Толеуов Тимур Жаксылыкович

Бакли – Леверетт моделі негізінде екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің жуық шешімдері

8D05401 – Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның

АҢДАТПАСЫ

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен (бірінші бөлімде 4 бөлімше, екінші бөлімде 7 бөлімше), қорытындыдан, әдебиеттер тізімі және қосымшалардан тұрады.

Суреттер, кестелер мен әдебиеттер саны. Жұмыста 120 әдебиет, 2 кесте және 28 сурет пайдаланылды.

Формулалар, анықтамалар мен теоремаларды нөмірлеу екі саннан: бірінші сан бөлім нөмірін, екіншісі - бөлім ішіндегі формуланың, теореманың тиісті нөмірін білдіреді. Диссертациялық жұмыс 111 беттен тұрады.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Кеуекті ортадағы екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысын сипаттайтын математикалық модельдер қазіргі таңда мұнай-газ инженериясында, гидрогеологияда және энергия ресурстарын тиімді пайдалану есептерінде маңызды орын алады. Мұндай процестердің негізінде жатқан құбылыстардың бірі – бір фазаның екінші фазаны ығыстыруы, соның нәтижесінде соққы толқындарының, сирету толқындары аймақтарының және фронтальді қозғалыстың қалыптасуы болып табылады.

Бұл құбылыстарды сипаттайтын классикалық модельдердің бірі – Бакли – Леверетт теңдеуі. Аталған модель гиперболалық типтегі сақталу заңына жатады және оның шешімдері әдетте, үзікті сипатқа ие болады. Осыған байланысты шешімдердің әлсіз және энтропиялық мағынасын дұрыс анықтау, олардың жалғыздығы мен орнықтылығын қамтамасыз ету – теориялық және қолданбалы тұрғыдан өзекті мәселе болып табылады.

Соңғы жылдарда гиперболалық сақталу заңдарының энтропиялық шешімдерін таңдаудың ең сенімді тәсілдерінің бірі ретінде жойылатын тұтқырлық әдісі кеңінен қолданылуда. Бұл әдіс гиперболалық теңдеуді аз тұтқырлығы бар параболалық теңдеумен жуықтап, тұтқырлық параметрі нөлге ұмтылғанда алынатын шектік шешімді энтропиялық шешім ретінде таңдауға мүмкіндік береді.

Осы тұрғыдан алғанда, Бакли – Леверетт моделіне сәйкес Риман есебінің жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы алынатын жуық шешімдерін зерттеу, соққы қабатының құрылымын талдау және сандық модельдермен негіздеу – өзекті әрі маңызды ғылыми міндет болып табылады.

Зерттеу мақсаты: Бакли – Леверетт моделі негізінде екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің жойылатын тұтқырлық әдісімен алынатын жуық шешімдерін теориялық және қолданбалы тұрғыдан зерттеу.

Зерттеу міндеттері:

а) кеуекті ортадағы екіфазалық сүзгілеу процестерінің математикалық модельдерін талдау;

ә) бастапқы деректері бір секірісті бөлшек-тұрақты болатын Риман есебін енгізу, Риман есебін шешуде жалпы Коши есебінің жуық шешімдері арқылы жойылатын тұтқырлық әдісін қолдану;

б) гиперболалық типтегі сақталу заңдары үшін әлсіз және энтропиялық шешімдер теориясын жүйелеу, Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Коши және Риман есебінің энтропиялық шешімдерінің жалғыздығы мен орнықтылығын негіздеу;

в) жойылатын тұтқырлық әдісін қолдану арқылы тұтқыр жуықтаулардың энтропиялық шешімге жинақталуын дәлелдеу, Риман есебі үшін соққы қабатының traveling wave *(жүгірмелі толқын)* түріндегі құрылымын талдау;

г) кері есепті қарастыру және модельдердің үйлесімділігін талдау, екіфазалық сүзгілеудің қолданбалы қойылымын құру, алынған теориялық нәтижелерді сандық модельдермен растау;

ғ) авторлық бағдарламалық құрал көмегімен есептеу эксперименттерін жүргізу, алынған жуық шешімдердің жинақтылығын растау үшін есептің сандық шешімдерін құру және талдау.

Зерттеу нысаны: Кеуекті ортадағы араласпайтын екіфазалық флюидтер ағысын сипаттайтын математикалық модельдер.

Зерттеу пәні: Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман есебінің энтропиялық шешімдері, жойылатын тұтқырлық әдісімен алынатын жуық шешімдердің жинақтылығы мен жалғыздығын зерттеу.

Ғылыми жаңалығы. Диссертациялық жұмыста Бакли – Леверетт моделі үшін Риман есебінің жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы жуық шешімдері жүйелі түрде зерттелді. Тұтқыр жуықтаулардың энтропиялық шешімге жинақталуы дәлелденіп, соққы қабатының traveling wave типті құрылымы анықталды. Өтпелі аймақтың қалыңдығы тұтқырлық параметрімен бір тәртіпте өзгеретіні көрсетіліп, алынған нәтижелердің орнықтылығы негізделді. Сонымен қатар энтропиялық шешімдердің L^1-мағынадағы жалғыздығы мен орнықтылығы дәлелденіп, алынған жуық шешімдердің физикалық мағынасы бар екені көрсетілді.

Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер:

а) Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман есебінің энтропиялық шешімдерінің бар болуы, жалғыздығы және L^1-орнықтылығы;

ә) Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман есебінің жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы алынған жуық шешімдерінің энтропиялық шешімге жинақталуы және соққы қабатының жүгірмелі толқын типті құрылымы;

б) кеуекті ортадағы екіфазалық ағыстар үшін қысымға тәуелді тұтқырлықты ескеретін кеңейтілген математикалық моделі;

в) екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін екіфазалық сүзгілеудің тура және кері есептерін сандық шешу әдістері;

г) Бакли – Леверетт теңдеуі үшін Риман есебінің жуық шешімдерін есептеуге арналған сандық алгоритмдері және олардың жинақтылығы.

Зерттеу жұмыстарын жүргізу қажеттігінің негіздемесі. Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелердің нақтылығы мен негізделуі жер асты гидродинамикасы, функционалдық анализ, дифференциалдық теңдеулер теориясы және есептеу математикасының қазіргі заманғы әдістерін қолдану арқылы қамтамасыз етіледі. Қарастырылып отырған модельдер сызықты емес болғандықтан, олар үшін аналитикалық шешімдер тек шектеулі жағдайларда ғана алынуы мүмкін. Осыған байланысты жұмыста сандық әдістер кеңінен қолданылды.

Сандық есептеулерде алынған нәтижелердің дұрыстығы мен тұрақтылығы әртүрлі бастапқы және шектік шарттар үшін тексеріліп, шешімдердің физикалық мағынаға сәйкестігі талданды. Қолданылған алгоритмдер мен есептеу тәсілдері есептеу гидродинамикасында кеңінен қолданылатын заманауи әдістерге негізделген.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері халықаралық рецензияланатын ғылыми журналдарда жарияланған еңбектерде баяндалып, тәуелсіз сарапшылардың талқылауынан өткен. Бұл алынған нәтижелердің ғылыми тұрғыдан негізделгенін және олардың нақтылығын растайды.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Зерттеудің теориялық маңыздылығы гиперболалық жүйелер үшін Риман есебі жағдайында жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы алынған шешімдердің Коши есебінің энтропиялық шешіміне жинақталуын және оның жалғыздығын негіздеумен сипатталады. Бұл нәтижелер сызықты емес сақталу заңдары теориясын дамытуға үлес қосады.

Зерттеудің практикалық маңыздылығы алынған нәтижелерді кеуекті ортадағы екіфазалық сүзгілеу процестерін модельдеуге қолдану мүмкіндігімен анықталады. Ұсынылған тәсіл жер асты суларын қорғау, флюидтерді кеуекті орта арқылы тасымалдау және мұнай өнеркәсібінде мұнайды ығыстырып шығару процестерін сандық модельдеу арқылы өнімділікті алдын ала болжауға мүмкіндік береді.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс ҚР ҒЖБМ Ғылым комитетінің 2025-2027 жылдарға арналған ғылыми және (*немесе*) ғылыми-техникалық жобалар бойынша гранттық қаржыландыру бағдарламасының «Геофизикалық мониторингтің сенімді схемаларын әзірлеу мақсатында табиғи және антропогендік әсерлер нәтижесінде толқындық сейсмикалық өрістердегі кеуекті серпімді сұйықтық қаныққан орталардың механикалық қасиеттерінің өзгергіштігін болжамды сандық модельдеу» атты ғылыми жоба аясында орындалды (№ АР26196267).

Автордың жеке үлесі. Диссертациялық жұмыста келтірілген барлық ғылыми нәтижелер автордың жеке өзі немесе оның тікелей қатысуымен алынған. Ғылыми кеңесшілер мен бірлескен авторлар зерттеу тақырыбының қойылымын талқылауға және алынған нәтижелерді талдауға ғылыми қолдау көрсетті.

Жұмысты апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

– «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан. 10-11 қараша 2017 жыл;

– «Қолданбалы математика» ғылыми семинары, М.Улугбек атындағы Өзбекстан ұлттық университеті, Ташкент, Өзбекстан *(семинар жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор З.Х. Юлдашев)*. 15 қазан 2019 жыл;

– «Қолданбалы математика және ақпараттық технологиялар» халықаралық ғылыми конференциясы, М.Улугбек атындағы Өзбекстан ұлттық университеті, Ташкент, Өзбекстан. 14-15 қараша 2019 жыл;

– «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, математика кафедрасы, Ақтөбе, Қазақстан *(семинар жетекшісі - ф.-м.ғ.д., профессор Ж.А.Сартабанов)*.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 11 жұмыс жарияланды, оның ішінде Scopus мәліметтер базасында индекстелген рейтингтік ғылыми журналдарда 4 мақала, Scopus мәліметтер базасында индекстелетін шетелдік конференция материалдарында 2 мақала, халықаралық конференциялар жинақтары мен журналдарында - 5 мақала. Сонымен қатар, жұмыс аясында әзірленген «Сүзгілеу есептеріндегі екіфазалық сұйықтық ағыстары моделін тұтқырлықты жою әдісімен талдау» бағдарламалық қамсыздандыруы және оған Қазақстан Республикасы Әділет министрлігінің «Ұлттық зияткерлік меншік институты» берген №23424 авторлық куәлігі.

Диссертацияның қысқаша мазмұны. Диссертацияның бірінші бөлімінде кеуекті ортадағы араласпайтын екіфазалық флюидтер ағысының математикалық қойылымы және Бакли – Леверетт моделі қарастырылады. Кеуекті ортадағы көпфазалық флюидтер ағысы қазіргі қолданбалы математика мен инженерлік ғылымдардың маңызды бағыттарының бірі болып табылады. Мұндай есептер мұнай-газ кен орындарын игеру, гидрогеология, экологиялық процестерді модельдеу және фильтрациялық жүйелерді басқару сияқты көптеген практикалық салаларда кездеседі. Бұл есептердің күрделілігі флюидтердің араласпайтын табиғатына, фазааралық шекаралардың пайда болуына және шешімдердің үзілісті құрылымына байланысты.

Екіфазалық сүзгілеу процесінің физикалық негіздері. Қарастырылатын процесс – кеуекті ортада екі араласпайтын флюидтің, әдетте су мен мұнайдың, бірлескен қозғалысы. Флюидтер бір-бірінде ерімейді және олардың арасында айқын фазааралық шекара сақталады. Кеуекті орта флюидтер үшін қозғалыс арналары қызметін атқарады, ал ағыс процесі қысым градиентімен анықталады.

Инженерлік практикада келесі стандартты жорамалдар кеңінен қолданылады: *флюидтер сығылмайды; фазалар арасында масса алмасу болмайды; кеуекті орта деформацияланбайды; процесс изотермиялық; ауырлық күші мен капиллярлық әсер белгілі бір жағдайларда еленбеуі мүмкін*.

Осы жорамалдар сүзгілеу процесін салыстырмалы түрде қарапайым, бірақ физикалық тұрғыдан мағыналы математикалық модель арқылы сипаттауға мүмкіндік береді.

Массаның сақталу заңдары және Дарси заңы. Екіфазалық ағысты сипаттаудың негізінде әрбір фаза үшін массаның сақталу заңы жатады. Бірөлшемді жағдайда бұл заңдар келесі түрде жазылады:

$$\frac{\partial(\phi S_o)}{\partial t} + \frac{\partial u_o}{\partial x} = 0, \frac{\partial(\phi S_w)}{\partial t} + \frac{\partial u_w}{\partial x} = 0,$$

мұндағы ϕ – кеуектілік, S_o, S_w – мұнай мен суға қанықтылықтар, u_o, u_w – сәйкес фазалардың сүзгілеу жылдамдықтары.

Физикалық тұрғыдан қанықтылықтар келесі табиғи шектеумен байланысқан:

$$S_o + S_w = 1.$$

Фазалардың қозғалысы Дарси заңы арқылы сипатталады:

$$u_\alpha = -\frac{k k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial x}, \alpha \in \{o, w\},$$

мұндағы k – абсолютті өтімділік, $k_{r\alpha}$ – салыстырмалы өтімділік, μ_α – фазаның тұтқырлығы.

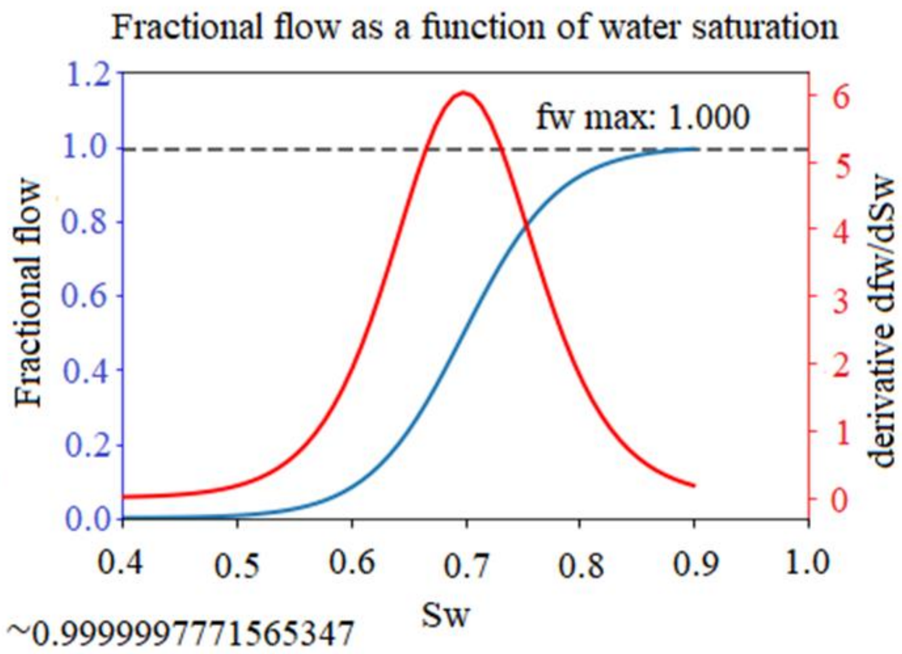
Фракциялық ағыс функциясы және Бакли – Леверетт теңдеуі. Жалпы сүзгілеу жылдамдығын

$$u = u_o + u_w$$

деп енгізіп, алгебралық түрлендірулер жүргізу арқылы су фазасының фракциялық ағыс функциясы анықталады:

$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w)}, \lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}.$$

Фракциялық ағыс функциясының сызықтық емес сипаты соққы толқынының пайда болу механизмімен тікелей байланысты. Бұл функцияның графигі мен оның туындысы төменде көрсетілген *(0.1-сурет)*.



Сурет 0.1 – Фракциялық ағыс функциясы және оның туындысы
(автордың бағдарламасы негізінде алынған)

Осылайша суға қанықтылық үшін негізгі эволюциялық теңдеу алынады:

$$\partial_t S_w + \partial_x f_w(S_w) = 0. \tag{0.1}$$

Бұл теңдеу Бакли – Леверетт теңдеуі деп аталады және гиперболалық типтегі сақталу заңы болып табылады.

Гиперболалық табиғат және шешімдердің үзілісті құрылымы. Бакли – Леверетт теңдеуінің басты ерекшелігі – оның шешімдері жалпы жағдайда үзілісті болады. Бастапқы шарт тегіс болса да, шектеулі уақытта қанықтылықтың секірмелі өзгерістері, яғни соққы толқындары пайда болуы мүмкін. Бұл физикалық тұрғыдан ығыстыру фронтының қалыптасуын сипаттайды. Осы факт классикалық мағынадағы шешімдердің жеткіліксіз екенін көрсетеді және әлсіз, кейіннен энтропиялық шешімдер теориясына көшуді талап етеді. Диссертацияның екінші бөлімінде әлсіз және энтропиялық шешімдер, Риман есебі және соққы толқындарының құрылымы қарастырылады.

Бакли – Леверетт теңдеуі гиперболалық типтегі сызықты емес сақталу заңы болғандықтан, оның классикалық *(үздіксіз)* шешімдері жалпы жағдайда ұзақ уақыт сақталмайды. Бастапқы дерек тегіс болғанның өзінде, шектеулі уақытта шешімнің градиенті шексіз өсіп, қанықтылықтың секірмелі өзгерістері – соққы толқындары пайда болады. Осыған байланысты теңдеуді шешудің әлсіз және энтропиялық тұжырымдамалары енгізіледі.

Әлсіз шешім ұғымы. Классикалық шешімнің жоқтығы теңдеуді үлестірімдер мағынасында қарастыруды талап етеді.

0.1-анықтама (әлсіз шешім). *Егер кез келген $\varphi \in C_0^\infty(R \times [0,T))$ сынақ функциясы үшін*

$$\int_0^T \int_R (S\ \partial_t\varphi + f(S)\ \partial_x\varphi)\ dx\ dt + \int_R S_0\ (x)\varphi(x,0)\ dx = 0$$

теңдігі орындалса, онда $S(x,t) \in L^\infty(R \times (0,T))$ функциясы Бакли – Леверетт теңдеуінің әлсіз шешімі деп аталады.

Бұл анықтама теңдеудің дифференциалдық формасын интегралдық формаға ауыстыру арқылы секірмелі шешімдерді де қарастыруға мүмкіндік береді.

Алайда әлсіз шешімдер бірмәнді емес: бір бастапқы шартқа бірнеше әлсіз шешім сәйкес келуі мүмкін. Сондықтан физикалық мағынасы бар шешімді таңдап алу үшін қосымша шарт қажет.

Энтропиялық шешім және Кружков шарттары. Физикалық тұрғыдан қабылданатын шешімдер уақыт бойынша энергияның немесе энтропияның өсуіне жол бермеуі тиіс. Осы идея энтропиялық шешім ұғымына алып келеді.

0.2-анықтама (энтропиялық шешім). *Кез келген тұрақты $k \in R$ үшін келесі энтропиялық теңсіздік орындалса (үлестірімдер мағынасында):*

$$\partial_t \mid S-k \mid + \partial_x (sgn\ (S-k)(f(S)-f(k))) \leq 0,$$

онда $S(x,t)$ әлсіз шешімі энтропиялық шешім деп аталады.

Бұл шарт Кружков энтропиялары деп аталады және соққы толқынының физикалық дұрыс бағытын таңдауды қамтамасыз етеді.

Энтропиялық шешімдер үшін келесі маңызды қасиеттер орындалады:

- *бар болуы;*
- *жалғыздығы;*
- L^1*-орнықтылығы.*

Бұл қасиеттер Бакли – Леверетт моделінің қолданбалы сенімділігін қамтамасыз етеді.

Риман есебі. Энтропиялық шешімдердің құрылымын түсіну үшін негізгі модельдік есеп – Риман есебі қарастырылады. Бастапқы шарт келесі түрде берілсін:

$$S(x,0) = \begin{cases} S_L, & x < 0, \\ S_R, & x > 0, \end{cases} S_L \neq S_R.$$

Бұл есеп физикалық тұрғыдан айдау аймағы мен өндіру аймағы арасындағы қанықтылықтың күрт өзгерісін сипаттайды.

$f(S)$ ағын функциясының қасиеттеріне байланысты шешім екі типте болуы мүмкін:

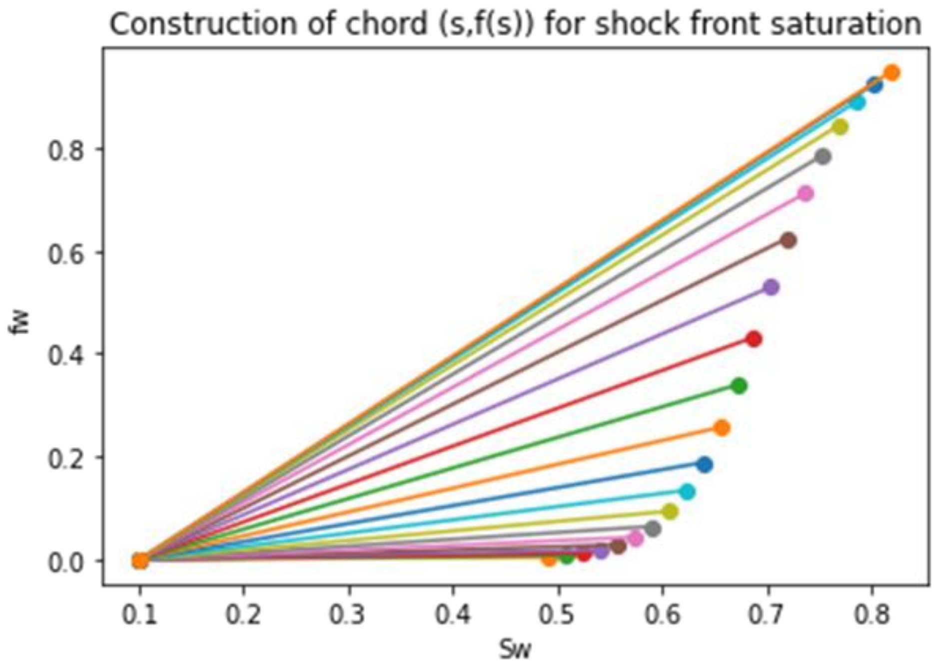
1. Сирету толқыны (*егер* $f'(S_L) < f'(S_R)$);
2. Соққы толқыны (*егер* $f'(S_L) > f'(S_R)$).

Бакли – Леверетт моделінде практикалық жағдайда көбінесе соққы толқындары пайда болады.

Ранкин – Гюгонио шарты. Секірмелі шешімдердің таралу жылдамдығы интегралдық баланс арқылы анықталады.

$$\sigma = \frac{f(S_R) - f(S_L)}{S_R - S_L}.$$

Бұл формула соққы фронтының жылдамдығын анықтайды және физикалық тұрғыдан массаның сақталуымен байланысты. Бұл шарттың геометриялық интерпретациясы $(S, f(S))$ жазықтығында хорда әдісі арқылы түсіндіріледі *(0.2-сурет)*.



Сурет 0.2 – Ранкин – Гюгонио шартының геометриялық интерпретациясы
(автордың бағдарламасы негізінде алынған)

Энтропиялық шарттың геометриялық интерпретациясы. Бакли – Леверетт моделінде энтропиялық шартты геометриялық түрде түсіндіруге болады. $(S, f(S))$ жазықтығында S_L және S_R нүктелерін қосатын хорда қисықтың астында жатуы тиіс *(0.1-сурет)*. Бұл интерпретация: соққының дұрыс бағыты мен қанықтылық фронтының тұрақтылығын анық көрсетеді.

Жойылатын тұтқырлық әдісі. Энтропиялық шешімді конструктивті түрде алу үшін жойылатын тұтқырлық әдісі қолданылады. Ол гиперболалық теңдеуге аз диффузия қосуға негізделген:

$$\partial_t S^\varepsilon + \partial_x f(S^\varepsilon) = \varepsilon\ \partial_{xx} S^\varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Бұл теңдеу параболалық типке жатады және классикалық мағынада жақсы қойылған. Негізгі идея:

- $\varepsilon > 0$ кезінде шешім тегіс;

- $\varepsilon \to 0$ кезінде шешім энтропиялық шешімге жинақталады.

Негізгі теоремалар

0.1-теорема (жойылатын тұтқырлық шегінің жинақталуы). *Егер* $f \in C^2([0,1])$, $S_0 \in L^\infty(R)$ *болса, онда кез келген* $T > 0$ *үшін*

$$S^{\varepsilon_n} \to S, L^1_{loc}(R \times (0,T))$$

болатындай $\varepsilon_n \to 0$ *ішкі тізбек табылады.*

Мұндағы S – Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімі.

0.2-теорема ($\mathbf{L^1}$-орнықтылық). *Егер келесі теңсіздік орындалса*

$$\| S(\cdot,t) - \tilde{S}(\cdot,t) \|_{L^1(R)} \leq \| S_0 - \tilde{S}_0 \|_{L^1(R)}, t \geq 0,$$

онда (0.1) – Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімі жалғыз болады.

Жойылатын тұтқырлық әдісінің терең талдауы және оның қолданбалы мағынасы. Гиперболалық типтегі Бакли – Леверетт теңдеуінің энтропиялық шешімдерін конструктивті түрде алу үшін жойылатын тұтқырлық әдісі қолданылады. Осы әдістің аналитикалық құрылымы, соққы қабатының микроқұрылымы және алынған нәтижелердің физикалық интерпретациясы егжей-тегжейлі қарастырылады.

Тұтқырланған теңдеу және оның қасиеттері. Гиперболалық теңдеуге аз диффузия қосу арқылы келесі параболалық теңдеу алынады:

$$\partial_t S^\varepsilon + \partial_x f(S^\varepsilon) = \varepsilon\, \partial_{xx} S^\varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Бұл теңдеу келесі қасиеттерге ие:

- параболалық типті – классикалық шешім бар және бірмәнді;
- максимум принципі орындалады:

$$\| S^\varepsilon \|_{L^\infty} \leq \| S_0 \|_{L^\infty};$$

- энергетикалық бағалаулар ε-ге тәуелсіз тұрақтылықты қамтамасыз етеді.

Осы қасиеттер $\varepsilon \to 0$ шегінде жинақталуды зерттеуге мүмкіндік береді.

Соққы қабатының traveling wave құрылымы. Риман есебі үшін тұтқырланған теңдеудің шешімі соққы маңында арнайы формада ізделеді:

$$S^\varepsilon(x,t) = U(\xi), \xi = \frac{x - \sigma t}{\varepsilon}.$$

Тұтқырланған есеп шешімі соққы маңында тегіс өтпелі қабат түзеді. Бұл қабаттың профилі ε параметріне тәуелді және ε азайған сайын жіңішкереді. Төмендегі 0.3-суретте соққы қабатының типтік профилі көрсетілген.

Бұл ауыстыру теңдеуді автономды екінші ретті дифференциалдық теңдеуге келтіреді:

$$\varepsilon(-\sigma U' + f'(U)U') = \varepsilon U''.$$

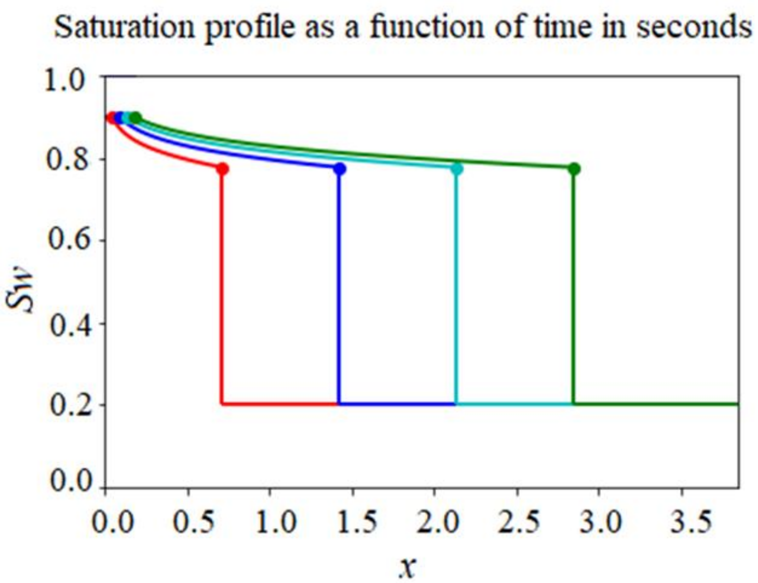
Қысқартудан кейін:

$$U'' = (f'(U) - \sigma)U'.$$

Шекаралық шарттар:

$$U(-\infty) = S_L, U(+\infty) = S_R.$$

Бұл теңдеу фазалық жазықтықта талданады. Егер $f''(S) \geq 0$ *(дөңес функция)* болса, онда монотонды traveling wave профилі бар болады.



Сурет 0.3 – t уақыты мен x координатасына тәуелді судың қанығу профилі *(автордың бағдарламасы негізінде алынған)*

Негізгі нәтиже. Соққы қабатының сипаттамалық қалыңдығы:

$$\delta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Бұл нәтиже физикалық тұрғыдан:

- ε азайған сайын соққы фронтының «*жіңішкеретінін*»,
- ал $\varepsilon \to 0$ кезінде секірмелі энтропиялық шешімге өтетінін көрсетеді.

Жинақталу механизмі. Жинақталуды дәлелдеу үш негізгі кезеңнен тұрады:

1. Аппроксимацияның шектелгендігі. L^∞ бағалар ε-ге тәуелсіз.

2. Компакттылық. Колмогоров – Рисс теоремалары арқылы L^1_{loc}-жинақталатын ішкі тізбек табылады.

3. Энтропиялық теңсіздікті шекте сақтау. Тұтқырлық мүшесі $\varepsilon \to 0$ кезінде нөлге ұмтылады, ал энтропиялық теңсіздік сақталады.

Нәтижесінде шек функция гиперболалық теңдеудің энтропиялық шешімі болады.

Қолданбалы сүзгілеу есебіне көшу. Бірөлшемді су айдау режимінде су қанықтылығы үшін теңдеу:

$$\partial_t S_w + u\,\partial_x f_w(S_w) = 0.$$

Фракциялық ағыс функциясы:

$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w)}, \lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}.$$

Соққы фронтының жылдамдығы:

$$v_f = \frac{u(f_w(S_{shock}) - f_w(S_i))}{S_{shock} - S_i}.$$

Бұл формула Ранкин – Гюгонио шартының қолданбалы интерпретациясы болып табылады.

Физикалық интерпретация. Жойылатын тұтқырлық әдісі тек математикалық құрал ғана емес, оның нақты физикалық мағынасы бар:

- тұтқырлық мүшесі соққыны тегістейді;
- өтпелі қабат нақты физикалық диффузиялық әсерлерді бейнелейді;
- $\varepsilon \to 0$ кезінде идеализацияланған гиперболалық модельге өтеміз.

Бұл тәсілдің инженерлік модельдеудегі маңыздылығы:

- фронттың таралу жылдамдығын анықтау;
- су жарылу уақытын болжау;
- параметрлердің әсерін талдау.

Сандық интерпретация. Сандық схемалар жойылатын тұтқырлық принципіне сәйкес құрылған жағдайда:

- локальді жинақталу қамтамасыз етіледі;
- жасанды осцилляциялар жойылады;
- өткір фронттар дұрыс дамиды.

Соққы фронтының орны:

$$x_f(t) = v_f t.$$

Бұл формула сандық модельдеу нәтижелерімен сәйкес келеді.

Теория мен қолданбаның синтезі. Осы жұмыста көрсетілгендей:

– жойылатын тұтқырлық әдісі арқылы энтропиялық шешім конструктивті түрде анықталды;

– traveling wave талдауы арқылы соққы қабатының құрылымы сипатталды;

– энтропиялық шешімдердің L^1-орнықтылығы арқылы модельдің сенімділігі қамтамасыз етілді;

– алынған нәтижелер сүзгілеу процестерінің инженерлік есептерінде тікелей қолданылды.

Диссертацияның бірінші бөлімінде теориялық негізді қалыптастыруға арналған кеуекті ортадағы екіфазалық ағыстың математикалық модельдерінің негізгі ұғымдары мен классикалық нәтижелері қарастырылады.

Диссертацияның екінші бөлімінде Бакли – Леверетт теңдеуі үшін әлсіз және энтропиялық шешімдер теориясы жүйелі түрде баяндалады. Риман есебі арқылы соққы толқындарының пайда болу механизмі түсіндіріліп, жойылатын тұтқырлық әдісі энтропиялық шешімді таңдаудың табиғи математикалық құралы екені көрсетіледі.