varepsilon \Delta u, \varepsilon > 0, \quad (1.11)$$

мұндағы  $\Delta$  – кеңістіктік айнымалылар бойынша Лаплас операторы.

Бұл әдіс терең физикалық мағынаға ие және (1.9)–(1.10) Коши есебі үшін жалпыланған шешімнің бар болуын дәлелдеумен қатар, жалғыздықты қамтамасыз ететін қосымша шарттарды анықтауға мүмкіндік береді. Мұндай шарттардың қажеттілігі мен олардың физикалық интерпретациясы локальді емес теория аясында [72–73] жұмыстарда жан-жақты талданған.

Толық зерттелген  $n = 1$  жағдайында, яғни (1.9) теңдеудегі  $\varphi_1(t, x, u)$  функциясы  $u$  бойынша дөңес болғанда, кез келген шектеулі өлшенетін бастапқы функция үшін жалпыланған шешімдердің теориясы құрылған [72–75].

Жинақтылық жылдамдығын бағалау арқылы жалпыланған шешімдерді тұрғызудың әртүрлі әдістері [76] еңбекте негізделген.

Ал  $\varphi_1(t, x, u)$  функциясы  $u$  бойынша дөңес емес жағдайына қатысты нәтижелер [77–80] жұмыстарда алынған.

Квазисызықты теңдеулер теориясындағы маңызды функционалдық класс – шектеулі вариациясы бар функциялар класы  $BV(E_n)$  болып табылады.  $\omega(x)$  функциясының  $BV(E_n)$  класына жатуының қажетті және жеткілікті шарттарының бірі – кез келген компактiлі  $\Omega \subset E_n$  және кез келген  $\Delta x \in E_n$  үшін

$$\int_{\Omega} |\omega(x + \Delta x) - \omega(x)| dx \leq C |\Delta x| \quad (1.12)$$

теңсіздігінің орындалуы, мұндағы  $C - \Delta x$ -ке тәуелсіз тұрақты.  
[81] еңбекте

$$u_t + (\varphi_i(u))_{x_i} = 0 \quad (1.13)$$

теңдеуі үшін  $u_0(x) \in BV(E_n)$  болған жағдайда Коши есебінің  $u(t, x) \in BV(E_{n+1})$  жалпыланған шешімінің бар болуы дәлелденген. Сонымен қатар,  $t = \text{const}$  қималарында шешімнің  $BV(E_n)$  класына тиесілі болуы көрсетілген, яғни бұл класс инварианттық қасиетке ие.

Аталған нәтижелер жалпыланған шешімдердің жалғыздығын дәлелдеуде локальді емес тәсілдердің және  $BV$  функционалдық кластар теориясының маңызды рөл атқаратынын көрсетеді [82].

Осы бөлімде дәл осы идеяларға сүйене отырып, шектеулі өлшенетін бастапқы функциялар класында (1.9)–(1.10) Коши есебінің жалпыланған шешімдерінің локальді емес теориясын құруға негіз қаланады.

## 1.2 Араласпайтын екіфазалық флюидтер ағысының сүзгілеу теңдеуі үшін Коши есебі

Кеуекті ортадағы араласпайтын екіфазалық флюидтер ағысын сипаттайтын негізгі модельдердің бірі – Бакли – Леверетт теңдеуі болып табылады. Бұл модель мұнай мен судың (немесе басқа да екі араласпайтын флюидтің) кеуекті орта арқылы сүзгілену процесін бірөлшемді жағдайда сипаттауға арналған және сақталу заңдарына негізделген [83–85].

Бакли – Леверетт теңдеуі келесі түрдегі скалярлық сақталу заңы ретінде жазылады:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(S) = 0, (t, x) \in (0, T) \times R, \quad (1.14)$$

мұндағы  $S(t, x)$  – флюидтің қанығу функциясы,  $f(S)$  – үзіліссіз дифференциалданатын, өтімділіктер мен флюидтердің тұтқырлықтары арқылы төмендегідей анықталатын ағын функциясы:

$$f(S) = \frac{\frac{k_{rw}(S)}{\mu_w}}{\frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(1-S)}{\mu_o}}$$

Есепке келесі бастапқы шарт беріледі:

$$S(0, x) = S_0(x), x \in R, \quad (1.15)$$

мұндағы  $S_0(x) \in L^\infty(R) \cap L^1(R)$  – шектелген бастапқы қанығу функциясы.

Бакли – Леверетт теңдеуі гиперболалық типтегі теңдеу болғандықтан, оның классикалық шешімі жалпы жағдайда үзілістердің (*секірістердің*) пайда болуына әкеледі. Осы себепті есептің физикалық тұрғыдан мағыналы шешімін анықтау үшін жалпыланған, яғни энтропиялық шешім ұғымы енгізіледі.

Айталық,  $\pi_T = [0, T] \times R$  – уақыт-кеңістік жолағы.  $S(t, x)$  функциясы  $\pi_T$  облысында  $|S(t, x)| \leq M_0$  барлық жерде дерлік шектелгендік шартын қанағаттандыратын болсын.

**1.1-анықтама.** Келесі шарттар орындалса:

- кез келген тұрақты  $k \in R$  және кез келген тегіс, шектеулі тірегі бар  $\varphi(t, x) \in C_c^\infty((0, T) \times R)$  тест функциясы үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\iint_{\pi_T} \left( |S(t, x) - k| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{sign}(S(t, x) - k) [f(S(t, x)) - f(k)] \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt \geq 0 \quad (1.16)$$

- $G \subset [0, T]$  өлшемі нөлге тең жиын бар болсын, мұнда  $t \in [0, T] \setminus G$  кезінде  $S(t, \cdot) \in L^1_{loc}(R)$ , және кез келген  $K_r = \{x \in R: |x| \leq r\}$  шары үшін:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+, t \notin G} \int_{K_r} |S(t, x) - S_0(x)| dx = 0, \quad (1.17)$$

онда  $S(t, x) \in L^\infty(\pi_T)$  функциясы (1.14)–(1.15) есебінің энтропиялық шешімі деп аталады.

Егер шешім  $S(t, x)$  – бөлік-тегіс, яғни кейбір аймақтарда үзіліс болса, онда сол үзіліс бойында шешімнің энтропиялық немесе физикалық жағынан ағыстық құбылысты қамтамасыз ететін шарт қажет.

Егер  $S(t, x)$  – Бакли – Леверетт теңдеуі үшін шешім және  $(t, x)$  нүктесінде секіріс бар болсын.  $S^-$  және  $S^+$  секіріс нүктесінің сол және оң жағындағы шектер деп алайық.

Онда кез келген тұрақты  $k \in [0, 1]$  үшін келесі энтропиялық секіріс шарты орындалуы қажет:

$$\begin{aligned} & |S^+ - k| + \text{sign}(S^+ - k) [f(S^+) - f(k)] \leq \\ & |S^- - k| + \text{sign}(S^- - k) [f(S^-) - f(k)]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Сонымен, (1.14)–(1.15) есебінің шешімі (1.16)–(1.18) шарттармен анықталатын болды.

Жоғарыда келтірілген секіріс бойындағы энтропиялық теңсіздік (*Кружков шарты*) шешімнің физикалық тұрғыдан жүзеге асуын сипаттайтын маңызды талаптардың бірі болып табылады. Бұл шарттың мәні – шешімде пайда болған секірістің немесе үзілістің табиғи, яғни физикалық құбылыспен келісімді екендігін қамтамасыз етуінде.

Атап айтқанда, бұл шарт – сұйықтықтың немесе газ қоспасының қозғалысын сипаттайтын ағын теңдеулерінде соққы толқындардың (*shock waves*) немесе жетекші фронттардың (*leading fronts*) пайда болуын нақтылайтын құрал болып саналады. Егер қанығу функциясының мәні  $S(t, x)$  секіріс бойында сол жағында (*яғни, енгізу жағында*) жоғары, ал оң жағында (*шығу жағында*) төмен болса, онда бұл физикалық тұрғыдан шок толқынның туындауына себеп болады. Мұндай жағдайда шешімде пайда болатын секіріс – физикалық шынайы секіріс ретінде қабылданады.

Осылайша, Кружков теңсіздігі – физика заңдарына сай энергия мен масса сақталуын, сондай-ақ жүйенің энтропиялық даму бағытын сақтайтын шешімдерді іріктеуге мүмкіндік береді. Сонымен қатар, Риман есебінде де дәл осы шарттар секірістің рұқсат етілуін анықтайтын негізгі критерий ретінде қолданылады.

Сондықтан, секіріс бойында Кружковтың энтропиялық шарты орындалмаған жағдайда, мұндай шешім физикалық жүйеге сәйкес келмейді деп есептеліп, қабылданбайды.

Бакли – Леверетт теңдеуінің жалпыланған шешімінің бар және жалғыздығын дәлелдеуде қолданылатын бірқатар көмекші белгілер мен анықтамаларды енгіземіз.

Бөлік үзілісті, дифференциалданатын функцияны Дирактың  $\delta$ -функциясы арқылы өрнектеуге болады. Төменде  $\delta(\sigma)$  арқылы  $R = (-\infty, +\infty)$  аралығында анықталған, келесі қасиеттері бар шексіз дифференциалданатын функцияны белгілейміз:

$$\delta(\sigma) > 0, \delta(\sigma) \equiv 0 \text{ егер } |\sigma| \geq 1, \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\sigma) d\sigma = 1.$$

Кез келген  $h > 0$  үшін келесідей анықтаймыз:

$$\delta_h(\sigma) = \frac{\delta(\sigma/h)}{h}. \quad (1.19)$$

Бұл функция келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$\delta_h(\sigma) \in C^\infty(R), \delta_h(\sigma) \geq 0, \delta_h(\sigma) \equiv 0, \text{ егер } |\sigma| \geq h,$$

$$|\delta_h(\sigma)| \leq \frac{\text{const}}{h}, \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(\sigma) d\sigma = 1. \quad (1.20)$$

Осылайша,  $\{\delta_h(\sigma)\}$  функциялар жиыны  $h \rightarrow 0$  кезінде  $\sigma = 0$  нүктесінде шоғырланған Дирак дельта-функциясының жуықтаушы тізбегі болып табылады.

Енді  $v(x)$  – нақты сандар  $E_1 = R$  жиынында анықталған және локальды интегралданатын функция болсын. Егер  $v(x)$  тек кейбір шектелген облыста  $\Omega \subset E_1$  анықталған болса, онда ол  $E_1 \setminus \Omega$ -да нөлмен жалғасады деп есептейміз. Сонда  $v^h(x)$  арқылы орташаланған функцияны келесі формуламен анықтаймыз:

$$v^h(x) \equiv \int_R \frac{1}{h} \delta\left(\frac{x-y}{h}\right) v(y) dy, \quad h > 0. \quad (1.21)$$

$x_0$  нүктесі  $v(x)$  функцияның Лебег нүктесі деп аталады, егер

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} |v(x) - v(x_0)| dx = 0$$

Кез келген  $x_0$  Лебег нүктесінде  $v(x)$  функция үшін келесі шек орындалады:

$$\lim_{h \rightarrow 0} v^h(x_0) = v(x_0).$$

$v(x)$  функцияның Лебег нүктесі болып табылмайтын нүктелер жиыны нөлдік өлшемге ие екені белгілі [86, 396б.), сондықтан  $h \rightarrow 0$  кезінде  $v^h(x) \rightarrow v(x)$  барлық жерде дерлік орындалады.

Бұдан әрі  $\omega(\sigma)$  арқылы үзіліссіздік модулі типті функцияларды белгілейміз. Бұл функциялар  $\sigma \geq 0$  кезінде анықталған және үзіліссіз, өспелі және  $\sigma = 0$  кезінде нөлге тең болады.

**1.1-лемма.** *Айталық,  $v(x) \in L^1_{loc}(R)$  функциясы  $K_{r+2\rho} = \{|x| \leq r + 2\rho\}$  аралығында қосындыланатын болсын, сондай-ақ  $r > 0, \rho > 0, |\Delta x| \leq \rho$  және  $s \in [0, r + \rho]$  жағдайында*

$$J_s(v, \Delta x) \equiv \int_{K_s} |v(x + \Delta x) - v(x)| dx \leq \omega_s(|\Delta x|) \quad (1.22)$$

болсын. Онда  $h \leq \rho$  теңсіздігі орындалғанда

$$J_r(v^h, \Delta x) \leq \omega_{r+h}(|\Delta x|), \quad (1.23)$$

$$\int_{K_r} \left| |v| - v(x) (\text{sign } v)^h(x) \right| dx \leq 2\omega_r(h) \quad (1.24)$$

шарттары орынды.

Мұндағы  $\omega_s - K_s$  жиынындағы үзіліссіздік модулі функциясы.

**Дәлелдеуі.** Мұндағы (1.23) теңсіздігін дәлеудеу үшін (1.21) өрнегін ескере отырып, келесіні аламыз:

$$J_r(v^h, \Delta x) = \int_{K_r} |v^h(x + \Delta x) - v^h(x)| dx \leq \omega_{r+h}(|\Delta x|),$$

мұндағы  $\omega_{r+h}(\sigma) \rightarrow 0$  кезінде  $\sigma \rightarrow 0$ .

Интеграл астындағы айырманы келесі түрде жазып алайық:

$$\begin{aligned} v^h(x + \Delta x) - v^h(x) &= \frac{1}{h} \int_R \delta\left(\frac{x + \Delta x - y}{h}\right) v(y) dy - \frac{1}{h} \int_R \delta\left(\frac{x - y}{h}\right) v(y) dy = \\ &= \frac{1}{h} \int_R \left[ \delta\left(\frac{x + \Delta x - y}{h}\right) - \delta\left(\frac{x - y}{h}\right) \right] v(y) dy, \end{aligned}$$

ендеше

$$\begin{aligned} J_r(v^h, \Delta x) &= \int_{K_r} |v^h(x + \Delta x) - v^h(x)| dx = \\ &= \int_{K_r} \left| \frac{1}{h} \int_R \left[ \delta\left(\frac{x + \Delta x - y}{h}\right) - \delta\left(\frac{x - y}{h}\right) \right] v(y) dy \right| dx \leq \\ &\leq \int_R |v(y)| \left[ \frac{1}{h} \int_{K_r} \left| \delta\left(\frac{x + \Delta x - y}{h}\right) - \delta\left(\frac{x - y}{h}\right) \right| dx \right] dy. \end{aligned}$$

Келесі ауыстыруларды  $z = \frac{x-y}{h} \Rightarrow x = y + hz, dx = h dz$  жасаймыз, сонда:

$$\frac{1}{h} \int_{K_r} \left| \delta\left(\frac{x + \Delta x - y}{h}\right) - \delta\left(\frac{x - y}{h}\right) \right| dx = \int_{(K_r - y)/h} \left| \delta\left(z + \frac{\Delta x}{h}\right) - \delta(z) \right| dz$$

Келесі белгілеуді енгізейік

$$\omega(\sigma) = \int_R |\delta(z + \sigma) - \delta(z)| dz,$$

онда

$$J_r(v^h, \Delta x) \leq \|v\|_{L^1(K_{r+h})} \cdot \omega\left(\frac{\Delta x}{h}\right).$$

Осыдан

$$J_r(v^h, \Delta x) \leq \omega_{r+h}(|\Delta x|),$$

мұндағы

$$\omega_{r+h}(|\Delta x|) = \sup_{|\Delta x| \leq \sigma} \left( \|v\|_{L^1(K_{r+h})} \cdot \omega\left(\frac{\Delta x}{h}\right) \right).$$

Келесі (1.24) теңсіздігі тегістелген таңба функциясының (*sign*) көмегімен жуықталған функцияның бастапқы модуль функциясына жақын екенін бағалайтын маңызды баға. Бұл теңсіздік  $v(x) \in L^1_{loc}(R)$  болғанда, және тегістеу параметрі  $h \rightarrow 0$  кезінде дәлелденеді.

$$(\text{sign } v)^h(x) = \frac{1}{h} \int_R \delta\left(\frac{x-y}{h}\right) \text{sign}(v(y)) dy,$$

мұндағы  $\delta(z)$  – стандартты тегістеу (*свёртка*) ядросы,  $\text{supp}(\delta) \subset [-1, 1]$ .

Алдымен

$$|v| - v(x)(\text{sign } v)^h(x) = v(x)[\text{sign } v(x) - (\text{sign } v)^h(x)]$$

жазып алайық.

$$\begin{aligned} \int_{K_r} \left| |v| - v(x)(\text{sign } v)^h(x) \right| dx &= \int_{K_r} |v(x)| \cdot |\text{sign } v(x) - (\text{sign } v)^h(x)| dx \leq \\ &\leq 2 \int_{K_r} |v(x) - v^h(x)| dx \leq 2 \cdot \omega_r(h) \end{aligned}$$

Бұл тегістеу процедурасы арқылы  $|v|$  және тегістелген таңба функциясы арасындағы айырманы өлшейтін дәл баға болып табылады.

**1.2-лемма.** Берілген  $v(t, x)$  функциясының шектелген және өлшенетін, анықталу аймағы  $Q = [0, T] \times [-r, r] \subset R^2$  төртбұрышы болсын. Егер  $\rho \in (0, \min(r, T))$  және кез келген  $h \in (0, \rho)$  үшін

$$V_h = \frac{1}{h^2} \int_0^{T-\rho} \int_{-r}^r \int_0^h \int_{-h}^h |v(t, x) - v(\tau, \xi)| d\xi d\tau dx dt \quad (1.25)$$

шамасын анықтасақ, онда

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_h = 0$$

теңдігі орындалады.

Лебег нүктелерінің қасиеттерін пайдалана отырып, осы өрнекті дәлелдеуге болады. Бұл қасиет анықтылық, бірімділік, және энтропиялық шешімдердің бар болуы сияқты теоремаларды дәлелдеуде өте маңызды рөл атқарады.

**1.3-лемма.** Егер Липшиц тұрақтысы  $L > 0$  және  $f(u)$  ағын функциясы  $[-M, M]$  аралығында Липшиц шартына бағынатын болса, онда келесі функция:

$$H(u, v) = \text{sign}(u - v) \cdot [f(u) - f(v)]$$

екі айнымалы бойынша да Липшиц шартына бағынады, яғни:

$$|H(u_1, v_1) - H(u_2, v_2)| \leq L \cdot (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|).$$

**Дәлелдеуі.**  $H(u, v)$  функциясының  $u$  және  $v$  айнымалылары бойынша туындыларын қарастырайық.

Белгіленген  $v \in [-M, M]$  үшін

$$H_u(u, v) = f'(u) \cdot \text{sign}(u - v),$$

және де белгіленген  $u \in [-M, M]$  үшін

$$H_v(u, v) = -f'(v) \cdot \text{sign}(u - v).$$

Екі жағдайда да  $|H_u| \leq L, |H_v| \leq L$  орындалады, себебі  $f'(u)$  Липшиц тұрақтысымен шектелген. Демек,  $H(u, v) \in \text{Lip}([-M, M]^2)$ .

**Характеристикалық конус ұғымы.**

Кез келген  $R > 0$  үшін келесіні анықтаймыз:

$$N(R) = \sup_{(t,x) \in [0,T] \times [-r,r]} |f'(u(t,x))|$$

Характеристикалық конус  $\mathcal{K}$  келесі түрде анықталады:

$$\mathcal{K} = \{(t, x): |x| \leq R - N(R)t, 0 \leq t \leq T_0 = \min(T, R/N(R))\}$$

Ал  $S_\tau$  – бұл конустың  $t = \tau$  жазықтығындағы көлденең қимасы:

$$S_\tau = \{x: |x| \leq R - N(R)\tau\}.$$

Характеристикалық конус шешімнің таралуын локализациялауға, аппроксимацияларды құруға және шешімнің бар-жоқтығын дәлелдеуде қолданылады.

#### *Риман есебінің физикалық интерпретациясы*

Риман есебі екіфазалық сүзгілеу процесінің физикалық табиғатын айқын сипаттайтын модельдік есеп болып табылады. Мұндай есепте бастапқы шарт ретінде кеңістіктің екі жартысында қанықтылықтың тұрақты, бірақ әртүрлі мәндері беріледі. Бұл жағдай мұнай қабатына су айдау кезінде табиғи түрде пайда болады: айдау ұңғымасы маңында судың қанықтылығы жоғары, ал өндіру аймағында ол төмен болады.

Осындай бастапқы шарттардың салдарынан шешімде қанықтылықтың секірмелі өзгерісі – соққы фронты қалыптасады. Бұл фронт мұнай мен судың бөліну шекарасын сипаттайды және уақыт бойынша қабат бойымен қозғалады. Риман есебінің шешімі осы фронттың жылдамдығын, бағытын және орнықтылығын анықтауға мүмкіндік береді.

Сондықтан Риман есебі екіфазалық сүзгілеу теориясында тек математикалық модель ғана емес, сонымен қатар нақты инженерлік процестерді сипаттайтын маңызды құрал болып табылады. Бұл есептің шешімдерін зерттеу кейінгі тарауларда сандық модельдер мен қолданбалы есептерге негіз болады.

Бұл жұмыста энтропиялық шешім Кружков мағынасында анықталады. Яғни,  $S(t, x)$  функциясы Бакли – Леверетт теңдеуінің жалпыланған шешімі деп аталады, егер ол барлық тұрақты  $k \in R$  үшін Кружковтың энтропиялық теңсіздігін қанағаттандырса және бастапқы шартқа  $L^1_{loc}$ -мағынасында жинақталса. Аталған шарттар шешімнің физикалық жүзеге асуын қамтамасыз етеді және есептің жалғыздығын таңдауда шешуші рөл атқарады.

Егер шешімде секіріс пайда болса, онда секіріс бойында энтропиялық теңсіздік орындалуы тиіс. Бұл шарт шешімнің физикалық тұрғыдан рұқсат етілгенін, яғни шок толқын немесе қанығу фронты нақты флюид ағысына сәйкес келетінін білдіреді. Мұндай секірістер Риман есебінің шешімдерінде табиғи түрде пайда болады және екіфазалық ағыстардың фронтальді қозғалысын сипаттауда маңызды орын алады.

Осылайша, Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Коши есебі энтропиялық мағынада қойылады, ал Кружковтың энтропиялық шарттары шешімнің физикалық дұрыстығын қамтамасыз ететін негізгі критерий болып табылады. Бұл ұғымдар келесі тарауда жойылатын тұтқырлық әдісін қолдана отырып, шешімдердің бар болуы, жалғыздығы және орнықтылығы мәселелерін зерттеу үшін теориялық негіз қызметін атқарады.

### **1.3 Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Коши есебінің жалпыланған шешімінің жалғыздығы және бастапқы шарт бойынша орнықтылығы**

Бакли – Леверетт теңдеуіндегі ағын функциясы

$$f(u) \in C^1([-M, M])$$

Липшиц шартына бағынсын, яғни

$$|f(u) - f(v)| \leq L |u - v|, \forall u, v \in [-M, M]$$

және бастапқы деректер шектелген болсын.

Гиперболалық типтегі сақталу заңдары үшін шешімдердің үзілістерге ие болуы мүмкін болғандықтан, Коши есебінің жалпыланған (энтропиялық) шешімдерінің жалғыздығы мен бастапқы шарттарға қатысты орнықтылығын зерттеу маңызды болып табылады. Бұл қасиеттер шешімнің физикалық тұрғыдан жүзеге асуын және модельдің сенімділігін қамтамасыз етеді.

Кружковтың энтропиялық әдісіне негізделген классикалық нәтижелерге сәйкес, Бакли – Леверетт теңдеуінің жалпыланған шешімдері  $L^1$ -мағынада бірмәнді және бастапқы деректерге орнықты болады. Атап айтқанда, егер  $u(t, x)$  және  $v(t, x)$  бірдей теңдеу үшін берілген бастапқы функцияларға сәйкес келетін екі энтропиялық шешім болса, онда олардың айырмасының  $L^1$ -нормасы уақыт бойынша экспоненциалды түрде бағаланады.

Нақтырақ айтқанда,

$$\gamma = \sup_{|u| \leq M} |f'(u)|, S_t = \{x \in R: |x| \leq R - \gamma t\}, T_0 = \min\left(T, \frac{R}{\gamma}\right)$$

деп белгілесек, онда  $t \in [0, T_0]$  үшін келесі орнықтылық теңсіздігі орындалады:

$$\int_{S_t} |u(t, x) - v(t, x)| dx \leq e^{\gamma t} \int_{S_0} |u_0(x) - v_0(x)| dx. \quad (1.26)$$

Энтропиялық шешімдердің  $L^1$ -мағынадағы орнықтылығы тек теориялық тұрғыдан ғана емес, сандық есептеулер үшін де маңызды қасиет болып табылады. Бұл қасиет бастапқы деректердегі немесе есептеу барысында пайда болатын қателіктердің уақыт бойынша өспейтінін көрсетеді. Нәтижесінде сандық жуық шешімдер физикалық мағынасы бар нақты шешімге жинақталады.

Практикалық есептерде бұл қасиет сандық схемалардың сенімділігін негіздеуге мүмкіндік береді. Егер шешім орнықты болмаса, онда ұсақ қателіктердің өзі есептеу нәтижесін толық бұрмалауы мүмкін. Осы тұрғыдан алғанда,  $L^1$ -орнықтылық екіфазалық сүзгілеу есептерін сандық модельдеудің теориялық кепілі болып табылады.

(1.26) баға шешімнің бастапқы шартқа қатысты үздіксіз тәуелді екенін көрсетеді және сонымен қатар энтропиялық шешімнің жалғыздығын қамтамасыз етеді. Мұндай нәтиже Кружков теңсіздіктерін, тегістеу процедураларын және Гронуолл теңсіздігін қолдану арқылы алынады.

Осылайша, шектелген бастапқы деректер үшін Бакли – Леверетт теңдеуінің Коши есебі энтропиялық мағынада бірмәнді шешімге ие және ол

бастапқы шартқа  $L^1$ -мағынада орнықты. Бұл қасиеттер келесі тарауда жойылатын тұтқырлық әдісін қолдану арқылы алынатын нәтижелердің теориялық негізін құрайды [87].

#### 1.4 Кеукті ортадағы араласпайтын екіфазалық ағыстарды сүзгілеудің математикалық модельдері

Екі сұйық фазалардың арасындағы байланыс олардың жанасу аумағына қатты тәуелді болуы керек, өз кезегінді ол аумақ капиллярлық әсер, ылғалдану немесе кеукті ортаның құрылымы сияқты фактілерден тәуелді болады. Егер «флюид-флюид» жұбының жанасу беті аумағы «флюид-қатты дене» жұбы жанасу беті аумағымен салыстырғанда шамалас болса, байланыс шарттары маңызды болуы мүмкін. Ал егерде «флюид-қатты дене» бөлігі аумағы «флюид-флюид» бөлігі аумағынан анағұрлым үлкен болса, онда алмасу көлемі минимум болуы мүмкін. Жұмыстағы негізгі қарастырылатын мәселе «флюид-флюид», «флюид-қатты дене» бөліктерінің шекарасы, яғни алмасу көлемі кеук өлшемдерінен тәуелді болуы жөніндегі гипотеза. Дербес жағдайда, зерттеу идеясы кеук өлшемдері мен импульс алмасу арасындағы оң корреляция бар екендігін көрсетуге саяды. Мұндай гипотезаның орын алуына көптеген зерттеу нәтижелері негіз бола алады.

##### *Фазааралық импульс алмасудың физикалық мағынасы*

Кеукті ортадағы екіфазалық ағыстарда фазалар арасындағы импульс алмасу маңызды рөл атқарады. Бұл алмасу «флюид-флюид» және «флюид-қатты дене» шекараларында жүзеге асады және ағыстың жалпы құрылымын анықтайды. Әсіресе, қанықтылықтың күрт өзгеретін аймақтарында фазааралық өзара әрекеттесу қарқындылығы артады.

Кеук өлшемдері мен олардың кеңістіктік таралуы фазалардың қозғалыс жолдарын айқындайды. Өтімділігі төмен орталарда флюидтер тар арналар арқылы қозғалып, қосымша энергия шығынына ұшырайды. Ал өтімділігі жоғары аймақтарда фазалар арасындағы жанасу беті ұлғайып, импульс алмасу күшейеді.

Бұл құбылыстарды ескеру екіфазалық сүзгілеу модельдерінің нақтылығын арттыруға мүмкіндік береді. Диссертациялық жұмыста қарастырылатын модельдер дәл осы фазааралық әсерлерді тиімді түрде сипаттауға бағытталған.

Бір жағынан, зерттеулер бойынша су (*сулану*) мен сынап (*суланбау*) үшін ілінісу тиімділігі тығыз құм қабаты (*өтімділігі шамамен  $34 \times 10^{-12} \text{ м}^2$* ) арқылы ағып жатса салыстырмалы түрде өте аз болады. Зерттеушілер болжауы мен пікірлері бойынша (<https://www.researchgate.net/publication/254514300>) суланатын және суланбайтын фазалар, ең алдымен капиллярлық әсерінен, әртүрлі кеуктер желісі арқылы ағады, сондықтан екі флюид арасындағы ілінісу беттерінің ауданын минимизациялайды. Осының салдарынан «қатты дене-флюид» өзара әсері «флюид-флюид» әсерімен салыстырғанда басымды болады. Бұл әрине гипотеза, сондықтан талас тудыруы да мүмкін. Бұдан басқа қосалқы дәлелдеулер өзара байланыс әсері өтімділігі төмен орталарда өте аз болатынын

да айтады. Мысалы, осы шарттарды өтімділігі салыстырмалы төмен орталар арқылы жүретін су-мұнайлы ағыстарды модельдеу кезінде ескере бермейді, әдетте мұнай-газ саласында жер қойнауы қабаттарының өтімділігі  $10^{-12} \text{ м}^2$  құрайды. Екінші жағынан, фазалар арасындағы күшті үйкеліс өтімділік пен жанасу беті үлкен болғанда пайда болатыны да байқалады [24, 88].

Бұл зерттеу жұмысындағы мақсаттардың бірі кеуекті ортадағы қосфазалық ағыстың континуальді модельдеріндегі фазалар арасындағы байланыс шарттарының салыстырмалы маңыздылығын талдау. Ол үшін алдымен екі фаза арасындағы импульс алмасуы айқын кеуекті ортада араласпайтын флюидтердің қосфазалық ағысының жалпы моделін құрып, сонан соң айқас мүшелерді есепке алу үшін фазалар қанықтылығы мен динамикасын есептеуде кеңейтілген Бакли – Леверетт теориясын қолдану.

Екі араласпайтын флюидтерді (*мұнай мен су*) изотропты кеуекті ортада сүзгілеу есебін қарастырайық. Бұл флюидтерді фазалар деп атаймыз.

Кеуекті орта - бір байланысты, оның шекарасы  $\partial D$  - екі фаза үшін де өткізбейтін орта деп саналады.  $x = (x_1, x_2, x_3)$  -  $D$  облысындағы декарттық координаталар, ал  $t$  - уақыт болсын. Декарттық координаталарды  $x, y, z$ , мұндағы  $z$  - вертикаль ось болсын. Сүзу процесін сипаттайтын дифференциалдық теңдеулер жүйесі масса, импульс және энергияның сақталу заңдарын береді.

Әрбір фаза үшін массаның сақталу заңы мынадай түрде болады:

$$\frac{\partial(m\rho_i s_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho_i U_i) = 0, \quad (1.27)$$

мұндағы  $\rho_i, s_i, U_i$  -  $i$ -ші фазаның сәйкес тығыздығы, суға қанықтылығы және жылдамдығы,  $m$  - кеуектілік коэффициенті.

Суға қанықтылық  $s_i$  кеуек көлемі бірлігіндегі  $i$ -ші фазаның алатын бөлігін көрсететін өлшемсіз шама ( $0 < s_i < 1$ ).

Әрбір фаза үшін импульстің сақталу заңы (*Дарси заңы*) келесі түрде болады:

$$U_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i(s_i)(\nabla p_i - g\rho_i \nabla z), \quad (1.28)$$

мұндағы  $f_i(s_i)$   $i$ -ші фазаның салыстырмалы фазалық өтімділігі (*өлшемсіз шама*,  $0 < f_i(s_i) < 1$ ),  $p_i$  -  $i$ -ші фазаның парциал қысымы,  $\nabla p_i$  - парциал қысымның градиенті,  $k$  - кеуекті ортаның өтімділік коэффициенті,  $\mu_i$  -  $i$ -ші фазаның динамикалық тұтқырлығы,  $g$  - еркін түсу үдеуі.

Мұнда энергияның сақталу заңы - бір температуралы модель, яғни екі фаза мен кеуекті орта температуралары бірдей және энергия диссипациясы болмайтын модель қарастырылады. Бұл энергияның жылуды бірден беруіне алып келеді және энергия сақталу заңы төмендегі жылу тасымалдау теңдеуі түрінде берілуіне мүмкіндік жасайды:

$$\frac{\partial(C\theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\theta\rho_1c_1U_1 + \theta\rho_2c_2U_2) = 0, \quad (1.29)$$

мұндағы  $\theta = \theta(t, x)$  – температураның тең қалыпты күйден ауытқуы,  $C = (1 - m)\rho_0c_0 + m\rho_1c_1s_1 + m\rho_2c_2s_2$ ,  $c_0, c_1, c_2$  – кеуекті ортаның және бірінші, екінші фазалардың сәйкес жылу тұрақты сыйымдылықтары,  $\rho_0$  – кеуекті ортаның тығыздығы,  $\rho_1$  және  $\rho_2$  бірінші және екінші фазалардың тығыздықтары.

Енді кеуекті ортаның және фазалардың параметрлерін толығырақ қарастырайық.

Салыстырмалы қанықтылық қосындысы бірге тең:  $s_1 + s_2 = 1$ .

Судың салыстырмалы қанықтылығы ретінде  $s_1$  (кейде  $s_w$ ) функциясын аламыз және оны  $\sigma$  арқылы белгілейміз.

Кеуектілік коэффициенті  $m$  жалпы жағдайда координаттар, температура мен қысым функциясы болып табылады.

Динамикалық тұтқырлықтар  $\mu_i$  жалпы жағдайда температура мен қысымға тәуелді. Олардың температураға тәуелділігі Френкель заңымен анықталады:  $\mu = \alpha \exp \frac{\beta}{\theta}$ , мұндағы  $\alpha$  және  $\beta$  – тұрақтылар.

$f_i$  функцияларының түрлері ортаның таңдалған моделінен тәуелді. Гидродинамикалық есептеулерде тәжірибелік жолмен алынған салыстырмалы өтімділіктің қанықтылықтан тәуелді мәндерінің эмпирикалық тәуелділіктерін қолданған өте ыңғайлы. Мысалы, бағалау есептерінде келесі эмпирикалық формулаларды пайдалануға болады:

$$f_1(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{егер } 0 \leq \sigma \leq 0.2, \\ \left(\frac{(\sigma - 0.2)}{0.8}\right)^{3.5}, & \text{егер } 0.2 \leq \sigma \leq 1, \end{cases} \quad (1.30)$$

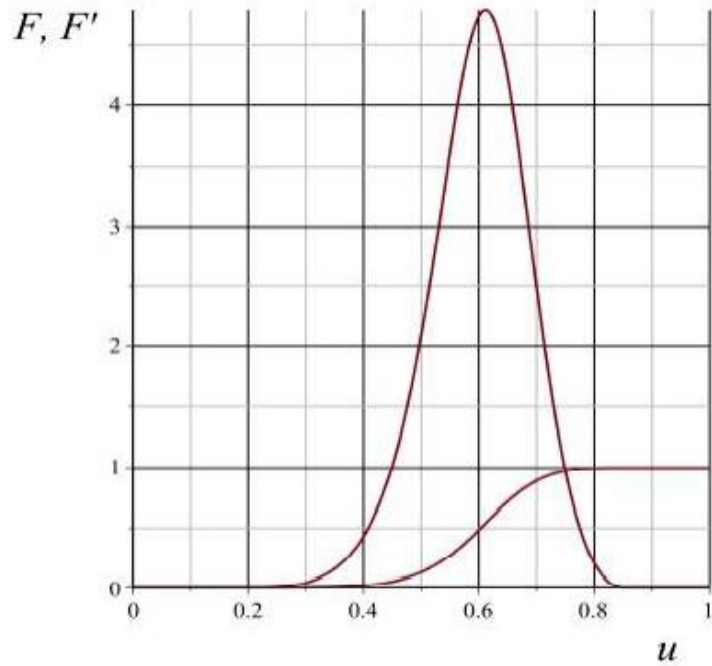
$$f_2(\sigma) = \begin{cases} \left(\frac{(0.85 - \sigma)}{0.8}\right)^{2.8} (1 + 2.4\sigma), & \text{егер } 0 \leq \sigma \leq 0.85, \\ 0, & \text{егер } 0.85 \leq \sigma \leq 1. \end{cases} \quad (1.31)$$

Мұндағы  $f_1, f_2$  сәйкес су мен мұнайдың салыстырмалы фазалық өтімділіктері. Төмендегі функция Бакли – Леверетт функциясы деп аталады:

$$F(\sigma) = \frac{f_1(\sigma)}{f_1(\sigma) + \mu f_2(1 - \sigma)}, \quad (1.32)$$

мұндағы  $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ , ал  $\mu_1, \mu_2$  – су мен мұнайдың динамикалық тұтқырлықтары.

$F$  және  $F'$  функцияларының графиктері 1.5-суретте көрсетілген.



1.5-сурет – Бакли – Леверетт функциясы мен оның туындысының қанықтылықтан тәуелділік графиктері [21, 12б.]

*Келесі болжамдарды қабылдайық:*

- Екі фаза да сығылмайды, яғни  $\rho_1$  және  $\rho_2$  тұрақтылар.
- Фазалар арасында масса алмасу жүрмейді.

Онда (1.28) Дарси заңы мына түрде жазылады:

$$U_i = -h_i(s_i)\nabla p_i, \quad (1.33)$$

мұндағы

$$h_i(s_i) = \frac{kf_i(s_i)}{\mu_i}.$$

$F$  функциясының графигі судың және мұнайдың жоғары қанықтылығы үшін  $s_1 + s_2 = 1$  шартына және функцияның түріне байланысты сәйкесінше 1 және 0 мәндерімен шектелетін, бір иілу нүктесі бар қисық, ал оның туындысы –  $F'$  функциясының графигі қонырау түрінде болатын, қанықтылықтардың экстремум нүктесіне сәйкес максимумы бар қисық болады.

Ал (1.27) теңдеулердің түрлері былай өзгереді:

$$\begin{cases} m \frac{\partial s_1}{\partial t} + \text{div } U_1 = 0, \\ m \frac{\partial s_2}{\partial t} + \text{div } U_2 = 0, \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} U_1 = 0, \\ -m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} U_2 = 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

Соңғы жүйелердегі екі теңдеуді қосып,  $\operatorname{div} U_1 + \operatorname{div} U_2 = 0$  немесе  $\operatorname{div}(U_1 + U_2) = 0$  мәндерін алуға болады.  $U = U_1 + U_2$  белгілеп:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} U_1 = 0, \\ \operatorname{div} U = 0. \end{cases} \quad (1.36)$$

Байқасақ,

$$U_1 = FU, U_2 = (1 - F)U,$$

сондықтан (1.36) жүйедегі бірінші теңдеуді былайша:

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(FU) = 0,$$

немесе, келесі эквивалент түрде жазуға болады:

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + U(F) = 0. \quad (1.37)$$

Мынадай функция енгізейік [21, 146.]:

$$G = \frac{1}{c} (\rho_1 c_1 F + \rho_2 c_2 (1 - F)).$$

Онда (1.29) жылу балансы теңдеуі мына түрді қабылдайды:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + GU(\theta) = 0. \quad (1.38)$$

Ақырында алатынымыз:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + U(F) = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + GU(\theta) = 0, \\ \operatorname{div} U = 0. \end{cases} \quad (1.39)$$

*Изотермиялық модель*

*Жоғарыдағы А және В болжамдарынан басқа келесілерді қабылдайық:*

- Сүзу изотермиялық болып есептелсін, яғни (1.29) есепке алынбайды;
- Мұнай қабаты жазық, горизонталь облыс болсын, яғни бұл жағдайда гравитация сүзгілеу процесіне әсер етпейді.
- $\mu_i$  динамикалық тұтқырлықтар тұрақты деп есептелсін.
- Кеуекті орта біртекті және деформацияланбайды, яғни кеуектілік коэффициенті  $m$  берілген  $D$  облысының барлық нүктелерінде бірдей және уақытқа қатысты өзгермейді (яғни,  $m = const$ ).

*Бакли – Леверетт моделі*

Бакли – Леверетт моделі жоғарыда келісілген талаптардан басқа капиллярлық қысымды есепке алмаған жағдайда алынады. Бұл жағдайда фазалардың дербес қысымдары бірдей болады, яғни:

$$p_1 = p_2 = p. \quad (1.40)$$

Сол кезде (1.36) теңдеуді келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div}(A(\sigma)\nabla p) = 0, \\ \text{div}(B(\sigma)\nabla p) = 0, \end{cases}$$

мұндағы

$$A(\sigma) = -\frac{k f_1(\sigma)}{\mu_1} = -h_1(\sigma),$$

$$B(\sigma) = -k \left( \frac{f_1(\sigma)}{\mu_1} + \frac{f_2(1-\sigma)}{\mu_2} \right) = -h_1(\sigma) - h_2(\sigma).$$

$A = BF$  екенін ескерсек, мынаны аламыз:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div}(B(\sigma)F(\sigma)\nabla p) = 0, \\ \text{div}(B(\sigma)\nabla p) = 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

Бір кеңістіктік айнымалы үшін (1.41) теңдеуі былай жазылады:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (B(\sigma)F(\sigma)\nabla p) = 0, \\ \text{div} \left( B(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (1.42)$$

Сондықтан бұл жүйедегі бірінші теңдеуді былайша жазуға болады:

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} (F(\sigma)) = 0, \quad (1.43)$$

мұндағы

$$U = B(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.44)$$

$x$ -ке тәуелсіз уақыттың функциясы.

(1.41) теңдеу кеңістіктің бір айнымалысы үшін келесі түрде болады:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( B(\sigma) F(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( B(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Бакли – Левереттің стандартты моделінде қысым градиентінің тұрақтылығы қабылданады, ал ол өз кезегінде теңдеуді шешуге сипаттағыштар әдісін қолдануға мүмкіндік туғызады. Ал жалпыланған Бакли – Леверетт моделінде бұл шарт қабылданбайды, бұл жерде қысым градиенті  $q$  дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады деп есептелінеді, сондықтан тікелей сипаттағыштар тәсілін қолдануға келмейді.

Кез келген дифференциалданатын  $F$  және  $B$  функциялары үшін (1.45) жүйесінің шешімі квадратурада есептелінетінін көрсетейік. Ол үшін біз арнайы Бэклунд түрлендірулерін қолданып, алынған теңдеуге байланыстық түрлендіруді тұрғызу арқылы толқын теңдеуіне айналдырамыз. Бұл жүйедегі бірінші теңдеуді былай жазуға болады:

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + B(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (F(\sigma)) = 0. \quad (1.46)$$

$q = \frac{\partial p}{\partial x}$  айнымалысын енгізсек, (1.45) екінші ретті екі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің орнына бірінші ретті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + B(\sigma) F'(\sigma) q \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \\ B'(\sigma) q \frac{\partial \sigma}{\partial x} + B(\sigma) \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.47)$$

Ыңғайлы болу үшін дербес туындыларды төменгі индекстерді қолдану арқылы белгілейік (мыс.,  $q = p_x$ ).

(1.47) жүйесінен қысым градиентін жою арқылы қанықтылық  $\sigma$  үшін дербес дифференциалдық теңдеуді алуға болады. Атап айтқанда, (1.47) жүйедегі бірінші теңдеуден қысым градиентіне пропорционал шаманы келесі түрде өрнектеуге болады:

$$B(\sigma)q = -\frac{m\sigma_t}{F'(\sigma)\sigma_x}. \quad (1.48)$$

(1.48) өрнегін (1.47) жүйесінің екінші теңдеуіне қойып, туындыларды ашу және ықшамдау арқылы  $\sigma$  функциясы үшін тұйықталған теңдеуге келеміз.

*Аралық түрлендірулер*

(1.48) өрнектің  $x$  айнымалысы бойынша туындысы нөлге тең болатындығын ескере отырып, келесі түрлендірулерді орындаймыз:

$$\frac{(m\sigma_t)_x F'(\sigma)\sigma_x - m\sigma_t (F'(\sigma)\sigma_x)_x'}{(F'(\sigma)\sigma_x)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{m\sigma_{tx} F'(\sigma)\sigma_x - m\sigma_t (\sigma_x F''(\sigma)\sigma_x + F'(\sigma)\sigma_{xx})}{(F'(\sigma)\sigma_x)^2} = 0.$$

Соңғы теңдеуді түрлендіру арқылы аламыз:

$$\sigma_{tx}\sigma_x F'(\sigma) - \sigma_t \sigma_x^2 F''(\sigma) - \sigma_t \sigma_{xx} F'(\sigma) = 0 \Rightarrow$$

$$F'(\sigma)(\sigma_{tx}\sigma_x - \sigma_t \sigma_{xx}) - F''(\sigma)\sigma_t \sigma_x^2 = 0,$$

және соңғы теңдіктен  $\sigma$ -ға қатысты сызықты емес дифференциалдық теңдеуді былайша жаза аламыз:

$$\frac{\sigma_x \sigma_{tx} - \sigma_t \sigma_{xx}}{\sigma_t \sigma_x^2} = \frac{F''(\sigma)}{F'(\sigma)},$$

немесе

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sigma_t}{\sigma_x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\sigma), \quad (1.49)$$

мұндағы  $\Phi(\sigma) = \ln F'(\sigma)$ .  $\Phi(\sigma)$  функциясының графигі 1.6-суретте көрсетілген.

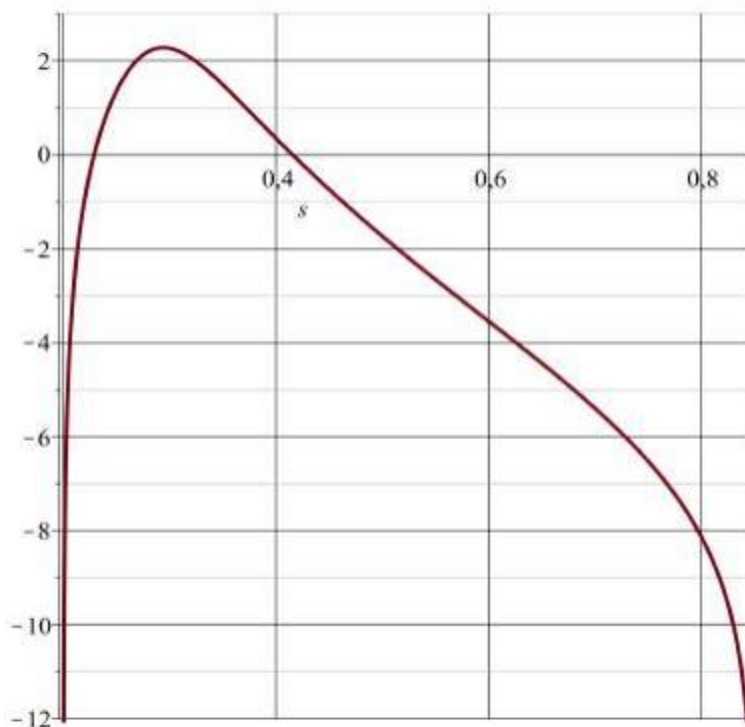
(1.49) теңдеуіне келесі Бэклунд түрлендірулерін қолданайық:

$$\begin{cases} u_t = \frac{\sigma_t}{\sigma_x}, \\ u_x = \Phi(\sigma). \end{cases} \quad (1.50)$$

Сонда  $u_{tx} = \Phi'(\sigma)\sigma_t$ ,  $u_{xx} = \Phi'(\sigma)\sigma_x$ , және  $\frac{u_{tx}}{u_{xx}} = \frac{\sigma_t}{\sigma_x} = u_t$ .

Сонымен, Бэклунд түрлендірулері нәтижесінде  $u = u(t, x)$  функциясы үшін Монж-Ампер [21, 23 б.] түріндегі сызықты емес гиперболалық теңдеуді аламыз:

$$u_{tx} - u_t u_{xx} = 0. \quad (1.51)$$



1.6-сурет –  $\Phi(\sigma)$  функциясы графигі [21, 23 б.]

Осы тарауда келтірілген теориялық аппарат келесі тарауда Бакли – Леверетт моделінің Риман есебі үшін жойылатын тұтқырлық әдісін қолдану арқылы жуық шешімдерді зерттеуде пайдаланылады. Атап айтқанда, энтропиялық шешім ұғымы, Ранкин – Гюгонио (*Rankine – Hugoniot*) шарттары және соққы толқындарының құрылымдық қасиеттері алынатын негізгі нәтижелерді қатаң түрде тұжырымдауға негіз болады.

## 2 СҮЗГІЛЕУ ЕСЕПТЕРІНІҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Бұл тарауда бірінші тарауда келтірілген теориялық нәтижелердің кеуекті ортадағы араласпайтын екіфазалық флюидтер ағысын сипаттайтын сүзгілеу есептеріне қолданылуы қарастырылады. Атап айтқанда, Бакли – Леверетт типті модельдер үшін алынған жалпыланған және энтропиялық шешімдер теориясы жойылмалы тұтқырлық әдісі аясында нақты қолданбалы есептерге бейімделеді.

Сүзгілеу процестерінің қолданбалы маңызы мұнай-газ инженериясында, гидрогеологияда және көпфазалық ағыстарды басқару есептерінде кеңінен белгілі. Осыған байланысты екіфазалық ағыстардың математикалық модельдерін тек теориялық тұрғыдан ғана емес, сондай-ақ олардың сандық жуықтаулары мен физикалық интерпретациялары тұрғысынан да зерттеу өзекті болып табылады.

Тарауда алдымен екіфазалық ағыстарды сипаттайтын негізгі математикалық модельдер нақты жорамалдар негізінде тұжырымдалады. Одан кейін Бакли – Леверетт теңдеуіне сәйкес сүзгілеу есебі қарастырылып, жойылатын тұтқырлық аппроксимациясының шешімдерге әсері талданады. Сонымен қатар, Риман есебі арқылы алынатын шешімдердің сандық жуықтаулары келтіріліп, олардың энтропиялық шешімдермен сәйкестігі көрсетіледі.

Тараудың соңында екіфазалық сүзгілеу есебінің кері қойылымы қарастырылып, алынған теориялық нәтижелердің модель параметрлерін анықтау және процесті басқару есептеріндегі қолдану мүмкіндіктері талқыланады. Осылайша, екінші тарау бірінші тарауда дамытылған теориялық аппараттың қолданбалы тиімділігін көрсетуге бағытталған.

### 2.1 Негізгі нәтижелер

Бұл бөлімде Бакли – Леверетт моделіне сәйкес келетін екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысының Риман есебі жойылатын тұтқырлық әдісі негізінде зерттеледі. Нәтижесінде тұтқыр жуықтаулардың энтропиялық шешімге жинақталуы жөнінде тұжырым жасалып, алынған нәтиженің жалғыздығы мен орнықтылығы қамтамасыз етіледі. Бұл нәтижелер келесі тармақтарда тұжырымдалып, дәлелденеді.

*Жойылатын тұтқырлық шегінің жинақталуы жайлы теорема*

$f \in C^2([0,1])$  фракциялық ағыс функциясы болсын және  $S_0(x) \in L^\infty(R)$  – бастапқы қанығу функциясы. Тұтқырланған Бакли – Леверетт теңдеуін қарастырайық:

$$\partial_t S^\varepsilon + \partial_x f(S^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} S^\varepsilon, \quad S^\varepsilon(x, 0) = S_0(x), \quad \varepsilon > 0.$$

Онда кез келген  $T > 0$  үшін  $\{S^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  шешімдер тізбегінен  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  ішкі тізбек табылып,  $L^1_{loc}(R \times (0, T))$  облысында

$$S^{\varepsilon_n} \rightarrow S.$$

Мұндағы  $S$  бастапқы гиперболалық Бакли – Леверетт теңдеуінің Кружков мағынасындағы энтропиялық шешімі болып табылады. Атап айтқанда, алынған энтропиялық шешім бірмәнді (жалғыз) болады.

Мұндағы “ішкі тізбек табылады” дегеніміз:  $\varepsilon \rightarrow 0$  болғандағы барлық  $S^\varepsilon$  шешімдері бірден жинақталмауы мүмкін, бірақ олардың ішінен  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  болатын сондай тізбек таңдауға болады, сол тізбек үшін  $S^{\varepsilon_n}$  локальді  $L^1$ -мағынада энтропиялық шешім  $S$ -ке жақындайды. Ал  $L^1_{loc}$  мағынасы: кез келген шектелген аймақта (мыс.,  $[-R, R] \times (\delta, T)$ ) айырманың интегралы нөлге ұмтылады.

**2.1-теорема.** Егер  $S^\varepsilon = S^\varepsilon(t, x)$  Бакли – Леверетт теңдеуінің шешімі болса, онда кез келген  $T > 0$  шамасы үшін  $\varepsilon_n$  – сандық тізбегі табылып,  $S^{\varepsilon_n} = S^{\varepsilon_n}(t, x)$  шешімдер тізбегінен шегі  $S(t, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} S^{\varepsilon_{n_k}}$  Кружков шартын қанағаттандыратын жалғыз энтропиялық шешімі болатын  $S^{\varepsilon_{n_k}} = S^{\varepsilon_{n_k}}(t, x)$  тізбекшесін бөліп шығаруға болады.

**Дәлелдеуі.** Тұтқырланған есеп параболалық типті болғандықтан, максимум принципі арқылы

$$\| S^\varepsilon \|_{L^\infty(R \times (0, T))} \leq \| S_0 \|_{L^\infty(R)}$$

бағасы орындалады. Бұл бағалар  $\varepsilon$ -ге тәуелсіз.

Энергетикалық бағалар мен стандартты компакттылық аргументтерін қолдану арқылы  $\{S^\varepsilon\}$  тізбегінің  $L^1_{loc}$ -та жинақталатын ішкі тізбегі бар екені көрсетіледі.

$\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде тұтқырлық мүшесі  $\varepsilon \partial_{xx} S^\varepsilon$  үлестірім мағынасында нөлге ұмтылады, ал Кружков энтропиялары үшін энтропиялық теңсіздік сақталады. Осыдан шек функция  $S$  гиперболалық теңдеудің энтропиялық шешімі екені шығады. Кружковтың бірмәнділік теоремасына сәйкес, алынған шешім жалғыз болады.

**2.1-ескерту.** Бұл теоремада алынған жинақталу нәтижелері жойылатын тұтқырлық әдісінің жалпы теориясына негізделеді. Алайда, Бакли – Леверетт моделінің Риман есебі үшін мұндай тұжырымдар осы жұмыста жүйелі түрде тұжырымдалып, автордың зерттеулерінде алынған нәтижелермен үйлеседі [48–49].

*Риман есебі жағдайындағы соққы қабатының құрылымы туралы теорема*

Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман бастапқы дерегі берілсін:

$$S_0(x) = \begin{cases} S_L, & x < 0, \\ S_R, & x > 0, \end{cases} \quad S_L > S_R,$$

және ағын функциясы  $f \in C^2([0, 1])$  дөңес болсын, яғни  $f''(S) \geq 0$ .

Тұтқырланған есептің

$$\partial_t S^\varepsilon + \partial_x f(S^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} S^\varepsilon$$

шешімі соққы маңында жүгірмелі толқын түрінде ұсынылады:

$$S^\varepsilon(x, t) = U\left(\frac{x - \sigma t}{\varepsilon}\right),$$

мұндағы

$$\sigma = \frac{f(S_R) - f(S_L)}{S_R - S_L}$$

– Ранкин – Гюгонио шартымен анықталатын соққы фронтының жылдамдығы.

Бұл жағдайда өтпелі аймақтың (соққы қабатының) сипаттамалық қалыңдығы  $\delta_\varepsilon = O(\varepsilon)$ , яғни тұтқыр шешімнің секірмелі энтропиялық шешімге өтуі  $\varepsilon$ -мен бір тәртіпте жүзеге асады.

Сонымен, Риман есебі жағдайында соққы толқындар құрылымы жөніндегі теореманы төмендегідей түрде келтіруге болады.

**2.2-теорема.** Егер Бакли – Леверетт теңдеуінің  $f(S)$  агын функциясы және Риманның бастапқы дерегі жоғарыда келтірілген шарттарды қанағаттандырса, ал теңдеудің шешімі  $S^\varepsilon(x, t)$  соққы маңында  $\xi = \frac{x - \sigma t}{\varepsilon}$  жүгірмелі толқыннан тәуелді қайсыбір  $U(\xi)$  функциясы арқылы өрнектелетін болса, онда  $S^\varepsilon(x, t)$  – тұтқырлы шешімі мен  $S(x, t)$  – секірмелі энтропиялық толқындар шешімі бірдей  $\xi$  – жүгірмелі толқыннан тәуелді

$$U''(\xi) = f'(U(\xi))U'(\xi) - \sigma U'(\xi)$$

теңдеуімен сипатталады.

**Дәлелдеуі.** Жүгірмелі толқын ауыстыруын

$$\xi = \frac{x - \sigma t}{\varepsilon}$$

енгізу арқылы теңдеу автономды екінші ретті дифференциалдық теңдеуге келтіріледі:

$$U''(\xi) = f'(U(\xi))U'(\xi) - \sigma U'(\xi).$$

Бұл теңдеу фазалық жазықтықта талданып, шекаралық шарттар

$$U(-\infty) = S_L, U(+\infty) = S_R$$

орындалатыны көрсетіледі.  $f$ -тің дөңестігі монотонды жүгірмелі толқын профилінің бар болуын қамтамасыз етеді.

Шешімнің айтарлықтай өзгерісі  $|\xi| = O(1)$  аралығында ғана жүретіндіктен, бастапқы айнымалыларға оралғанда соққы қабатының ені  $O(\varepsilon)$  екені шығады. Осылайша, тұтқыр шешім энтропиялық соққыны тегіс түрде жуықтайды.

**2.2-ескерту.** Соққы қабатының құрылымын талдау жүгірмелі толқын типті шешімдерге негізделеді. Мұндай тәсіл Бакли – Леверетт моделіндегі соққы фронтының микроқұрылымын сипаттауға мүмкіндік береді және алынған бағалар автордың жұмыстарында келтірілген нәтижелермен сәйкес келеді [48-49].

Бұл зерттеуде Бакли – Леверетт теңдеуінің параметрлері эксперименттік жолмен анықталатындығы, олар арқылы алынған шарттар мен функциялар жалпы теория аясында болатындығы көрсетілген. Сондықтан, келтірілген теореманың толық дәлелдеуін қайталап жатпай, дәлелдеу идеясымен шектелдік.

Зерттеу нәтижелері белгілі тәсілдер арқылы алынып отырғанына назар аударамыз. Шешімдер сандық анализбен, автордың компьютерлік бағдарламасымен жуықтап анықталады. Бұл жұмыстың негізгі нәтижелерін беретіндігіне көңіл бөлу керек.

Осындай ойды жоғарыдағы 2.1 Теорема үшін де, келесі 2.3 Теорема үшін де айтуға болады.

*Энтропиялық шешімнің  $L^1$ -орнықтылығы және жалғыздығы туралы теорема*

$f \in C^2([0,1])$  болсын және бастапқы деректер  $S_0, \tilde{S}_0 \in L^\infty(R)$  үшін Бакли – Леверетт теңдеуінің

$$\partial_t S + \partial_x f(S) = 0$$

энтропиялық шешімдері сәйкесінше  $S(x, t)$  және  $\tilde{S}(x, t)$  деп белгіленсін.

Онда кез келген  $t \geq 0$  үшін келесі  $L^1$ -орнықтылық бағалауы орындалады:

$$\|S(\cdot, t) - \tilde{S}(\cdot, t)\|_{L^1(R)} \leq \|S_0 - \tilde{S}_0\|_{L^1(R)}.$$

Атап айтқанда, берілген бастапқы дерек үшін Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімі бірімәнді (*жалғыз*) болады.

Бастапқы берілгендері эксперименттік тәсілмен анықталатындықтан, қойылған есептің қыйсындылығы және жалғыздығы маңызды орын алады. Осыған байланысты ойды төмендегі теорема түрінде келтірейік.

**2.3-теорема.** *Егер ағын функциясы мен бастапқы дерегі 2.2-теоремасының шарттарын қанағаттандырса, онда Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімі  $L^1$  кеңістігінде жалғыз және орнықты.*

Бұл теорема да жалпы белгілі, дәлелденген. Біздің жағдайымызда теңдеу параметрлері сандық жуықтаумен жаңартылып, жаңадан анықталатындықтан, осы екі фазалы ағыстар моделі теорема шарттарына бағынатындығын көрсету басты мәселе болып табылады.

## *Дәлелдеуі.* Кружков энтропиялары

$$\eta_k(S) = |S - k|, k \in R$$

және сәйкес энтропиялық ағындар қарастырылады. Кружковтың «қос айнымалы» әдісін (*doubling of variables*) қолдану арқылы  $S$  және  $\tilde{S}$  шешімдері үшін энтропиялық теңсіздіктер біріктіріліп, интегралдық формада салыстыру жүргізіледі.

Осы әдіс нәтижесінде шешімдер арасындағы  $L^1$ -қашықтық уақыт бойынша артпайтыны көрсетіледі, яғни контрактылық қасиет орындалады. Контрактылық бірімәнділікті тікелей қамтамасыз етеді, себебі бір бастапқы дерекке екі түрлі энтропиялық шешім сәйкес келуі мүмкін емес.

**2.3-ескерту.** Энтропиялық шешімдердің  $L^1$ -орнықтылығы гиперболалық сақталу заңдары теориясының негізгі қасиеттерінің бірі болып табылады. Бұл жұмыста аталған қасиет Бакли – Леверетт моделіне қолданылып, алынған жуық шешімдердің сенімділігін негіздеуде және автордың зерттеулерінде келтірілген нәтижелермен байланыстыра отырып талданады [48–49].

*Алынған негізгі теоремалардың физикалық және математикалық интерпретациясы.*

Осы бөлімде тұжырымдалған 2.1–2.3-теоремалар жойылатын тұтқырлық әдісінің Бакли – Леверетт типті гиперболалық теңдеулер үшін энтропиялық шешімді таңдаудағы негізгі рөлін көрсетеді. Бұл нәтижелердің маңыздылығы тек формаль математикалық тұрғыдан ғана емес, сондай-ақ олардың физикалық интерпретациясымен тығыз байланысты.

Біріншіден, жойылатын тұтқырлық әдісі энтропиялық шешімді таңдаудың табиғи механизмі болып табылады. Гиперболалық сақталу заңдары үшін әлсіз шешімдердің жалғыз еместігі белгілі, ал энтропиялық шарт физикалық тұрғыдан жүзеге асатын шешімді бөліп алуға мүмкіндік береді. Бұл тұрғыда тұтқырланған есептің шешімдері  $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде энтропиялық шешімге жинақталуы – физикалық процестегі микродеңгейлік диссипацияның математикалық бейнесі ретінде қарастырылады.

Екіншіден, алынған  $L^1$ -орнықтылық нәтижесі модельдің сенімділігін негіздейді. Бұл қасиет бастапқы қанықтылықтағы шағын ауытқулардың уақыт өте келе күшеймейтінін, керісінше шешімдер арасындағы айырманың артпайтынын көрсетеді. Физикалық тұрғыдан бұл сүзгілеу процесінің орнықтылығын сипаттайды, яғни бастапқы деректердегі өлшеу қателіктері немесе параметрлердің дәл берілмеуі ағыс құрылымын түбегейлі өзгертпейді.

Үшіншіден, Риман есебі үшін алынған соққы қабатының жүгірмелі толқын түріндегі құрылымы энтропиялық соққының микроқұрылымын айқын сипаттайды. Тұтқырланған есептің шешімі соққы маңында кеңістіктік айнымалы бойынша жылжып таралатын профиль түрінде болады, ал өтпелі аймақтың қалыңдығы  $\varepsilon$  параметрімен бір тәртіпте өзгертінді көрсетілді. Бұл нәтиже жойылатын тұтқырлық әдісінің соққы фронттарын тегістеу арқылы олардың геометриялық құрылымын дұрыс бейнелейтінін дәлелдейді.

Сонымен қатар, алынған нәтижелер Бакли – Леверетт моделінің классикалық теориясын заманауи энтропиялық шешімдер теориясымен байланыстырады. Энтропиялық шешімдердің бар болуы, жалғыздығы және орнықтылығы сүзгілеу есептерін әрі қарай сандық әдістермен зерттеу үшін берік теориялық негіз қалайды. Атап айтқанда, бұл қасиеттер жойылатын тұтқырлыққа негізделген сандық схемалардың жинақтылығын талдауда негізгі рөл атқарады.

Осылайша, 2.1–2.3-теоремалар кеуекті ортадағы екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысын сипаттайтын гиперболалық модельдің математикалық дұрыстығын ғана емес, сонымен қатар оның физикалық мағынаға ие екендігін де көрсетеді. Бұл нәтижелер диссертацияның келесі бөлімдерінде қарастырылатын қолданбалы қойылымдар мен сандық эксперименттердің теориялық негізін құрайды.

## **2.2 Бірөлшемді екіфазалық сүзгілеу есебінің қолданбалы қойылымы**

Бұл бөлімде 2.1-бөлімде алынған теориялық нәтижелердің мұнай-газ инженериясындағы қолданбалы мағынасы бірөлшемді екіфазалық сүзгілеу есебінің нақты қойылымы арқылы көрсетіледі. Қарастырылатын модель Бакли – Леверетт теңдеуіне негізделеді және жойылатын тұтқырлық әдісінің физикалық интерпретациясын беруге мүмкіндік жасайды.

### *Жойылатын тұтқырлық параметрінің физикалық интерпретациясы*

Бакли – Леверетт теңдеуіне тұтқырлық мүшесін енгізу бастапқыда формаль математикалық тәсіл болып көрінгенімен, оның айқын физикалық мағынасы бар. Нақты кеуекті ортада флюидтердің қозғалысы ешқашан идеал гиперболалық модельге дәл сәйкес келмейді, себебі микродеңгейде диссипациялық әсерлер, фазааралық үйкеліс, кеуек геометриясының біртектілігі және капиллярлық күштер әрқашан орын алады.

Осы тұрғыдан алғанда, жойылатын тұтқырлық параметрі  $\varepsilon$  кеуекті ортаның микроскопиялық деңгейдегі «тегістеу» әсерін модельдейді.  $\varepsilon \neq 0$  болғанда Бакли – Леверетт теңдеуі параболалық типке ауысып, шешімдердің кеңістіктік тегістігін қамтамасыз етеді. Бұл тегістеу нақты физикалық процестегі соққы фронтының шексіз жіңішке емес, белгілі бір өтпелі аймаққа ие болуын сипаттайды.

$\varepsilon \rightarrow 0$  шегінде өтпелі қабаттың қалыңдығы  $O(\varepsilon)$  тәртібімен азаяды, ал шешім гиперболалық теңдеудің энтропиялық шешіміне жинақталады. Мұндай жинақталу физикалық тұрғыдан флюид ағысында диссипациялық әсерлердің азаюымен бірге фронттың айқынырақ қалыптасуын білдіреді. Дегенмен, тіпті  $\varepsilon$  өте кіші болған жағдайда да, оның болуы шешімнің дұрыс таңдалуын қамтамасыз етеді.

Мұнай-газ инженериясында бұл жағдай келесідей интерпретацияланады: сүзгілеу процесінде судың мұнайды ығыстыру фронты идеал секіріс түрінде емес, белгілі бір қалыңдықтағы аймақ ретінде таралады. Бұл аймақтың құрылымы флюидтердің тұтқырлықтарына, салыстырмалы өтімділіктерге және кеуекті ортаның қасиеттеріне тәуелді. Жойылатын тұтқырлық әдісі осы

факторлардың жинақталған әсерін бір параметр арқылы тиімді сипаттауға мүмкіндік береді.

Сонымен қатар, жойылатын тұтқырлық әдісі сандық есептеулер тұрғысынан да маңызды рөл атқарады. Тұтқырланған теңдеу үшін классикалық ақырлы-айырымдық немесе ақырлы-көлемдік схемалар орнықты және жинақталғыш болады. Ал  $\varepsilon \rightarrow 0$  шегіндегі жинақталу энтропиялық шешімге сәйкес келетіні 2.1-бөлімде дәлелденген нәтижелермен негізделеді. Бұл сандық шешімдердің физикалық тұрғыдан мағыналы болуын қамтамасыз етеді.

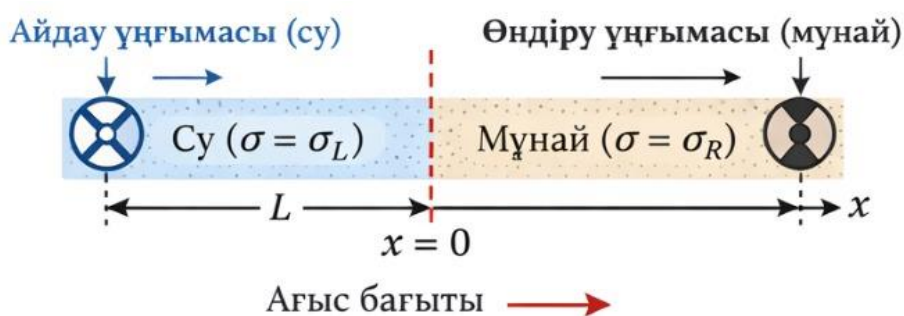
Осылайша, жойылатын тұтқырлық параметрі тек математикалық реттеуші емес, кеуекті ортадағы екіфазалық сүзгілеу процесінің нақты физикалық ерекшеліктерін бейнелейтін маңызды модельдік элемент болып табылады. Бұл түсінік келесі бөлімдерде қарастырылатын сандық модельдер мен қолданбалы есептердің интерпретациясында негізгі рөл атқарады.

Горизонталь ұңғымалар жүйесі үшін сүзгілеу процесін бір кеңістіктік айнымалы арқылы сипаттау адекватты жуықтау болып табылады. Мұндай жағдайда Риман типті бастапқы деректер табиғи түрде пайда болады, ал шешімде соққы толқындары қалыптасады.

#### *Геометриялық қойылым және сүзгілеу сұлбасы*

Айдау және өндіру ұңғымалары мұнай қабатында бір-біріне параллель және бір горизонталь жазықтықта орналасқан деп есептейік. Айдау ұңғымалары арқылы ығыстырушы флюид (*әдетте су*) қабатқа беріледі, ал өндіру ұңғымалары арқылы мұнай қоспасы сыртқа шығарылады. Мұндай орналасу бірөлшемді сүзгілеу есебін қарастыруға мүмкіндік береді (2.1-сурет).

Кеңістіктік координата ретінде  $x$  айнымалысын енгізейік және ол гидравликалық үзіліс жарықшақтарына перпендикуляр бағытталған. Кеуекті ортаның өтімділігі  $x$  бойымен өзгермейді деп қабылданады.



2.1-сурет – Бірөлшемді екіфазалық сүзгілеу сұлбасы  
([21] жұмыстың физикалық қойылымы негізіндегі авторлық иллюстрация)

#### *Физикалық модель және негізгі болжамдар*

Қарастырылатын процесс – кеуекті ортадағы араласпайтын екі флюидтің (су мен мұнайдың) сүзгіленуі.

Модель келесі стандартты болжамдарға негізделеді:

- флюидтер сығылмайды;

- фазалар арасында масса алмасу жүрмейді;
- кеуекті орта біртекті және деформацияланбайды;
- сүзгілеу изотермиялық;
- капиллярлық қысым ескерілмейді.

Осы жағдайда фазалардың қозғалысы салыстырмалы фазалық өтімділіктер арқылы жалпыланған Дарси заңы бойынша сипатталады, ал суға қанықтылық функциясы  $\sigma(x, t)$  Бакли – Леверетт теңдеуіне бағынады [13–14].

*Риман типті бастапқы деректер және соққы фронты*

Практикалық жағдайларда айдау ұңғымасы маңында судың қанықтылығы жоғары, ал өндіру аймағында төмен болады. Бұл келесі Риман типті бастапқы шартқа әкеледі:

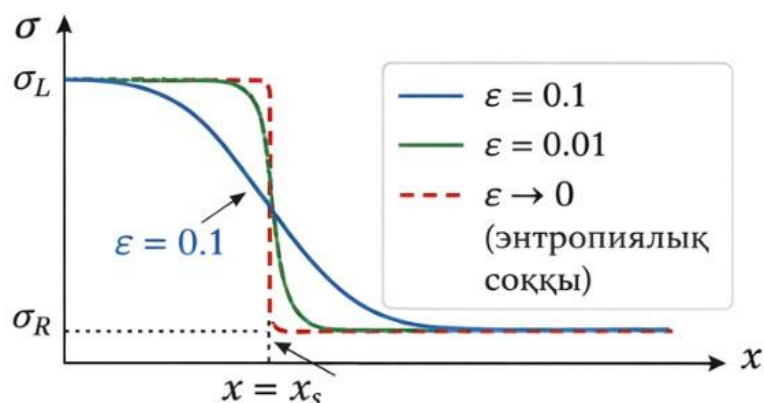
$$\sigma(x, 0) = \begin{cases} \sigma_L, & x < 0, \\ \sigma_R, & x > 0, \end{cases} \sigma_L > \sigma_R.$$

Бұл жағдайда Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімі соққы толқыны түрінде қалыптасады. Соққы фронтының жылдамдығы Ранкин – Гюгонио шартымен анықталады, ал шешімде қанықтылықтың секірісі пайда болады [13, 20].

*Тұтқыр саусақтар және ығыстыру орнықсыздығы*

Егер ығыстырушы флюидтің тұтқырлығы ығыстырылатын флюидке қарағанда төмен болса, сүзгілеу фронты орнықсыз болады. Мұндай жағдайда макроскопиялық тұтқыр саусақтар пайда болады (2.2-сурет): су мұнайды біркелкі ығыстырмай, жекелеген тар арналар арқылы жарып өтеді.

Бұл құбылыс алғаш рет Саффман – Тейлор орнықсыздығы ретінде сипатталған және Хеле – Шоу ұяшықтарындағы тәжірибелер арқылы бақыланған [20].



2.2-сурет – Араласпайтын флюидтерді ығыстыру кезіндегі тұтқыр саусақтардың пайда болу сұлбасы

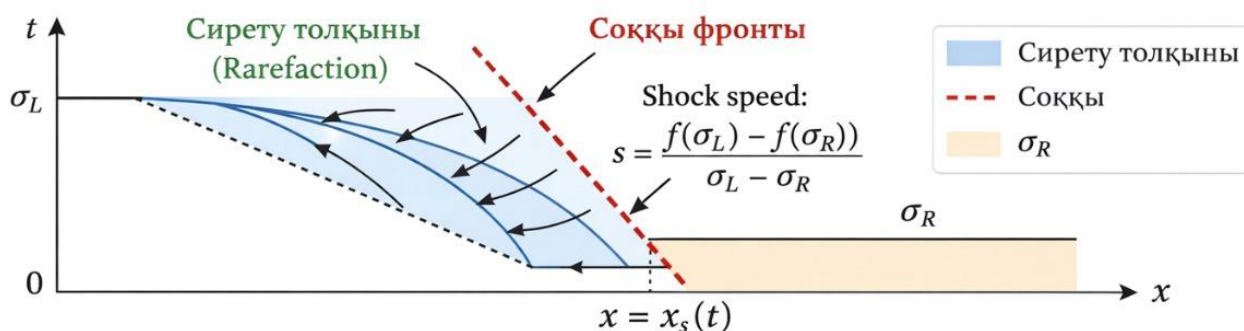
(Классикалық Саффман – Тейлор тәжірибелерінің физикалық интерпретациясы негізіндегі авторлық иллюстрация)

### Жойылатын тұтқырлық әдісінің физикалық мағынасы

Соққы фронты бар шешімдерді талдау үшін Бакли – Леверетт теңдеуіне аз тұтқырлық қосылады:

$$\partial_t \sigma + \partial_x f(\sigma) = \varepsilon \partial_{xx} \sigma.$$

Тұтқырлық мүшесі  $\varepsilon \partial_{xx} \sigma$  соққыны тегістеп, өтпелі қабаттың пайда болуына әкеледі (2.3-сурет).  $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде бұл қабат энтропиялық шешімдегі секіріске жинақталады, ал өтпелі аймақтың қалыңдығы  $O(\varepsilon)$  тәртібінде болады [25, 57].



2.3-сурет – Жойылатын тұтқырлық әдісіндегі соққы қабатының қалыптасу схемасы (Жойылатын тұтқырлық әдісінің геометриялық интерпретациясы негізіндегі авторлық иллюстрация)

Осы бөлімде 2.1-бөлімде алынған энтропиялық шешімдердің бар болуы, жалғыздығы және орнықтылығы нақты мұнай-газ қойылымында түсіндірілді. Риман типті бастапқы деректердің физикалық мағынасы ашылып, жойылатын тұтқырлық әдісінің соққы фронттарын дұрыс сипаттайтыны көрсетілді. Бұл қойылым келесі бөлімдерде сандық әдістер мен жуық шешімдерді зерттеуге негіз болады.

### 2.3 Екіфазалық ағыстардың моделі

Жоғарыда айтылғандай кеуекті ортадағы араласпайтын екіфазалық ағыс теориясы бірфазалық модельдердің салыстырмалы өтімділік концепциясы есебінен кеңейтілуіне негізделген. Ол фазааралық импульс алмасуды модельдеу үшін қанықтыру негізінде алынған өтімділік есебінен бекітілген орта қанықтылық үшін Дарси заңын имитациялайды.

Бұл бөлімде Дарси заңын кеңейтуге негізделген екіфазалық ағыс моделі ұсынылады. Модельге капиллярлық қысым әсері енгізіледі, бірақ ағыстағы айқас шарттар арқылы модельденетін фазааралық байланыс қосымша есепке алынады. Бакли – Леверетт теориясын келесі модельге тарату арқылы сандық эксперименттер келтіріліп, классикалық Дарси тәсілімен салыстырылады.

#### Есептің математикалық қойылуы

Сығылмайтын флюидтің кеуекті ортадағы ығыстырылып шығарылуы зерттеледі. Мұнай және су фазалары үшін массаның сақталу заңы, сәйкес  $S_o$  және  $S_w$  былай берілсін:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_o S_o \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o v_o) = 0, \\ \frac{\partial \rho_w S_w \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w v_w) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

мұндағы  $\phi$  – кенорнының (коллектордың су мен мұнай өтетін қабаттағы жолдар) тиімді кеуектілігі,  $\rho_o, S_o$  және  $\rho_w, S_w$  – сәйкес мұнай мен судың тығыздығы мен қанықтылығы,  $v_o, p_o$  және  $v_w, p_w$  – сәйкес мұнай мен су фазаларының келтірілген жылдамдығы мен қысымы.

Бұл жүйе алдыңғы бөлімдерде түсіндіріліп өткендей төмендегі табиғи физикалық шектеумен толықтырылады:

$$S_o + S_w = 1. \quad (2.2)$$

Бұл жерде мұнай мен судың қалдық қанықтылығын олар қосымша қиындықтар тудырмайтындықтан ескермейміз. Шынында, мұндай қанықтылықты есепке алу  $S_o$  және  $S_w$  мәндерін келтірілген қанықтылық

$$\begin{cases} S_o^* = \frac{S_o - S_o^{min}}{S_o^{max} - S_o^{min}}, \\ S_w^* = \frac{S_w - S_w^{min}}{S_w^{max} - S_w^{min}} \end{cases}$$

мәндерімен ауыстыруға алып келетін еді. Көптеген инженерлік есептерде, әсіресе, кенорындарын жасауда мұнай мен су фазаларының жылдамдықтары Дарси заңына бағынады деп қабылданады, яғни

$$\begin{cases} v_o = -\bar{k} \frac{k_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g), \\ v_w = -\bar{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g) \end{cases}$$

теңдіктері орындалады, мұндағы  $g$  – еркін түсу үдеуі векторы,  $\mu_o$  мен  $\mu_w$  – мұнай мен судың сәйкес тұтқырлықтары,  $\bar{k}$  – абсолютті өтімділік тензоры,  $k_{ro}$ ,  $k_{rw}$  – айқас фазалық өтімділіктер, олар фазааралық импульс алмасуды сипаттайды.

Осы сәттен бастап, баяндау анық болып шығу үшін ағын горизонталь бағытты бойлай, айталық  $x$  осінің бағытымен, бірөлшемді деп алынады, яғни  $g = 0$  есептейміз және  $v_o$  мен  $v_w$  жылдамдықтарында тек абцисса, яғни  $x$  компонентасын қарастырамыз. Жылдамдықтарды бұрынғыша  $v_o$  мен  $v_w$  деп белгілей отырып, Дарсидің кеңейтілген жүйесі құрылады:

$$\begin{cases} v_o = -k \frac{kr_o}{\mu_o} \frac{\partial p_o}{\partial x} - k \frac{kr_{o,w}}{\mu_o} \frac{\partial p_w}{\partial x}, \\ v_w = -k \frac{kr_w}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} - k \frac{kr_{w,o}}{\mu_w} \frac{\partial p_o}{\partial x}. \end{cases}$$

Әрі қарай осы жүйедегі параметрлер, дәлірек айтсақ  $kr_o, kr_w, kr_{o,w}, kr_{w,o}$  – тек суға қанықтылыққа тәуелді функциялар деп есептелінеді. Айта кететін болсақ,  $kr_w, kr_{o,w}$  мәндерін тәжірибелік жолмен анықтауға болатын алмасу коэффициенттері деп түсіндіруге болады [88].

Соңғы жүйенің алдыңғы дәстүрлі жүйеден айырмашылығы қысымның айқас-мүшелерін қосумен ерекшелінетіні айқын. Осыған қосымша тағы бір маңызды – капиллярлық қысым ұғымын қарастырамыз. Капиллярлық қысым ылғалданбайтын фаза (*мұнай*) мен ылғалданатын фаза (*су*) қысымдарының айырымы ретінде анықталады:

$$p_{c,o,w} = p_o - p_w. \quad (2.3)$$

Капиллярлық қысым, әдетте, суға қанықтылықтың функциясы болып табылады:

$$p_{c,o,w} = p_c(S_w),$$

мұндағы  $p_c(\cdot)$  – тәжірибелік жолмен анықталатын функция. Бұл тәуелділік кеуекті ортаның геометриялық құрылымын, фазааралық кернеуді және ылғалдану қасиеттерін жинақтап сипаттайды.

*Біріктірілген жылдамдық және толық ағыс*

Толық сүзгілеу жылдамдықты  $u = v_o + v_w$  деп анықтаймыз. Кеңейтілген Дарси заңдарын пайдаланып, толық жылдамдық келесі түрде жазылады:

$$u = -k \left( \lambda_o(S_w) \frac{\partial p_o}{\partial x} + \lambda_w(S_w) \frac{\partial p_w}{\partial x} + \lambda_{ow}(S_w) \frac{\partial p_w}{\partial x} + \lambda_{wo}(S_w) \frac{\partial p_o}{\partial x} \right),$$

мұндағы

$$\lambda_o = \frac{kr_o}{\mu_o}, \lambda_w = \frac{kr_w}{\mu_w}, \lambda_{ow} = \frac{kr_{o,w}}{\mu_o}, \lambda_{wo} = \frac{kr_{w,o}}{\mu_w}$$

– фазалық және айқас қозғалғыштық коэффициенттері.

Капиллярлық қысым анықтамасын пайдаланып,

$$\frac{\partial p_o}{\partial x} = \frac{\partial p_w}{\partial x} + \frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x}$$

аламыз. Осы өрнекті толық жылдамдық формуласына қойып, қысым градиенті мен қанықтылық градиентін бөлек шығарамыз.

*Қанықтылықтың эволюциялық теңдеуі*  
Судың массасының сақталу заңынан

$$\frac{\partial(\phi S_w)}{\partial t} + \frac{\partial u_w}{\partial x} = 0$$

теңдеуін алып,  $u_w$  жылдамдығын толық жылдамдық  $u$  арқылы өрнектейміз.

Нәтижесінде су қанықтылығы үшін келесі теңдеу алынады:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u \frac{\partial f(S_w)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S_w) \frac{\partial S_w}{\partial x} \right), \quad (2.4)$$

мұндағы

$$f(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w)}$$

– Бакли – Леверетт ағын функциясының кеңейтілген түрі, ал

$$D(S_w) = k \frac{\lambda_o(S_w) \lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w)} \frac{dp_c}{dS_w}$$

– капиллярлық диффузия коэффициенті.

*Модельдің математикалық табиғаты*

(2.4) теңдеуі конвекция–диффузия типті сызықты емес теңдеу болып табылады. Егер капиллярлық қысым ескерілмесе ( $dp_c/dS_w = 0$ ), онда диффузиялық мүше жойылып, классикалық Бакли – Леверетт теңдеуі алынады:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u \frac{\partial f(S_w)}{\partial x} = 0,$$

ал капиллярлық қысым ескерілген жағдайда, модель табиғи түрде тұтқырланған гиперболалық теңдеуге айналады, бұл шешімдердің тегістігін қамтамасыз етеді және соққы қабаттарының құрылымын сипаттауға мүмкіндік береді.

Осылайша, алынған модель классикалық Бакли – Леверетт теориясын кеңейтіп, фазааралық импульс алмасуды, капиллярлық әсерлерді және қанықтылықтың диффузиялық тегістелуін біртұтас математикалық қойылымда біріктіреді.

*Капиллярлық қысым мен жойылатын тұтқырлықтың өзара байланысы*

Кеуекті ортадағы екіфазалық сүзгілеу процесінде капиллярлық қысым маңызды рөл атқарады және ол суға қанықтылықтың функциясы ретінде анықталады. Бұл тәуелділік кеуек геометриясының күрделілігін, фазааралық

кернеуді және ылғалдану қасиеттерін жинақтап сипаттайды. Математикалық тұрғыдан капиллярлық қысым қанықтылықтың кеңістіктік градиенттері арқылы қосымша диффузиялық мүшенің пайда болуына әкеледі.

Алынған (2.4) теңдеуде капиллярлық қысым әсері диффузия коэффициенті  $D(S_w)$  арқылы көрінеді. Бұл коэффициент су мен мұнай фазаларының қозғалғыштықтарына және капиллярлық қысымның қанықтылық бойынша туындысына тәуелді. Нәтижесінде модель конвекция–диффузия типті сызықтық емес теңдеуге айналады, мұнда диффузиялық мүше шешімнің тегістігін қамтамасыз етеді.

Жойылатын тұтқырлық әдісі тұрғысынан алғанда, капиллярлық қысым енгізетін диффузиялық әсер тұтқырлық мүшесіне ұқсас реттеуші рөл атқарады. Басқаша айтқанда,  $\varepsilon \partial_{xx} S_w$  мүшесі мен капиллярлық қысымнан туындайтын диффузия физикалық тұрғыдан бір бағытта әсер етеді: олар соққы фронтының шексіз жіңішке секіріс ретінде емес, белгілі бір қалыңдықтағы өтпелі аймақ ретінде қалыптасуына мүмкіндік береді.

Бұл ұқсастық жойылатын тұтқырлық әдісінің тек жасанды математикалық тәсіл емес екенін көрсетеді. Керісінше, ол нақты физикалық процестегі капиллярлық және диссипациялық әсерлердің жинақталған моделін береді.  $\varepsilon \rightarrow 0$  шегінде диффузиялық әсер әлсірейді, бірақ энтропиялық шешімнің таңдалуы сақталады, бұл модельдің физикалық адекваттылығын қамтамасыз етеді.

Мұнай-газ кен орындарын игеру есептерінде капиллярлық қысымның әсері кей жағдайда еленбеуі мүмкін, мысалы, ірі масштабты горизонталь ағыстарда. Дегенмен, микроскопиялық деңгейде немесе төмен жылдамдықты сүзгілеу режимдерінде бұл әсер шешім құрылымына елеулі ықпал етеді. Осы себепті жойылатын тұтқырлық әдісі капиллярлық қысым ескерілмейтін және ескерілетін модельдер арасындағы табиғи көпір ретінде қарастырылуы мүмкін.

Осылайша, 2.3-бөлімде алынған модель жойылатын тұтқырлық әдісінің физикалық негізін тереңдетіп қана қоймай, Бакли – Леверетт теңдеуінің кеңейтілген түрін нақты инженерлік интерпретациямен байланыстырады. Бұл байланыс келесі бөлімдерде қарастырылатын сандық жуықтаулар мен есептеу алгоритмдерінің сенімділігін негіздеуге мүмкіндік береді.

## **2.4 Екіфазалық ағыстарды сүзгілеу есебі**

Екіфазалық араласпайтын флюидтер ағыстары химиялық технологияда, мұнай-газ инженериясында, гидрогеологияда және жылуалмасу процестерінде кеңінен кездеседі. Мұндай жүйелерді сипаттау кезінде фазалардың өзара әсері, тұтқырлықтардың айырмашылығы, капиллярлық күштер және фазааралық бет динамикасы негізгі рөл атқарады. Осы факторлардың әрқайсысы ағын құрылымына, фронттың орнықтылығына және ығыстыру тиімділігіне елеулі ықпал етеді.

Бұл бөлімде келтірілген екіфазалық араласпайтын флюидтер ағыстарын модельдеу тәсілдерінің бір бөлігі автордың ағылшын тілінде жарияланған

жұмысындағы нәтижелер негізінде дайындалған және диссертацияның мақсатына сәйкес бейімделген [51].

Әдебиетте екіфазалық жүйелерді модельдеудің бірнеше негізгі бағыттары қалыптасқан. Олардың қатарына: Навье – Стокс теңдеулеріне негізделген толық гидродинамикалық модельдер; сұйықтық көлемі әдісі (*VOF*) арқылы фазалық шекараны қадағалау; фазалық өрістер әдісі (*PF*) арқылы интерфейсті үздіксіз өріс ретінде сипаттау; тегістелген бөлшектер әдісі (*SPH*) жатады.

Аталған әдістер интерфейстің күрделі морфологиясын, тамшылардың бірігуін немесе бөлінуін, сондай-ақ капиллярлық құбылыстарды егжей-тегжейлі сипаттауға мүмкіндік береді. Алайда мұндай модельдер жоғары есептеу шығындарын талап етеді және практикалық инженерлік есептерде әрқашан тиімді бола бермейді.

Кеуекті ортадағы сүзгілеу есептерінде, әсіресе мұнайды сумен ығыстыру процестерінде, модельді қарапайымдату маңызды. Мұндай жағдайда фазалардың қозғалысы жалпыланған Дарси заңы арқылы сипатталып, жүйе су қанықтылығы үшін алынатын бірөлшемді сызықты емес гиперболалық теңдеуге келтіріледі. Бұл теңдеу Бакли – Леверетт моделі ретінде белгілі.

Бакли – Леверетт теңдеуі фракциялық ағыс функциясының сызықты емес сипатына байланысты үзілісті шешімдерге ие болуы мүмкін. Мұндай шешімдер физикалық мағынаға ие болуы үшін қосымша таңдау шарты қажет. Осы мақсатта жойылатын тұтқырлық әдісі қолданылады: гиперболалық теңдеуге кіші диффузиялық мүше енгізіліп,  $\varepsilon \rightarrow 0$  шегі қарастырылады. Бұл тәсіл энтропиялық шешімді конструктивті түрде алуға және соққы фронтының микроқұрылымын сипаттауға мүмкіндік береді.

Осы бөлімде екіфазалық сүзгілеу есебі Риман типті бастапқы деректер жағдайында қарастырылып, соққы толқынының қалыптасу механизмі, жойылатын тұтқырлық әдісінің рөлі және алынған теориялық нәтижелердің сандық интерпретациясы талданады. Бұл қарастыру автордың бұрын жарияланған жұмыстарындағы нәтижелермен үйлеседі және оларды кеуекті ортадағы нақты сүзгілеу процестері тұрғысынан тереңдетеді [48–49].

#### **2.4.1 Риман типті бастапқы деректер және фронттың физикалық интерпретациясы**

Бірөлшемді екіфазалық сүзгілеу есебі мұнай қабатындағы су айдау процесін қарапайым, бірақ физикалық тұрғыдан адекватты модельдеу арқылы сипатталады. Айдау ұңғымасы маңында су қанықтылығы жоғары, ал өндіру аймағында бастапқы қанықтылық сақталады. Мұндай жағдай кеңістіктік айнымалы бойынша үзілісті бастапқы деректерге алып келеді.

Осыған сәйкес Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман типті бастапқы шарт қарастырылады:

$$S(x, 0) = \begin{cases} S_L, & x < 0, \\ S_R, & x > 0, \end{cases} \quad S_L > S_R,$$

мұндағы  $S_L$  – айдау аймағындағы су қанықтылығы,  $S_R$  – бастапқы қабат қанықтылығы.

Бұл қойылымның физикалық мағынасы айқын:

- сол жақта қабат суға қаныққан;
- оң жақта қабат бастапқы күйінде;
- уақыт өткен сайын су фронты қабат бойымен таралады.

Бакли – Леверетт теңдеуі сызықты емес гиперболалық теңдеу болғандықтан, мұндай бастапқы шарт үшін шешім, жалпы жағдайда, екі түрлі құрылымнан тұрады:

- сирету толқыны;
- соққы толқыны (*қанықтылық секірісі*).

Егер фракциялық ағыс функциясы  $f(S)$  дөңес болса, онда  $S_L > S_R$  жағдайында шешім соққы толқыны түрінде қалыптасады. Соққы фронтының жылдамдығы интегралдық тепе-теңдік шартынан (*Ранкин – Гюгонио шарты*) анықталады:

$$\sigma = \frac{f(S_R) - f(S_L)}{S_R - S_L}.$$

Бұл формуланың физикалық интерпретациясы келесідей: фронт жылдамдығы фракциялық ағыс функциясының сәйкес нүктелерін қосатын хорданың еңістігіне тең.

Соққы толқыны қанықтылықтың үзілісті өзгерісін сипаттайды, яғни қабатта судың таралуы біртекті емес, өткір фронт арқылы жүреді. Дәл осы фронт мұнайды ығыстыру процесінің негізгі динамикалық элементі болып табылады.

Алайда гиперболалық теңдеудің үзілісті шешімдері классикалық мағынада анықталмайды және қосымша энтропиялық шартты қажет етеді. Мұндай шартты конструктивті түрде алу үшін жойылатын тұтқырлық әдісі қолданылады. Бұл әдіс келесі бөлімде қарастырылады.

#### **2.4.2 Жойылатын тұтқырлық әдісі және соққы фронтының құрылымы**

Массаның сақталу заңдары мұнай және су фазалары үшін (2.1) теңдеулермен, ал табиғи физикалық шектеу (2.2) шартпен берілсін.

Бір кеңістіктік өлшемдегі сақталу заңдарының консервативті жүйесі үшін Коши есебі келесі түрде жазылады:

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{2.5}$$

$$u(0, x) = \tilde{u}(x), \tag{2.6}$$

мұндағы  $u = (u_o, u_w)$  – сақталатын шамалар векторы,  $f = (f_o, f_w)$  – сәйкес мұнай және су ағындары.

Алдыңғы бөлімдерде сақталу заңдары үшін энтропиялық шешімдердің бар болуы, жалғыздығы және жойылатын тұтқырлық шегі арқылы сипатталатыны негізделген. Осы нәтижелерге сүйене отырып, енді Бакли – Леверетт моделінің бірөлшемді қойылымында жойылатын тұтқырлық әдісін нақты қолданбалық есепке қолданамыз.

Жойылатын тұтқырлық әдісіне сәйкес гиперболалық теңдеуге кіші тұтқырлық қосылады:

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx}, \varepsilon > 0. \quad (2.7)$$

Сығылмайтын, араласпайтын флюидтердің бірөлшемді ағысы жағдайында капиллярлық қысым мен ауырлық күшінің әсерін елемей, Бакли – Леверетт моделін судың қанықтылығы  $s(x, t)$  үшін келесі түрде жазуға болады:

$$s_t + s s_x = \varepsilon s_{xx}. \quad (2.8)$$

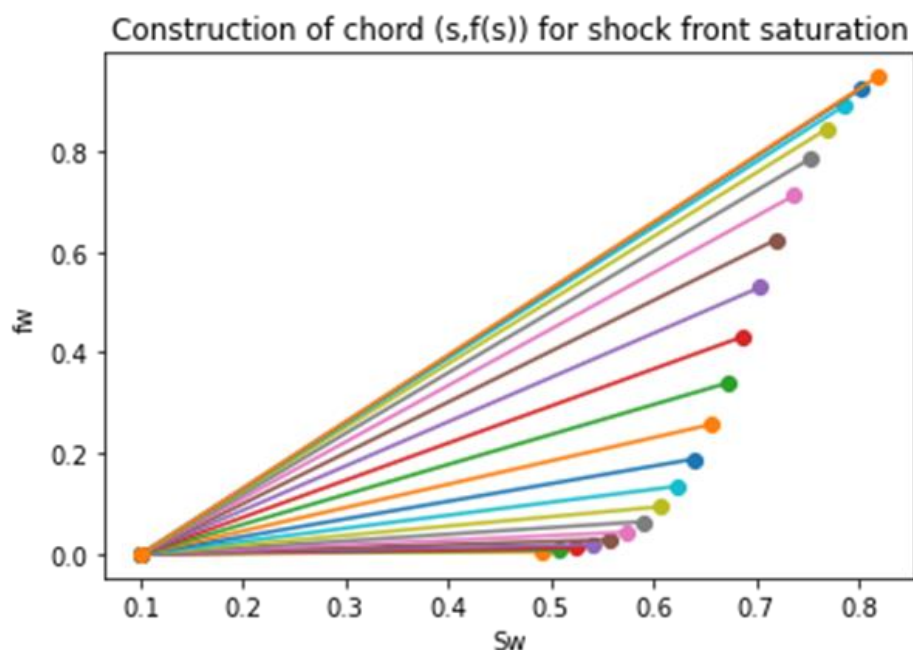
Бұл теңдеуде жойылатын тұтқырлық әдісін қолдану мақсатында Хопф – Коул түрлендіруі пайдаланылады. Нәтижесінде есеп жылу өткізгіштік теңдеуіне келтіріледі:

$$z_t = \varepsilon z_{xx}. \quad (2.9)$$

Тұтқырлық параметрі  $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде алынған шешімдер Бакли – Леверетт теңдеуінің үзілісті (соққы) шешіміне жинақталады. Соққы фронтының жылдамдығы интегралдық тепе-теңдік мағынасында Ранкин – Гюгонио шартымен анықталады:

$$\omega = \frac{F(s_+) - F(s_-)}{s_+ - s_-}. \quad (2.10)$$

Бұл шарттың геометриялық интерпретациясы бөлшек ағыс функциясының хордалары арқылы беріледі (2.4-сурет). Соққы фронтының пайда болуы мен оның бағыты  $F(s)$  функциясының дөңестігімен анықталады.



2.4-сурет –  $(s, F(s))$  жазықтығындағы қанықтыру фронтының хордаларының құрылымы  
(автордың [48] жұмысынан алынған)

*Жүгірмелі толқын шешімінің құрылымы және оның физикалық интерпретациясы*

Жойылатын тұтқырлық әдісінде соққы толқыны бар шешімдер жүгірмелі толқын типті автоталды шешімдер арқылы сипатталады. Бұл тәсілде шешім кеңістік пен уақыттан тәуелсіз бір айнымалыға көшу арқылы зерттеледі. Атап айтқанда,  $\xi = (x - \omega t)/\varepsilon$  ауыстыруын енгізу арқылы тұтқырланған Бакли – Леверетт теңдеуі екінші ретті автономды дифференциалдық теңдеуге келтіріледі.

Жүгірмелі толқын шешімі соққы фронтының микроқұрылымын сипаттайды. Энтропиялық шешімде фронт нөлдік қалыңдықтағы секіріс ретінде берілсе, тұтқыр есепте ол  $\varepsilon$  шамасындағы өтпелі қабат ретінде қалыптасады. Бұл өтпелі аймақта қанықтылық монотонды түрде сол жақ күйден оң жақ күйге ауысады.

Фазалық жазықтықта жүгірмелі толқын теңдеуін талдау профильдің бар болуы мен бірімділігін негіздейді. Ағын функциясының дөңестігі монотонды шешімнің бар болуын қамтамасыз етеді, ал Ранкин – Гюгоннио шарты фронттың таралу жылдамдығын анықтайды. Осылайша, жүгірмелі толқын профилі энтропиялық шешімдегі соққы толқынының «тегістелген нұсқасы» ретінде қарастырылады.

Физикалық тұрғыдан бұл өтпелі аймақ флюидтердің нақты кеуекті ортада бір-бірін ығыстыру процесін сипаттайды. Сүзгілеу кезінде су мен мұнай фазалары бір мезетте толық бөлініп кетпейді, олардың арасында қысым мен қанықтылық градиенттері бар шектеулі аймақ пайда болады. Жүгірмелі толқын профилі дәл осы аймақтың құрылымын модельдейді.

$\varepsilon$  параметрінің азаюымен өтпелі қабаттың қалыңдығы сызықты түрде кемиді, яғни  $\delta_\varepsilon = O(\varepsilon)$ . Бұл жойылатын тұтқырлық әдісінің негізгі

қасиеттерінің бірі болып табылады және тұтқыр жуықтаулардың энтропиялық шешімге жинақталуын түсіндіреді. Осы шекте жүгірмелі толқын шешімі үзілісті соққы толқынына айналады.

Осылайша, жүгірмелі толқын тәсілі Бакли – Леверетт моделіндегі соққы фронтының қалыптасуын тек математикалық емес, сонымен қатар физикалық тұрғыдан да түсіндіруге мүмкіндік береді. Бұл тәсіл жойылатын тұтқырлық әдісінің Риман есебі үшін табиғи және негізделген таңдау екенін көрсетеді.

Алынған шарттар бастапқы параметрлерді (2.1-кесте) ескере отырып, су айдау аймағындағы сүзгілеу процестерін реттеуге мүмкіндік береді.

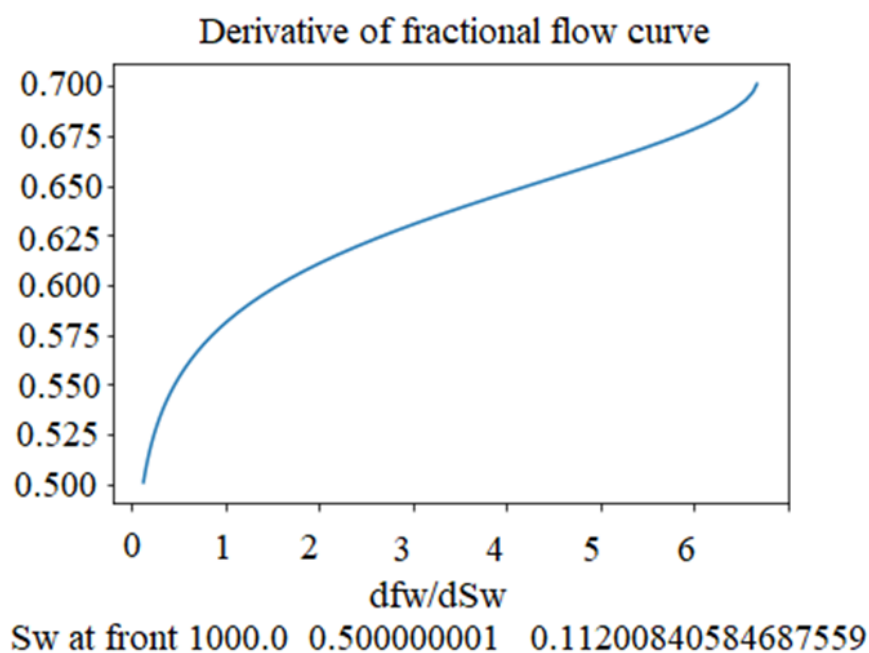
2.1-кесте – Бір өлшемді Бакли – Леверетт есебімен модельдеуде қолданылатын бастапқы деректер

Параметр - Parameter	Мәндер - Value
Кеуектілік (Porosity)	0.28
Мұнайдың тұтқырлығы (Oil viscosity)	1.e-4 kg/ms
Судың тұтқырлығы (Water viscosity)	0.5e-4 kg/ms
Мұнайдың тығыздығы (Oil density)	881 kg/m <sup>3</sup>
Судың тығыздығы (Water density)	1000 kg/m <sup>3</sup>
Берілген судың қанықтылығы үшін салыстырмалы судың өткізгіштігін есептеу (Water relative permcaculation for a given water saturation)	11.174
Берілген судың қанықтылығы үшін салыстырмалы мұнайдың өткізгіштігін есептеу (Oil relative permcaculation for a given water saturation)	3.326
Көлденең қиманың ауданы (Cross-sectional area)	0.4 m <sup>2</sup>

Осылайша, жойылатын тұтқырлық әдісі энтропиялық шешімді таңдаудың конструктивті механизмі болып табылады. Тұтқырланған есептің жүгірмелі толқын шешімдері соққы толқынының микроқұрылымын сипаттайды, ал  $\varepsilon \rightarrow 0$  шегінде алынған шешім Риман есебінің энтропиялық шешіміне жинақталады. Бұл нәтиже 2.1–2.3 теоремаларымен толық сәйкес келеді.

### 2.4.3 Риман есебі негізіндегі сандық жуықтаулар

Бакли – Леверетт моделіндегі есеп шешімінің қиындығы бөлшек ағыс функциясының иілу нүктесіне ие болуымен байланысты. Бұл жағдайда судың қанықтылығының екі түрлі мәніне сәйкес келетін режимдер пайда болады (2.5-сурет).

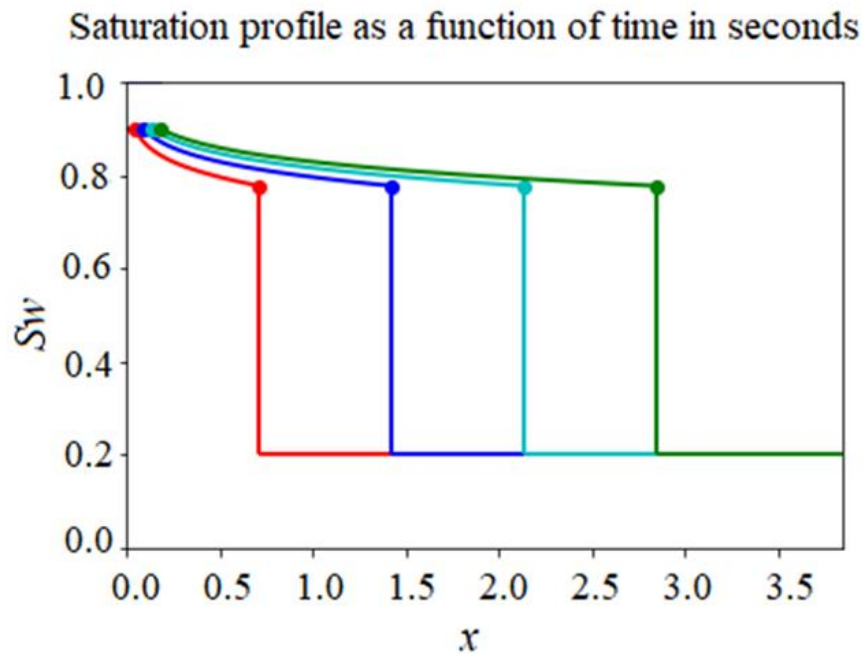


2.5-сурет – Бөлшек ағыстың туындысы  $\frac{df_w}{dS_w}$   
(автордың [48] жұмысынан алынған)

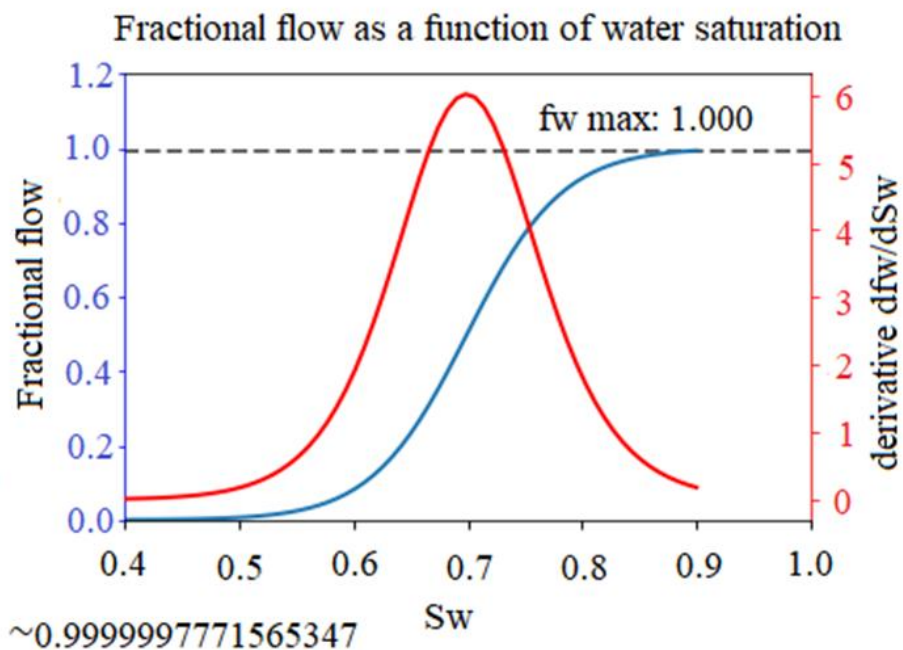
Сандық эксперименттер жойылатын тұтқырлық әдісін қолдану локальді шекке жинақтылықты қамтамасыз ететінін көрсетеді. Алынған есептеу нәтижелері 2.2-кесте мен 2.6–2.8-суреттерде келтірілген.

2.2-кесте – Эксперименттік мәліметтерді есептеу нәтижелері

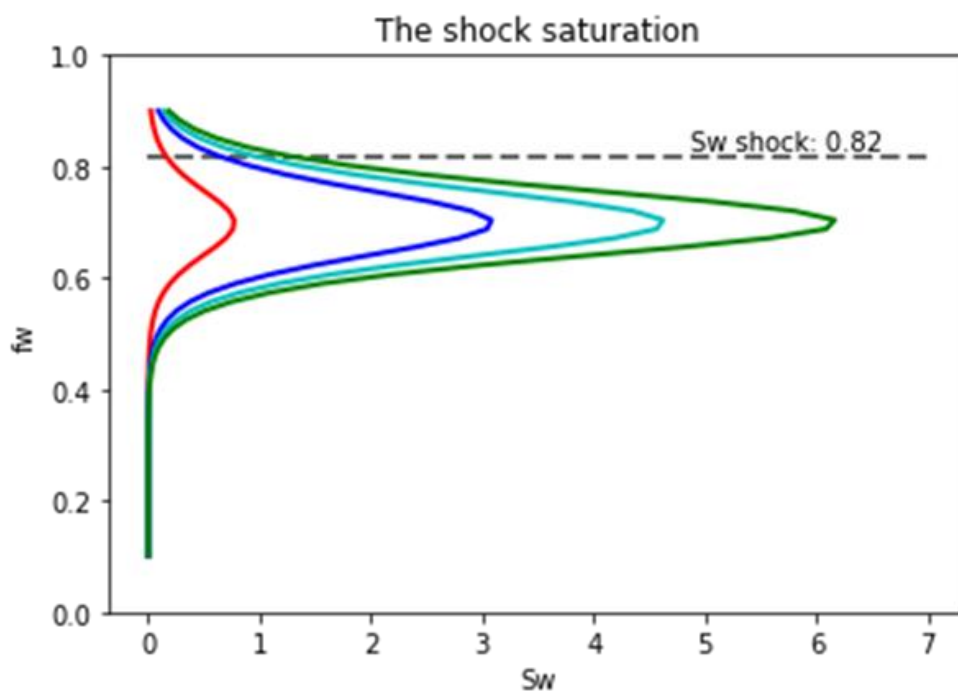
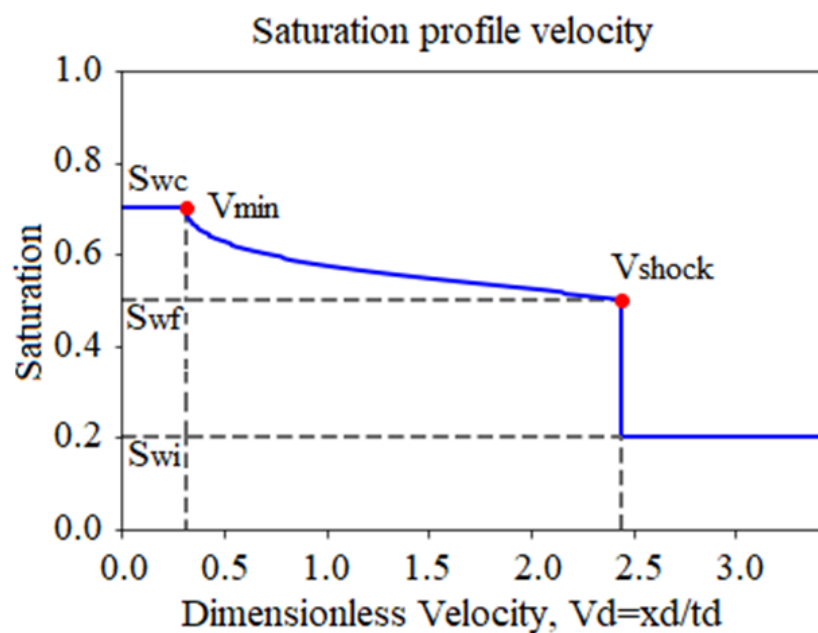
$S_w$	$\frac{df_s}{dS_w}$
0.500	0.152
0.525	0.313
0.550	0.487
0.575	0.889
0.600	1.519
0.625	2.721
0.650	4.219
0.675	5.817
0.700	6.613



2.6-сурет –  $t$  уақыты мен  $x$  координатасына тәуелді судың қанығу профилі  
(автордың [48] жұмысынан алынған)



2.7-сурет – Судың қанығуы бойынша бөлшектеп жарату қисығы  
Sw: қызыл –  $dfw/dSw$  туындысы; көк – бөлшектеп жарату  $fw$   
(автордың [48] жұмысынан алынған)



2.8-сурет – Соққы толқын және сирету толқындары аймақтарының қалыптасуы  
 а) бөлшек ағыстың графигі;  
 б) мұнай және су фазаларының классикалық графигі  
 (автордың [48] жұмысынан алынған)

Алынған сандық нәтижелер Бакли – Леверетт моделінің теориялық болжамдарымен толық сәйкес келеді және ұсынылған әдістің өткір фронттарды дұрыс дамытуға қабілетті екенін көрсетеді. Осылайша, жойылатын тұтқырлық әдісі екіфазалық сүзгілеу есептерінде қолданбалық тұрғыдан тиімді құрал болып табылады.

## 2.5 Екіфазалық ағыстарды сүзгілеудің кері есебі

Бұл бөлімде кеңістік айнымалысы бойынша белгісіз коэффициенті бар, үлкен уақыт туындысындағы кіші параметрі бар гиперболалық типті теңдеудің кері есебі зерттеледі. Ұсынылған модель мұнай-газ кен орындарын игеру кезінде қысым арқылы сүзгілеу процестерін басқаруға бағытталған. Қысым теңдеуі кеуекті ортаның технологиялық сипаттамаларын, соның ішінде қабат кеуектілігінің өзгерісін анықтауда маңызды рөл атқарады.

Ұсынылған теңдеуді жылу өткізгіштік теңдеуінің гиперболалық нұсқасы ретінде қарастыруға болады [89–90].

Негізгі мақсат – гиперболалық және параболалық қысым теңдеулерінің кері есептері шешімдерінің жақындығын бағалау [91].

*Есептің математикалық қойылымы*

$Q_T = \{(t, x, z) \mid 0 < t < T, 0 < x < x_0, |z| < \infty\}$  облысында қысымға қатысты теңдеуді қарастырайық:

$$\varepsilon P_{tt} + P_t = P_{xx} + P_{zz} + m(x, t)P_z, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (2.11)$$

мұндағы  $P(t, x, z, \varepsilon)$  – қысым,  $m(x, t)$  – қабаттың белгісіз кеуектілік коэффициенті.

*Бастапқы және шекаралық шарттар*

$$P(0, x, z, \varepsilon) = P_0(x, z), P_t(0, x, z, \varepsilon) = P_1(x, z), \quad (2.12)$$

$$P(t, 0, z, \varepsilon) = \mu_1(t, z), P(t, x_0, z, \varepsilon) = \mu_2(t, z), \quad (2.13)$$

$$P(t, x, 0, \varepsilon) = \varphi(t, x). \quad (2.14)$$

*Келісу шарттары:*

$$\mu_1(t, 0) = \varphi(t, 0), \mu_2(t, 0) = \varphi(t, x_0), P_0(x, 0) = \varphi(0, x). \quad (2.15)$$

$z$  айнымалысы бойынша Фурье түрлендіруін енгізейік:

$$P(t, x, z, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t, x, y, \varepsilon) e^{izy} dy.$$

Сонда (2.11) теңдеу:

$$\varepsilon \omega_{tt} + \omega_t = \omega_{xx} - y^2 \omega + im(x, t)y\omega. \quad (2.16)$$

$z = 0$  болғандағы қатынастарды пайдаланып:

$$im(x, t) = \frac{\varepsilon \varphi_{tt} + \varphi_t - \varphi_{xx} + \int y^2 \omega dy}{\int y \omega dy}. \quad (2.17)$$

Егер

$$\varepsilon \varphi_{tt} + \varphi_t - \varphi_{xx} = 0 \quad (2.18)$$

деп ұйғарсақ, онда негізгі теңдеу келесі түрге келеді:

$$\varepsilon \omega_{tt} + \omega_t = \omega_{xx} - y^2 \omega + y \omega \frac{\int y^2 \omega dy}{\int y \omega dy}. \quad (2.19)$$

*Бастапқы шарттар*

$$\omega(0, x, y, \varepsilon) = \omega_0(x, y), \omega_t(0, x, y, \varepsilon) = \omega_1(x, y). \quad (2.20)$$

*Шекаралық шарттар*

$$\omega(t, 0, y, \varepsilon) = \tilde{\mu}_1(t, y), \omega(t, x_0, y, \varepsilon) = \tilde{\mu}_2(t, y). \quad (2.21)$$

**2.4-теорема** (Шешімнің бар болуы туралы). Егер

$$\omega_0, \omega_1, \tilde{\mu}_k \in W_2^3,$$

$$y \omega_0 \geq 0,$$

$$\int y \omega_0 dy = \text{const} > 0$$

шарттары орындалса, онда  $\forall t \in [0, h]$  аралығында (2.19)–(2.21) есебінің жалғыз классикалық шешімі бар болады.

**Тұтқырлық параметрі  $\varepsilon$  нөлге ұмтылғандағы шектік жағдай.**

$\tilde{P}, \tilde{m} - \varepsilon = 0$  жағдайындағы шешімдер болсын.

Айырымдарды енгізейік:

$$v = P - \tilde{P}, \bar{m} = m - \tilde{m}, z = \omega - \tilde{\omega}.$$

Онда келесі бағалаулар орындалады:

$$|v| \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad (2.22)$$

$$|\bar{m}(x, t)| \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.23)$$

**2.5-теорема** (Шешімнің жалғыздығы). Егер (2.19)–(2.21) есебінің тегіс шешімі бар болып, келесі

$$|\int y \omega dy| = \text{const} > 0$$

шарты орындалса, онда шешім жалғыз болады.

**Дәлелдеуі.** Гельдер, Коши, Пуанкаре – Фридрихс теңсіздіктері және Гронуолл леммасы қолданылады.

(2.22)–(2.23) бағалаулар гиперболалық кері есептің шешімі  $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде параболалық есептің шешіміне ұмтылатынын көрсетеді.

Бұл нәтиже екіфазалық сүзгілеу процестерін қысым арқылы реттеу кезінде гиперболалық модельді параболалық модельмен салыстырудың теориялық негізін құрайды.

Бұл бөлімдегі нәтижелер автордың жұмысында [59] жарияланған.

## 2.6 Сүзгілеу теориясымен сабақтас қолданбалы есептер

Бұл бөлімде диссертацияның негізгі мазмұнын толықтыратын және сүзгілеу теориясымен сабақтас қолданбалы есептер қысқаша қарастырылады. Олардың мақсаты – кеуекті ортадағы флюидтер ағысын модельдеудің кең ғылыми-қолданбалы аясын көрсету және автордың осы бағыттағы зерттеулерінің сабақтастығын айқындау.

### 1) Есептердің негізгі түрлері

#### *Екіфазалық ағындарды модельдеу*

Соңғы зерттеулерде [92–95] араласпайтын сұйықтықтардың ағысын модельдеуге қатысты жұмыстар қарастырылған. Бұл есептер қысымның, жылдамдықтың, температураның және фазалардың мінез-құлқының кеңістіктік-уақыттық үлестірімін анықтауды қамтиды [96–97].

Бату коэффициентінің эрлифт қондырғысының сипаттамаларына әсерін зерттегенде, құбыр ұзындығы тұрақты сақталып, сұйықтық шығыны өлшенеді. Эрлифт насосының сұйықтықты көтеру кезіндегі *стационар емес* табиғатына байланысты тәжірибе жүзінде өлшенген сұйықтық шығыны белгілі бір мәндердің маңайында тербеліп отырады, сондықтан анағұрлым орнықты нәтижелерге сұйықтық шығынын *уақыт бойынша орташалау (TA)* арқылы қол жеткіземіз:

$$TA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX P_i. \quad (2.24)$$

Құбыр ішіндегі ауаның ұлғаюы *изотермиялық* болғандықтан, насостың кіріс энергиясы – ауаны сығуға қажет энергия, ал шығыс жұмысы – сұйықтықтың гравитациялық потенциалдық энергиясы. Пайдалы әсер коэффициенті (*ПӘК*) шығыс жұмыстың кіріс энергиясына қатынасы ретінде анықталады:

$$\eta = \frac{\rho g Q_L (L - H)}{P_a Q_G \ln \left( \frac{P_{in}}{P_a} \right)}, \quad (2.25)$$

мұндағы  $Q_L$  – сұйықтықтың көлемдік шығыны,  $Q_G$  – газдың көлемдік шығыны,  $P_{in}$  – ауаның кіріс қысымы,  $\rho$  – сұйықтықтың тығыздығы,  $P_a$  – атмосфералық қысым.

$L = 2.8, 2.5, 2.0$  м жағдайларында батырылу коэффициенттері бойынша сұйықтықтың беткі жылдамдығы мен газдың беткі жылдамдығы арасындағы тәуелділік талданады. Осы талдауға сүйене отырып, эрлифт насостарын тиімділікті арттыру үшін батырылу коэффициенті жоғары аймақтарда пайдалану ұсынылады. Сұйықтық шығынының максимум мәні мен ПӘК-нің ең жоғарғы мәні әрқашан бір мезетте орындала бермейді, сондықтан өндірістік жағдайда қажетті газ шығынын объект талаптарына сай таңдап, не максимал тиімділікті, не максимал сұйықтық берілісін қамтамасыз ету керек.

Ұсынылған модель газ шығыны үлкен болғанда айтарлықтай қателік береді. Осы аймақта дәлдікті арттыру үшін, құбыржолдағы шығындарды ескеретін модель негізінде эрлифт насосын есептеудің неғұрлым дәл әрі ықшамдалған формуласын ұсыну қажеттігі туындайды. Газды айдау интерфейсі мен сұйықтықтың горизонталь деңгейі үшін Бернулли теңдеуі төмендегідей жазылады:

$$P_1 = P_a + \rho_L g H + \frac{\rho_L}{2} (V_3^2 - V_1^2) - W_h - W_j, \quad (2.26)$$

$$W_h = \sum_{i=1}^n \frac{l_i f V_i^2 \rho_L}{2 D_i}, \quad W_j = \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j V_j^2 \rho_L}{2}.$$

мұндағы  $P_1$  және  $P_a$  – қимадағы қысым және атмосфералық қысым ( $\text{Н/м}^2$ );  $\rho_L$  – сұйықтық тығыздығы ( $\text{кг/м}^3$ );  $g$  – еркін түсу үдеуі ( $\text{м/с}^2$ );  $H$  – газ кіріс тесігі мен сұйықтықтың горизонталь деңгейі арасындағы арақашықтық;  $V_1$  және  $V_3$  – сәйкес қималардағы сұйықтық жылдамдықтары ( $\text{м/с}$ );  $W_h$  – құбыржол бойындағы үйкеліс шығындары,  $W_j$  – жергілікті шығындар,  $\varepsilon_1 = 0.3$ ,  $\varepsilon_2 = 0.5$ ,  $\varepsilon_3 = 0.45$ ,  $\varepsilon_4 = 1$ ;  $f$  – құбыр үйкеліс коэффициенті;  $l$  – құбыр ұзындығы ( $\text{м}$ );  $D$  – құбырдың көлденең қимасының ауданы ( $\text{м}^2$ );  $\varepsilon$  – жергілікті шығын коэффициенті;  $i$  және  $j$  төменгі индекстері құбырдың  $i$ -ші және  $j$ -ші учаскелерін көрсетеді. Ұзындықтар:  $l_1 = 3.254 + H - L$  м,  $l_2 = 0.15$  м,  $l_3 = 0.2$  м,  $l_4 = 0.35$  м.

Инжекторда газ көлемдік шығынмен айдалады. Инжектордан шығатын қоспа жылдамдығы  $V_2$  деп алынып, газ тығыздығының өзгерісі еленбесе, көлемдік үздіксіздік теңдеуі:  $AV_2 = Q_G + AV_1 = Q_G + Q_L$ , осыдан  $V_2 = \frac{Q_G}{A} + V_1 = V_1 \left(1 + \frac{Q_G}{Q_L}\right)$ , мұндағы  $A$  – құбырдың көлденең қимасының ауданы.

Газ айдау портында газ тығыздығы сұйықтыққа қарағанда әлдеқайда аз болғандықтан, газдың массалық шығынын сұйықтықтың массалық шығынымен салыстырғанда елемеуге болады. Үздіксіздік теңдеуі бойынша:  $\rho_2 AV_2 = \rho_L AV_1$ ,

сондықтан  $\rho_2 = \rho_L \frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_L}{\left(1 + \frac{Q_G}{Q_L}\right)}$ , мұндағы  $\rho_2$  – газ кірісінен кейін шығатын қоспаның тығыздығы (кг/м<sup>3</sup>).

Инжекторды басқарушы көлем ретінде алып, импульс теңдеуін қолдансақ:

$$P_2 = P_1 - \rho_L V_1 (V_2 - V_1) = P_1 - \rho_L V_1 \frac{Q_G}{A}. \quad (2.27)$$

(2.26) және (2.27)-ды біріктірсек:

$$P_2 = P_a + \rho_L g H + \frac{\rho_L}{2} (V_3^2 - V_1^2) - W_h - W_j - \rho_L V_1 \frac{Q_G}{A}.$$

Сонымен қатар, газ айдау портынан жоғары орналасқан екіфазалық газ-сұйық аймақ үшін импульс теңдеуі:

$$P_2 = P_a + K \frac{\rho_L V_1^2}{2} \left(1 + \frac{Q_G}{Q_L}\right) + \frac{\rho_L g L}{\left(1 + \frac{Q_G}{s Q_L}\right)}, \quad (2.28)$$

мұндағы  $K = \frac{4fL}{D}$ , ал сырғу коэффициенті:  $s = \frac{V_G}{V_L} = 1.2 + 0.2 \frac{Q_G}{Q_L} + \frac{0.35\sqrt{gD}}{V_1}$ .

Тәжірибелік нәтижелер сұйықтық шығынының бастапқыда газ шығыны артқан сайын өсіп, кейін тұрақтанатынын көрсетеді, ал сұйықтық шығынының ең үлкен мәні міндетті түрде ең жоғары тиімділікке сәйкес келмеуі мүмкін.

*Екі сұйықтық шекарасындағы интерфейс динамикасы*

Екі фазаның шекарасындағы құбылыстарға тамшының бөлінуі, қосылуы, пішінінің өзгеруі, көпіршіктердің эволюциясы жатады [98–100]. Интерфейсті бақылау үшін VOF (*Volume of Fluid – көлемдік үлес*), Phase-Field (*фазалық өріс*), SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics – тегістелген бөлшектер*) сияқты әдістер жиі қолданылады.

Араласпайтын, сығылмайтын екіфазалық ағында басқарушы теңдеулер ретінде әдетте: үздіксіздік теңдеуі (*масса сақталуы*); импульс теңдеуі (*Навье–Стокс*) қарастырылады.

*Беттік керілу моделі*

Интерфейстік күштер маңызды болғанда, беттік керілуді елемеуге болмайды. Ол көбіне CSF (*Continuum Surface Force – беттік күш*) моделімен енгізіледі:  $f_{CSF} = \sigma k n \delta$ , мұндағы  $\sigma$  – беттік керілу коэффициенті,  $n$  – нормаль,  $k$  – қисықтық,  $\delta$  – Дирак дельта функциясы (*тәжірибеде  $\delta \approx |\nabla F|$ ,  $n = \nabla F / |\nabla F|$  сияқты жуықтаулар қолданылады*).

*Капиллярлық және беттік құбылыстарды модельдеу*

Капиллярлық құбылыстар екіфазалық жүйелерді сүзгілеу динамикасында маңызды рөл атқарады. Жіңішке түтікшелердегі судың капиллярлық көтерілуі,

сондай-ақ фазалар шекарасындағы тамшылардың өзара әрекеттесуі сияқты құбылыстар көптеген еңбектерде зерттелген [101–103].

Капиллярлық күштерді есепке алу үшін фазалық өріс (*Phase-Field*) модельдері қолданылады, сондай-ақ *беттік керілу* теңдеулері және *Ван-дер-Ваальс күштері* енгізіледі. Мысалы, қалыңдығы  $H$  болатын сұйық қабықша екі параллель бет арасында орналасса, екі беттің арасындағы молекулааралық тартылыс (*Ван-дер-Ваальс*) әсері беттегі *нормаль кернеу* түрінде немесе қабықша ішіндегі *ажыратушы қысым* (*disjoining pressure*) ретінде сипатталуы мүмкін.

Лагранж жүйесінде әлсіз сығылатын тұтқыр ағысты сипаттайтын негізгі теңдеулер [104–105] төмендегідей:

$$\frac{dp}{dt} = -\rho \nabla \cdot u, \quad (2.29)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \nabla \cdot \sigma + F_s + F_g, \quad (2.30)$$

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad (2.31)$$

мұндағы  $\rho$  – тығыздық,  $t$  – уақыт,  $u$  – жылдамдық,  $\sigma$  – толық кернеулер тензоры,  $x$  – кеңістіктегі орын.  $F_s$  және  $F_g$  – сәйкесінше бірлік көлемге келтірілген *беттік керілу күштері* және *Ван-дер-Ваальс күштері*. Ал  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$  – материалдық туынды.

Эксперименттік зерттеулер мен теориялық талдауда физикалық өрістерді нақты уақытта бақылау және морфологиялық эволюцияны интуитивті түрде талдау қиын, ал тамшылардың соқтығысу динамикасы әлі толық аяқталған мәселе емес [106–107].

#### *Фазалық бөліну және күйдің өзгеруін модельдеу*

Бұл бағыттағы есептер [108–110] екіфазалық жүйеде бір сұйықтықтың фазалық ауысуын (*мысалы, булану, конденсация, қатаю*) ескеруге негізделеді. Мұндай құбылыстар температура немесе қысым өзгерген жағдайда екіфазалық жүйенің динамикасын едәуір өзгертіп, мысалы, мұнай-су жүйесінде фазалардың бөлінуі немесе қайта ұйымдасуы сияқты процестерді тудырады.

#### *Кеуекті ортадағы екіфазалық ағыстарды модельдеу*

Кеуекті ортадағы екіфазалық ағыстарды модельдеу [111] мұнай кенорындарында мұнайды сумен ығыстыруды бағалау немесе кеуекті мембраналар арқылы сұйықтықтарды сүзгілеу қолданбаларында кең пайдаланылады. Мұнайды сумен ығыстыруды сипаттауда капиллярлық және гравитациялық күштерді, сондай-ақ кеуекті құрылыммен өзара әсерді ескеру қажет. Алайда Стокс – Дарси типті теңдеулердің күрделілігі мен сызықты еместігіне байланысты аналитикалық шешім алу көп жағдайда мүмкін болмайды.

Кеуекті ортадағы ламинарлық режимдегі сүзгілеуді сипаттайтын негізгі заңдардың бірі – Дарси заңы. Дарси заңы ламинарлық ағыс үшін орынды [112–113], ал жоғары жылдамдықтарда немесе турбулентті режимде кеңейтілген модельдер қажет (*мысалы, Дарси заңын турбуленттілік әсерімен толықтыру немесе екіфазалық ағыс теңдеулерін қолдану*). Күрделі геометрия, көпкомпонентті флюидтер немесе анизотропты орталар жағдайында Дарси заңын модификациялау немесе кеуекті ортада Навье – Стокс теңдеулеріне сүйенген күрделірек тәсілдер қолданылуы мүмкін.

## 2) Шешу әдістері

### Көлемдік үлес әдісі (VOF)

Бұл әдісте әр тор ұяшығында фазалардың көлемдік үлесі сақталады, соның көмегімен фазалар шекарасының орны бақыланады. Күрделі интерфейс қозғалыстарын модельдеуге ыңғайлы.

### Ақырлы элементтер әдісі (FEM)

Бұл әдіс күрделі геометрияларда (*құрылымы күрделі аймақтарда*) жақсы жұмыс істейді, бейқұрылымды торлармен есептеуге мүмкіндік береді. Әр фаза үшін теңдеулер жеке шешіліп, шекаралық шарттар арқылы байланысады.

Негізгі ерекшеліктері: әр фазаның теңдеулерін жеке шешуге мүмкіндік береді; фазалар арасындағы өзара әсер фазааралық шекара шарттары арқылы есепке алынады; тамшылар мен көпіршіктер динамикасы сияқты сұйықтықтың механикалық мінез-құлқын зерттеуде тиімді.

### Фазалық өріс әдісі (Phase-Field Method)

Бұл әдіс [114] екі фаза арасындағы шекараны модельдеуде кең қолданылады. Фазалар арасындағы ауысу үздіксіз өзгертін өріс арқылы беріледі, сондықтан сұйықтық тамшысының пішінінің өзгеруі, бірігуі немесе бөлшектенуі сияқты құбылыстарды тиімді сипаттайды.

Фазалық өріс әдісіндегі «диффузиялық жарықшақ» моделі:

$$\psi_{pot}(u, \Gamma) = \psi_e + \psi_p + \psi_{frac} - \psi_{ext}, \quad (2.32)$$

мұндағы  $\psi_e$  – серпімді энергия, ол созылу және сығылу құрамаларына жіктеледі. Осы қойылымда *жарықшақ тек созылу компоненті бойынша* дамиды, ал зақымданған материалдың қасиеттері *деградация функциясы* арқылы төмендетіледі:  $g(\phi) = (1 - \phi)^2 + k$ , мұнда  $k$  – нөлге жуық кіші тұрақты (*сандық тұрақтандыру үшін*).

Сызықтық деформация тензоры:  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ .

Изотропты сызықтық серпімділік үшін энергия тығыздығы:  $\psi_e = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$ .

Созылу (+) және сығылу (–) бөліктерін ескергендегі серпімді энергия:  $\psi_e(\varepsilon) = \int_{\Omega} \psi_e d\Omega = \int_{\Omega} [(1 - \phi)^2 + k] \psi_e(\varepsilon)^+ + \psi_e(\varepsilon)^- d\Omega$ .

Пластикалық энергия тығыздығы (*сызықтық изотропты бекемдеу үшін*):  
 $\psi_p(\delta, d) = \frac{1}{2} \tilde{H}(d) \delta^2$ , мұндағы  $\tilde{H}(d)$  – деградацияланған материалдың бекемділік модулі,  $\delta$  – жинақталған пластикалық деформация.

Пластикалық энергияның интегралдық түрі:  $\psi_p(\delta) = \int_{\Omega} [(1 - \phi)^2 + k] (\frac{1}{2} \tilde{H}(\phi) \delta^2 + \tilde{\sigma}_y \delta) d\Omega$ .

Фазалық өріс теориясындағы беттік энергия тығыздығы:  $\gamma(\phi, \nabla\phi) = \frac{1}{2l_0} \phi^2 + \frac{l_0}{2} \|\nabla\phi\|^2$ .

Жарықшақ бетін құруға қажетті энергия (*сыни энергияның босалу жылдамдығы  $G_c$* ):

$$\int_{\Gamma} G_c d\Gamma \approx \int_{\Omega} G_c \gamma(l_0, \phi, \nabla\phi) d\Omega = \int_{\Omega} G_c \left[ \frac{1}{2l_0} \phi^2 + \frac{l_0}{2} \|\nabla\phi\|^2 \right] d\Omega. \quad (2.33)$$

Бұл модель фазалар арасындағы шекарадағы күрделі құбылыстарды және интерфейс динамикасын (*тамшының деформациясы, қосылуы, бөлінуі*) есептеуге мүмкіндік береді. Фазалық өріс әдісінің артықшылығы – интерфейс ті дәл сипаттай отырып, есептеу шығынын салыстырмалы түрде төмендетуі және күрделі көпфазалы процестерге бейімделуі.

*Тегістелген бөлшектер әдісі (SPH)*

[115–116] еңбектерінде сұйықтықты кеңістікте сипаттау үшін тордағы ұяшықтарға емес, *бөлшектер жиынына* сүйенеді. Әр бөлшек сұйықтықтың «*материалдық элементін*» білдіреді және көршілес бөлшектермен өзара әрекеттеседі.

Әдістің негізгі артықшылықтары: *тор қажет емес*, сондықтан интерфейс тің (*фазааралық шекараның*) пішіні мен орны тез өзгертін есептерде ыңғайлы; динамикалық интерфейс терді (*тамшылардың деформациясы, бірігуі, бөлінуі*) модельдеуде дәстүрлі торлы әдістерге (*мыс., VOF*) қарағанда икемдірек; тамшылар динамикасын есептеуге қолдануға болады.

Әдістің идеясы: әр бөлшек үшін қозғалыс және өзара әсер теңдеулері жазылып, олар *әр бөлшек деңгейінде* сандық түрде шешіледі.

*Капиллярлық күштер мен беттік керілу әсерін ескеретін әдістер*

[117–119] еңбектерінде екі араласпайтын сұйықтық арасындағы *беттік керілуге* байланысты құбылыстарды (*эмульсия түзілуі, капиллярлық көтерілу, көпіршік пайда болуы т.б.*) модельдеу қарастырылады.

Осындай құбылыстардың қайсысы басым болатынын бағалау үшін *екі өлшемсіз сан* енгізіледі:

1) *Бонд саны (Bond number)*, гравитациялық күштердің беттік керілу күштеріне қатынасын сипаттайды:  $Bo = \frac{\rho g l^2}{\sigma}$ , мұндағы  $\rho$  – сұйықтықтың тығыздығы ( $\text{кг/м}^3$ );  $g$  – еркін түсу үдеуі ( $\text{м/с}^2$ );  $\sigma$  – беттік керілу коэффициенті ( $\text{Н/м}$ );  $l$  – сипаттамалық ұзындық ( $\text{м}$ ).

$Bo$  үлкен болса – гравитация басым; ал кіші болса – беттік керілу басым.

2) *Нуссельт саны (Nusselt number)*, конвективтік жылу алмасудың өткізгіштікке қатынасын сипаттайды:  $Nu = \frac{h l}{k_f}$ , мұндағы  $h$  – конвективтік жылу беру коэффициенті (Вт/(м<sup>2</sup> · К));  $k_f$  – сұйықтықтың жылуөткізгіштігі (Вт/(м·К));  $l$  – сипаттамалық ұзындық (м).

Жоғары дәлдіктегі термогидродинамикалық сандық модельден *түімді жылуөткізгіштік* есептеліп, ол кейін *төмен ретті (reduced-order)* модельдерге кіріс параметр ретінде беріледі. Бұл: күрделі мультифизикалық әсерлерді жуықтап ескеруге; температура өрістерін жеткілікті дәл болжауға; есептеу уақытын айтарлықтай қысқартуға мүмкіндік береді.

Осы бөлімде келтірілген қолданбалы қойылымдар мен әдістемелік тәсілдер автордың сүзгілеу процестерін модельдеу бағыты бойынша жарияланған еңбектерімен сабақтас және диссертацияның негізгі нәтижелерінің қолданбалы контексін кеңейтеді [51].

## 2.7 Екіфазалық ағыстарды сүзгілеуді талдаудың қолданбалы аспектілері

Бұл бөлімде келтірілген сандық есептеулер мен графикалық нәтижелер автордың Python тілінде жүзеге асырылған «Сүзгілеу есептеріндегі екіфазалық сұйықтық ағыстары моделін тұтқырлықты жою әдісімен талдау» бағдарламалық қамсыздандыруы негізінде алынған. Аталған бағдарламалық өнімге берілген авторлық куәлігі (*1-қосымша*). Бағдарлама Бакли – Леверетт моделін, соққы толқынының қалыптасу шарттарын және қанықтылық профильдерінің эволюциясын сандық тұрғыдан талдауға арналған. Бағдарламалық кешенде жойылатын тұтқырлық әдісі негізіндегі сандық схема қолданылып, алынған шешімдердің энтропиялық шешімге жинақталуы теориялық нәтижелермен үйлесетіні сандық түрде тексерілді.

### 2.7.1 Математикалық модель (фронт қозғалысын шығару)

Қарастырылатын негізгі тендеу бірөлшемді Бакли – Леверетт моделінің дифференциалдық түрі болып табылады:

$$-\frac{df_w}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} = \frac{A\varphi}{q} \frac{\partial S_w}{\partial t}, \quad (2.33)$$

мұндағы  $S_w(x, t)$  – судың қанықтылығы,  $q$  – айдау шығыны,  $A$  – көлденең қима ауданы,  $\varphi$  – кеуектілік,  $f_w(S_w)$  – су фазасының фракциялық ағыс функциясы.

Судың қанықтылығы  $S_w$  кеңістік пен уақытқа тәуелді функция болғандықтан, оның толық дифференциалы келесі түрде жазылады:

$$dS_w = \frac{\partial S_w}{\partial x} dx + \frac{\partial S_w}{\partial t} dt.$$

Бұл өрнек қанықтылықтың өзгерісі екі фактордың әсерінен болатынын көрсетеді: кеңістіктегі орын ауыстыру және уақыт бойынша эволюция. Соққы толқынының фронтында қанықтылық мәні тұрақты болып сақталады. Басқаша айтқанда, фронт бойымен қозғалған кезде  $S_w$  өзгермейді. Сондықтан фронт траекториясы бойында

$$dS_w = 0$$

шарты орындалады, яғни

$$\frac{\partial S_w}{\partial x} dx + \frac{\partial S_w}{\partial t} dt = 0.$$

Осы қатынасты (2.33) теңдеумен біріктіре отырып, соққы фронтының кинематикалық теңдеуін аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q}{A\varphi} \frac{df_w}{dS_w}.$$

Бұл өрнек соққы толқынының таралу жылдамдығы фракциялық ағыс функциясының туындысымен анықталатынын көрсетеді. Уақыт бойынша 0-ден  $t$ -ге дейін интегралдау жүргізсек, флюид фронтының координатасы келесі түрде табылады:

$$x_f = \frac{qt}{A\varphi} \left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_f,$$

мұндағы  $\left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_f$  – соққы толқынының фронтындағы фракциялық ағыс туындысының мәні.

Алынған формула соққы толқынының таралу заңын сипаттайды және Бакли – Леверетт моделіндегі ығыстыру процесін сандық және аналитикалық талдаудың негізгі құралы болып табылады.

### 2.7.2 Фракциялық ағыс функциясы

Бірөлшемді және көлденең бағыттағы ағыс жағдайында (*ауырлық күші мен капиллярлық қысым ескерілмегенде*) Бакли – Леверетт моделінде су фазасының фракциялық ағыс функциясы келесі түрде анықталады:

$$f_w(S_w) = \frac{1}{1 + \frac{k_{ro}(S_w)}{\mu_o} \frac{\mu_w}{k_{rw}(S_w)}}.$$

Бұл өрнек флюидтердің кеуекті ортада бірлесіп ағу кезінде жалпы ағыстың қандай үлесі су фазасына тиесілі екенін сипаттайды. Мұндағы  $k_{rw}(S_w)$  және  $k_{ro}(S_w)$  – сәйкесінше судың және мұнайдың салыстырмалы өтімділіктері,  $\mu_w$  және  $\mu_o$  – судың және мұнайдың тұтқырлық коэффициенттері.

Фракциялық ағыс функциясының негізгі қасиеті – оның қанықтылыққа ғана тәуелді болуы. Сондықтан флюидтердің нақты физикалық параметрлері (*тұтқырлықтар мен өтімділіктер*) соққы толқынының пайда болу және таралу сипатына тікелей әсер етеді.

Салыстырмалы өтімділіктер инженерлік тәжірибеде кең қолданылатын Кори типті тәуелділіктер арқылы беріледі:

$$k_{rw}(S_w) = S_w^{n_w}, k_{ro}(S_w) = (1 - S_w)^{n_o},$$

мұндағы  $n_w$  және  $n_o$  – тәжірибелік жолмен анықталатын көрсеткіштер. Бұл қатынастар кеуекті ортаның ылғалдану қасиеттерін және фазалардың өзара әсерін жуықтап сипаттайды.

Фракциялық ағыс функциясы, жалпы жағдайда, сызықтық емес функция болып табылады және оның графигі бір немесе бірнеше иілу нүктелеріне ие болуы мүмкін. Дәл осы иілу нүктелерінің болуы Бакли – Леверетт моделінде соққы толқынының пайда болуына әкеледі.

Соққы толқынының фронтындағы қанықтылықты анықтау үшін фракциялық ағыс функциясының туындысы қажет:

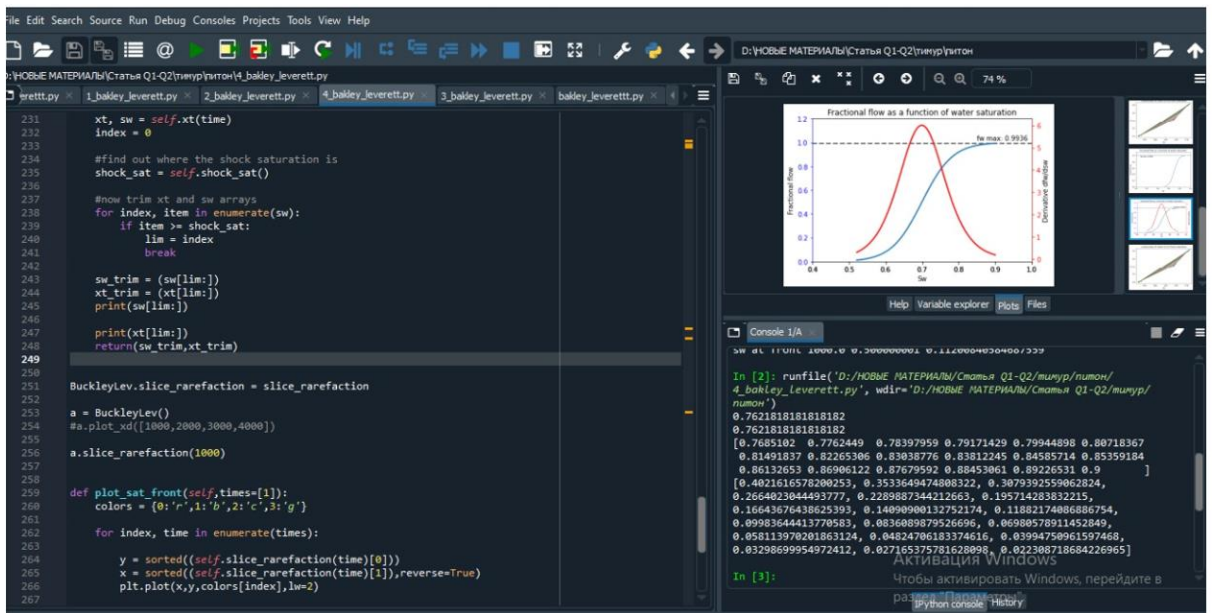
$$\frac{df_w}{dS_w}.$$

Аналитикалық түрде бұл туындыны табу көп жағдайда қиын немесе қолайсыз болғандықтан, диссертациялық жұмыста ол сандық түрде, ақырлы-айырымдық жуықтау әдісімен есептеледі:

$$\frac{df_w}{dS_w} \Big|_{S_w=S_i} \approx \frac{f_w(S_{i+1}) - f_w(S_{i-1})}{2\Delta S}.$$

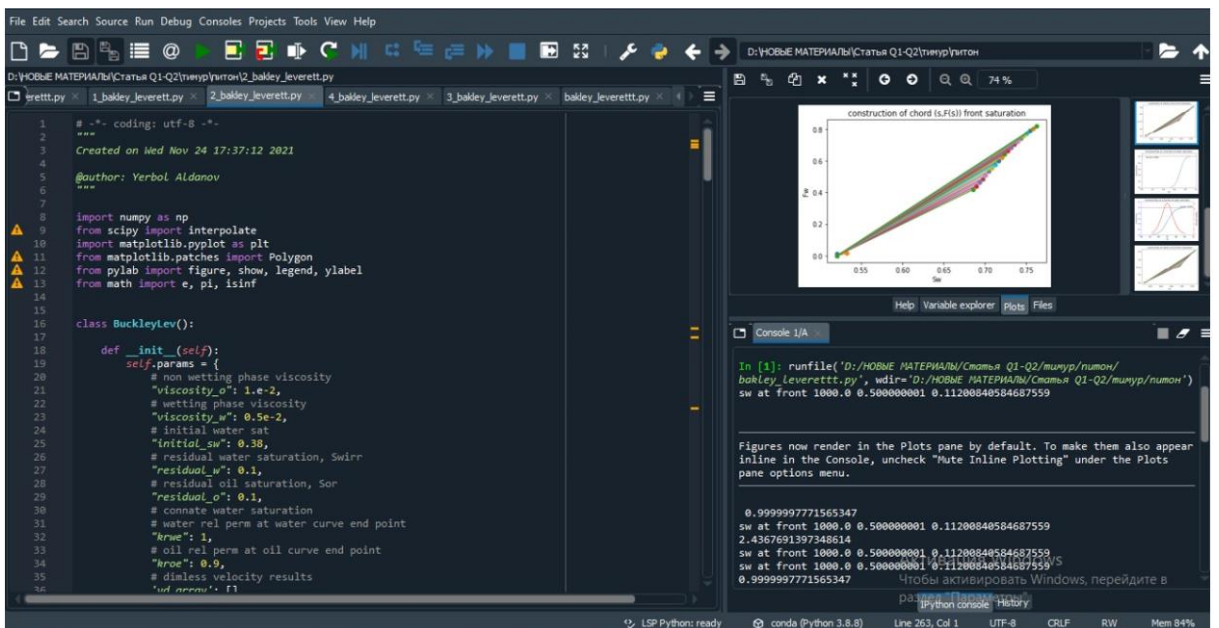
Алынған  $df_w/dS_w$  мәндері соққы толқынының таралу жылдамдығын және фронттың орнығуын анықтауда қолданылады.

2.9-суретте фракциялық ағыс функциясының  $S_w$ -ке тәуелділігі және оның туындысының сандық есептелуі көрсетілген.



2.9-сурет – Фракциялық ағыстың қанықтылық функциясын есептеу

2.10-суретте соққы толқынының қанықтылығын анықтауға арналған хорда әдісі бейнеленген, яғни фракциялық ағыс қисығына жүргізілген хорданың максималь еңістікке ие болатын нүктесі соққы фронтының қанықтылығын береді.



2.10-сурет – Соққы толқынының қанықтыру фронты хордаларының құрылымын анықтау

Осылайша, фракциялық ағыс функциясы Бакли – Леверетт моделіндегі негізгі элемент болып табылады және ол соққы толқындарының пайда болуын, фронттың жылдамдығын және ығыстыру процесінің тиімділігін анықтайды.

### 2.7.3 Соққы толқыны қанықтылығын анықтау

Бакли – Леверетт моделінде шешім құрылымы, жалпы жағдайда, үзіліссіз сирету толқындар аймағы мен үзілісті соққы толқынынан тұруы мүмкін. Соққы толқынының пайда болуы фракциялық ағыс функциясының  $f_w(S_w)$  сызықтық емес сипатына байланысты.

Соққы фронтындағы қанықтылық  $S_{w,shock}$  графикалық әдіспен анықталады. Бұл әдіс Ранкин – Гюгонио шартының геометриялық интерпретациясына негізделген.

Бастапқы су қанықтылығы  $S_{w_i}$  берілген болсын. Фракциялық ағыс функциясының графигінде  $(S_{w_i}, f_w(S_{w_i}))$  нүктесінен қисықтың басқа нүктесіне хорда жүргіземіз.

Хорданың еңістігі:

$$\frac{f_w(S_w) - f_w(S_{w_i})}{S_w - S_{w_i}}$$

болып табылады.

Соққы фронтына сәйкес келетін қанықтылық мәні мына шартпен анықталады:

$$\frac{df_w}{dS_w} = \frac{f_w(S_w) - f_w(S_{w_i})}{S_w - S_{w_i}}.$$

Бұл шарт фракциялық ағыс қисығына жүргізілген хорданың жанамаға айналатын нүктесін сипаттайды. Геометриялық тұрғыдан бұл – қисыққа бастапқы нүктеден жүргізілген хорда еңістігі максималды болатын нүкте.

Осы нүктедегі  $S_w$  мәні соққы толқыны фронтының қанықтылығын береді:  $S_{w,shock}$ .

*Физикалық интерпретация*

Қанықтылық аймақтары үшке бөлінеді:

- $S_{w_i}$  – бастапқы су қанықтылығы (*фронт жетпеген аймақ*);
- $S_{w,shock}$  – соққы толқыны фронтындағы қанықтылық;
- $1 - S_{or}$  – фронт өткеннен кейінгі аймақтағы су қанықтылығы (*мұнда  $S_{or}$  – қалдық мұнай қанықтылығы*).

Физикалық тұрғыдан бұл келесіні білдіреді:

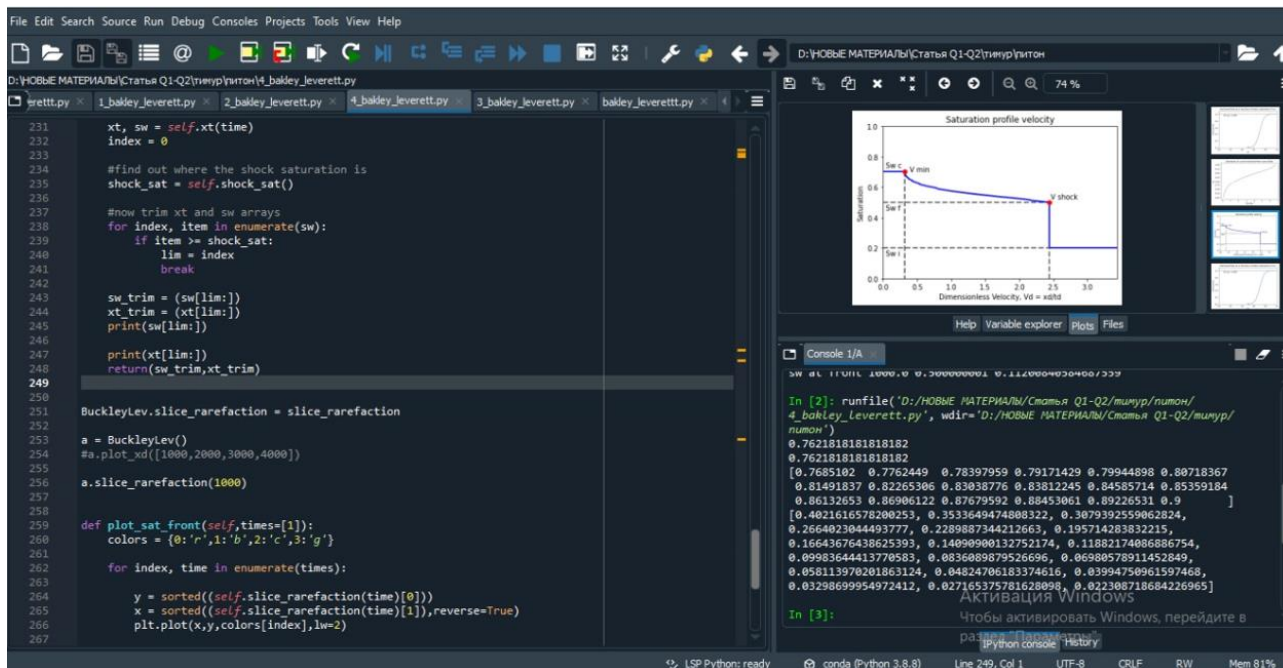
- фронт алдында орта бастапқы күйінде қалады,
- фронттың өзінде қанықтылық секіріс жасайды,
- ал фронт өткеннен кейін мұнай қалдық қанықтылық деңгейіне дейін ығыстырылады.

*Фронт жылдамдығы*

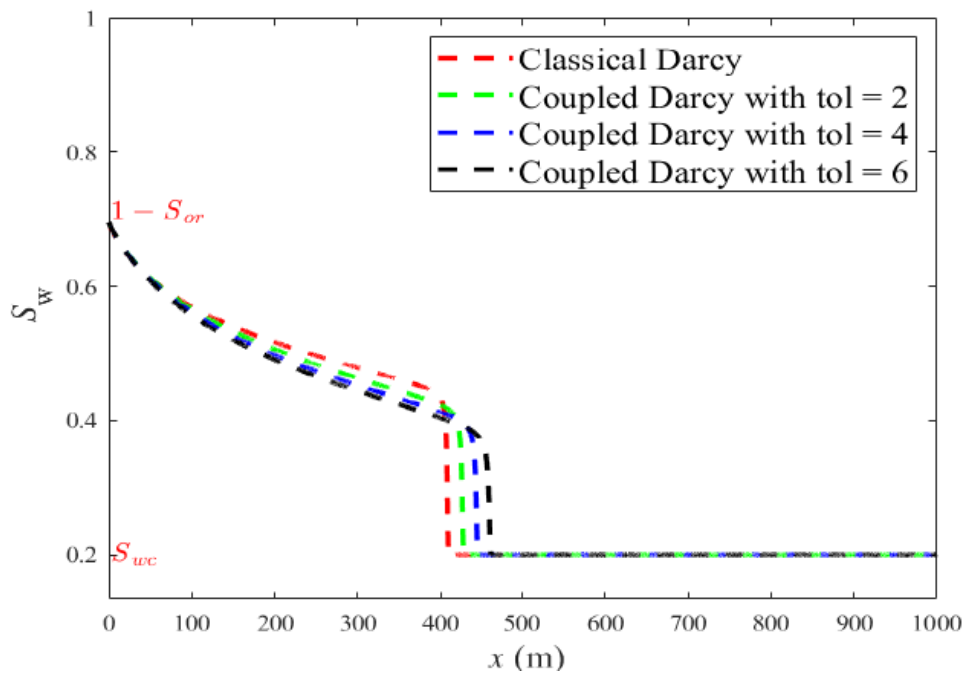
Соққы фронтының жылдамдығы Ранкин – Гюгонио шартымен анықталады:

$$v_f = \frac{q}{A\phi} \left( \frac{f_w(S_{w,shock}) - f_w(S_{w_i})}{S_{w,shock} - S_{w_i}} \right).$$

Бұл өрнек хорда еңістігінің физикалық интерпретациясы (2.11 а, 2.11 б-суреттер) болып табылады.



2.11 а-сурет – соққы фронты жылдамдығының анықталуы



2.11 б-сурет – қанықтылық профильдерінің кеңістіктік таралуы

#### 2.7.4 Бағдарламалық құрылым

Есептеу модулі объектіге-бағытталған бағдарламалау қағидаларына негізделіп жүзеге асырылған. Мұндай тәсілді қолдану есептеу алгоритмдерін логикалық түрде құрылымдауға, модель параметрлерін ыңғайлы түрде өзгертуге және сандық эксперименттердің қайта өндірілуін қамтамасыз етуге мүмкіндік береді.

Бағдарламаның негізгі элементі «BuckleyLev» класы болып табылады. Бұл класс Бакли – Леверетт моделінде қолданылатын физикалық және геометриялық параметрлерді, сондай-ақ фракциялық ағыс функцияларын есептеуге арналған әдістерді біріктіреді. Әрбір класс экземплярлары нақты бір есептің параметрлер жиынын сипаттайды, яғни белгілі бір кеуекті орта мен флюид қасиеттеріне сәйкес модельді анықтайды.

Класс құрамына енгізілген параметрлердің физикалық мағынасы төмендегідей:

- **Viscosity\_o** – мұнай фазасының динамикалық тұтқырлығы. Бұл параметр фракциялық ағыс функциясының формасына тікелей әсер етеді және ығыстыру тиімділігін анықтайтын негізгі шамалардың бірі болып табылады.
- **Viscosity\_w** – су фазасының тұтқырлығы, мұнай тұтқырлығымен бірге фазалардың қозғалғыштығын сипаттайды.
- **Initial\_sw** – бастапқы суға қанықтылық, яғни сүзгілеу басталғанға дейінгі қабаттағы су үлесі.
- **Residual\_w** – қалдық су қанықтылығы, соққы толқыны өткеннен кейін қабатта сақталатын минимал су мөлшерін сипаттайды.
- **Residual\_o** – қалдық мұнай қанықтылығы, яғни сумен ығыстыру нәтижесінде шығарылмай қалған мұнай көлемінің үлесі.
- **k\_rwe** – су фазасы үшін салыстырмалы өтімділіктің соңғы нүктедегі мәні.
- **k\_roe** – мұнай фазасы үшін салыстырмалы өтімділіктің соңғы нүктедегі мәні.
- **Poro** – кеуектілік коэффициенті, қабаттың флюид өткізгіштік қабілетін сипаттайды.
- **Inject\_rate** – су айдау шығыны, фронттың таралу жылдамдығын анықтайтын басқарушы параметр.
- **Area** – сүзгілеу жүретін қабаттың көлденең қимасының ауданы.

Осы параметрлер негізінде «BuckleyLev» класы фракциялық ағыс функциясын, оның туындысын, соққы толқынының қанықтылығын және қанықтылық фронтының қозғалу жылдамдығын есептейтін әдістерді қамтиды. Кластың құрылымы мен негізгі компоненттері *2.12-суретте* сызбалық түрде көрсетілген.

```

7 class BuckleyLev():
8
9     def __init__(self):
10         self.params = {
11             #non wetting phase viscosity
12             "viscosity_o": 1.e-3,
13             #wetting phase viscosity
14             "viscosity_w": 1.e-3,
15             #initial water sat
16             "initial_sw":0.2,
17             #residual water saturation, Swirr
18             "residual_w":0.5,
19             #residual oil saturation, Sor
20             "residual_o":0.3,
21             #connate water saturation
22             #water rel perm at water curve end point
23             "krwe":1,
24             #oil rel perm at oil curve end point
25             "kroe": 0.99,
26             #dimless velocity results
27             'vd_array':[],
28             #porosity
29             'poro':0.24,
30             #water injection rate units TBD
31             "inject_rate":20,
32             #cross sectional area units TBD
33             "x-area":30
34         }

```

2.12-сурет – «Buckley-Leverett» класы

Фракциялық ағысты есептеу алгоритмі класс әдістері арқылы бірізді түрде жүзеге асырылады: алдымен салыстырмалы өтімділік қисықтары құрылады, одан кейін фракциялық ағыс функциясы анықталады және оның қанықтылық бойынша туындысы сандық түрде есептеледі. Бұл алгоритмнің жалпы логикасы 2.13-суретте келтірілген.

```

49 def fractional_flow(self,sw):
50     #returns the fractional flow
51
52     return 1./(1.+((self.k_rn(sw)/self.k_rw(sw))*(self.params
53
54         ["viscosity_w"]/self.params["viscosity_o"])))
55
56 BuckleyLev.fractional_flow = fractional_flow
57
58 def fractional_flow_deriv(self,sw):
59     #calculate derivative of fractional flow - dFw/dSw - Vsh
60
61     f_deriv = (self.fractional_flow(sw+0.0001) - self.fractional_flow(sw))/0.0001
62
63     return f_deriv
64
65 BuckleyLev.fractional_flow_deriv = fractional_flow_deriv
66
67 def fractional_flow_2deriv(self,sw):
68     f_2deriv = ((self.fractional_flow(sw+0.01))-2*(self.fractional_flow(sw))-
69         self.fractional_flow(sw-0.01))/((0.01)**2)
70     return f_2deriv
71
72 BuckleyLev.fractional_flow_2deriv = fractional_flow_2deriv
73

```

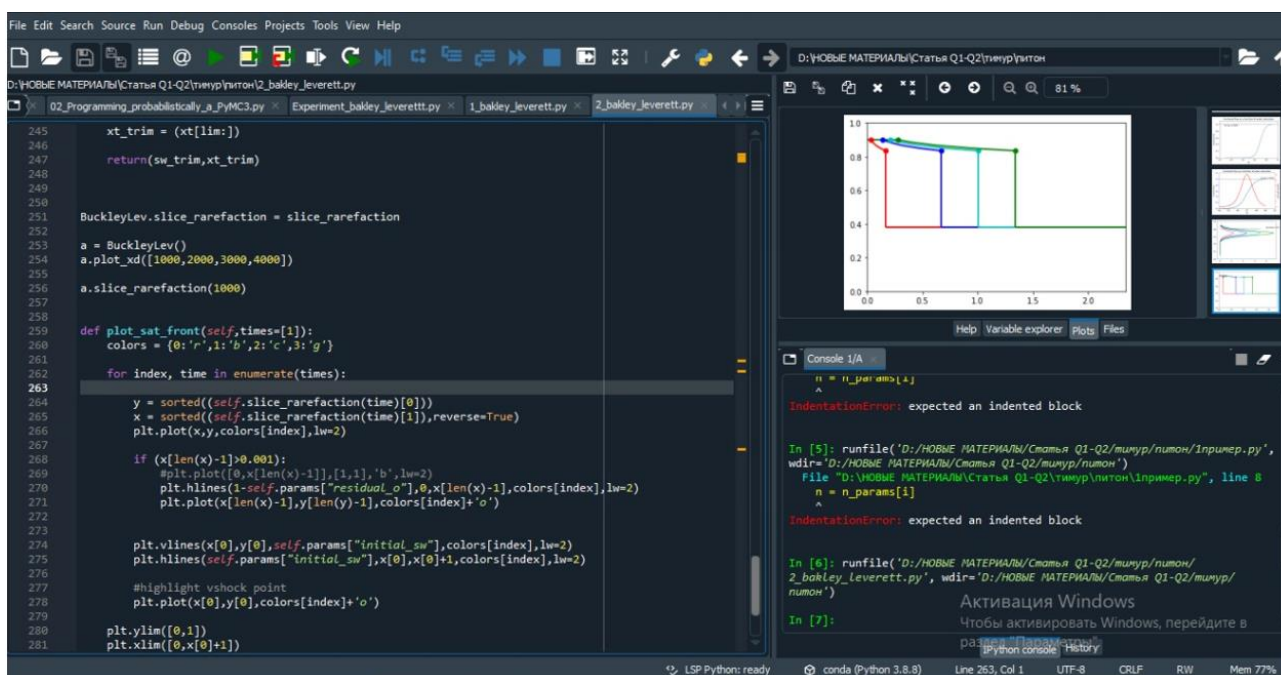
2.13-сурет – Фракциялық ағысты есептеу

Ұсынылған бағдарламалық құрылым сандық эксперименттер жүргізу кезінде модель параметрлерін жедел өзгертуге, әртүрлі физикалық сценарийлерді салыстыруға және алынған нәтижелерді графикалық түрде талдауға мүмкіндік береді. Осылайша, бағдарламалық қамсыздандыру теориялық бөлімде алынған нәтижелерді қолданбалы деңгейде тексеру мен интерпретациялаудың тиімді құралы болып табылады.

### 2.7.5 Сандық нәтижелер

Ұсынылған бағдарламалық кешенді қолдану арқылы Бакли – Леверетт моделіне сәйкес екіфазалық сүзгілеу процесінің сандық эксперименттері жүргізілді. Есептеулер су айдау режиміндегі кеуекті ортада соққы толқынының (*қанықтылық фронтының*) уақыт бойынша эволюциясын талдауға бағытталған.

Бағдарлама әртүрлі уақыт моменттерінде суға қанықтылықтың кеңістік бойынша таралуын есептеп, соққы фронтының қозғалу динамикасын анықтауға мүмкіндік береді. Алынған нәтижелер *2.14-суретте* көрсетілген. Бұл суреттен уақыттың өсуімен су фронтының қабат бойымен бірқалыпты таралатынын және фронт жылдамдығының модель параметрлеріне тәуелді екенін байқауға болады.



2.14-сурет – Әр түрлі уақыт кезеңдеріндегі соққы фронтының эволюциясы

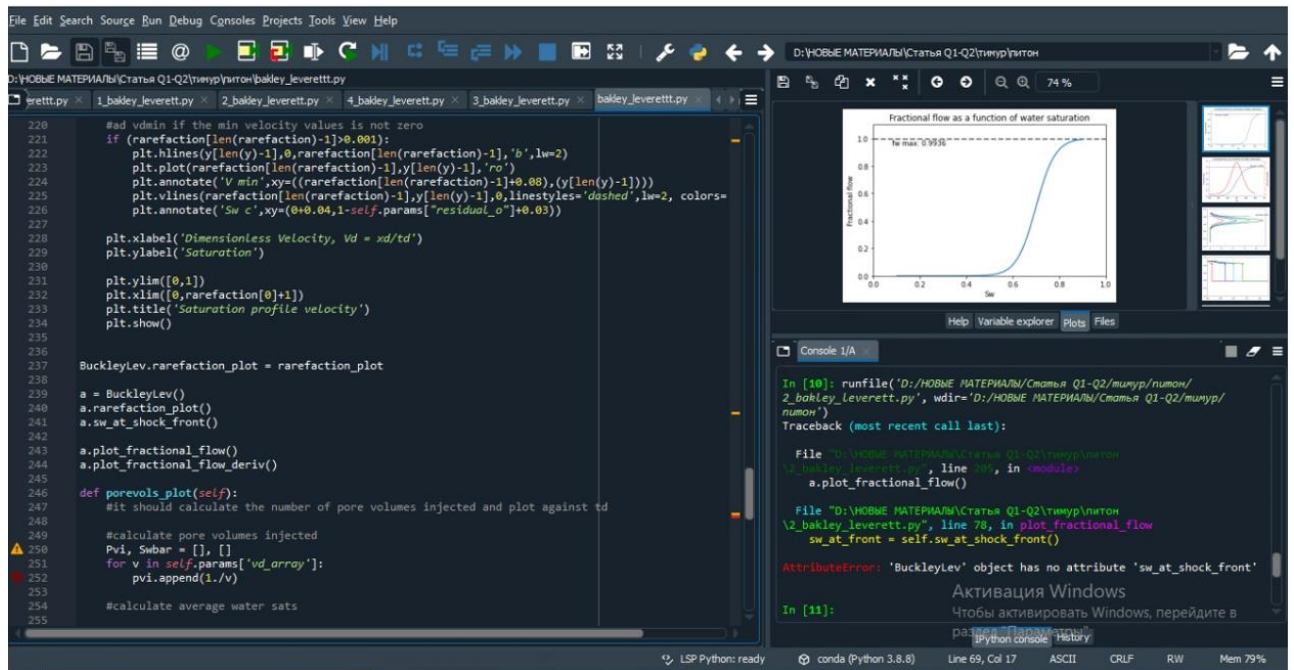
Сандық талдаудың келесі маңызды аспектісі – флюидтердің тұтқырлық қасиеттерінің ығыстыру процесіне әсерін зерттеу. Бұл әсерді сипаттау үшін ығысу коэффициенті қолданылады, ол келесі түрде анықталады:

$$\frac{k_{ro}}{\mu_o},$$

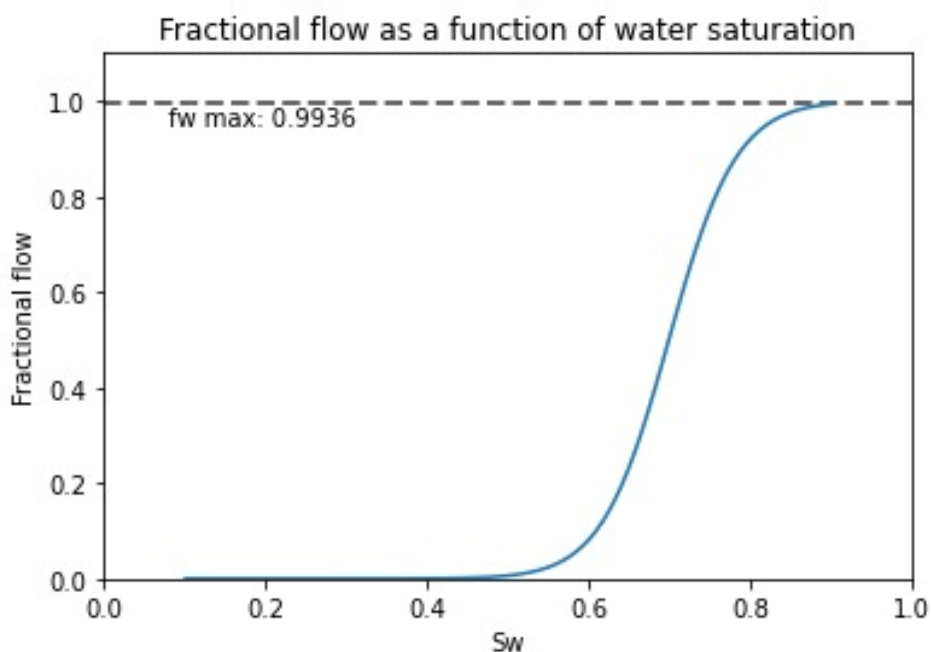
мұндағы  $k_{ro}$  – мұнай фазасының салыстырмалы өтімділігі,  $\mu_o$  – мұнайдың динамикалық тұтқырлығы.

Ығысу коэффициенті флюидтердің қозғалғыштығын сипаттайды және су-мұнай жүйесіндегі ығыстыру тиімділігінің негізгі көрсеткіштерінің бірі болып табылады. Сандық есептеулер нәтижелері көрсеткендей, мұнай тұтқырлығы артқан сайын ығысу коэффициенті төмендейді. Бұл жағдайда су фазасының қозғалғыштығы мұнай фазасына қарағанда басым болып, су фронтының ертерек жарылуына (*water breakthrough*) әкеледі.

Фракциялық ағыс функциясының және оның қанықтылыққа тәуелділігінің өзгерісі 2.15 а және 2.15 б суреттерінде көрсетілген. Бұл графиктерден су қанықтылығының өсуімен фракциялық ағыс қисығының сызықтық емес сипатқа ие болатыны және иілу нүктесінің пайда болатыны анық байқалады. Аталған иілу нүктесі соққы толқынының қалыптасуымен тікелей байланысты.

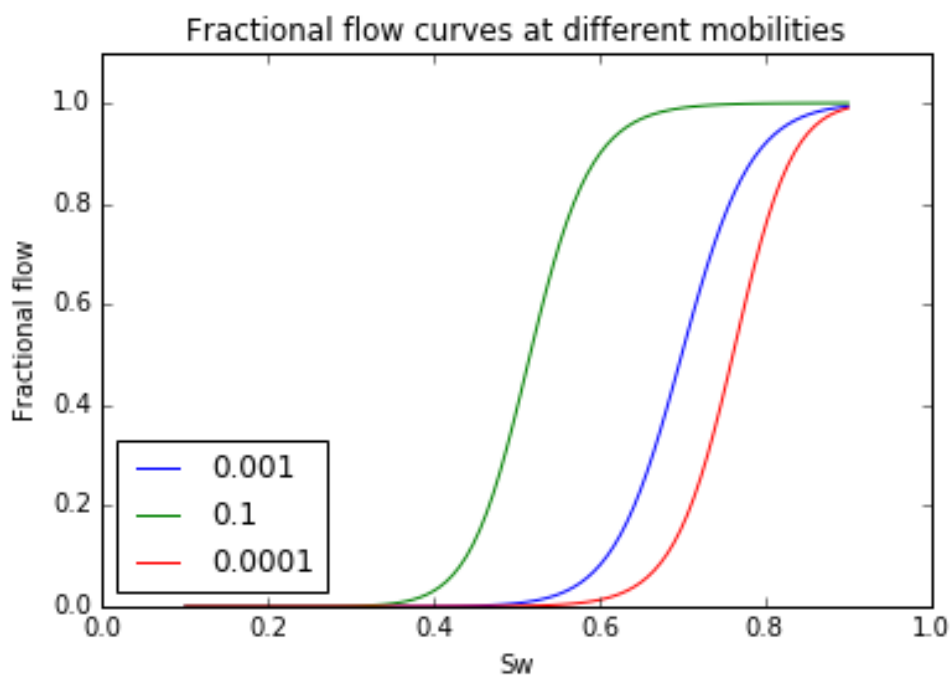


2.15 а-сурет – фракциялық ағыс функциясы



2.15 б-сурет – суға қанықтылыққа тәуелді фракциялық ағыс

Ал 2.15 в-суретте ығысу коэффициентінің әртүрлі мәндері үшін алынған фракциялық ағыс қисықтары салыстырмалы түрде берілген. Бұл нәтижелер мұнай тұтқырлығының артуы фракциялық ағыс қисығын «тіктеу» ететінін және соққы фронтының тұрақтылығын төмендететінін көрсетеді.



2.15 в-сурет – ығысу коэффициентінің фракциялық ағысқа әсері

Осы бөлімде ұсынылған сандық модель Бакли – Леверетт теориясына негізделген екіфазалық сүзгілеу процесін талдаудың қолданбалы мүмкіндіктерін нақты көрсетеді. Жүргізілген сандық эксперименттер модельдің

теориялық тұрғыдан негізделгенін және практикалық есептерді шешуде тиімді қолдануға болатынын дәлелдейді.

Біріншіден, алынған сандық нәтижелер Бакли – Леверетт теңдеуінің аналитикалық шешімдерінің құрылымын толық растайды. Атап айтқанда, фракциялық ағыс функциясының дөңестік қасиеттері, соққы толқынының пайда болу шарттары және оның таралу жылдамдығы теориялық түрде алынған формулалармен сандық түрде сәйкес келетіні көрсетілді. Бұл жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы алынатын энтропиялық шешімдердің физикалық мағынасы бар екенін тағы да дәлелдейді.

Екіншіден, модель соққы толқыны фронтының қалыптасу механизмін және оның уақыт бойынша эволюциясын айқын сипаттайды. Сандық есептеулер суға қанықтылықтың секірісті өзгеруі нәтижесінде қалыптасатын фронттың қозғалысын бақылауға мүмкіндік берді. Бұл фронттың жылдамдығы мен орны уақытқа тәуелді түрде анықталып, Риман есебі үшін алынған классикалық нәтижелермен үйлесетіні көрсетілді.

Үшіншіден, ұсынылған бағдарламалық құрал физикалық параметрлердің сүзгілеу процесіне әсерін сандық тұрғыдан бағалауға мүмкіндік береді. Атап айтқанда, мұнай мен судың тұтқырлықтарының арақатынасы, кеуектілік коэффициенті және айдау шығыны сияқты параметрлердің өзгеруі соққы толқынының жылдамдығына, су жарылу уақытына және қанықтылық профильдерінің формасына қалай әсер ететіні анықталды. Бұл нәтижелер мұнай-газ кен орындарын игеру кезінде технологиялық шешімдерді оңтайландыру үшін маңызды.

Төртіншіден, қарастырылған сандық модель 2.4 және 2.5 бөлімдерде алынған теориялық нәтижелердің тікелей қолданбалы жалғасы болып табылады. Атап айтқанда, Риман есебінің жуық шешімдері мен кері есептерге қатысты алынған аналитикалық бағалаулар осы бөлімде нақты сандық эксперименттер арқылы расталды. Бұл диссертациялық жұмыстың теориялық және қолданбалы бөлімдерінің ішкі логикалық бірлігін қамтамасыз етеді.

Осылайша, ұсынылған сандық модель мен бағдарламалық жүзеге асыру Бакли – Леверетт моделі негізіндегі екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысын зерттеуде сенімді және әмбебап құрал болып табылады және алынған нәтижелер диссертацияның негізгі ғылыми тұжырымдарын толық негіздейді.

## ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыс Бакли – Леверетт моделі негізінде кеуекті ортадағы екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысының Риман есебі жан-жақты зерттеуге арналған. Жұмыстың негізгі ерекшелігі – гиперболалық типтегі сақталу заңдарының энтропиялық шешімдер теориясын жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы жүйелі түрде негіздеу және алынған теориялық нәтижелерді нақты қолданбалы сүзгілеу есептеріне бейімдеп көрсету болып табылады.

Зерттеу барысында гиперболалық теңдеулер үшін әлсіз шешімдер теориясы, Кржков мағынасындағы энтропиялық шешімдер ұғымы және жойылатын тұтқырлық әдісі өзара тығыз байланыста қарастырылды. Бұл әдістер физикалық тұрғыдан мағыналы шешімді таңдау мәселесін шешуге мүмкіндік береді, себебі гиперболалық теңдеулер үшін әлсіз шешімдер жалғыз болмайды, ал энтропиялық шарттар физикалық іске асатын режимдерді іріктеудің негізгі механизмі болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың бірінші тарауында кеуекті ортадағы араласпайтын екіфазалық ағыстарды сипаттайтын математикалық модельдердің теориялық негіздері егжей-тегжейлі қарастырылды. Сүзгілеу теориясының негізгі ұғымдары, массаның сақталу заңдары және фазалардың салыстырмалы өтімділіктеріне негізделген Дарси заңының жалпыланған түрлері талданып, Бакли – Леверетт теңдеуінің шығу тегі көрсетілді. Бұл теңдеудің гиперболалық типке жататыны және оның шешімдерінің үзілісті сипатқа ие болуы мүмкін екені айқындалды. Сонымен қатар, Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Коши есебі қарастырылып, энтропиялық шешімдердің бар болуы, жалғыздығы және бастапқы шартқа қатысты орнықтылығы дәлелденді. Бұл нәтижелер гиперболалық сақталу заңдары теориясының іргелі қағидаларына сүйенгенімен, оларды екіфазалық сүзгілеу моделіне қолдану теориялық және қолданбалы тұрғыдан маңызды болып табылады. Атап айтқанда, алынған орнықтылық бағалары сандық әдістерді құру кезінде шешімдердің сенімділігін қамтамасыз ететін негізгі факторлардың бірі болып табылады.

Екінші тарау диссертациялық жұмыстың негізгі ғылыми нәтижелерін қамтиды және теориялық тұжырымдардың қолданбалы мағынасын ашуға бағытталған. Бұл тарауда жойылатын тұтқырлық әдісі негізгі аналитикалық құрал ретінде пайдаланылды. Бакли – Леверетт теңдеуіне кіші тұтқырлық параметрін енгізу арқылы алынған параболалық типтегі жуық есептердің шешімдері зерттеліп, тұтқыр шешімдердің энтропиялық шешімге  $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде жинақталатыны дәлелденді.

Риман есебі жағдайында соққы толқынының құрылымы traveling wave типті шешімдер арқылы талданды. Өтпелі аймақтың қалыңдығы тұтқырлық параметрімен бір тәртіпте өзгередіні, яғни  $O(\varepsilon)$  екені көрсетілді. Бұл нәтиже жойылатын тұтқырлық әдісінің физикалық мағынасын айқын көрсетеді: тұтқырлық мүшесі соққыны тегістеп,  $\varepsilon \rightarrow 0$  кезінде үзілісті энтропиялық

шешімге жинақталатын өтпелі қабатты қалыптастырады. Мұндай сипаттама екіфазалық сүзгілеу процестеріндегі фронтальді ығыстыру құбылыстарын модельдеуде аса маңызды.

Сонымен қатар энтропиялық шешімдердің  $L^1$ -орнықтылығы мен жалғыздығы Риман есебі үшін жеке-жеке дәлелденді. Бұл қасиеттер шешімдердің физикалық сенімділігін ғана емес, сонымен қатар сандық жуықтаулардың тұрақтылығын да қамтамасыз етеді. Аталған нәтижелер жойылатын тұтқырлық әдісін қолданатын сандық схемалардың теориялық негізін құрайды.

Екінші тарауда алынған теориялық тұжырымдар бірөлшемді екіфазалық сүзгілеу есебінің қолданбалы қойылымы арқылы нақты физикалық интерпретациямен толықтырылды. Мұнай мен судың кеуекті ортада сүзгіленуі, айдау және өндіру ұңғымаларының орналасуы, Риман типті бастапқы деректердің пайда болуы және соққы фронтының қалыптасуы нақты инженерлік тұрғыдан түсіндірілді. Бұл жерде жойылатын тұтқырлық әдісінің сүзгілеу процестеріндегі соққы фронттарын адекватты түрде сипаттайтыны көрсетілді [120].

Жұмыста ұсынылған екіфазалық ағыстардың кеңейтілген моделі классикалық Дарси заңын айқас фазалық өтімділіктер мен капиллярлық қысым әсерін ескере отырып жалпылайды. Нәтижесінде алынған су қанықтылығының конвекция–диффузия типті теңдеуі Бакли – Леверетт моделінің тұтқырланған нұсқасы ретінде қарастырылып, оның шешімдерінің құрылымы талданды. Бұл модель соққы қабаттарының қалыптасуын, олардың тегістелу механизмін және қанықтылықтың кеңістіктік таралуын біртұтас математикалық қойылымда сипаттауға мүмкіндік береді.

Риман есебі негізінде жүргізілген сандық жуықтаулар жойылатын тұтқырлық әдісінің локальді жинақтылықты қамтамасыз ететінін көрсетті. Алынған сандық нәтижелер фракциялық ағыс функциясының геометриялық қасиеттерімен, Ранкин – Гюгонио шартымен және энтропиялық шешімдер теориясымен толық үйлеседі. Бұл теориялық және сандық нәтижелердің сәйкестігі жұмыстың ғылыми дұрыстығын дәлелдейді.

Диссертациялық жұмыстың қолданбалы маңызы автор әзірлеген Python тіліндегі бағдарламалық қамсыздандыру арқылы айқын көрінеді. Бұл бағдарламалық құрал Бакли – Леверетт моделіндегі соққы толқынының таралуын, қанықтылық профильдерінің эволюциясын және физикалық параметрлердің сүзгілеу процесіне әсерін сандық түрде зерттеуге мүмкіндік береді. Бағдарламалық өнімнің авторлық құқықпен қорғалуы жұмыстың практикалық және ғылыми жаңалығын растайды.

Сандық эксперименттер нәтижелері мұнай мен судың тұтқырлықтарының арақатынасы, кеуектілік коэффициенті және айдау шығыны сияқты параметрлердің соққы фронтының жылдамдығына, су жарылу уақытына және қанықтылық профильдерінің формасына айтарлықтай әсер ететінін көрсетті. Бұл нәтижелер мұнай-газ кен орындарын

игеру кезінде сүзгілеу процестерін басқару және технологиялық шешімдерді оңтайландыру үшін маңызды.

Жалпы алғанда, диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер Бакли – Леверетт моделінің энтропиялық шешімдер теориясын жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы терең негіздеп, оны екіфазалық сүзгілеу есептерінің нақты қолданбалы қойылымдарына тиімді түрде қолдануға болатынын көрсетті.

Теориялық талдау, сандық модельдеу және бағдарламалық жүзеге асыру арасындағы ішкі логикалық бірлік диссертациялық жұмыстың ғылыми деңгейін айқындайды.

Алынған нәтижелерді гетерогенді кеуекті орта жағдайына, көпөлшемді есептерге және стохастикалық модельдерге жалпылау болашақ зерттеулер үшін перспективалы бағыт болып табылады. Сонымен қатар жойылатын тұтқырлық әдісін заманауи жоғары дәлдікті сандық схемалармен біріктіріп зерттеу көпфазалық ағыстар теориясын әрі қарай дамытуға мүмкіндік береді.

*Алғыс айту*

Осы диссертациялық жұмыстың орындалуы барысында ғылыми бағыт-бағдар беріп, зерттеу жұмысының мазмұнын тереңдетуге, оның ғылыми нәтижелерін жүйелеуге және қорытындыларын нақтылауға елеулі үлес қосқан отандық ғылыми кеңесші, PhD, профессор *Байшемиров Жарасбек Дүйсембекұлына* шынайы алғысымды білдіремін. Оның құнды ғылыми кеңестері, кәсіби қолдауы мен талапшылығы диссертациялық жұмыстың сапалы орындалуына үлкен ықпал етті.

Сонымен қатар диссертациялық зерттеуге ғылыми тұрғыдан бағыт-бағдар беріп, маңызды ұсыныстары мен пікірлерін білдірген шетелдік ғылыми кеңесші, ф.-м.ғ.д., профессор *Утебаев Даулетбай ағайға* зор ризашылығымды білдіремін.

Сондай-ақ диссертациялық жұмыс барысында қолдау көрсеткен математика кафедрасының ұжымына, ғылыми пікір алмасуға мүмкіндік жасап, пайдалы кеңестерін берген әріптестерге алғыс айтамын. Кафедра ұжымының қолдауы мен кәсіби ортасы зерттеу жұмысын нәтижелі жүргізуге қолайлы жағдай жасады.

Ерекше алғысымды мені әрдайым жігерлендіріп, рухани қолдау көрсеткен жақындарыма білдіремін. Олардың сенімі мен қолдауы осы еңбекті аяқтауға үлкен күш берді.

## ПАЙДАЛАНЫЛҖАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. – Ed. 3rd. – NY.: Springer. – 2006. – P. 640.
- 2 Coutelieiris F.A., Dlgado J.M.P.Q. Transport Processes in Porous Media. – NY.: Springer. – 2012. – P. 248.
- 3 Olivier Coussy. Mechanics and Physics of Porous Solids. – London: Wiley. – 2010. – P. 281.
- 4 Vafai K. Handbook of Porous Media. – Ed. 2nd. – Boca Raton: Taylor & Francis Group. – 2005. – P. 784.
- 5 Dullien F.A.L. Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure. – Ed. 2nd. – San Diego: Academic Press. – 1992. – P. 574.
- 6 Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука. – 1977. – стр. 664.
- 7 Ingham D.B., Pop I. Transport Phenomena in Porous Media. – Ed. 1. Dallas: Great Britain. – 2005. – P. 450.
- 8 Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Пер. с англ. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2006. – стр. 640.
- 9 Whintaker S. The Forchheimer equation: A theoretical development // Transport in Porous Media. – 1996. – Vol. 25. – P. 27-61.
- 10 Hassanizadeh S.M., Gray W.G. High Velocity Flow in Porous Media // Transport in Porous Media. – 1987. – Vol. 2. – P. 521-531.
- 11 Skjetne E., Auriault J. High-Velocity Laminar and Turbulent Flow in Porous Media // Transport in Porous Media. – 1999. – Vol. 36. – P. 131-147.
- 12 Tamer O.S., Toropov E.S., Shevnina T.E. et al. Research of Reservoir Rock Properties in Violation of Darcy’s Linear Law // Transport and Storage of Hydrocarbons: proced. internat. scient. pract. conf. – Tyumen. – 2016. – P. 1-9.
- 13 Buckley S.E., Leverett M.C. (1942). Mechanism of fluid displacement in sands. Trans. AIME, 146. – P. 107-116. <https://doi.org/10.2118/942107-G>.
- 14 Welge H.J. (1952) A simplified method for computing oil recovery by gas or water drive. J. Pet. Technol. 4. – P. 91-98. <https://doi.org/10.2118/124-G>.
- 15 Sheldon J.W., Cardwell W.T., Jr. One-dimensional incompressible noncapillary two-phase fluid flow in a porous medium. Pet. Trans. AIME, 216. – 1959. – P. 290-296. <https://doi.org/10.2118/978-G>.
- 16 McWhorter D.B., Sunada D.K. (1990). Exact integral solutions for two-phase flow. Water Resour. Res., 26. – P. 399-413.
- 17 Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media; The Mapple Press Company: York, PA, USA. – 1946.
- 18 Guérillot D., Kadiri M., Trabelsi S. (2020) Buckley-Leverett Theory for Two-Phase Immiscible Fluids Flow Model with Explicit Phase-Coupling Terms. Water. – 2020. – Vol. 12 (11). – P. 3041. <https://doi.org/10.3390/w12113041>.
- 19 Bianchini S., Bressan A. Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems. Annals of Mathematics. – 2005. – Vol. 161. – P. 223-342. <https://doi.org/10.4007/annals.2005.161.223>.

20 Salas M.D. The Curious Events Leading to the Theory of Shock Waves. *Shock Waves* – 2007. – Vol. 16 (6). – P. 477-487. <https://doi.org/10.1007/s00193-007-0084-z>.

21 Ахметзянов А.В. Математические модели управления разработкой нефтяных месторождений: монография / А.В. Ахметзянов, А.Г. Кушнер, В.В. Лычагин. – М.: ИПУ РАН. – 2017. – стр. 124. – ISBN 978-5-91450-206-2.

22 Fusi L., Farina A., Saccomandi G. Buckley–Leverett Equation with viscosities and Relative Permeabilities Depending on Pressure. *SIAM Journal on Applied Mathematics (SIAP)*. – 2015 – Vol. 75 (5), – P. 1983-2000. <https://www.jstor.org/stable/43896003>.

23 Fusi L., Farina A., Saccomandi G. High resolution shock capturing numerical simulations of three phase immiscible fluids from the unsaturated to the saturated zone. *Scientific Reports*. – 2021. – Vol. 11, Article number 5212. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-83956-w>.

24 Pasquier S., Quintard M., Davit Y. Modeling two-phase flow of immiscible fluids in porous media: Buckley-Leverett theory with explicit coupling terms. *Physical Review Fluids*. – 2017. – Vol. 2 (10). <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.2.104101>.

25 Bressan A. The unique limit of the Glimm scheme, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1995. – Vol. 130 (3). – P. 205-230. <https://doi.org/10.1007/bf00392027>.

26 Amaziane B., Jurak M., Pankratov L. and Piatnitski A. Homogenization of nonisothermal immiscible incompressible two-phase flow in porous media. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. – 2018. – Vol. 43. – P. 192-212. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.02.012>.

27 Colombo M., Crippa G., Graff M., Spinola L.V. On the role of numerical viscosity in the study of the local limit of nonlocal conservation laws. – 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.07513>.

28 El-Khatib, N. The Application of Buckley-Leverett Displacement to Waterflooding in Non-Communicating Stratified Reservoirs. *Proceedings of the SPE Middle East Oil Show*. – 2001. – P. 91-102. <https://doi.org/10.2523/68076-ms>.

29 Owusu, P.A., DeHua, L., Nagre, R.D. Buckley-Leverett Displacement Theory for Waterflooding Performance in Stratified Reservoir. *Petroleum & Coal*. – 2014. – Vol. 56 (3). – P. 267-281. [www.vurup.sk/petroleum-coal](http://www.vurup.sk/petroleum-coal).

30 Riaz, A., Tchelepi, H.A. Numerical simulation of immiscible two-phase flow in porous media. *Phys. Fluids* 18. – 2006. doi:10.1063/1.2166388 <http://dx.doi.org/10.1063/1.2166388>.

31 Fraces, C.G., Papaioannou, A., Tchelepi H. Physics informed deep learning for transport in porous media. Buckley Leverett problem. – 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.05172>.

32 Baigereyev D., Omariyeva D., Temirbekov N. et al. Numerical Method for a Filtration Model Involving a Nonlinear Partial Integro-Differential Equation // *Mathematics*. – 2022. – Vol. 10, Issue 8. – P. 1-24.

33 Temirbekov N.M., Los V.L., Baigereyev D.R., Temirbekova L.N. Module of the geoinformation system for analysis of geochemical fields based on mathematical modeling and digital prediction methods // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2021. – Vol. 5, Issue 449. – P. 137-145.

34 Kenzhebayev T.S., Mukhambetzhanov S.T. Numerical solution of the inverse problem of filtration theory by modulating functions // Far East Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 99, Issue 12. – P. 1779-1787.

35 Meirmanov A., Erygina N., Mukhambetzhanov S. Mathematical models of a liquid Filtration from reservoirs // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol. 49. – P. 1-13.

36 Смагулов Ш.С., Габбасов М.Б., Айдарбаев А.С. и др. О математическом моделировании процесса вытеснения нефти водой или газом при неизотермической плановой фильтрации // Нефть и газ Казахстана. – 1998. – №4. – стр. 29-42.

37 Габбасов М.Б., Ермагамбетов Т.К. Неравновесная модель фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости // Вестник КазНУ. – 1999. – №5 (19). – стр. 22-30.

38 Габбасов М.Б., Ермагамбетов Т.К. Разрешимость первой краевой задачи неравновесной фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с обобщенным законом неравновесности // Вестник КазНУ. – 2000. – №3 (22). – стр. 104-114.

39 Габбасов М.Б. Модель неравновесной двухфазной фильтрации с обобщенным законом неравновесности // Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в третьем тысячелетии»: тез. докл. междунар. конф. – Алматы. – 2000. – стр. 99-101.

40 Panfilov M., Popinet S., Vostrikov V. et al. Numerical modeling of fluid flow through multiscale fractured-porous media by quadrees // Journal of Computational Physics. – 2021. – Vol. 444. – P. 110566.

41 Panfilov M.B., Baishemirov Z.D., Berdyshev A.S. Macroscopic Model of Two-Phase Compressible Flow in Double Porosity Media // Fluid Dynamics. – 2020. – Vol. 55, Issue 7. – P. 936-951.

42 Bekbauov B., Berdyshev A., Baishemirov Z. et al. Numerical Validation of Chemical Compositional Model for Wettability Alteration Processes // Open Engineering. – 2017. – Vol. 7, Issue 1. – P. 416-427.

43 Bekbauov B., Berdyshev A., Baishemirov Z. Numerical simulation of chemical enhanced oil recovery processes // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Vol. 1623. – P. 664-676.

44 Bekbauov B.E., Kaltayev A., Nagy S. Three-dimensional thermal petroleum filtration study of water coning // Archives of Mining Sciences. – 2010. – Vol. 55, Issue 1. – P. 201-215.

45 Ahmed-Zaki D.Z., Mukhambetzhanov S.T., Imankulov T.S. Design of i-fields system component: Computer model of oil-recovery by polymer flooding // ICINCO 2015 - 12th International Conference on Informatics in Control,

Automation and Robotics, Proceedings. – 2015. – Vol. 2. – P. 510-516.

46 Danaev N., Akhmed-Zaki D., Mukhambetzhanov S., Imankulov T. Mathematical modelling of oil recovery by polymer/surfactant flooding // Communications in Computer and Information Science this link is disabled. – 2015. – Vol. 549. – P. 1-12.

47 Meirmanov A.M., Mukhambetzhanov S.T., Nurtas M. Seismic in composite media: Elastic and poroelastic components // Siberian Electronic Mathematical Reports this link is disabled. 2016. – Vol. 13 (1). – P. 75-88.

48 Aldanov Y., Toleuov T., Tasbolatuly N. Construction of approximate solutions to the Riemann problem for two-phase flow of immiscible liquids by modifying the vanishing viscosity method // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2022. – Vol. 3 (4-117). – P. 40-48.

49 Aldanov Y., Toleuov T., Tasbolatuly N. Approximate solutions of the Riemann problem for a two-phase flow of immiscible liquids based on the Buckley-Leverett model // Вестник Карагандинского университета. Серия Математика. – 2022. №2 (106).

50 Orazbayev B., Orazbayeva K., Makhatova V., Ospanov E., Tuleuova R., Kulmagambetova Zh., Toleuov T., Mukatayev N. Methods of Constructing Models and Optimizing the Operating Modes of a Chemical Engineering System for the Production of Benzene in a Fuzzy Environment // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – Vol. 2, – P. 78-88.

51 Timur Toleuov, Aliya Sakhabaeva, Zharasbek Baishemirov, Dinara Sadirbekova. Problems of two-phase immiscible liquids and methods for their solution // International Information and Engeneering Technology Association. – 2025, June. – Vol. 12, No. 6. <https://doi.org/10.18280/mmep.120622>.

52 Ospanov Y., Moldasheva Zh., Toleuov T. Zh., Shuteyeva G., Demyanenko A., Seidaliyev A. Automated systems for main oil pipelines diagnostics and control // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2021, 1047(1), 012145.

53 Kereyev A., Atanov S., Toleuov T. The Usage of Extended Kalman Filter to Increase Navigation Accuracy of Mobile Units in Closed Spaces // T2021 IEEE International Conference on Smart Information Systems and Technologies (SIST), 28-30 April 2021.

54 Мухамбетжанов С.Т., Толеуов Т.Ж. Об одной приближенной модели теории изотермической фильтрации // Известия Кыргызского государственного технического университета им.И.Раззакова (РИНЦ). –2019. №2-1 (50). – стр. 316-320. УДК: 54.258.587.

55 Мухамбетжанов С.Т., Толеуов Т.Ж. О применении метода параллельной прогонки для систем скважин, определенных на графах // Международная научная конференция «Проблемы прикладной математики и информатики». Актобе, Казахстан. – 2017.

56 Saltanbek Mukhambetzhanov, Timur Toleuov, On the Application of the Method of Parallel Fueling for Systems of Wells Identified on the Graph // The 6th Abu Dhabi University, Annual International Conference Mathematical Science and

Its Applications. – 2017.

57 Saltanbek Mukhambetzhonov, Timur Toleuov, One reverse problem of theory of filtration // The 7th Abu Dhabi University, Annual International Conference Mathematical Science and Its Applications. – 2018.

58 Мухамбетжанов С.Т., Толеуов Т.Ж. О приближенном методе решения одной обратной задачи теории фильтрации, Международная научно-практическая интернет-конференция «Тенденции и перспективы развития науки и образования в условиях глобализации». – 2019. Вып. 48, Переяслав-Хмельницкий, Украина.

59 Мухамбетжанов С.Т., Юлдашев З.Х., Толеуов Т.Ж. О приближенной модели теории изотермической фильтрации // Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий». – 2019. Ташкент, Узбекистан.

60 Orazbayev V., Ospanov Y., Orazbayeva K., Makhatova V., Kurmangaziyeva L., Utenova B., Mailybayeva A., Mukatayev N., Toleuov T., Tukpatova A. System concept for modelling of technological systems and decision making in their management // Book. – 2021. – P. 1-180. ISBN-13 (15) 978-617-7319-34-3. <https://doi.org/10.15587/978-617-7319-34-3>.

61 Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра. – 1984. – стр. 208.

62 Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра. – 1972. – стр. 288.

63 Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.Н. и др. Подземная гидравлика. – М.: Недра. – 1986. – стр. 304.

64 Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука. – 1983. – стр. 448.

65 Леонтев Н.Е. Основы теории фильтрации: учеб. пос. – Изд. 2-е. – М.: МАКС Пресс. – 2017. – стр. 88.

66 Галин Г.Я., Голубятников А.Н., Каменярж Я.А. и др. Механика сплошных сред в задачах. – Под ред. М.Э. Эглит. – М.: Московский лицей. – 1996. Т. 1. Теория и задачи. – стр. 396. Т. 2. Ответы и решения. – стр. 394.

67 Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – Пер. с англ. под ред. Ю. А. Буевича. – М.: Мир. – 1976. – стр. 632.

68 Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. – Пер. с англ. под ред. Г.И. Баренблатта. – М.: Мир. – 1964. – стр. 352.

69 Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – Под ред. И.А. Кибеля. – М.: Физматгиз. – 1963. – Ч.1, стр. 584. – Ч.2, стр. 728.

70 Михайлов Г.К., Николаевский В.Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах. В кн.: Механика в СССР за 50 лет. В 4-х т. Т.2. Механика жидкости и газа. Под ред. Л.И.Седова и др. – М.: Наука. – 1970. – стр.585-648.

71 Hopf E. The partial differential equation  $u_t + uux = uxx$ . Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1950. – Vol. 3, №3. – P. 201-230. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160030302>.

72 Олейник О.А., Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 12. – 1957. – вып. 3. – стр. 3-73.

73 Олейник О.А., О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций, ДАН СССР, 95, №3. – 1954. – стр. 451-455.

74 Тихонов А.Н. и Самарский А.А. О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка, ДАН СССР, 99, №1. – 1954. – стр. 27-30.

75 Lax P. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – Vol. 7, №1. – P. 159-193.

76 Кружков С.Н. К методам построения обобщенных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка, Успехи матем. наук, 20, вып. 6. – 1965, 112-4118.

77 Олейник О.А., О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. Успехи матем. наук, 14, вып. 2. – 1959, 165-170.

78 Гельфанд И.М., Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений, Успехи матем. наук, 14, вып. 2. – 1969, 87-158.

79 Калашников А.С., Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром, ДАН СССР, 127, №1. – 1959, 27-30.

80 Wu Zhuo - qun, On the existence and uniqueness of the generalised solutions of the Cauchy problem for quasi-linear equations of first order without convexity conditions, Chinese Math. – 1964. – Vol. 4. – P. 561-577.

81 Conway E., Smoller J., Global solutions of the Cauchy problem for quasi-linear first-order equations in several space variables, Comm. Pure Appl. Math., 19, №1. – 1966, 95-105.

82 Вольперт А.И., Пространства BV и квазилинейные уравнения, Матем. сб., 73 (115). – 1967, 255-302.

83 Roy, S., Sinha, S., Hansen, A. Flow-Area Relations in Immiscible Two-Phase Flow in Porous Media. Frontiers in Physics, 8. Front. Phys., 24 January 2020. <https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00004>.

84 Roy, S., Pedersen, H., Sinha, S., Hansen, A. The Co-Moving Velocity in Immiscible Two-Phase Flow in Porous Media. – 2021. arXiv:2108.10187v1. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.10187>.

85 Daripa, P, Glimm, J., Lindquist, B., McBrayan, O. Polymer Floods: A Case Study of Nonlinear Wave Analysis and of Instability Control in Tertiary Oil Recovery. Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1988. – Vol. 48(2). – P. 353-374. <http://www.jstor.org/stable/2101612>.

86 Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной, Москва, Гостехиздат. – 1957.

87 Bressan, A., Guerra, G., Shen, W. Vanishing Viscosity Solutions for Conservation Laws with Regulated Flux. – 2018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.01766>.

88 Lisha Zhao, Li Li, Zhongbao Wu, Chenshuo Zhang Analytical Model of Waterflood Sweep Efficiency in Vertical Heterogeneous Reservoirs under Constant Pressure. *Mathematical Problems in Engineering*. – 2016. Article ID 6273492, 9 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2016/6273492>.

89 Рудяк В.Я., Смагулов Ш.С. О гиперболической модификации уравнения Бюргерса. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. – 1981. – т.12, №2. – стр. 84-97.

90 Glimm J. Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations. *Communications on Pure and Applied mathematics*. – 1965. – Vol. XVIII. – P. 697-715.

91 Новиков В.А., Саватеев Е.Г., Слинько О.Н. Об одной обратной задаче для уравнений Каттанео-Вернотте. В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск. – 1993. – Вып.106. – стр. 75-96.

92 Zhu J., Du Y., Yijun Shen. Evaluate the performance of the vertically upward gas-liquid two-phase flow in an airlift pump system. *International Journal of Multiphase Flow*. – 2024. – Vol. 181. 105016. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2024.105016>.

93 Shimizu K., Takagi S. Study on the performance of a 200 m airlift pump for water and highly viscous shear-thinning slurry. *Int. J. Multiph. Flow*. – 2021. – Vol. 142, Article 103726. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103726>.

94 Du Y., Zhu J., Han X., Fu M., Li M., Shen Y. Gas state equation and flow mechanism of gas-liquid two-phase flow in airlift pump system. *Physics of Fluids*. – 2024. – Vol. 36, 055142. <https://doi.org/10.1063/5.0201317>.

95 Fujimoto H., Nagatani T., Takuda H. Performance characteristics of a gas-liquid-solid airlift pump. *Int. J. Multiph. Flow* 2005; 31 pp. 1116-1133. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2005.06.008>.

96 Numerical analysis of air-water two-phase upflow in artificial upwelling of deep ocean water by airlift pump. Author links open overlay panelUn-Ryong Rim. – 2024. 106177. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2024.106177>.

97 Ali B.M., Ali, Dheyaa Jasim J., Soheil Salahshour, Omid Akbari A., Emami N. Numerical simulation of the nanofluid flow and heat transfer in porous microchannels with different flow path arrangements using single-phase and two-phase models. *International Journal of Thermofluids*. – 2024. – Vol. 24, 100846. <https://doi.org/10.1016/j.ijft.2024.100846>.

98 Kozlov V., Saidakov V., Kozlov N. Dynamics of Low-Viscosity Liquids Interface in an Unevenly Rotating Vertical Layer. *Fluid Dynamics and Materials Processing*. – 2024. – Vol. 20, Issue 4. – P. 693-703. <https://doi.org/10.32604/fdmp.2024.048068>.

99 Min J., Guo Zh. Spectral analysis of heat flux across a nanostructured

solid diamond-liquid water interface: A nonequilibrium molecular dynamics study. *Thermal Science and Engineering Progress.* – 2023. – Vol. 44. 102068. <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2023.102068>.

100 Loison A., Kokh S., Pichard T., Massot M. A unified two-scale gas-liquid multi-fluid model with capillarity and interface regularization through a mass transfer between scales. *International Journal of Multiphase Flow.* – 2024. – Vol. 177. 104857. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2024.104857>.

101 Zhang Ch., Guo Zh., Wang L-P. A thermodynamically consistent diffuse interface model for multi-component two-phase flow with partial miscibility. *Computers & Mathematics with Applications.* – 2023. – Vol. 150. – P. 22-36. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.09.006>.

102 Wu X., Li Ch., Luo X., Feng J., Wang L. Description of phase separation motion in gas-liquid two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow.* – 2024. – Vol. 181. 104998. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2024.104998>.

103 Bekezhanova V.B., Stepanova I.V. Mathematical modeling of concentration influence on evaporative convection in a bilayer system of binary mixtures. *International Journal of Heat and Fluid Flow.* – 2024. – Vol. 107. 109385. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2024.109385>.

104 Xu X., Dey M., Qiu M., Feng J. Modeling of van der Waals force with smoothed particle hydrodynamics: Application to the rupture of thin liquid films. *Applied Mathematical Modelling.* – 2020. – Vol. 83. – P. 719-735. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.03.003>.

105 Firouzi B., Zamanian M. The effect of capillary and intermolecular forces on instability of the electrostatically actuated microbeam with T-shaped paddle in the presence of fringing field. *Applied Mathematical Modelling.* – 2019. – Vol. 71. – P. 243-268. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.02.016>.

106 Simulation of binary droplet collision with different angles based on a pseudopotential multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model. *Computers & Mathematics with Applications.* – 2021. – Vol. 92. – P. 76-87. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.036>.

107 Petersen K.J., Rahbarimanesh S., Brinkerhoff J.R. Progress in physical modelling and numerical simulation of phase transitions in cryogenic pool boiling and cavitation. *Applied Mathematical Modelling.* – 2023. – Vol. 116. – P. 327-349. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.11.028>.

108 Shen Y., Zhang R., Han D., Liu X. Problems and corrections of classical mathematical model for piecewise linear system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2024. – Vol. 139. 108300. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108300>.

109 Ghalambaz M., Aljaghtham M., Chamkha A.J., Abdullah A., Mansir I. Mohammad Ghalambaz Mathematical modeling of heterogeneous metal foams for phase-change heat transfer enhancement of latent heat thermal energy storage units. *Applied Mathematical Modelling.* – 2023. – Vol. 115. – P. 398-413. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.10.018>.

110 Tyurenkova V.V., Smirnova M.N., Stamov L.I. Smirnov N.N. Mathematical modeling of droplet collisions in sprays under microgravity conditions. *Acta Astronautica*. – 2024. – Vol. 219. – P. 459-466. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2024.03.036>.

111 Панфилов М. Физико-химическая гидродинамика пористых сред. С приложениями к геонаукам и нефтяной инженерии. Изд: Интеллект. – 2020. – стр. 464. – ISBN 978-5-91559-267-3.

112 Ishaq M., Rehman S., Riaz M.B., Zahid M. Hydrodynamical study of couple stress fluid flow in a linearly permeable rectangular channel subject to Darcy porous medium and no-slip boundary conditions. *Alexandria Engineering Journal*. – 2024. – Vol. 91. – P. 50-69. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2024.01.066>.

113 Berdyshev A., Baigereyev D., Boranbek K. Numerical Method for Fractional-Order Generalization of the Stochastic Stokes-Darcy Model. –2023. – Vol. 11(17), 3763. <https://doi.org/10.3390/math11173763>.

114 Liu Y., Feng Y., Wu Zh., Alamdari M.M., Wu D., Luo Zh., Chen X, Gao W. Dynamic crack propagation in elasto-plastic materials using phase-field virtual modelling method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2024. – Vol. 429. 117160. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117160>.

115 Frenning G. A mean-strain estimate for plastic particles intended for distinct-particle simulations at high relative density. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2024. – Vol. 431. 117257. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117257>.

116 Esteban A., Gómez P., Zanzi C., López J., Bussmann M., Hernández J. A contact line force model for the simulation of drop impacts on solid surfaces using volume of fluid methods. *Computers & Fluids*. – 2023. – Vol. 263. 105946. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2023.105946>.

117 Alphonso W.E., Baier M., Carmignato S., Hattel J.H., Bayat M. On the possibility of doing reduced order, thermo-fluid modelling of laser powder bed fusion (L-PBF) – Assessment of the importance of recoil pressure and surface tension. *Journal of Manufacturing Processes*. – 2023. – Vol. 94. – P. 564-577. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2023.03.040>.

118 Darshan M.B., Magnini M., Matar O.K. Numerical modelling of flow boiling inside microchannels: A critical review of methods and applications. *Applied Thermal Engineering*. – 2024. – Vol. 257, Part C. 124464. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2024.124464>.

119 Jain A.K., Denner F., Berend van Wachem. Dispersion of particles in a sessile droplet evaporating on a heated substrate. *International Journal of Multiphase Flow*. Volume 180. 2024; 104956. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2024.104956>.

120 Толеуов Т.Ж. Бакли – Леверетт моделі негізінде екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің қолданыстары // Қазақстан математиктерінің бірінші конгресі. Тезистер жинағы. Алматы: Математика және математикалық моделдеу институты. – 2026. – 139-141 бб.

# ҚОСЫМША 1

«Сүзгілеу есебіндегі екіфазалық ағыс моделін жойылатын тұтқырлық әдісімен талдау» бағдарламалық қамсыздандыруының авторлық куәлігі.

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ

РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**  
О ВНЕСЕНИИ СВЕДЕНИЙ В ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РЕЕСТР  
ПРАВ НА ОБЪЕКТЫ, ОХРАНЯЕМЫЕ АВТОРСКИМ ПРАВОМ

№ 23424 от «8» февраля 2022 года

Фамилия, имя, отчество, (если оно указано в документе, удостоверяющем личность) автора (ов):  
**ТАСБОЛАТУЛЫ НУРБОЛАТ, АЛДАНОВ ЕРБОЛ САТЫБАЕВИЧ, ТОЛЕУОВ ТИМУР  
ЖАКСЫЛЫКОВИЧ**

Вид объекта авторского права: **программа для ЭВМ**

Название объекта: **ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ АНАЛИЗА МОДЕЛИ ДВУХФАЗНОГО  
ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ в ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДОМ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ**

Дата создания объекта: **07.02.2022**



Краткая ссылка: [http://www.kazpatent.kz/ru/сайттынын\\_Авторлык\\_куәлік\\_Баланың\\_теңсеруге\\_Болады\\_https://copyright.kazpatent.kz](http://www.kazpatent.kz/ru/сайттынын_Авторлык_куәлік_Баланың_теңсеруге_Болады_https://copyright.kazpatent.kz)

Подлинность документа возможно проверить на сайте [kazpatent.kz](http://www.kazpatent.kz) в разделе «Авторское право» <https://copyright.kazpatent.kz>

Подписано ЭЦП

Е. Куантыров

## ҚОСЫМША 2

«Сүзгілеу есебіндегі екіфазалық ағыс моделін жойылатын тұтқырлық әдісімен талдау» бағдарламасының листингі

```
class BuckleyLev():
    def __init__(self):
        self.params = {
            #non wetting phase viscosity – суланбайтын фазаның тұтқырлығы
            "viscosity_o": 1.e-3,
            #wetting phase viscosity – суланатын фазаның тұтқырлығы
            "viscosity_w": 1.e-3,
            #initial water saturation – бастапқы су қанығуы
            "initial_sw":0.2,
            #residual water saturation – қалдық су қанығуы,  $S_{wirr}$ 
            "residual_w":0.5,
            #residual oil saturation – қалдық мұнай қанығуы,  $S_{or}$ 
            "residual_o":0.3,
            #connate water saturation – бастапқы (табиғи) су қанығуы
            #water rel perm at water curve end point – су үшін салыстырмалы
            өткізгіштік (су қисығының соңғы нүктесінде)
            "krwe":1,
            #oil rel perm at oil curve end point – мұнай үшін салыстырмалы
            өткізгіштік (мұнай қисығының соңғы нүктесінде)
            "kroe": 0.99,
            #dimless velocity results – өлшемсіз жылдамдық нәтижелері
            'vd_array':[],
            #porosity – кеуектілік
            'poro':0.24,
            #water injection rate units TBD (to be determined) – су айдау
            жылдамдығы (өлшем бірлігі анықталмаған, кейін анықталады)
            "inject_rate":20,
            #cross sectional area units TBD – көлденең қиманың ауданы (өлшем
            бірлігі кейін анықталады)
            "x-area":30
        }
    def k_rw(self,sw):
        #water relative perm calculation for a given water saturation – берілген су
        қанығуы үшін судың салыстырмалы өткізгіштігін есептеу
        p = 11.174
        return ((self.params['krwe']))*sw**p
    BuckleyLev.k_rw = k_rw
    def k_m(self,sw):
```

```

#oil relative perm calculation for a given water saturation – берілген су
канығуы үшін мұнайдың салыстырмалы өткізгіштігін есептеу
q = 3.326
return ((1.-self.params['kroe']*sw)**q)
BuckleyLev.k_rn = k_rn
def fractional_flow(self,sw):
#returns the fractional flow – фракциялық ағынды қайтарады
return
1./(1.+((self.k_rn(sw)/self.k_rw(sw))*(self.params["viscosity_w"]/self.params["vis
cosity_o"])))
BuckleyLev.fractional_flow = fractional_flow
def fractional_flow_deriv(self,sw):
#calculate derivative of fractional flow - dFw/dSw – Vsh – фракциялық
ағынның туындысын есептеу
f_deriv = (self.fractional_flow(sw+0.0001) -
self.fractional_flow(sw))/0.0001
return f_deriv
BuckleyLev.fractional_flow_deriv = fractional_flow_deriv
def fractional_flow_2deriv(self,sw):
f_2deriv = ((self.fractional_flow(sw+0.01))-2*(self.fractional_flow(sw))-
self.fractional_flow(sw-0.01))/((0.01)**2)
return f_2deriv
BuckleyLev.fractional_flow_2deriv = fractional_flow_2deriv
def plot_fractional_flow_deriv(self):
#plot the derivative dFw/dSw - Vsh vs Sw – туындысының Sw-қа тәуелді
графикін салу
y = np.linspace(self.params["residual_w"]+1e-3,(1-
self.params["residual_o"]+1e-3),50)
x = [self.fractional_flow_deriv(i) for i in y ]
plt.plot(x,y)
plt.title('Бөлшек ағыс туындысының қисығы')
plt.xlabel('dfw/dSw')
plt.ylabel('Sw')
plt.show()
BuckleyLev.plot_fractional_flow_deriv=plot_fractional_flow_deriv
def sw_at_shock_front(self):
#first find range to search in by looking where 2nd derivative is negative
(where curve turns) – алдымен екінші туынды теріс болатын аймаққа қарап,
іздеу аралығын табу (яғни қисықтың бұрылатын жерін анықтау)
sw_start = 1.-self.params['residual_o']
sw_end = self.params['residual_w']
for sw in np.arange(self.params['residual_w']+1.e-9, 1.-
self.params['residual_o'],0.001):
if (self.fractional_flow_2deriv(sw)< -1.e-2 and sw < sw_start):

```

#i.e. we are below  $S_{w\_start}$  and the grad is negative – update upper limit –  
яғни, біз  $S_{w\_start}$ -тан төменбіз және градиент теріс – жоғарғы шекті жаңарту  
керек

```
sw_start = sw
```

```
if (self.fractional_flow_2deriv(sw)< -1.e-2 and sw > sw_end):
```

#i.e. we are above  $S_{w\_end}$  and the gradient is negative – update lower limit –  
яғни, біз  $S_{w\_end}$ -тен жоғарыдамыз және градиент теріс – төменгі шекті  
жаңарту керек

```
sw_end = sw
```

```
sw_at_front = 0.
```

```
current_min = 1000.
```

#find where finite difference approximation (almost) equals the continuous  
value of the function – ақырлы айырма жуықтауы функцияның үздіксіз мәніне  
(шамамен) тең болатын нүктені табу

```
for sw in np.arange(sw_start,sw_end, 0.0001):
```

```
current_diff = abs(self.fractional_flow_deriv(sw)-  
self.fractional_flow(sw)/sw)
```

```
#print( 'grad func', self.fractional_flow_deriv(sw), sw,  
self.fractional_flow(sw)/sw)
```

```
if current_diff < current_min:
```

```
print('sw at front',current_min, sw,current_diff)
```

```
current_min = current_diff
```

```
sw_at_front = sw
```

```
current_min = current_diff
```

```
return sw_at_front
```

```
BuckleyLev.sw_at_shock_front = sw_at_shock_front
```

```
def plot_fractional_flow(self):
```

#plot the sw vs fractional flow – sw пен фракциялық ағын арасындағы  
графикті салу

```
x = np.linspace(self.params["residual_w"]+1e-3,(1-  
self.params["residual_o"]+1e-3),100)
```

```
x = np.linspace(self.params["residual_w"]+1e-3,(1),100)
```

```
y = [self.fractional_flow(i) for i in x ]
```

```
plt.plot(x,y)
```

#sw\_at\_front = self.sw\_at\_shock\_front() – соққы фронтындағы sw мәнін  
анықтау

#plt.plot([sw\_at\_front], [self.fractional\_flow(sw\_at\_front)], 'ro') – соққы  
фронтындағы нүктені қызыл түспен белгілеу

```
plt.title('Су қанықтылығының бөлшек ағыс функциясы')
```

```
plt.xlabel('Sw')
```

```
plt.ylabel('Бөлшек ағыс')
```

```
plt.ylim([0,1.1])
```

```
plt.xlim([0,1])
```

```

#add limiting fractional flow lines – шектік фракциялық ағын
сызықтарын қосу
plt.hlines(y[len(y)-1],0,1,linestyles='dashed',lw=2, colors='0.4')
plt.annotate('fw max: %.4f' % y[len(y)-1],xy=(0.08,0.95))
plt.show()
print(y[len(y)-1])
BuckleyLev.plot_fractional_flow = plot_fractional_flow
a = BuckleyLev()
a.plot_fractional_flow()
a.plot_fractional_flow_deriv()
a.sw_at_shock_front()
def rarefaction_plot(self):
    #it should calculate the shock velocity and the corresponding saturation
    which this occurs an – ол соққы жылдамдығын және оған сәйкес келетін
    қанығуды (яғни сол жерде пайда болатын мәнді) есептеуі тиіс
    #create dx window of increasing size for calculating welge – Welge есептеу
    үшін өлшемі біртіндеп өсетін dx терезесін құру
    x = np.linspace(self.params["residual_w"]+1e-3,(1-
    self.params["residual_o"]+1e-3),50)
    maximum, sw_shock = 0,0
    grads = []
    #to do - add flag to allow BL_time function to calcuate sw values from
    supplied Xd values – BL_time функциясына берілген Xd мәндерінен sw
    мәндерін есептеуге мүмкіндік беретін жалауша қосу
    #calculate welge gradient at each point until we find the max = shock
    velocity – ең үлкен мәнге, яғни соққы жылдамдығына, жеткенше әр нүктедегі
    welge градиентін есептеу
    for swi in x:
        grad = self.fractional_flow(sw_i)/(sw_i-self.params["residual_w"]+1e-3)
        #vd = xd/td
        grads.append(grad)
        if grad>maximum:
            sw_shock = sw_i
            maximum = grad
    #find the position of the shock velocity in the grads array and slice to this
    point for the rarefaction – grads массивіндегі соққы жылдамдығының орнын
    тауып, сиреу аймағы үшін осы нүктеге дейін кесу
    #plus one to include the actual shock velocity. Reverse to get the values in
    the right order – мәндерді дұрыс ретке келтіру үшін кері айналдыру
    rarefaction = (grads[:([i for i,j in enumerate(grads) if j == maximum][0]+1)])
    rarefaction.sort(reverse=True)
    y = x[:len(rarefaction)]
    #save calculated grads to instance – есептелген градиенттерді объектіге
    сақтау

```

```

print(rarefaction[0])
for v in rarefaction:
self.params['vd_array'].append(v)
#plot rarefaction part – сиреу бөлігінің графигін салу
plt.plot(rarefaction,y,'b',lw=2)
#highlight vshock point – vshock нүктесін ерекшелеу
plt.plot(rarefaction[0],y[0],'ro')
#add the part ahead of the shock front – соққы фронтының алдындағы
бөлікті қосу
plt.vlines(rarefaction[0],y[0],self.params["initial_sw'],'b',lw=2)
plt.hlines(self.params["initial_sw"],rarefaction[0],rarefaction[0]+1,'b',lw=2)
#add saturation lines plt.hlines(self.params["initial_sw"], 0, rarefaction[0],
linestyles='dashed', lw=2, colors='0.4') – қанығу сызықтарын қосу
plt.hlines(y[0],0,rarefaction[0],linestyles='dashed',lw=2, colors='0.4')
plt.vlines(rarefaction[0],-
2,self.params["initial_sw"],linestyles='dashed',lw=2, colors='0.4')
#add annotations – аннотациялар қосу
plt.annotate('V shock',xy=(rarefaction[0]+0.02,y[0]+0.02))
plt.annotate('Sw f',xy=(0+0.04,y[0]-0.05))
plt.annotate('Sw i',xy=(0+0.04,self.params["initial_sw"]-0.05))
#ad vadmin if the min velocity values is not zero – егер ең кіші жылдамдық
мәні нөлге тең болмаса, vadmin қосу
if (rarefaction[len(rarefaction)-1]>0.001):
plt.hlines(y[len(y)-1],0,rarefaction[len(rarefaction)-1],'b',lw=2)
plt.plot(rarefaction[len(rarefaction)-1],y[len(y)-1],'ro')
plt.annotate('V min',xy=((rarefaction[len(rarefaction)-1]+0.08),(y[len(y)-
1])))
plt.vlines(rarefaction[len(rarefaction)-1],y[len(y)-
1],0,linestyles='dashed',lw=2, colors='0.4')
plt.annotate('Sw c',xy=(0+0.04,1-self.params["residual_o"]+0.03))
plt.xlabel('Өлшемсіз жылдамдық, Vd = xd/td')
plt.ylabel('Қанықтылық')
plt.ylim([0,1])
plt.xlim([0,rarefaction[0]+1])
plt.title('Профильдің қанықтылық жылдамдығы')
plt.show()
BuckleyLev.rarefaction_plot = rarefaction_plot
def BL_time_sol(self,time):
)
sw_at_front = self.sw_at_shock_front()
sw_deriv_at_front = self.fractional_flow_deriv(sw_at_front)
#print('sw_atfront', (sw_at_front))
#print('vel at front', sw_deriv_at_front)

```

```

#calculate the td based on the time – уақытқа байланысты td мәнін
есептеу
td = (time*self.params['inject_rate']/self.params['poro']*self.params['x-
area']
#then use this to calculate the xd at shock front by x with dfw/dsw – содан
кейін осыны пайдаланып, соққы фронтындағы xd мәнін x және dfw/dsw
арқылы есептеу
xd_shock = sw_deriv_at_front*td
print('xd_shock',xd_shock)
#now work backwards, calculate xd values for each water saturation – енді
кері бағытта жүріп, әрбір су қанығуы үшін xd мәндерін есептеу
#setup the water saturation array – су қанығуы массивін дайындау
y = np.arange(1.-self.params["residual_o"],sw_at_front,-0.001)
np.append(y,sw_at_front)
y.append(sw_at_front)
#print('y',y) – 'y' мәнін шығару
x = [self.fractional_flow_deriv(sw) for sw in y]
#multiply by td to account for time – уақытты ескеру үшін td-ге көбейту
x2 = [xi*td for xi in x]
#interpolate will return a function that returns a y for a given x, note x must
be monotonically increasing – берілген x үшін y мәнін қайтаратын функцияны
қайтарады, x мәндері монотонды түрде өсіп отыруы керек
print('x',x,'y',y)
sat_behind_front = interpolate.interpld(sorted(x2),y)
#return the function to be called later, note check to see if we are behind the
shock front at the given x – шақырылатын функцияны қайтару, берілген x
нүктесінде соққы фронтының артында екенімізді тексеру керек
def saturation_at_xd(xd):
if xd<xd_shock:
return sat_behind_front(xd)
else:
return self.params['initial_sw']
return (saturation_at_xd)
BuckleyLev.BL_time_sol = BL_time_sol

```