Танирберген Айсулу Кобейсинкызы

Смешанные задачи для вырождающихся многомерных эллиптических и эллиптико-параболических уравнений

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 8D05401-Математика

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх разделов (в первом разделе – 3 подраздела, во втором – 3 подраздела, в третьем – 3 подраздела), заключения и списка использованной литературы.

Количество рисунков, таблиц и источников. В работе использовано 115 источников и 2 рисунка.

Актуальность темы исследования.

При математическом моделировании электромагнитных полей известно, что характер электромагнитного процесса зависит от свойств среды. Если среда находится в равновесном состоянии, то согласно принципу Гамильтона приходим к многомерным эллиптическим уравнениям..

Если же среда обладает высокой проводимостью, возникают многомерные параболические уравнения. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложной среде (например, при изменяющейся проводимости) приводит к исследованию многомерных эллиптико-параболических уравнений.

Методами теории аналитических функций комплексного переменного хорошо исследована корректность краевых задач для эллиптических уравнений на плоскости. Однако при числе независимых переменных больше двух возникают принципиальные трудности при изучении аналогичных задач. Из-за отсутствия полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою эффективность.

В то же время теория многомерных сферических функций хорошо изучена. В обобщённых пространствах смешанные задачи для многомерных гиперболических уравнений достаточно подробно рассмотрены; в ряде работ доказано существование единственного классического решения этих задач. Смешанные задачи для многомерных эллиптических уравнений также исследованы.

Однако смешанные задачи для вырожденных эллиптических и эллиптико-параболических уравнений до сих пор изучены недостаточно. Поэтому исследование смешанных задач для вырожденных эллиптических и эллиптико-параболических уравнений является актуальной научной проблемой.

Цель исследования: доказать единственность решений смешанных задач для вырождающихся многомерных эллиптических и эллиптико-параболических уравнений, а также выявить новые качественные и структурные свойства решений.

Задачи исследования:

а) доказать корректность смешанной задачи для вырождающегося многомерного эллиптического уравнения, установить существование решения и получить его явный аналитический вид; определить условия единственности решения;

б) доказать корректность смешанной задачи для класса вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений, обосновать существование решения и построить его явное аналитическое выражение; доказать единственность решения;

с) исследовать обобщённую смешанную задачу для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений, доказать корректность, существование и единственность решения, а также найти его явный вид.

Объект исследования: смешанные задачи для вырождающихся многомерных эллиптических и эллиптико-параболических уравнений в цилиндрической области.

Предмет исследования: задачи построения решений смешанных задач для вырождающихся многомерных эллиптических и эллиптико-параболических уравнений.

Научная новизна

1. Доказано существование решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений, получен его аналитический вид и доказана корректность;
2. Доказана единственность решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений;
3. Для одного класса эллиптико-параболических уравнений доказана корректность смешанной задачи, разрешимость и получено явное решение;
4. Доказана единственность решения смешанной задачи для одного класса эллиптико-параболических уравнений;
5. Доказано существование решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений, получено явное решение и доказана корректность;
6. Установлена единственность решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений.

Основные результаты, выносимые на защиту:

– корректность смешанной задачи для вырожденных многомерных эллиптических уравнений, существование её решения, его аналитическое представление и единственность решения;

– корректность смешанной задачи для одного класса вырожденных многомерных эллиптико-параболических уравнений, существование решения, его явное представление и единственность решения;

– корректность смешанной задачи для вырожденных многомерных эллиптико-параболических уравнений, существование решения, его явное представление и единственность решения.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит преимущественно теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании локальных и нелокальных краевых задач для вырожденных многомерных эллиптических и эллиптико-параболических уравнений.

Решения, полученные в работе, могут применяться при анализе численных моделей задач в газовой динамике, механике, биологии, физике, экономике и других областях.

Личный вклад автора. Все основные результаты, представленные в диссертационной работе, получены непосредственно автором. Постановка исследуемых смешанных задач, выбор методов их анализа, обоснование корректности, а также математические доказательства существования и единственности решений выполнены автором самостоятельно.

Автором получены аналитические решения задач с использованием методов разложения по сферическим функциям и функциям Бесселя.

Методы и подходы, представленные в диссертации, являются логическим продолжением и развитием результатов, опубликованных автором в научных статьях. Эти результаты прошли апробацию на научных конференциях различного уровня. В процессе выполнения работы автор провёл анализ научной литературы, а также полностью самостоятельно разработал теоретические положения, доказательства теорем и текст диссертации.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на следующих мероприятиях:

– IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова. Актобе, Казахстан (24–28 мая 2022 г.);

– Международный научный семинар «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры», посвящённый 70-летию доктора физико-математических наук, профессора, почётного академика НАН РК К.К. Кенжебаева. Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова. Актобе, Казахстан (20 января 2023 г.);

– Традиционная международная научная конференция в апреле. Институт математики и математического моделирования. Алматы, Казахстан (апрель 2024 г.);

– Научный семинар «Проблемы прикладной математики и информатики», Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, кафедра математики, Актобе, Казахстан (руководитель семинара д.ф.-м.н., профессор Ж.А. Сартабанов), (2024–2026 гг.);

– Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики, механики и информатики», посвящённая 70-летию д.ф.-м.н., профессора Ешкеева Айбата Рафхатовича. Караганда, Казахстан (3–4 июня 2026 г.).

Зарубежная стажировка проходила в период с 28.03 по 26.04.2022 в Республике Узбекистан, в Каракалпакском государственном университете имени Бердаха (г. Нукус).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ, из них 3 публикации в рейтинговых научных журналах, индексируемых в базе Scopus, 2 статьи в научных изданиях, входящих в перечень, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК, 1 статья в научном журнале, а также 3 статьи в материалах международных конференций и семинаров.

Краткое содержание диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх разделов, заключения и списка использованной литературы. Каждый раздел, в свою очередь, подразделяется на несколько подразделов.

В первом разделе диссертации рассматриваются смешанные задачи для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений.

1.1 Рассмотрим постановку смешанной задачи для многомерных эллиптических уравнений.

Пусть D_α — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t): |x| = 1\}$ и плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ -длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_αобласти D_α, обозначим через $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ соответственно.

Определение. Пусть $D \subset R^n$ — открытая область, а Γ — граница области D. В области D заданы функции $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$. Определим дифференциальный оператор второго порядка L следующим образом:

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u.$$

Если квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\ \xi_i\xi_j$$

определена в каждой точке области D для любого $\xi \in R^n$, то дифференциальный оператор L называется эллиптическим.

В области D_α рассмотрим взаимно-сопряженные вырождающихся многомерные эллиптические уравнения

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u + u_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \qquad (1)$$

$$L^{*}u \equiv g(t)\Delta_x v + v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i v_{x_i} + bv_t + cv = 0, \qquad (1*)$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$, $g(0) = 0$, $g(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2\big((0,\alpha)\big), \Delta_x$- оператор Лапласа $x_1, \dots, x_m$, $m \geq 2$, а $d(x,t) = \text{c} - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

Постановка смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений имеет следующий вид.

Задача 1. Найти решение уравнения

$$Lu \equiv g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_{rr} - \frac{\delta u}{r^2}\right) + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + \qquad (1_1)$$
$$+c(r,\theta,t)u = 0.$$

в области D_α из класса $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_0} = \tau(r,\theta), \quad u_t|_{S_0} = \nu(r,\theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \qquad (2)$$

при этом $\tau(1,\theta) = \psi(0,\theta)$, $\nu(1,\theta) = \psi_t(0,\theta)$.

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m - 1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

$\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ -система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2), \theta = \left(\theta_{1,} \dots, \theta_{m-1}\right)$. $W_2^l(S_0), l = 0, \dots, 1$ – пространства Соболева.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенством

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t), \tilde{c}_n^k(r,t), \hat{d}_n^k(r,t)$, $\rho\,_n^k, \bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, обозначит коэффициенты ряда (1.3), соответственно функций

$$a_i(r,\theta,t)\rho(\theta), \qquad a_i\frac{x_i}{r}\rho, \quad b(r,\theta,t)\rho, \quad c(r,\theta,t)\rho, \quad d(r,\theta,t)\rho, \quad \rho(\theta),$$

$i = 1,\dots,m,$ $\tau(r,\theta),$ $\nu(r,\theta),$ $\psi(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$, H- единичная сфера в E_m.

1.2 Рассмотрим корректность смешанной задачи для вырождающегося многомерного эллиптического уравнения.

В области D_α рассмотрим вырождающееся многомерное эллиптическое уравнение в случае, когда дополнительные члены в уравнении (1) равны нулю:

$$g(t)\Delta_x u + u_{tt} = 0, \qquad (4)$$

где Δ_x – оператор Лапласа.

Уравнение (4) в сферических координатах принимает следующий вид:

$$g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) + u_{tt} = 0,$$

Задача 1.1. В области D_α требуется найти решение эллиптического уравнения из класса $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$

$$g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) + u_{tt} = 0, \qquad (5)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{S_0} = \tau(r,\theta), u_t|_{S_0} = \nu(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \qquad (2)$$

где δ – дифференциальный оператор второго порядка,

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$$

$$g_1 = 1,\ g_j = \left(sin\theta_1 \dots sin\theta_{j-1}\right)^2, j > 1.$$

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_n^k(r) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\vartheta_{1n}^k(r,t) + \vartheta_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), (6)$$

$$k_n \le c_1 n^{m-2}, \left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, j = \overline{1, m-1}, l = 0,1,\dots. (7)$$

спектр оператора δ состоит из собственных значений $\lambda_n = n(n+m-2), n = 0,1,\ldots$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Теорема 1. Если для заданных функций в граничных условиях (2) выполняются условия, указанные в леммах 1 и 2, то смешанная задача 1.1 для уравнения (5) имеет в области D_α единственное решение, принадлежащее классу $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$.

Решение представляется в виде (6) и удовлетворяет оценке (7). Поскольку это решение непрерывно зависит от функций, заданных в граничных условиях, поставленная смешанная задача для многомерного эллиптического уравнения является корректной.

1.3 Существование и единственность решения смешанной задачи

В области D_α рассмотрим вырождающиеся многомерные эллиптические уравнения (1.1).

Рассмотрим задачу 1 в качестве смешанной задачи и покажем существование её решения.

Теорема 2. Если $\tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0), \psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), l > \frac{3m}{2}$, то задача 1 имеет единственное решение.

Построим решение краевой задачи для уравнения (1*) с данными

$$v|_{\Gamma_\alpha} = 0, v|_{s_\alpha} = 0, v_t|_{s_\alpha} = \nu(r,\theta) = \bar{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\ldots, \quad (8)$$

где $\bar{\nu}_n^k(r) \in G, G$ – множество функций $\nu(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1([0,1])$. Множество G плотно всюду в $L_2\big((0,1)\big)$.

Таким образом, мы приходим к задаче Дирихле:

$$Lu = 0, \qquad u\Big|_{S_0} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad u\Big|_{S_\alpha} = 0,$$

которое имеет нулевое решение.

Следовательно, единственность решения задачи установлена, Теорема 2 доказано.

Во втором разделе рассматривается смешанная задача для одного класса вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений.

2.1 Формулируется постановка смешанной задачи для одного класса эллиптико-параболических уравнений.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ - цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t): |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta > 0$, где $|x|$ - длина вектора $x = (x_1,\ldots,x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ - части поверхности Γ лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t > 0$; σ_α - верхнее и σ_β - нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S-общая часть граница областей Ω_α и Ω_β , представляющая множество$\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающиеся многомерные эллиптико-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t)u, t < 0 \\ |t|^q \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u, t < 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $p, q = const, p > 0, q \geq 0, \Delta_x$ - оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к *сферическим* $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi,\ \ 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2,3, \dots, m-1$, $\theta = \ \theta_1, \dots, \theta_{m-1}$.

В качестве смешанной задачи рассмотрим задачу.

Задача 2. Найти решение уравнения (2_1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta} \cup \Omega_\beta) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$L_1 u \equiv t^q \left(u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u \right) - u_t +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} d_i\,(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t)u = 0 \quad (2_1)$$

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta)\ ,\ u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \quad (10)$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(r,\theta), \quad (11)$$

при этом $\varphi(1,\theta) = \psi_1(\beta,\theta), \psi_1(0,\theta) = \psi_2(0,\theta)$.

2.2 Корректность смешанной задачи и структура решения для одного класса эллиптико-параболических уравнений.

В этом пункте в области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающегося многомерное эллиптико-параболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t, t > 0 \\ |t|^p \Delta_x u + u_{tt}, t < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Задача 2.1. В сферических координатах уравнение (12) в области Ω_α записывается в следующем виде

$$t^q\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)-u_t=0 \qquad (13)$$

Требуется найти решение, принадлежащее классу $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$, в области Ω_α, удовлетворяющее условиям уравнения.

Так как искомое решение задачи 2 в области Ω_α принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$ то решение задачи 2.1 можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (14)$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

Таким образом, учитывая краевые условия в области Ω_β приходим к смешанной задаче для вырождающегося многомерного эллиптического уравнения

$$|t|^p\Delta_x u-u_{tt}=0 \qquad (15)$$

с данными

$$u\Big|_S=\tau(r,\theta),\quad u_t\Big|_S=\nu(r,0), u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta) \qquad (16)$$

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\; r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad (17)$$

Теорема 3. Если заданные функции в граничных условиях (10), (11) удовлетворяют условиям лемм и условиям сходимости, то смешанная задача (2_1), поставленная для уравнения (13), имеет единственное решение в области Ω_α.

Это решение определяется разложением вида (14) и выражается через ряды Фурье–Бесселя (17), которые вместе со своими производными сходятся абсолютно и равномерно. Следовательно, поставленная смешанная задача является корректной.

2.3 Существование и единственность решения смешанной задачи

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим уравнения (7) и в качестве смешанной задачи, рассмотрим задачу 2 и покажем ее разрешимость.

Теорема 2. Если $\varphi(r,\theta)\in W_2^p(S),\psi_1(t,\theta)\in W_2^p(\Gamma_\alpha),\psi_2(t,\theta)\in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $p>\frac{3m}{2}$ и то задача 2 однозначно разрешима.

Сначала покажем существование решения задачи (9), (10) в области Ω_α. Рассмотрим уравнение (21) в сферических координатах.

Искомое решение задачи 2 в области Ω_α будем искать в следующем виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{18}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

$$\begin{gathered} u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\\ \tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi+\right.\\ \left.+b_{s,n}\left(\exp\frac{\mu_{s,m}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r). \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\\ \nu_n^k(r)=\psi_{1nt}^k(0)-\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{2-m}{2}}a_{s,n}(0)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r). \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\\ \tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi+\right.\\ \left.+b_{s,n}\left(\exp\frac{\mu_{s,m}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r). \end{gathered} \tag{21}$$

$$u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{22}$$

$$\nu_n^k(r) = \psi_{1nt}^k(0) - \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}} a_{s,n}(0) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

Таким образом, учитывая краевые условия (11), (21), (22) в области Ω_α, приходим к смешанной задаче для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений

$$L_2 u \equiv |t|^\rho \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0, \quad (23)$$

с данными

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u_t\Big|_S = \nu_2(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta). \quad (24)$$

Сначала рассмотрим задачу (7), (8) в области Ω_d и докажем единственность ее решения. Для этого построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^* v \equiv t^q \Delta_x v - v_t - \sum_{i=1}^{m} d_i v_{x_i} + dv = 0, \quad (2_1^*)$$

с данными

$$v\Big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad v\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad (25)$$

где $d(x,t) = e - \sum_{i=1}^{m} d_i x_i$, $\bar{\tau}_n^k(r) \in G$, G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$, множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$.

$$L_1 \vartheta_n^k = t^q \left(\vartheta_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \vartheta_n^k \right) - \vartheta_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \quad (26)$$

Стало быть, по принципу экстремума для параболических уравнений (2_1) ([23]) $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_\alpha$. Отсюда следует, что

$$u_t(r,\theta,0) = v(r,\theta) = 0, \forall (r,\theta) \in S.$$

Таким образом, мы пришли к однородной смешанной задачи (25), (26), которая в силу теоремы 1 имеет тривиальное решение.

В третьем разделе рассматривается смешанная задача для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений.

3.1 Формулируется постановка смешанной задачи для эллиптико-параболических уравнений.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ - цилиндрическая область евклидова пространства. E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$ ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t);\ |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ $u - t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ - части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, σ_α - верхнее, а σ_β - нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S - общая часть границ областей Ω_α и Ω_β представляющая множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающиеся эллиптико-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} g(t)\Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i\,(x,t)u_{x_i} + e(x,t)u, t > 0, \\ p(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u, t < 0, \end{cases} \tag{27}$$

где $\mathrm{g(t)} > 0$ при $t > 0, g(0) = 0, g(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2\big((0,\alpha)\big)$,
$\mathrm{p(t)} > 0$ при $\mathrm{t} < 0, \mathrm{p}(0) = 0, \mathrm{p(t)} \in \mathrm{C}([\beta, 0])$,
Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m, m \geq 2$.

Задача 3. Найти решение уравнения (27) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $\mathrm{t} \neq 0$ из класса $\mathrm{C}\big(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\big) \cap \mathrm{C}^1\big(\Omega_{\alpha\beta}\big) \cap \mathrm{C}^2\big(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta\big)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), u|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta), \tag{28}$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \tag{29}$$

$$L_1 u = g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t + \\ + \sum_{i=1}^m d_i(r,\theta,t)u_{x_i} + e(r,\theta,t)u = 0, \tag{3$_1$}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$$

$$g_1 = 1,\ g_j = \big(sin\theta_1 \ldots sin\theta_{j-1}\big)^2, j > 1.$$

3.2 Корректность смешанной задачи

В этом пункте в области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся многомерного эллиптико-параболического уравнения

$$0=\begin{cases} g(t)\Delta_x u-u_t, t>0 \\ p(t)\Delta_x u+u_{tt}, t<0 \end{cases} \tag{30}$$

В сферических координатах уравнения (30) в области Ω_α имеет следующий вид

Задача 3.1. В области Ω_α требуется найти решение уравнения из класса $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$

$$g(t)\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)-u_t=0. \tag{31}$$

удовлетворяющее граничным условиям (28), (29).

Так как искомое решение задачи 3 в области Ω_α принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{32}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

$$T_{s,n}(t)=\left(exp\left(-\mu_{s,n}^2\int\limits_0^t g(\xi)d\xi\right)\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_t^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(exp\,\mu_{s,n}^2\int\limits_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1\right)d\xi\right). \tag{33}$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{2-m}{2}}\left[\int\limits_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(\exp\left(\mu_{s,n}^2\int\limits_0^\xi g(\xi_1)\xi_1\right)\right)d\xi+\right.$$
$$\left.+b_{s,n}\exp\left(\mu_{s,n}^2\int\limits_0^\alpha g(\xi)d\xi\right)J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{s,n}r)\right). \tag{34}$$

$$a_{s,n}(t)=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\,f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{35}$$

$$b_{s,n}=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\,\tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{36}$$

$$u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{37}$$

Таким образом, учитывая краевые условия (29), (34), (36) в области Ω_α приходим к смешанной задаче для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений

$$g(t)\Delta_x u+u_{tt}=0 \tag{38}$$

с данными

$$u|_S=\tau(r,\theta),\quad u|_S=\upsilon_2(r,\theta),\quad u|_{\Gamma_\alpha}=\psi_2(t,\theta).$$

В п.1.2. доказано, что данная задача имеет единственное решение (теорема 1).

Теорема 5. Если граничные условия (29) выполняются и коэффициенты (33), (35), (34) удовлетворяют условиям сходимости разложения Фурье–Бесселя, то смешанная задача (31), поставленная для уравнения (31), имеет единственное решение в области Ω_α, принадлежащее классу $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Кроме того, поскольку задача (3_1) приводится к задаче (1_1)–(2), рассмотренной в п. 1.2, её решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных. Следовательно, задача (3_1)–(31) является корректной.

3.3 Разрешимость и единственность решения смешанной задачи.

В этом пункте в области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим уравнения (3_1) и в качестве смешанной задачи рассмотрим задачу 3 и покажем ее разрешимость.

Теорема 6. Если $\varphi(r,\theta)\in W_2^p(S),\psi_1(t,\theta)\in W_2^p(\Gamma_\alpha)\psi_2(t,\theta)\in W_2^2(\Gamma_\beta)$, $p>\frac{3m}{2}$ то задача 3 имеет единственное решение.

Сначала покажем разрешимость задачи (27), (28). Рассмотрим уравнение (27) в сферических координатах в области Ω_α, то есть получим уравнение (3_1).

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{39}$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(exp\,\mu_{s,n}^2\int_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1\right)d\xi+\right.$$

$$\left.+b_{s,n}\,exp\left(\mu_{s,n}^2\int_0^\alpha g(\xi)d\xi\right)\right]J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n}r),$$

$$u_t(r,\theta,0) = \nu(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \nu_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{40}$$

Таким образом, учитывая краевые условия в области Ω_α приходим к смешанной задаче для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений

$$L_2 u = p(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{l=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0, \tag{41}$$

с данными

$$u\big|_S = \tau(r,\theta),\ u_t\big|_S = \nu(r,\theta),\ u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta) \tag{42}$$

Согласно теореме 2, доказанной в первой главе, если $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in W_2^l(S), \psi_2 \in W_2^l(\Gamma_\beta), l > \frac{3m}{2}$, то задача (3.70), (3.71) имеет единственное решение.

Далее, используя эту теорему приходим к разрешимости задачи 3.

Стало быть, по принципу экстремума для параболического уравнения (3_1) $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_\alpha$.

Отсюда следует, что $u_t(r,\theta,0) = \nu(r,\theta,0) = 0, \forall (r,\theta) \in S$.

Таким образом, мы пришли к однородной смешанной задаче (41), (42), которая в силу теоремы 1 имеет тривиальное решение. Следовательно, единственность решения задачи 3 доказано.

Основные результаты диссертационной работы:

– поставлена смешанная задача для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений, её решение искалось в виде ряда в системе сферических координат, доказано существование решения и корректность поставленной смешанной задачи;

– доказана единственность решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений;

– для одного класса эллиптико-параболических уравнений поставлена смешанная задача, установлена её корректность, доказано существование решения и получено явное решение данной задачи;

– доказана единственность решения смешанной задачи для одного класса эллиптико-параболических уравнений;

– доказано существование решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений, получено её явное решение и установлена корректность;

– установлена единственность решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений.