**Тәңірберген Айсұлу Көбейсінқызы**

**Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептер**

8D05401 – Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

# АҢДАТПАСЫ

**Диссертацияның құрылымы мен көлемі.** Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен (1 бөлімде 3 бөлімше, екінші бөлімде 3 бөлімше, үшінші бөлімде 3 бөлімше), қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

**Суреттер, кестелер мен әдебиеттер саны.** Жұмыста 115 әдебиет, 2 сурет пайдаланылады.

**Зерттеудің өзектілігі.** Электромагниттік өрістерді математикалық модельдеу кезінде электромагниттік процестің сипаты ортаның қасиеттеріне байланысты екені белгілі. Егер орта тепе-тең күйде болса, онда Гамильтон принципі бойынша көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге келеміз.

Ал егер орта жоғары өткізгіштікке ие болса, онда көпөлшемді параболалық теңдеулер туындайды. Демек, электромагниттік өрістерді күрделі ортада (мысалы, ортаның өткізгіштігі өзгеретін жағдайда) талдау көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерді зерттеуге алып келеді.

Комплекс айнымалылардың аналитикалық функциялары теориясы әдісімен жазықтықтағы эллиптикалық теңдеулер үшін шекаралық есептердің қисындылығы жақсы зерттелген. Алайда, тәуелсіз айнымалылар саны екіден көп болған жағдайларда ұқсас есептерді зерттеу кезінде принциптік сипаттағы қиындықтар туындайды. Көпөлшемді сингулярлық интегралдық теңдеулердің толық теориясы болмағандықтан, сингулярлық интегралдық теңдеулер әдісі өзінің тиімділігін жоғалтады.

Керісінше, көпөлшемді сфералық функциялар теориясы жақсы зерттелген. Жалпыланған кеңістіктерде көпөлшемді гиперболалық теңдеулер үшін аралас есептер жақсы қарастырылған, еңбектерінде бұл есептердің жалғыз классикалық шешімі болатыны дәлелденген. Көпөлшемді эллиптикалық теңдеулер үшін аралас есептер жұмысында қарастырылған.

Алайда, өзгешеленген эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге арналған аралас есептер әлі де жеткілікті түрде зерттелмеген. Сондықтан, өзгешеленген эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге арналған аралас есептерді зерттеу – өзекті ғылыми мәселе болып табылады.

**Зерттеу жұмыстың мақсаты**: Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге арналған аралас есептердің бірмәнді шешілетінін көрсету, сондай-ақ қарастырылып отырған есептердің шешімдеріне тән жаңа сапалық және құрылымдық қасиеттерді анықтау.

**Зерттеу міндеттері:**

а) өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге арналған аралас есептің қисындылығын көрсету, оның шешімінің бар болатындығын дәлелдеп, шешімнің айқын аналитикалық түрін алу. Көрсетілген есеп шешімінің бірмәнділігін қамтамасыз ететін шарттарды анықтау.

ә) өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулер класы үшін аралас есептің қисындылығы дәлелдеу, оның шешімінің бар екенін негіздеу және шешімнің айқын аналитикалық түрін құру. осы теңдеулер класы үшін шешімнің бірмәнділігін дәлелдеу.

б) жалпыланған түрдегі өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге арналған аралас есепті зерттеу, оның қисындылығы, шешімінің бар және бірмәнділігін дәлелдеу және шешімнің айқын түрін табу.

**Зерттеу нысаны** цилиндрлік облыстағы өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептер.

**Зерттеу пәні** - өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептер шешімдерін құру мәселелері.

**Ғылыми жаңалығы.**

Цилиндрлік облыста қарастырылған өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулер үшін аралас есептердің бірмәнді шешілетіндігі дәлелденді. Зерттелген есептер үшін шешімдердің айқын аналитикалық түрлері алынды

1. Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің бар екендігі дәлелденіп, оның аналитикалық түрі алынды, қисындылығы көрсетілді;
2. Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің жалғыз болатындығы дәлелденді;
3. Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қисындылығы көрсетілді, шешімінің бар болатындығы дәлелденді және бұл есептің айқын шешімі алынды;
4. Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің шешімінің жалғыздығы дәлелденді;
5. Өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің бар болатындығы дәлелденді және оның айқын шешімі алынды, қисындылығы көрсетілді;
6. Өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің жалғыздығы анықталды.

**Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер:**

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің қисындылығы, шешімінің бар болуы, оның аналитикалық түрі және шешімінің жалғыздығы;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қисындылығы, шешімінің бар болуы, айқын шешімі және шешімінің жалғыздығы;

– өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің қисындылығы, шешімінің бар болуы, оның айқын шешімі және шешімінің жалғыздығы.

**Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы.**

Жұмыс негізінен теориялық сипатта. Алынған нәтижелер өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық және эллиптико-параболалық теңдеулерге локалдық және локалдық емес шекаралық есептерді зерттеу барысында қолданылуы мүмкін.

Жұмыста алынған шешімдер газ динамикасы, механика, биология, физика, экономика және басқа да салалардағы есептердің сандық моделдерін талдау кезінде пайдалануға болады.

**Автордың жеке үлесі**

Диссертациялық жұмыста ұсынылған барлық негізгі нәтижелер тікелей автордың өзі тарапынан алынған. Зерттеліп отырған аралас есептердің қойылымы, оларды талдау әдістерінің таңдалуы, шешімдердің қисындылығы, шешімінің бар және жалғыз болуының математикалық дәлелдеулері автордың өзімен орындалды.

Автор тарапынан сфералық функциялар мен Бессель функциялары арқылы жіктеу әдістерін пайдалана отырып, есептердің аналитикалық шешімдері алынды.

Диссертацияда ұсынылған әдістер мен тәсілдер автордың ғылыми мақалаларында жарияланған нәтижелерінің қисынды жалғасы мен дамуы болып табылады. Бұл нәтижелер әртүрлі деңгейдегі ғылыми конференцияларда апробациядан өткен. Жұмысты орындау барысында автор ғылыми әдебиеттерге талдау жүргізіп, теориялық тұжырымдарды, теоремалардың дәлелдерін және диссертация мәтінін толықтай өз бетінше әзірледі.

**Жұмысты апробациялау.** Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

– «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблеммалары» IX Халықаралық ғылыми конференция. Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті. Ақтөбе, Қазақстан (24-28 мамыр 2022 ж.).

– «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары» физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА құрметті академигі К.К.Кенжебаевтың 70 жас мерейтойына арналған Халықаралық ғылыми семинар. Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті. Ақтөбе, Қазақстан (20 қаңтар 2023 ж.);

– Сәуір айындағы дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Математика және математикалық моделдеу институты. Алматы, Қазақстан (сәуір 2024 ж.)

– «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, математика кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан (семинар жетекшісі ф.-м.ғ.д., профессор Ж.А.Сартабанов), (2024-2026 ж.ж)

Шетелдік тағылымдама 28.03-26.04.2022 аралығында Өзбекстан Республикасы, Бердах атындағы мемлекеттік университетінде (Қарақалпақстан, Нөкіс) өтті.

**Жарияланымдар.** Диссертация тақырыбы бойынша 9 жұмыс жарияланды, оның ішінде Scopus базасында индекстелетін рейтингтік ғылыми журналда 3 жарияланым, ҚР ҒЖБМ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған ғылыми нәтижелерді жариялау тізіміне енетін ғылыми басылымдарда 2 мақала, ғылыми журналда – 1 мақала, халықаралық конференциялар мен семинарлар материалдарында 3 мақала жарияланды.

**Диссертацияның қысқаша мазмұны.**

Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Әрбір бөлім өз кезегінде бірнеше бөлімшелерге бөлінген.

Диссертацияның бірінші бөлімінде өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептер қарастырылады.

1.1 Көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есепті қойылымын қарастырайық.

Айталық, $D_\alpha - E_{m+1}$ Евклид кеңістігінде $\Gamma = \{(x,t)|x| = 1\}$ цилиндрімен және $t = \alpha > 0$ , $t = 0$ жазықтықтарымен шектелген $(x_1, \dots, x_m, t)$ нүктелерінің цилиндрлік облысы, мұндағы $|x| -$ вектор ұзындығы $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Осы беттердің $D_\alpha$ облысының $\partial D_\alpha$ шекарасын құрайтын бөліктерін сәйкесінше $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ деп белгілейік.

**Анықтама.** $D \subset R^n$ – ашық облыс, ал $\Gamma$ – $D$ облысының шекарасы болсын. $D$ облысында $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$ функциялары анықталған. Екінші ретті дифференциалдық операторды $L$ арқылы келесі түрде анықталық

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u.$$

Егер

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\ \xi_i \xi_j$$

квадраттық формасы $D$ облысының әрбір нүктесінде кез келген $\xi \in R^n$ үшін анықталған болса, дифференциалдық $L$ операторы эллиптикалық деп аталады.

$D_\alpha$ облысында өзара байланысқан өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерді қарастырайық

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \qquad (1)$$

$$L^*\vartheta \equiv g(t)\Delta_x\vartheta + \vartheta_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i\vartheta_{x_i} - b\vartheta_t + c\vartheta = 0, \qquad (1^*)$$

мұндағы $g(t) > 0$ және $t > 0$, $g(0) = 0$, $g(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2((0,\alpha))$, $\Delta_x$-Лаплас операторы $x_1, \dots, x_m$, $m \geq 2$, $d(x,t) = c - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің қойылымы келесідей болады.

**Есеп 1.** $D_\alpha$ облысында $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ класынан

$$Lu \equiv g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_{rr} - \frac{\delta u}{r^2}\right) + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + \qquad (1_1)$$

$$+c(r,\theta,t)u = 0.$$

$$u|_{S_0} = \tau(r,\theta), u_t|_{S_0} = \nu(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \qquad (2)$$

$(1_1)$ теңдеуінің (2) шектік шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

**Лемма 1.** Айталық, $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Егер $l \geq m - 1$, онда қатар

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (3)$$

сонымен бірге, $p \leq l - m + 1$ ретті дифференциалдау арқылы одан алынған қатар абсолютті және бірқалыпты жинақталады.

Мұндағы $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — сызықты тәуелсіз $n$ ретті сфералық функциялар жүйесі, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2), \theta = (\theta_{1,} \dots, \theta_{m-1})$. $W_2^l(S_0), l = 0, \dots, 1$ — Соболев кеңістігі.

**Лемма 2.** $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$ болу үшін, (3) қатарындағы коэффициенттер келесі теңсіздіктерді қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті шарт болып табылады

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}$$

$\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\hat{d}_n^k(r,t)$, $\rho\,_n^k, \bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, арқылы (1.3) қатарының коэффициенттерін $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$ , $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i=1,\dots,m$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$ функцияларына сәйкес белгілейік, мұндағы $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$, $H$- евклидтік $E_m$ кеңістігіндегі бірлік сфера.

1.2 Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге аралас есептің қисындылығын қарастырайық.

$D_\alpha$ облысында (1) теңдеудегі қосымша мүшелері 0-ге тең болғандағы жағдайда, өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуді қарастырайық:

$$g(t)\Delta_x u + u_{tt} = 0, \tag{4}$$

$\Delta_x$- айнымалыдағы Лаплас операторы.

(4) теңдеуі сфералық координаталарда келесі түрде болады:

$$g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) + u_{tt} = 0,$$

**Есеп 1.1.** $D_\alpha$ облысында $C^1(\overline{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$ класынан келесі эллиптикалық теңдеудің

$$g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) + u_{tt} = 0, \tag{5}$$

шекаралық шарттарды

$$u|_{S_0} = \tau(r,\theta), u_t|_{S_0} = \nu(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \tag{2}$$

қанағаттандыратын шешімді табу керек, мұндағы $\delta$–екінші ретті дифференцалды оператор,

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$$

$$g_1 = 1,\ g_j = \left(sin\theta_1 \dots sin\theta_{j-1}\right)^2, j > 1.$$

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_n^k(r) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), (6)$$

$$k_n \le c_1 n^{m-2}, \left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, j = \overline{1,m-1}, l = 0,1,\dots. (7)$$

$\delta$ операторының спектрі $\lambda_n = n(n+m-2), n = 0,1, \ldots,$ меншікті мәндерден тұрады, олардың әрқайсысына $k_n$ ортонормаль $Y_{n,m}^k(\theta)$ функциялар сәйкес келеді.

**Теорема 1.** Егер (2) шекаралық шарттарындағы берілген функциялар үшін, 1 және 2-леммаларда көрсетілген шарттар орындалса, онда (5) теңдеуі үшін қойылған 1.1 аралас есептің $D_\alpha$ облысында $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$ класына класына тиесілі жалғыз шешімі бар болады.

Шешім (6) түрінде өрнектелеліп, (7) бағалауды қанағаттандырады. Бұл шешім шекаралық шарттардағы функциялардан үздіксіз тәуелді болғандықтан қойылған көпөлшемді эллиптикалық теңдеу үшін қойылған аралас есеп қисынды болады.

1.3 Аралас есеп шешімінің бар болуы және жалғыздығы

$D_\alpha$ облысында өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық (1.1) теңдеулерді қарастырайық.

Аралас есеп ретінде 1 есепті қарастырып, оның шешімінің бар екендігін көрсетейік.

**Теорема 2.** Егер $\tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0), \psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), l > \frac{3m}{2}$, онда 1-есептің жалғыз шешімі болады.

(1*) теңдеуі үшін келесі шарттармен шекаралық есептің шешімін құрайық

$$\vartheta|_{\Gamma_\alpha} = 0, \vartheta|_{s_\alpha} = 0,\ \vartheta_t|_{s_\alpha} = \nu(r,\theta) = \bar{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), k = \overline{1, k_n}, n = 0,1, \ldots, \quad (8)$$

мұндағы $\bar{\nu}_n^k(r) \in G, G - C([0,1]) \cap C^1([0,1])$ класындағы $\nu(r)$ функцияларының жиыны. $G$ жиыны $L_2\big((0,1)\big)$ кеңістігінің барлық жерінде тығыз болып табылады

Осылайша, біз нөлдік шешімі бар келесі Дирихле есебіне келеміз

$$Lu = 0, \qquad u\Big|_{S_0} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad u\Big|_{S_\alpha} = 0,$$

Демек, шешімнің жалғыздығы, яғни 2 теорема дәлелденді.

Екінші бөлімде өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есеп

2.1 Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қойылымы қойылады.

Айталық, $\Omega_{\alpha\beta}$ – $\mathrm{E}_{m+1}$ евклид кеңістігінде $\Gamma = \{(x,t): |x| = 1\}$ цилиндрімен, $t = \alpha > 0$ және $t = \beta < 0$ жазықтықтарымен шектелген цилиндрлік облыс болсын, мұндағы $|x|$ – векторының ұзындығы $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысының бөліктерін $\Omega_\alpha$ және $\Omega_\beta$ арқылы, ал $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – арқылы $t > 0$ және $t < 0$ жартылай кеңістігінде жатырған $\Gamma$ бетінің бөліктерін; $\Omega_{\alpha\beta}$ облысының жоғарғы табанын – $\sigma_\alpha$, ал төменгі табанын – $\sigma_\beta$ арқылы белгілейік.

Әрі қарай, айталық, $S - \Omega_\alpha$ және $\Omega_\beta$ облыстарының ортақ шекарасы және ол $E_m$ евклид кеңістігіндегі $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ жиыны болсын.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында келесі өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерді қарастырайық

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t)u, t > 0 \\ |t|^p \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u, t < 0, \end{cases} \tag{9}$$

мұндағы $p, q = const, p > 0, q \geq 0, , \Delta_x - x_1, \dots, x_m, m \geq 2$ айнымалылары бойынша Лаплас операторы.

Алдағы есептеулерде $x_1, \dots, x_m, t$ декарттық координаталардан сфералық координаталарға $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t,$ ауысу ыңғайлы болады мұндағы $r \geq 0,\ 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2,3, \dots, m-1,\ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Аралас есеп ретінде келесі есепті қарастырамыз.

**Есеп 2.** $(2_1)$ теңдеудің $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында $t \neq 0$ үшін $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$ класынан келесі шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек

$$L_1 u \equiv t^q \left( u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u \right) - u_t +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} d_i\,(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t)u = 0 \tag{$2_1$}$$

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta)\,,\ u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{10}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(r,\theta), \tag{11}$$

2.2 Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің қисындылығы, шешімінің құрылымы

Осы бөлімде $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында келесі өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеу қарастырылады

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t, t > 0 \\ |t|^p \Delta_x u + u_{tt}, t < 0. \end{cases} \tag{12}$$

**Есеп 2.1.** Сфералық координаталарда (12) теңдеу $\Omega_\alpha$ облысында келесі түрде жазылады

$$t^q\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)-u_t=0 \tag{13}$$

Онда теңдеудің шарттарын қанағаттандыратын $\Omega_\alpha$ облысында $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына тиісті болатын шешімін табу керек.

Есеп 2-нің ізделінді шешімі $\Omega_\alpha$ облысында $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына жататындықтан, 2.1 есептің шешімді келесі түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{14}$$

мұндағы, $\bar{u}_n^k(r,t)$ – анықталуы тиіс функциялар.

Осылайша, $\Omega_\beta$ облысында шектік шарттарды ескере отырып, келесі өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеуге аралас есепке келеміз:

$$|t|^p\Delta_x u+u_{tt}=0 \tag{15}$$

$$u\Big|_S=\tau(r,\theta),\quad u_t\Big|_S=\nu(r,\theta), u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta) \tag{16}$$

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{17}$$

**Теорема 3.** Егер (10), (11) шекаралық шарттарындағы берілген функциялар леммалар және жинақталу шарттарын қанағаттандырса, онда (13) теңдеуі үшін қойылған ($2_1$) аралас есептің $\Omega_\alpha$ облысында жататын жалғыз шешімі бар болады.

Бұл шешім (14) түріндегі жіктелу арқылы анықталады және Фурье–Бессель қатарлары (17) бойынша өрнектеледі, олар және олардың туындылары абсолютті және бірқалыпты жинақталады. Сондықтан, қойылған аралас есеп қисынды болып табылады.

2.3 Аралас есеп шешімінің бар болуы және жалғыздығы

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында (7) теңдеулерді және олар үшін аралас есеп ретінде есеп 2-ні қарастырып, оның шешімі бар екендігін көрсетелік.

**Теорема 4.** Егер $\varphi(r,\theta)\in W_2^p(S), \psi_1(t,\theta)\in W_2^p(\Gamma_\alpha), \psi_2(t,\theta)\in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $p>\frac{3m}{2}$, онда 2 есептің бірмәнді шешімі бар.

Алдымен, $\Omega_\alpha$ облысында (9) , (10) есебінің шешімі бар болатындығын көрсетейік. Сфералық координаталарда ($2_1$) теңдеуін қарастырамыз.

$\Omega_\alpha$ облысында 2-есептің ізделінді шешімін келесі түрде іздейміз

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{18}$$

мұндағы $\bar{u}_n^k(r,t)$ – анықталуға тиісті функциялар.

$$\begin{gathered}u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\\ \tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi+\right.\\ \left.+b_{s,n}\left(\exp\frac{\mu_{s,m}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\\ \nu_n^k(r)=\psi_{1nt}^k(0)-\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{2-m}{2}}a_{s,n}(0)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\\ \tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi+\right.\\ \left.+b_{s,n}\left(\exp\frac{\mu_{s,m}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\\ \nu_n^k(r)=\psi_{1nt}^k(0)-\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{2-m}{2}}a_{s,n}(0)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).\end{gathered} \tag{22}$$

Осылайша, $\Omega_\alpha$ облысында (11), (21), (22) шекаралық шарттарын ескере отырып, келесі түрдегі өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есепке келеміз

$$L_2 u \equiv |t|^\rho \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \qquad (23)$$

берілген шарттармен

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta),\ u_t\Big|_S = \nu(r,\theta)\,, u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta). \qquad (24)$$

Алдымен $\Omega_\alpha$ облысындағы (7), (8) есебін қарастырып, оның шешімінің жалғыздығын дәлелдейік. Бұл үшін келесі теңдеудің бірінші шекаралық есебінің шешімін құрамыз

$$L_1^* \vartheta \equiv t^q \Delta_x \vartheta - \vartheta_t - \sum_{i=1}^{m} d_i \vartheta_{x_i} + d\vartheta = 0, \qquad (2_1^*)$$

берілген шарттарымен

$$\vartheta\Big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad \vartheta\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad (25)$$

мұндағы, $d(x,t) = e - \sum_{i=1}^{m} d_i x_i\ \bar{\tau}_n^k(r) \in G,\ G–C([0,1]) \cap C^1\big((0,1)\big)$, класындағы $\tau(r)$ функцияларының жиыны. $G$ жиыны $L_2\big((0,1)\big)$ кеңістігінің барлық жерінде тығыз.

$$L_1 \vartheta_n^k = t^q \left( \vartheta_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \vartheta_n^k \right) - \vartheta_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (26)$$

Демек, $(2_1)$ параболалық теңдеулері үшін экстремум принципі бойынша $\overline{\Omega}_\alpha$ облысында $u \equiv 0$.

Бұдан шығады

$$u_t(r,\theta,0) = \nu(r,\theta) = 0, \forall (r,\theta) \in S.$$

Осылайша, (25), (26) біртекті аралас есебіне келдік, ал бұл есеп 1-теоремаға сәйкес тек тривиалды шешімге ие.

Үшінші бөлімде өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есеп

3.1 Эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің қойылымы қойылады.

Айталық, $\Omega_{\alpha\beta}$ – $E_{m+1}$ евклид кеңістігіндегі $(x_1, \dots, x_m, t)$ нүктелерінен тұратын цилиндрлік облыс және ол $\Gamma = \{(x,t);\ |x| = 1\}$ цилиндрімен және $t = \alpha > 0$ және $t = \beta < 0$ жазықтықтарымен шектелген болсын, мұндағы $|x|$ — $x = (x_1, \dots, x_m)$) векторының ұзындығы.

$\Omega_\alpha$ және $\Omega_\beta$ арқылы $\Omega_{\alpha\beta}$ облысының бөліктерін, $\Gamma_\alpha$ және $\Gamma_\beta$ арқылы $\Gamma$ бетінің сәйкесінше $t > 0$ және $t < 0$ жарты кеңістіктерінде жатқан бөліктерін, $\sigma_\alpha$ – жоғарғы, ал $\sigma_\beta$ – төменгі табанын белгілейміз.

$S$ – $E_m$ кеңістігінде $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ жиынымен ұсынылатын, $\Omega_\alpha$ және и $\Omega_\beta$ облыстарының ортақ шекарасы болсын.

$\Omega_{\alpha\beta}$ облысында келесі эллиптикалық-параболалық теңдеулерді қарастырайық

$$0 = \begin{cases} g(t)\Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i\,(x,t) u_{x_i} + e(x,t)u, t > 0, \\ p(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u, t < 0, \end{cases} \tag{27}$$

мұндағы $t > 0, g(0) = 0, g(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2\big((0,\alpha)\big)$ болғанда $g(t) > 0$,
$t < 0, p(0) = 0, p(t) \in C([\beta, 0])$болғанда $p(t) > 0$,
$\Delta_x - x_1, \dots, x_m$, айнымалылары бойынша Лаплас операторы, $m \geq 2$.

**Есеп 3.** (27) теңдеудің $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында $t \neq 0$ үшін $C\big(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\big) \cap C^1\big(\Omega_{\alpha\beta}\big) \cap C^2\big(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta\big)$ класынан келесі шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек:

$$L_1 u = g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t + \\ + \sum_{i=1}^m d_i(r,\theta,t)u_{x_i} + e(r,\theta,t)u = 0, \tag{$3_1$}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$$

$$g_1 = 1,\ g_j = \left(sin\theta_1 \dots sin\theta_{j-1}\right)^2, j > 1.$$

$\delta$ операторының спектрі

$$u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), u|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta), \tag{28}$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \tag{29}$$

3.2 Аралас есептің қисындылығы

Бұл бөлімшеде $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық-параболалық теңдеу қарастырылады.

$$0=\begin{cases} g(t)\Delta_x u-u_t, t>0 \\ p(t)\Delta_x u+u_{tt}, t<0 \end{cases} \tag{30}$$

Сфералық координаталарда $\Omega_\alpha$ облысында төмендегідей түрде болады

**Есеп 3.1.** $\Omega_\alpha$ облысында $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ классынан

$$g(t)\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)-u_t=0. \tag{31}$$

теңдеудің $(28),(29)$ шекаралық шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Есеп 3-тің $\Omega_\alpha$ облысындағы ізделінді шешімі $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына жататындықтан, оны келесі түрде іздеуге болады

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k\,(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{32}$$

$$\begin{gathered} T_{s,n}(t)=\left(exp\left(-\mu_{s,n}^2\int_0^t g(\xi)d\xi\right)\right)\times \\ \times\left(\int_t^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(exp\,\mu_{s,n}^2\int_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1\right)d\xi\right). \end{gathered} \tag{33}$$

мұндағы $\bar{u}_n^k(r,t)$ – анықталуға жататын функциялар.

$$\begin{gathered} \tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{2-m}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(\exp\left(\mu_{s,n}^2\int_0^\xi g(\xi_1)\xi_1\right)\right)d\xi+\right. \\ \left.+b_{s,n}\exp\left(\mu_{s,n}^2\int_0^\alpha g(\xi)d\xi\right)J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{s,n}r).\right. \end{gathered} \tag{34}$$

$$a_{s,n}(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{35}$$

$$b_{s,n} = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \qquad (36)$$

$$u_t(r,\theta,0) = \nu(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \nu_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (37)$$

Осылайша, $\Omega_\beta$ облысында (29), (34), (36) шекаралық шарттарды ескере отырып, келесі түрде берілген көпөлшемді өзгешеленген эллиптикалық теңдеулерге аралас есепке келеміз

$$g(t)\Delta_x u + u_{tt} = 0 \qquad (38)$$

келесі берілген шарттармен

$$u|_S = \tau(r,\theta), u|_S = \nu_2(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_2(t,\theta).$$

1.2 - бөлімшеде бұл есептің жалғыз шешімі бар екендігі дәлелденген (теорема 1).

**Теорема 5.** Егер (29) шекаралық шарттары орындалып және (33), (35), (34) коэффициенттер Фурье–Бессель жіктелуінің жинақталу шарттарын қанағаттандырса, онда (31) теңдеуі үшін қойылған ($3_1$) аралас есептің $\Omega_\alpha$ облысында $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ классына тиесілі жалғыз шешімі бар болады.

Сонымен қатар, ($3_1$) есеп, 1.2 бөлімде қарастырылған ($1_1$)–(2) есебіне келтірілетіндіктен, оның шешімі бар, жалғыз және берілгендерге үздіксіз тәуелді. Демек, ($3_1$)–(31) есебі қисынды.

3.3 Аралас есеп шешімінің бар болуы және жалғыздығы.

Бұл бөлімшеде $\Omega_{\alpha\beta}$ облысында ($3_1$) теңдеуін қарастырып, аралас есеп ретінде 3-есепті қарастырамыз және оның шешімінің болатындығын көрсетеміз.

**Теорема 6.** Егер $\varphi(r,\theta) \in W_2^p(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^2(\Gamma_\beta)$, $p > \frac{3m}{2}$, онда 3-есептің жалғыз шешімі бар.

Алдымен (27), (28) есебінің шешімінің бар екендігін көрсетеміз. (27) теңдеуін сфералық координаттарда $\Omega_\alpha$ облысында қарастырайық, яғни ($3_1$) теңдеуін аламыз.

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (39)$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(\exp \mu_{s,n}^2 \int_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1\right)d\xi + \right.$$

$$+b_{s,n}\, exp\left(\mu_{s,n}^2 \int_0^\alpha g(\xi)d\xi\right)\Bigg] J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n} r),$$

$$u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (40)$$

Осылайша, шектік шарттарды ескере отырып, $\Omega_\alpha$ облысында өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есепке келеміз

$$L_2u=p(t)\Delta_x u+u_{tt}+\sum_{l=1}^m a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0, (41)$$

келесі шарттармен

$$u\Big|_S=\tau(r,\theta),\ u_t\Big|_S=\nu(r,\theta),\ u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta) \qquad (42)$$

Бірінші бөлімде дәлелденген 2 теоремаға сәйкес, егер $\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $\psi_2(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l>\frac{3m}{2}$, онда есептерінің жалғыз шешімі болады.

Осы теореманы қолдана отырып, 3-есептің шешімі бар болады.

Демек, ($3_1$) параболалық теңдеудің экстремум принципіне сәйкес $\overline{\Omega}_\alpha$ облысында $u\equiv 0$.

Бұдан $u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta,0)=0, \forall(r,\theta)\in S$.

Осылайша, (41), (42) біртекті аралас есебіне келдік, ол 2 теоремаға сәйкес тривиалды шешімге ие. Демек, 3-есептің шешімінің жалғыздығы дәлелденді.

**Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:**

– Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есеп қойылды, оның шешімі сфералық координаталар жүйесінде қатар түрінде ізделініп, шешімінің бар екендігі қойылған аралас есептің қисынды болатыны дәлелденді;

– Өзгешеленген көпөлшемді эллиптикалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің жалғыз болатындығы дәлелденді;

– Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есеп қойылып, қисындылығы көрсетілді, шешімінің бар болатындығы дәлелденді және бұл есептің айқын шешімі алынды;

– Эллиптико-параболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас есептің шешімінің жалғыздығы дәлелденді;

– Өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің бар болатындығы дәлелденді және оның айқын шешімі алынды, қисындылығы көрсетілді;

– Өзгешеленген көпөлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге аралас есептің шешімінің жалғыздығы анықталды.