Толеуов Тимур Жаксылыкович

Приближенные решения задачи Римана для двухфазного течения несмешивающихся жидкостей на основе модели Бакли – Леверетта

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 8D05401 – Математика

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов (в первом разделе – 4 подраздела, во втором – 7 подразделов), заключения, списка использованных источников и приложений.

Количество рисунков, таблиц и источников. В работе использовано 120 источников, 2 таблицы и 28 рисунков.

Нумерация формул, определений и теорем состоит из двух чисел: первое число обозначает номер раздела, второе – соответствующий номер формулы или теоремы внутри раздела. Диссертационная работа состоит из 111 страниц.

Актуальность темы исследования. Математические модели, описывающие течение двухфазных несмешивающихся флюидов в пористой среде, в настоящее время занимают важное место в нефтегазовой инженерии, гидрогеологии и задачах эффективного использования энергетических ресурсов. Одним из явлений, лежащих в основе таких процессов, является вытеснение одной фазы другой, в результате чего формируются ударные волны, области разрежения и фронтальное движение.

Одной из классических моделей, описывающих эти явления, является уравнение Бакли – Леверетта. Данная модель относится к гиперболическим законам сохранения, и её решения, как правило, имеют разрывный характер. В связи с этим корректное определение слабых и энтропийных решений, обеспечение их единственности и устойчивости является актуальной задачей как с теоретической, так и с прикладной точки зрения.

В последние годы одним из наиболее надёжных методов выбора энтропийных решений гиперболических законов сохранения широко используется метод исчезающей вязкости. Данный метод позволяет аппроксимировать гиперболическое уравнение параболическим уравнением с малой вязкостью и выбирать предельное решение при стремлении параметра вязкости к нулю в качестве энтропийного решения.

С этой точки зрения исследование приближённых решений задачи Римана для модели Бакли – Леверетта, получаемых методом исчезающей вязкости, анализ структуры ударного слоя и их обоснование с помощью численных моделей является актуальной и важной научной задачей.

Цель исследования: Теоретическое и прикладное исследование приближённых решений задачи Римана для течения двухфазных несмешивающихся флюидов на основе модели Бакли – Леверетта, получаемых методом исчезающей вязкости.

Задачи исследования:

а) анализ математических моделей двухфазных фильтрационных процессов в пористой среде;

б) постановка задачи Римана с кусочно-постоянными начальными данными и применение метода исчезающей вязкости через приближённые решения общей задачи Коши;

в) систематизация теории слабых и энтропийных решений для гиперболических законов сохранения, обоснование единственности и устойчивости энтропийных решений задачи Коши и задачи Римана для уравнения Бакли – Леверетта;

г) доказательство сходимости вязкостных приближений к энтропийному решению методом исчезающей вязкости, анализ структуры ударного слоя задачи Римана в виде traveling wave *(бегущей волны)*;

д) рассмотрение обратной задачи и анализ согласованности моделей, построение прикладной постановки задачи двухфазной фильтрации, подтверждение полученных теоретических результатов численными моделями;

е) проведение вычислительных экспериментов с использованием авторского программного средства, построение и анализ численных решений для подтверждения сходимости приближённых решений.

Объект исследования: Математические модели, описывающие течение двухфазных несмешивающихся флюидов в пористой среде.

Предмет исследования: Энтропийные решения задачи Римана для уравнения Бакли – Леверетта, исследование сходимости и единственности приближённых решений, полученных методом исчезающей вязкости.

Научная новизна. В диссертационной работе систематически исследованы приближённые решения задачи Римана для модели Бакли – Леверетта, полученные методом исчезающей вязкости. Доказана сходимость вязкостных приближений к энтропийному решению, определена структура ударного слоя типа бегущей волны. Показано, что толщина переходной области изменяется в одном порядке с параметром вязкости, обоснована устойчивость полученных результатов. Также доказана единственность и устойчивость энтропийных решений в пространстве L^1, показано, что полученные приближённые решения имеют физический смысл.

Основные результаты, выносимые на защиту:

а) существование, единственность и L^1-устойчивость энтропийных решений задачи Римана для уравнения Бакли – Леверетта;

б) сходимость приближённых решений задачи Римана для уравнения Бакли – Леверетта, полученных методом исчезающей вязкости, к энтропийному решению, а также структура ударного слоя типа бегущей волны;

в) расширенная математическая модель двухфазных течений в пористой среде с учётом зависимости вязкости от давления;

г) численные методы решения прямых и обратных задач двухфазной фильтрации для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка;

д) численные алгоритмы для вычисления приближённых решений задачи Римана для уравнения Бакли – Леверетта и их сходимость.

Обоснование необходимости проведения исследования. Достоверность и обоснованность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечиваются применением современных методов подземной гидродинамики, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и вычислительной математики. Поскольку рассматриваемые модели являются нелинейными, аналитические решения для них могут быть получены лишь в ограниченных случаях. В связи с этим в работе широко используются численные методы.

Корректность и устойчивость результатов, полученных в ходе численных вычислений, проверены для различных начальных и граничных условий, а также проведён анализ соответствия решений их физическому смыслу. Применённые алгоритмы и вычислительные подходы основаны на современных методах, широко используемых в вычислительной гидродинамике.

Основные результаты диссертационной работы изложены в публикациях в международных рецензируемых научных журналах и прошли обсуждение независимыми экспертами. Это подтверждает научную обоснованность и достоверность полученных результатов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в развитии теории гиперболических законов сохранения, в частности, в обосновании метода исчезающей вязкости для задачи Римана, а также в анализе структуры решений модели Бакли – Леверетта. Полученные результаты расширяют существующие представления о поведении решений нелинейных уравнений переноса и вносят вклад в исследование энтропийных решений.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения полученных результатов при моделировании процессов фильтрации в пористых средах, в задачах нефтедобычи, гидрогеологии и экологии. Разработанные численные методы и программные средства могут быть использованы для прогнозирования динамики флюидов в пористых средах, оптимизации процессов добычи нефти и газа, а также для оценки воздействия на окружающую среду.

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами. Диссертационная работа выполнена в рамках научного проекта «Прогнозное численное моделирование изменчивости механических свойств пороупругих насыщенных жидкостью сред в волновых сейсмических полях, обусловленной природными и антропогенными воздействиями, с целью разработки надёжных схем геофизического мониторинга», реализуемого по программе грантового финансирования научных и (или) научно-технических проектов Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан на 2025–2027 годы (№ AP26196267).

Личный вклад автора. Все основные результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно или при его непосредственном участии. Постановка задач, проведение аналитических исследований, разработка численных алгоритмов и реализация программного обеспечения выполнены автором.

Апробация работы. Основные результаты работы были доложены и обсуждены на следующих мероприятиях:

– Международная научная конференция «Проблемы прикладной математики и информатики», Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан, 10-11 ноября 2017 г;

– Научный семинар «Прикладная математика», Национальный университет Узбекистана имени М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан (*руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор З.Х. Юлдашев*), 15 октября 2019 г;

– Международная научная конференция «Прикладная математика и информационные технологии», Национальный университет Узбекистана имени М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан, 14-15 ноября 2019 г;

– Научный семинар «Проблемы прикладной математики и информатики», Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, кафедра математики, Актобе, Казахстан (*руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Ж.А. Сартабанов*).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, в том числе 4 статьи в рейтинговых научных журналах, индексируемых в базе данных Scopus, 2 статьи в материалах зарубежных конференций, индексируемых в базе данных Scopus, а также 5 статьи в сборниках международных конференций и научных журналах. Кроме того, в рамках работы разработано программное обеспечение «Анализ модели течения двухфазной жидкости в задачах фильтрации методом исчезающей вязкости», на которое получено авторское свидетельство №23424, выданное Национальным институтом интеллектуальной собственности Министерства юстиции Республики Казахстан.

Краткое содержание диссертации. В первом разделе диссертации рассматриваются математическая постановка течения двухфазных несмешивающихся флюидов в пористой среде и модель Бакли – Леверетта. Течение многофазных флюидов в пористой среде является одним из важных направлений современной прикладной математики и инженерных наук. Подобные задачи встречаются во многих практических областях, таких как разработка нефтегазовых месторождений, гидрогеология, моделирование экологических процессов и управление фильтрационными системами. Сложность этих задач обусловлена несмешиваемостью флюидов, образованием межфазных границ и разрывным характером решений.

Физические основы процесса двухфазной фильтрации. Рассматриваемый процесс представляет собой совместное движение двух несмешивающихся флюидов, как правило, воды и нефти, в пористой среде. Флюиды не растворяются друг в друге, и между ними сохраняется чёткая межфазная граница. Пористая среда выполняет роль каналов движения для флюидов, а процесс течения определяется градиентом давления.

В инженерной практике широко используются следующие стандартные предположения: *флюиды несжимаемы; между фазами отсутствует массообмен; пористая среда не деформируется; процесс является изотермическим; влияние силы тяжести и капиллярных эффектов в ряде случаев может быть пренебрежимо малым*.

Данные предположения позволяют описать процесс фильтрации с помощью относительно простой, но физически содержательной математической модели.

Законы сохранения массы и закон Дарси. В основе описания двухфазного течения лежат законы сохранения массы для каждой фазы. В одномерном случае эти законы записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial(\phi S_o)}{\partial t} + \frac{\partial u_o}{\partial x} = 0, \frac{\partial(\phi S_w)}{\partial t} + \frac{\partial u_w}{\partial x} = 0,$$

где ϕ – пористость, S_o, S_w – насыщенности нефти и воды, u_o, u_w – скорости фильтрации соответствующих фаз.

С физической точки зрения насыщенности связаны следующим естественным ограничением:

$$S_o + S_w = 1.$$

Движение фаз описывается законом Дарси:

$$u_\alpha = -\frac{k k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial x}, \alpha \in \{o, w\},$$

где k – абсолютная проницаемость, $k_{r\alpha}$ – относительная проницаемость, μ_α – вязкость соответствующей фазы.

Функция дробного потока и уравнение Бакли – Леверетта. Введём суммарную скорость фильтрации в виде:

$$u = u_o + u_w$$

Путём алгебраических преобразований определяется функция дробного потока водной фазы:

$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w)}, \lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}.$$

Нелинейный характер функции дробного потока непосредственно связан с механизмом образования ударной волны. График данной функции и её производной приведён ниже *(рисунок 0.1)*.

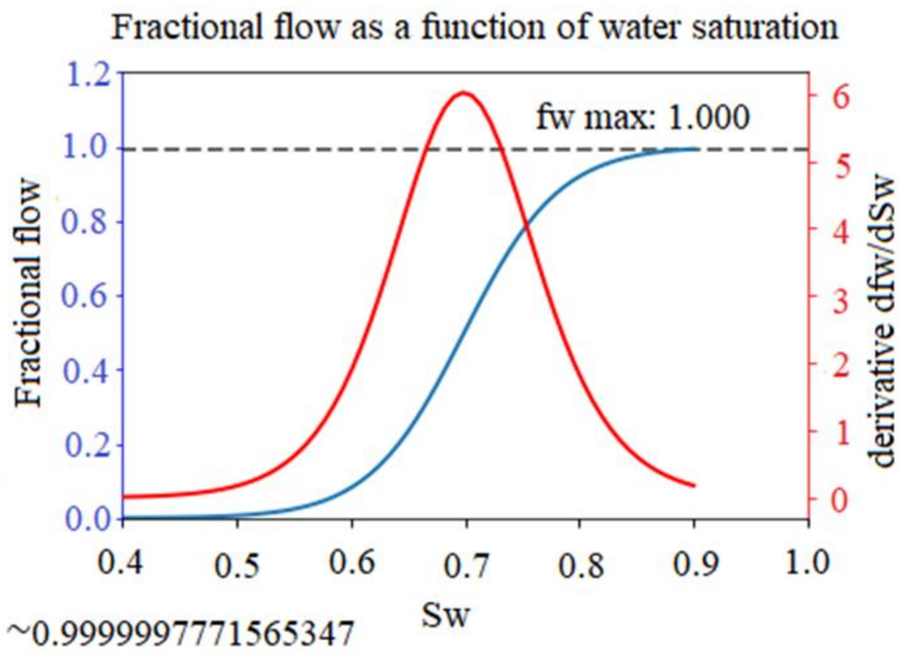

Рисунок 0.1 – Функция дробного потока и её производная
(получено на основе авторской программы)

Таким образом, для водонасыщенности получается основное эволюционное уравнение:

$$\partial_t S_w + \partial_x f_w(S_w) = 0. \tag{0.1}$$

Данное уравнение называется уравнением Бакли – Леверетта и представляет собой закон сохранения гиперболического типа.

Гиперболическая природа и разрывная структура решений. Основной особенностью уравнения Бакли – Леверетта является то, что его решения в общем случае имеют разрывный характер. Даже если начальное условие является гладким, за конечное время могут возникать скачкообразные изменения насыщенности, то есть ударные волны. Это с физической точки зрения описывает формирование фронта вытеснения. Данный факт показывает недостаточность решений в классическом смысле и требует перехода к теории слабых, а затем энтропийных решений. Во втором разделе диссертации рассматриваются слабые и энтропийные решения, задача Римана и структура ударных волн.

Поскольку уравнение Бакли – Леверетта является нелинейным законом сохранения гиперболического типа, его классические *(непрерывные)* решения в общем случае не сохраняются на длительном интервале времени. Даже при гладких начальных данных за конечное время градиент решения неограниченно возрастает, что приводит к возникновению скачков насыщенности – ударных волн. В связи с этим вводятся слабая и энтропийная постановки задачи.

Понятие слабого решения. Отсутствие классического решения требует рассматривать уравнение в смысле распределений.

Определение 0.1 (слабое решение). *Если для любой тестовой функции* $\varphi \in C_0^\infty(R \times [0,T))$ *выполняется равенство*

$$\int_0^T \int_R (S\ \partial_t\varphi + f(S)\ \partial_x\varphi)\ dx\ dt + \int_R S_0\ (x)\varphi(x,0)\ dx = 0,$$

то функция $S(x,t) \in L^\infty(R \times (0,T))$ *называется слабым решением уравнения Бакли – Леверетта.*

Данное определение позволяет перейти от дифференциальной формы уравнения к интегральной и тем самым рассматривать решения со скачками. Однако слабые решения не являются единственными: одному и тому же начальному условию могут соответствовать несколько слабых решений. Поэтому для выбора физически осмысленного решения требуется дополнительное условие.

Энтропийное решение и условия Кружкова. С физической точки зрения допустимые решения не должны приводить к увеличению энергии или энтропии со временем. Эта идея приводит к понятию энтропийного решения.

Определение 0.2 (энтропийное решение). *Пусть* $S(x,t)$ *является слабым решением. Оно называется энтропийным решением, если для любой постоянной* $k \in R$ *выполняется следующее энтропийное неравенство (в смысле распределений):*

$$\partial_t \mid S - k \mid + \partial_x(sgn\ (S-k)(f(S) - f(k))) \leq 0.$$

Данное условие называется энтропийным условием Кружкова и обеспечивает выбор физически корректного направления распространения ударной волны.

Для энтропийных решений выполняются следующие важные свойства:

- *существование;*
- *единственность;*
- *устойчивость в пространстве* L^1.

Эти свойства обеспечивают прикладную надёжность модели Бакли – Леверетта.

Задача Римана. Для понимания структуры энтропийных решений рассматривается базовая модельная задача – задача Римана. Начальное условие задаётся в следующем виде:

$$S(x,0) = \begin{cases} S_L, & x < 0, \\ S_R, & x > 0, \end{cases} S_L \neq S_R.$$

Данная задача с физической точки зрения описывает резкое изменение насыщенности между областью нагнетания и областью добычи.

В зависимости от свойств функции потока $f(S)$ решение может иметь два типа:

1. Волна разрежения (*если* $f'(S_L) < f'(S_R)$);

2. Ударная волна (*если* $f'(S_L) > f'(S_R)$).

В модели Бакли – Леверетта в практических ситуациях чаще всего возникают ударные волны.

Условие Ранкина – Гюгонио. Скорость распространения разрывных решений определяется из интегрального баланса:

$$\sigma = \frac{f(S_R) - f(S_L)}{S_R - S_L}.$$

Данная формула определяет скорость фронта ударной волны и с физической точки зрения связана с законом сохранения массы. Геометрическая интерпретация этого условия объясняется с помощью метода хорды на плоскости $(S, f(S))$ (*рисунок 0.2*).

Геометрическая интерпретация энтропийного условия. В модели Бакли – Леверетта энтропийное условие можно интерпретировать геометрически. На плоскости $(S, f(S))$ хорда, соединяющая точки S_L и S_R, должна лежать ниже графика функции (*рисунок 0.1*).

Данная интерпретация наглядно определяет корректное направление распространения ударной волны и устойчивость фронта насыщенности.

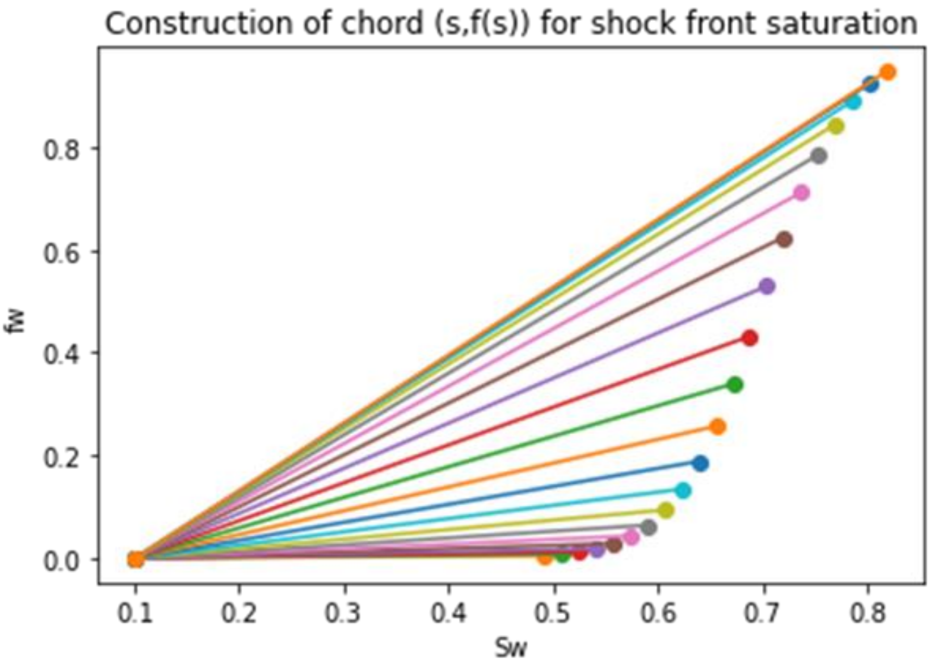

Рисунок 0.2 – Геометрическая интерпретация условия Ранкина – Гюгонио
(получено на основе авторской программы)

Метод исчезающей вязкости. Для конструктивного получения энтропийного решения используется метод исчезающей вязкости. Он основан на добавлении малой диффузии к гиперболическому уравнению:

$$\partial_t S^\varepsilon + \partial_x f(S^\varepsilon) = \varepsilon\ \partial_{xx} S^\varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Данное уравнение относится к параболическому типу и является корректно поставленным в классическом смысле. Основная идея заключается в следующем:

- при $\varepsilon > 0$ решение является гладким;
- при $\varepsilon \to 0$ решение сходится к энтропийному решению.

Основные теоремы

Теорема 0.1 (сходимость предела исчезающей вязкости). *Пусть* $f \in C^2([0,1])$, $S_0 \in L^\infty(R)$. *Тогда для любого* $T > 0$ *существует подпоследовательность* $\varepsilon_n \to 0$ *такая, что*

$$S^{\varepsilon_n} \to S, L^1_{loc}\big(R \times (0,T)\big),$$

где S – энтропийное решение уравнения Бакли – Леверетта.

Теорема 0.2 ($\mathbf{L^1}$-устойчивость). *Если выполняется неравенство*

$$\| S(\cdot,t) - \tilde{S}(\cdot,t) \|_{L^1(R)} \leq \| S_0 - \tilde{S}_0 \|_{L^1(R)}, t \geq 0,$$

то энтропийное решение уравнения Бакли – Леверетта (0.1) является единственным.

Углублённый анализ метода исчезающей вязкости и его прикладной смысл. Для конструктивного получения энтропийных решений уравнения Бакли – Леверетта гиперболического типа применяется метод исчезающей вязкости. Подробно рассматриваются аналитическая структура данного метода, микроструктура ударного слоя и физическая интерпретация полученных результатов.

Вязкостно-регуляризованное уравнение и его свойства. Путём добавления малой диффузии к гиперболическому уравнению получается следующее параболическое уравнение:

$$\partial_t S^\varepsilon + \partial_x f(S^\varepsilon) = \varepsilon\, \partial_{xx} S^\varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Данное уравнение обладает следующими свойствами:

- имеет параболический тип – существует классическое решение, и оно единственно;
- выполняется принцип максимума:

$$\| S^\varepsilon \|_{L^\infty} \leq \| S_0 \|_{L^\infty};$$

- энергетические оценки обеспечивают устойчивость, не зависящую от ε.

Эти свойства позволяют исследовать сходимость при $\varepsilon \to 0$.

Структура ударного слоя в виде бегущей волны (traveling wave). Для задачи Римана решение вязкостно-регуляризованного уравнения в окрестности разрыва ищется в специальной форме:

$$S^{\varepsilon}(x,t) = U(\xi), \xi = \frac{x - \sigma t}{\varepsilon}.$$

Решение вязкостной задачи вблизи разрыва формирует гладкий переходный слой. Профиль этого слоя зависит от параметра ε и с уменьшением ε становится всё более узким. Ниже на рисунке 0.3 представлен типичный профиль ударного слоя.

Данная замена приводит уравнение к автономному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\varepsilon(-\sigma U' + f'(U)U') = \varepsilon U''.$$

После сокращения:

$$U'' = (f'(U) - \sigma)U'.$$

Граничные условия:

$$U(-\infty) = S_L, U(+\infty) = S_R.$$

Данное уравнение анализируется на фазовой плоскости. Если $f''(S) \geq 0$ *(выпуклая функция)*, то существует монотонный профиль типа traveling wave.

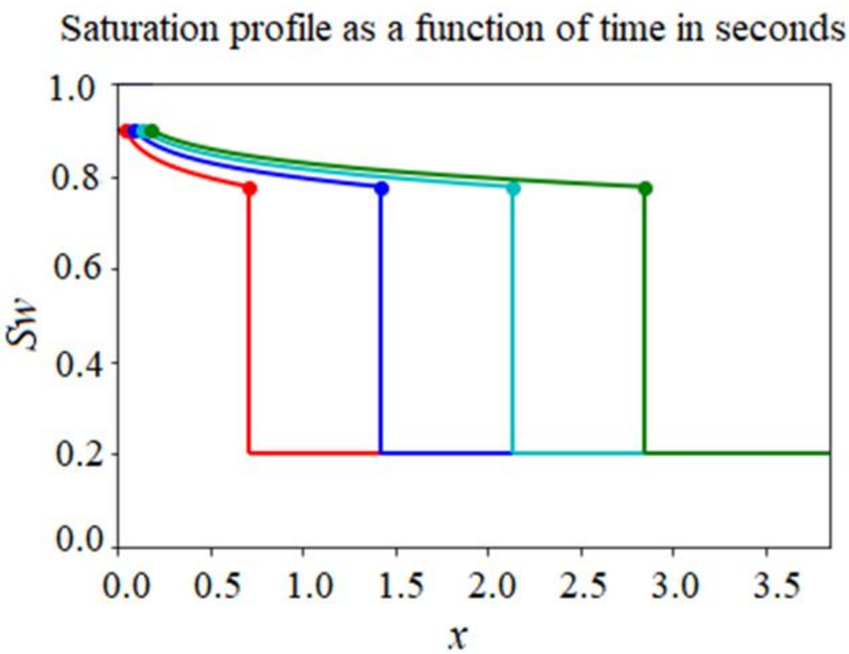

Рисунок 0.3 – Профиль водонасыщенности, зависящий от времени t и координаты x *(получено на основе авторской программы)*

Основной результат. Характерная толщина ударного слоя:

$$\delta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Этот результат с физической точки зрения означает:

- при уменьшении ε фронт ударной волны «*утончается*»,
- при $\varepsilon \to 0$ происходит переход к скачкообразному энтропийному решению.

Механизм сходимости. Доказательство сходимости состоит из трёх основных этапов:

1. Ограниченность аппроксимации. Оценки в пространстве L^∞ не зависят от ε.

2. Компактность. С помощью теорем Колмогорова – Рисса выделяется подпоследовательность, сходящаяся в пространстве L^1_{loc}.

3. Сохранение энтропийного неравенства при переходе к пределу. Вязкостный член стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, при этом энтропийное неравенство сохраняется.

В результате предельная функция является энтропийным решением гиперболического уравнения.

Переход к прикладной задаче фильтрации. В одномерном режиме нагнетания воды уравнение для водонасыщенности имеет вид:

$$\partial_t S_w + u\,\partial_x f_w(S_w) = 0.$$

Функция дробного потока:

$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w)}, \lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}.$$

Скорость фронта ударной волны:

$$v_f = \frac{u(f_w(S_{shock}) - f_w(S_i))}{S_{shock} - S_i}.$$

Данная формула является прикладной интерпретацией условия Ранкина – Гюгонио.

Физическая интерпретация. Метод исчезающей вязкости является не только математическим инструментом, но и имеет конкретный физический смысл:

- вязкостный член сглаживает разрыв;
- переходный слой отражает реальные физические диффузионные эффекты;
- при $\varepsilon \to 0$ происходит переход к идеализированной гиперболической модели.

Практическая значимость данного подхода в инженерном моделировании заключается в следующем:

- определение скорости распространения фронта;
- прогнозирование времени прорыва воды;
- анализ влияния параметров.

Численная интерпретация. Если численные схемы построены в соответствии с принципом исчезающей вязкости, то:

- обеспечивается локальная сходимость;
- устраняются искусственные осцилляции;
- корректно формируются резкие фронты.

Положение фронта ударной волны определяется формулой:

$$x_f(t) = v_f t.$$

Данная формула согласуется с результатами численного моделирования.

Синтез теории и приложений. Как показано в работе:

– метод исчезающей вязкости конструктивно определяет энтропийное решение;

– анализ типа traveling wave описывает структуру ударного слоя;

– L^1-устойчивость энтропийных решений обеспечивает надёжность модели;

– полученные результаты непосредственно применяются в инженерных задачах фильтрационных процессов.

В первом разделе диссертации рассматриваются основные понятия и классические результаты математических моделей двухфазного течения в пористой среде, направленные на формирование теоретической основы исследования.

Во втором разделе диссертации систематически излагается теория слабых и энтропийных решений для уравнения Бакли – Леверетта. С помощью задачи Римана объясняется механизм образования ударных волн и показывается, что метод исчезающей вязкости является естественным математическим инструментом выбора энтропийного решения.