

**«8D05401 - Математика» мамандығы бойынша
философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған
Толеуов Тимур Жаксылыковичтің «Бакли – Леверетт моделі негізінде
екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің жуық
шешімдері» тақырыбы бойынша ұсынылған диссертациялық жұмысына
отандық ғылыми кеңесшінің
ПІКІРІ**

Докторант Т.Ж.Толеуов ұсынған диссертациялық жұмыс кеуекті ортадағы екіфазалық араласпайтын флюидтердің қозғалысын сипаттайтын Бакли – Леверетт моделін зерттеуге арналған. Зерттеу тақырыбы қолданбалы математика, сызықты емес гиперболалық теңдеулер теориясы, фильтрация теориясы және мұнай-газ процестерін математикалық модельдеу бағыттары үшін өзекті болып табылады. Қазіргі таңда кеуекті ортадағы екіфазалық ағыстарды зерттеу тек теориялық тұрғыдан ғана емес, сонымен қатар мұнайды сумен ығыстыру, қабат қысымын ұстап тұру және флюидтердің таралу динамикасын болжау есептері үшін де маңызды.

Диссертациялық жұмыста қарастырылатын негізгі модель – қанығу функциясына қатысты Бакли – Леверетт типіндегі сызықты емес гиперболалық теңдеу. Бірөлшемді жағдайда ол

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

түрінде қарастырылады. Мұнда $S = S(x, t)$ – суландырушы фазаның қанығуы, ал $f(S)$ – фракциялық ағын функциясы. Аталған теңдеудің гиперболалық табиғаты шешімнің уақыт өтуімен үзілісті болуына, яғни соққы толқындарының пайда болуына алып келеді. Сондықтан классикалық шешім ұғымы жеткіліксіз болып, есепті әлсіз шешімдер класында қарастыру қажеттілігі туындайды.

Жұмыстың негізгі өзектілігі де осыдан туындайды: әлсіз шешімдер жалпы жағдайда бірімәнді болмайды, сондықтан физикалық мағынасы бар шешімді бөліп алу үшін қосымша энтропиялық шарттар енгізілуі тиіс. Осы диссертацияда дәл осы мәселе – Бакли – Леверетт моделі үшін Риман есебінің жуық шешімдерін құру және олардың энтропиялық тұрғыдан дұрыстығын негіздеу – жүйелі түрде зерттелген.

Докторант диссертациясында Риман есебін келесі бастапқы шарттармен қарастырады:

$$(x, 0) = \begin{cases} S_L, & x < 0, \\ S_R, & x > 0. \end{cases}$$

Мұндағы S_L және S_R – сол және оң жақтағы бастапқы қанығу мәндері. Осындай үзілісті бастапқы деректер үшін шешімнің құрылымы фракциялық ағын функциясының қасиеттеріне тәуелді түрде сиректену толқыны, соққы толқыны немесе олардың комбинациясы ретінде қалыптасатыны жұмыста жан-жақты көрсетілген.

Диссертациялық зерттеудің басты артықшылықтарының бірі – докторанттың әлсіз шешім ұғымын тек формалды түрде ғана емес, оны энтропиялық шешім ұғымымен тығыз байланыста қарастыруы. Атап айтқанда, жұмыста Кружков мағынасындағы энтропиялық шарттарды пайдалану арқылы физикалық дұрыс шешімді таңдау мәселесі талданған. Бұл жерде энтропиялық шешімнің қанағаттандыруы тиіс теңсіздігі мына түрде беріледі:

$$\frac{\partial |S - k|}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{sgn}(S - k) (f(S) - f(k)) \right) \leq 0, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Осы шарт әлсіз шешімдердің ішінен физикалық мағынасы бар бірімәнді шешімді бөліп алуға мүмкіндік береді. Докторант бұл ұғымның Бакли – Леверетт моделі үшін рөлін дұрыс ашып, оны нақты есептің шешім құрылымымен байланыстыра білген.

Жұмыстың теориялық мазмұнын күшейтетін маңызды бөлімдердің бірі – жойылатын тұтқырлық әдісін қолдану. Докторант гиперболалық теңдеудің келесі параболалық жуықтауын қарастырады:

$$\frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial f(S^\varepsilon)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S^\varepsilon}{\partial x^2}, \varepsilon > 0,$$

және $\varepsilon \rightarrow 0$ кезінде алынатын шек арқылы энтропиялық шешімнің пайда болуын түсіндіреді. Бұл тәсіл зерттеудің математикалық аппаратын тереңдетіп қана қоймай, диссертацияның қазіргі conservation laws теориясымен үйлесімді екенін көрсетеді. Басқаша айтқанда, жұмыста жойылатын тұтқырлық әдісі тек техникалық құрал ретінде емес, энтропиялық шешімді таңдаудың табиғи механизмі ретінде қарастырылған.

Диссертацияда Риман есебінің шешімін талдау барысында сиректену толқыны мен соққы толқынының қалыптасу шарттары нақты сипатталған. Егер шешім сиректену толқыны арқылы жүзеге асса, онда автомобильдік айнымалы $\xi = x/t$ енгізіліп, шешімнің құрылымы

$$f'(S) = \xi$$

қатынасы арқылы сипатталады. Ал соққы толқыны пайда болған жағдайда оның таралу жылдамдығы Ранкин – Гюгонио шарты бойынша анықталады:

$$\sigma = \frac{f(S_R) - f(S_L)}{S_R - S_L}.$$

Докторант осы формуланың физикалық және геометриялық мағынасын ашып көрсеткен. Сонымен қатар энтропиялық шешімнің дұрыстығын тексеруде соққы үшін Лакс типті шарттардың және Бакли – Леверетт моделіне тән геометриялық интерпретациялардың пайдаланылғаны жұмыстың сапасын арттыра түседі.

Диссертацияда фракциялық ағын функциясының нақты құрылымы да назардан тыс қалмаған. Екіфазалық фильтрация теориясында ол, жалпы алғанда,

$$f(S) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda_w(S) + \lambda_o(S)},$$

мұндағы $\lambda_w(S)$ және $\lambda_o(S)$ – сәйкесінше суландырушы және суландырмайтын фазалардың қозғалғыштық функциялары ретінде қарастырылады. Тұтқырлықтардың қатынасы мен салыстырмалы өтімділіктердің өзгеруі $f(S)$ функциясының қисығын өзгертеді, ал бұл өз кезегінде шешім құрылымына, соққы фронтының орналасуына және қанығудың таралу жылдамдығына әсер етеді. Докторант осы тәуелділіктерді сандық мысалдар арқылы дәлелдеп көрсеткен.

Жұмыста соққы фронтын анықтауда Велге әдісі орынды қолданылған. Бұл әдіс бойынша фракциялық ағын қисығына жанама жүргізу арқылы соққыға сәйкес келетін қанығу анықталады. Тиісті шарт

$$f'(S_f) = \frac{f(S_f) - f(S_i)}{S_f - S_i}$$

түрінде жазылады, мұнда S_i – бастапқы қанығу, S_f – фронттағы қанығу мәні. Диссертацияда осы формуланың сандық алгоритмге енгізілуі және нақты параметрлер үшін қолданылуы жан-жақты көрсетілген. Бұл жерде докторант теориялық нәтижені есептеу тәжірибесіне дұрыс көшіре алған.

Зерттеудің маңызды нәтижелерінің бірі – Python бағдарламалау тілі негізінде Риман есебінің жуық шешімдерін есептейтін алгоритмдердің жасалуы. Докторант қанығу профилінің эволюциясын, сиректену аймақтарын, соққы фронтының қозғалысын және фракциялық ағын функциясының өзгерісіне байланысты шешімнің сапалық түрленуін графикалық түрде көрсеткен. Әсіресе суландырушы және суландырмайтын фазалардың тұтқырлық коэффициенттері өзгерген жағдайда алынған нәтижелердің салыстырмалы талдауы жұмыстың қолданбалы маңызын күшейтеді.

Диссертациядан докторанттың тек математикалық аппаратты меңгеріп қана қоймай, сонымен бірге оның физикалық интерпретациясын да жақсы түсінетіні байқалады. Ол сызықты емес теңдеулер теориясы, әлсіз шешім, энтропиялық шешім, жойылатын тұтқырлық әдісі, Риман есебі, сиректену толқыны, соққы толқыны, Ранкин – Гюгонио шарты және сандық алгоритм ұғымдарын өзара байланыстырып, біртұтас ғылыми зерттеу деңгейіне көтере алған.

Диссертациялық жұмыстың ғылыми жаңалығы төмендегідей нәтижелерден көрінеді:

- диссертацияда Бакли – Леверетт моделі үшін Риман есебінің жуық шешімдерін құрудың математикалық негіздері жүйеленген;
- энтропиялық шешімді бөліп алу үшін Кружков шарты мен жойылатын тұтқырлық әдісінің байланысы нақты есеп аясында негізделген;

•соққы фронтын анықтау үшін Велге әдісіне сүйенген тиімді сандық тәсілдер жүзеге асырылған; есеп параметрлерінің өзгеруіне байланысты шешім құрылымының сапалық ерекшеліктері көрсетілген.

Жұмыстың теориялық маңызы – сызықты емес гиперболалық теңдеулер теориясындағы энтропиялық шешімдер аппаратын кеуекті ортадағы екіфазалық ағыс моделіне қолдануында. Практикалық маңызы – алынған нәтижелердің мұнайды сумен ығыстыру процесін, қанығудың таралуын және фильтрациялық ағыстардың динамикасын сапалы болжауға мүмкіндік беруінде.

Докторант Т.Ж.Толлеуов зерттеу барысында өзін дербес ғылыми ізденіс жүргізе алатын, математикалық модельдерді құрастырып, талдай білетін, сандық алгоритмдерді іске асыратын және алынған нәтижелерді ғылыми тұрғыдан сауатты тұжырымдай алатын зерттеуші ретінде көрсетті. Ол тақырып бойынша негізгі әдебиеттерді терең меңгерген, зерттеу мақсаты мен міндеттерін дұрыс қоя білген және оларға сәйкес ғылыми нәтижелер алған.

Жұмыс құрылымы жағынан бірізді, мазмұны жағынан толық, баяндау стилі ғылыми талаптарға сай. Нәтижелер жеткілікті дәрежеде негізделген, олардың дұрыстығы теориялық тұжырымдармен және сандық эксперименттермен расталған. Диссертация аяқталған дербес ғылыми еңбек ретінде бағалануға лайық.

Қорыта келгенде, Т.Ж.Толлеуов дайындаған «Бакли – Леверетт моделі негізінде екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің жуық шешімдері» тақырыбындағы диссертациялық жұмыс «8D05401 - Математика» білім беру бағдарламасы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін қойылатын талаптарға толық сәйкес келеді деп есептеймін.

Толлеуов Тимур Жаксылыковичтің «Бакли – Леверетт моделі негізінде екіфазалық араласпайтын флюидтер ағысы үшін Риман есебінің жуық шешімдері» тақырыбындағы докторлық диссертациясын «8D05401 - Математика» білім беру бағдарламасы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алуға диссертациялық кенеске қорғауға ұсынуға лайықты деп есептеймін.

Ғылыми кеңесші:
PhD, профессор

Қазақстан-Британ техникалық университеті



Ж.Д. Байшемиров